Илија Јанев
Скопје

ДАЛИ РАЗМИСЛУВАТЕ МАТЕМАТИЧКИ?

Секако, ќе речат некои од вас, ние сме математичари, а математичкото резонирање е нашата јака страна. А зарем има и друго, "обично", а не "математичко" размислување, ќе речат други. И во што е разликата меѓу нив?

Па добро, да се сложиме дека сте во право и да се провериме на еден конкретен пример. Во вашето омилено математичко списание Нумерус, број XVI-3 од 1991 година, на страницата 124 (Шарена страна) се дадени неколку "Необични равенства":

а) $16\cdot4=1\cdot64$	б) $1\cdot644=166\cdot4$	в) $2\cdot819=9\cdot182$
$19\cdot5=1\cdot95$	$1\cdot995=199\cdot5$	$3\cdot728=8\cdot273$
$26\cdot5=2\cdot65$	$2\cdot665=266\cdot5$	$4\cdot217=7\cdot124$
$49\cdot8=4\cdot98$	$4\cdot847=484\cdot7$	$4\cdot427=7\cdot244$
	$4\cdot998=499\cdot8$	$5\cdot546=6\cdot455$
	$6\cdot545=654\cdot5$	$7\cdot364=4\cdot637$

Ги видовте ли? И дали само ги "прочитавте"? И ... ништо повеќе? Е, ако е така, тогаш вие и не размислувате. Оној, пак, што размислува "обично" ќе ги провери равенствата, ќе се убеди во нивната точност и - на крајот можеби и ќе се зачуди на една ваква законитост. Но - само толку и - ништо поовеќе. Ако размислувате "математички", не би се задржале само на тоа. Кај вас би се пробудила математичка љубопитност. Веднаш ќе се запрашате: "Како е дојдено до овие необични равенства? Дали покрај наведените има и други и ако има, кои се тие?"

Поставувањето на вакви и слични прашања е веќе математички начин на размислување. И не само математички, тоа е веќе творечки начин на размислување. А, *ќе бидете* *докрај математичар, ако пробате да дадете одговор на прашањата што сами си ги поставивте.* Тоа е доволно да почнете со едно мало откривање, т.е. да го направите својот прв чекор кон творењето. Храбро! Само напред!

Но, ако не оди, немојте веднаш да се разочарате. За почеток ќе се обидеме заеднички. *Прв чекор е: точно да ја формулираме задачата,* т.е. да ја искажеме задачата на јазикот на алгебрата. Ако добро размисливте, ќе заклучите дека равенствата под а) можеме да ги запишеме со една равенка

(1) $$\overline{xy}\cdot z = x\cdot\overline{yz},$$

каде што $\overline{xy}$ и $\overline{yz}$ се ознаки за двоцифрени броеви ($\overline{xy} = 10x+y$, $\overline{yz} = 10y+z$), а x, y, z се цифри и, притоа, $x \neq 0$ и $z \neq 0$ (Зошто?).

Значи, равенката (1) содржи три променливи, три непознати ознаки за цифри, при што:

(*) $$x, z, \in\{1, 2, 3, \ldots, 9\}, \qquad y\in\{0, 1, 2, \ldots, 9\}.$$

Очигледно, за $x = y = z$, равенката (1) е задоволена, па на тој начин ги добиваме решенијата:

$$\begin{gathered} 11\cdot 1 = 1\cdot 11 \\ 22\cdot 2 = 2\cdot 22 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 99\cdot 9 = 9\cdot 99 \end{gathered}$$

Ваквите очигледни решенија во математиката ги викаме **тривијални**, нивното одредување не е од посебен интерес - тие се очигледни, "површни". Затоа, покрај условот $x\cdot z \neq 0$, ќе претпоставиме дека $x \neq y$. Со тоа се извршени сите "подготовки", па можеме *да минеме на решавање на поставената задача,* т.е. на одредување на непознатите x, y, z.

