Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус

Никола Петрески
Скопје

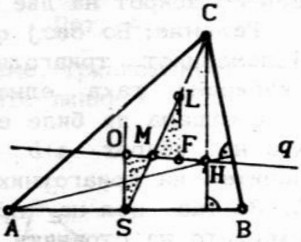
ОЈЛЕРОВА ПРАВА

Швајцарскиот геометар, големиот научник и писател на многубројни дела од областа на математиката, физиката, астрономијата, музиката, филозофијата и физиологијата - Ојлер (Euler, 1701-1783), за кого П Лаплас вели "Читајте го Ојлер - тој ни е учител на сите нас", ги дал, меѓу другите тврдења, и следните:

1. Ортоцентарот, тежиштето и центарот на опишаната кружница кај триаголникот лежат на една права. Притоа, растојанието меѓу тежиштето и ортоцентарот е двапати поголемо од растојанието од центарот на опишаната кружница до тежиштето на триаголникот.

Доказот на ова тврдење, ќе го изведеме на два начина:

I. Ќе го разгледаме триаголникот кој не е рамнокрак, рамностран и правоаголен, што значи точките O и H се различни, а со тоа ја определуваме правата q (црт. 1.).



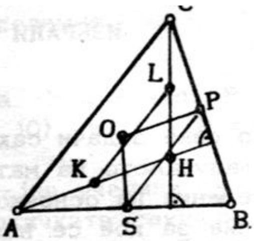
Црт. 1

Пресечната точка на правата q и тежишната линија CS ќе ја означиме со M. За доказот на поставеното тврдење, доволно е да се покаже дека точката M е тежиште на $\triangle ABC$.

Со F и L да ги означиме средините на MH и MC соодветно. Со тоа LF е средна отсечка на $\triangle MHC$, и поради тоа $\overline{CH} = 2\overline{LF}$, односно $CH \parallel LF$. Од друга страна, согласно со тврдењето "Во триаголникот ABC, со ортоцентар H и центар на опишаната кружница O, важи $\overline{CH} = 2\overline{OS}$ каде што S е средина на страната AB" (црт.2.), имаме: $\overline{LH} = \overline{OS}$ (од складноста на $\triangle LKH$ и $\triangle SPO$, каде што P, K, L се средини на отсечките BC, AH и CH соодветно), односно $\overline{OH} = 2\overline{OS}$ и $CH \parallel OS$.

Од претходното имаме дека OS и LH се еднакви и паралелни. Во тој случај триаголниците OSM и FLM се складни. Од нивната складност следува дека $\overline{SM} = \overline{LM} = \overline{CL}$, односно е задоволено следното равенство:

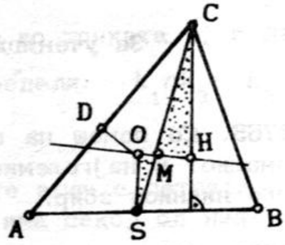
$\overline{CM} : \overline{MC} = 2:1$



Црт. 2

Од последното равенство следува дека точката M е тежиште на $\triangle ABC$, ако тоа е докажано дека ортоцентарот, центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и неговото тежиште, лежат на иста права.

II. Нека H е ортоцентар, а M тежиште на $\triangle ABC$ (црт.3.). Ја продолжуваме HM за $\overline{MO} = \frac{1}{2}\overline{HM}$, и ја поврзуваме точката O со точките D и S (средини на AC и AB соодветно). Доволно е да се докаже дека OD и OS се нормални на страните AC и AB (зошто?).



Црт. 3

Познато е дека $\overline{MC} = 2\overline{MS}$ (зошто?) и $\overline{HM} = 2\overline{MO}$. Значи, триаголниците MHC и MOS се слични (зошто?). Од тоа следува дека $OS \parallel HC$, односно $OS \perp AB$. Исто така се докажува дека $OD \perp AC$, односно точката O е пресек на симетралите на страните на триаголникот, т.е. O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Со тоа е докажано дека H, M, O лежат на една права.

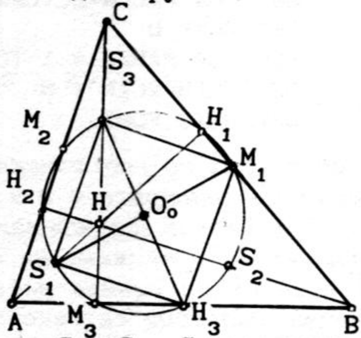
Забелешка: - Ако триаголникот е рамностран, тогаш правата на Ојлер не е определена, бидејќи $O \equiv M \equiv H$.

- Ако триаголникот е рамнокрак или правоаголен, тогаш правата на Ојлер минува низ едно негово теме и обратно. Докажи!

ОЈЛЕРОВА КРУЖНИЦА*

Ќе зборуваме за девет точки во триаголникот, коишто лежат на иста кружница. Во математиката таа кружница е позната како Ојлерова кружница. Во таа смисла ќе го разгледаме следново тврдење:

Средините на страните, подножјата на висините и средините на отсечките со крајни точки ортоцентарот H и темињата на триаголникот, лежат на една кружница.



Ќе го разгледаме случајот кога триаголникот е разностран и неправоаголен.

Доказ: Доволно е да се најде точка, што еднакво оддаделеча од деветте точки. Ги означуваме средините на страните со M_1, M_2, M_3, подножјата на висините со H_1, H_2, H_3 и средините на отсечките AH, BH, CH со S_1, S_2, S_3 соодветно.

Отсечките S_1M_3 и S_3M_1 се средни отсечки на ΔABH и ΔBCH соодветно, од каде што следува дека $S_1M_3 \parallel BH \parallel S_3M_1$. Аналогно добиваме, $S_1S_3 \parallel AC \parallel M_1M_3$. Бидејќи $BH \perp AC$, тогаш и $S_1M_3 \perp M_3M_1$. Од претходното следува дека четириаголникот $S_1M_3M_1S_3$ е правоаголник. Нека O_o е пресекот на неговите дијагонали. Бидејќи оваа точка е еднакво оддалечена од точките S_1, M_3, M_1, S_3, следува дека тие точки лежат на кружницата $k(O_o, \overline{O_oM_1})$. Триаголниникот

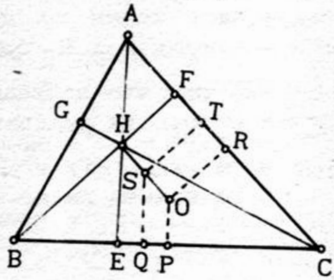
$M_3H_3S_3$ е правоаголен со хипотенуза M_3S_3. Од претходното следува дека $\overline{O_oH_3} = \overline{O_oM_3} = \overline{O_oM_1}$, т.е. точката H_3 лежи на k_o. Аналогно заклучуваме дека и H_1 лежи на k_o. На сличен начин се заклучува дека $M_2S_1S_2M_1$ е правоаголник. Оттука средината O_o на S_1M_1 е средина и на S_2M_2 и $O_oS_2 = O_oM_2 = O_oM_1$, т.е. S_2 и M_2 исто така лежат на k_o. На крајот $\Delta M_2S_2H_2$ е правоаголен со хипотенуза M_2S_2 и оттука следува, дека $\overline{O_oH_2} = \overline{O_oM_2} = = \overline{O_oM_1}$, што значи дека и H_2 лежи на кружницата k_o.

Врз основа на претходното заклучуваме дека деветте точки лежат на кружница со центар во точката O_o.

ЗАДАЧИ:

1. Да се докаже дека