Равенката (1) ја запишуваме во видот:

$$(10x+y)\cdot z = x\cdot(10y+z)$$

или

(2) $$10x(y-z) = z(y-x)$$

Досега одеше лесно, зар не? Но, веќе равенката (2) крие една "замка" - деливоста. Нејзината лева страна е делива со 10, па значи и десната страна ќе биде делива со 10. Но $10 = 2\cdot 5$, па заклучуваме вака: Ако производот $z(y-x)$ е делив со 10 тогаш:

$$\text{I)}\ z = 5, \quad y-x\in\{2,4,6,8\}.$$
$$\text{II)}\ y-x = 5, \quad z\in\{2,4,6,8\}.$$

Според тоа, ќе треба да разгледаме вкупно осум можности. На тој начин равенката (2), којашто содржи три непознати, се "распаѓа" на осум равенки со една непозната. Нив можеме лесно да ги решиме, имајќи ги предвид ограничувањата (*).

Најтешкиот и најсложениот дел од работата е завршен. Ни преостана уште да решиме осум едноставни равенки. Оправдано е што возбудата е помешана со радост, но и олеснување, бидејќи веќе се назира "крајот" на нашето мало истражувачко дело.

Па да почнеме со решавањето на тие осум равенки.

1) Ако $z = 5$, $y-x = 2$, т.е. $y = x+2$, тогаш равенката (2) го добива видот $10x(y-5) = 5\cdot 2$, $x(x+2-5) = 1$, т.е.

$$x(x-3) = 1.$$

Очигледно, ова равенка не е задоволена за ниедна вредност на $x\in\{1,2,3,...,9\}$. Изгледа, прво па – немавме "среќа". Но, ни останаа уште седум равенки; одиме храбро понатаму!

2) Ако $z = 5$, $y-x = 4$, т.е. $y = x+4$, тогаш добиваме

$$10x(x+4-5) = 5\cdot 4 \quad \text{т.е.} \quad x(x-1) = 2.$$

Оваа равенка е задоволена само за $x = 2$; тогаш $y = 6$, па го добиваме равенството $26\cdot 5 = 2\cdot 65$. Значи, добиваме едно од посочените равенства. Да бидеме искрени и без лажна скромност, можеме да речеме дека сме успеале. Овој успех ни го полни срцето со чувство на топлина. Ова ни дава полет, ни влева сигурност, веќе сме на крилјата на првиот наш позначаен успех. Но, доста со славопојките, да си ја завршиме работата докрај.

3) Ако $z = 5$, $y-x = 6$, т.е. $y = x+6$, тогаш равенката:

$$10x(x+6-5) = 5\cdot 6, \text{ т.е. } x(x+1) = 3.$$

нема решение во множеството $\{1,2,3,\ldots,9\}$.

4) Ако $z = 5$, $y-x = 8$, т.е. $y = x+8$, тогаш равенката

$$10x(x+8-5) = 5\cdot 8, \text{ т.е. } x(x+3) = 4$$

има единствено решение - бројот 1. Тогаш $y = 9$, па го добиваме и второто решение, односно равенството $19\cdot 5 = 1\cdot 95$.

Тука ќе го прекинеме заедничкото патување. Понатаму можете и сами, бидејќи патот е веќе трасиран. Ќе ви помогнеме само толку, што ќе ви кажеме дека ќе добиете уште две решенија и тоа во случаите за $y-x = 5$ $(z = 4)$ и $y-x = 5$ $(z = 8)$.

Со тоа одговоривме на поставените прашања. Видовме како се добиваат овие равенства и се убедивме дека други такви равенства не постојат.

Во минатиот број ја решивме равенката

$$\overline{xy}\cdot z = x\,\overline{yz}, \tag{1}$$

т.е. равенката

$$10x(y-z) = z(y-x). \tag{2}$$

Забележавте дека решавањето на оваа едноставна равенка не е баш едноставно.. (Во математиката ваквите равенки се викаат **Диофантови равенки;** тоа се равенки со две или повеќе непознати, чиишто решенија ги бараме во множеството $\mathbb{Z}$ на целите броеви). Дали може полесно и побрзо да се реши ќе се запрашате по вложениот труд. Секако, не ви е жал за трудот, но желбата за побрзо и поелегантно решение не ве напушта.

А компјутерот? Зар да го заборавиме ова мало чудо на техниката, кое денес толку му помага на човекот?! Нема дејност во која тој не си го најде своето место и се повеќе ја зацврстува својата позиција, а најмногу во применетата математика. Оваа задача е "создадена" за решавање со компјутер, со домашен сметач. На тој начин уште еднаш ќе го потврдиме добиениот резултат.

За оние што навлегле во тајните на сметачите и владеат со прогртамскиот јазик BASIC им ја предлгаме следнава програма.

```
LIST
10 REM --zadaca-- X*YZ=XY*Z
20 CLS
30 LPRINT "RESENIJA" "PRINT"
```

```
 40 FOR X=1 TO 9
 50 FOR Y=1 TO 9
 60 FOR Z=1 TO 9
 70 PB=(10*Y+Z)*X
 80 VB=(10*X+Y)*Z
 90 IF PB=VB AND X<>Y THEN
    LPRINT X;"*";10*Y+Z;"=";10*X+Y;"*";Z
100 NEXT Z: NEXT Y :NEXT X
```

```
РЕШЕНИЈА
1 * 64 = 16 * 4
1 * 95 = 19 * 5
2 * 65 = 26 * 5
4 * 98 = 49 * 8
```

Ќе ги добиеме четирите решенија. Ако, пак, во 90 се изостави условото $x<>y$, тогаш што ќе добиеме? Провери сам!

Но, ова не е крај. Кога еднаш ќе отпочнете, тогаш идеите се самооплодуваат, навираат како лавина. Во мислите ви серојат нови и нови идеи за решавање на слични задачи. Облагородувањето на духот е незапирливо.

Сега веќе можеме да се зафатиме со решавање (но само со сметач) и на равенствата под б) и в). Сторете го тоа сами, проширете ја програмата. Ќе се убедите дека, покрај наведените равенства под б) ќе го добиете уште равенството:

$$7\cdot 424 = 742\cdot 4,$$

а за равенствата под в) сами докрај заклучувајте (има уште осум нови равенства).

Дали ова треба да биде крајот на нашето математичко размислување? Не, и не би требало. Сега можеме да си поставиме и вакво прашање: *Можеме ли сами да составиме некоја нова задача, која ќе биде слична на штотуку формулираната?* Или, пак, истата задача да ја "свртиме", т.е. поинаку да ја формулираме. Секако дека ќе можеме, бидејќи потсвесно се присеќаваме на законитоста дека од равенството $a\cdot b = c\cdot d$ следува равенството $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$.

Значи, тука сме! Равенството $16\cdot 4 = 1\cdot 64$ можеме да го запишеме во видот

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4}.$$

Но што со тоа? Ако добро погледаме, ќе забележиме дека дојдовме до ново, интересно равенство меѓу две дропки. Втората се добива од првата со "кратење" на шестката. Исто ќе важи и за другите три равенства.

Значи, сега постапуваме обратно, од добиениот резултат - составуваме нова задача, која би гласела вака:

Задача. *Најди ги сите правилни дропки од видот* $\frac{\overline{xy}}{\overline{yz}}$, *за кои важи равенството* $\frac{\overline{xy}}{\overline{yz}} = \frac{x}{z}$.

Секако, решенијата на оваа задача ќе бидат веќе споменатите равенства под а).

По толку труд освен заморот и заслужената радост, се чувствуваме некако чудно. Иако приказната заврши со "хепиенд", сепак лебди некоја носталгија за нашиов "првенец". Заврши ... сето ова заврши ... на 19•XI•1991 година.

Да, но друга идеја се раѓа. Погледнете го овој датум! Тој се запишува само со цифрите 1 и 9. И веднаш задачата е тука: Определи ги сите денови во 1991 година, чиишто датуми се запишуваат само со цифрите 1 и 9.

Добро е. За малку се исплашивме дека премногу сме се "испразниле" и дека ќе ни треба уште многу време за нова идеја, за математичкото размислување. Всушност, ние сме окружени со "задачи", но треба само да ги видиме пред друг да ги види. А тоа ќе го постигнеме со почесто вежбање, со постојано сопствено изградување, додека еден ден ... не откриеме нешто многу поинтересно, за што денес и не сме свесни.

Надевањето и упорноста е чудна "смеса", којашто еден ден може и навистина да "експлодира". Тој ден можеби и не е толку далеку, колку што сега ни се чини ...

КОМБИНИРАЊЕ - САМО СО ПЕТ ДВОЈКИ

Употребувајќи ја точно пет пати цифрата 2; операциите; собирање, одземање, множење, делење и степенување; допишување на цифри како и употреба на загради, обиди се да запишеш што повеќе природни броеви. Јас успеав од бројот 1 да стигнам до бројот 26, а ти? Еве примери, но со пет тројки:

$$5 = 3+3:3+3:3 = 33:33-3-3 = ((3+3):3)^3-3$$

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус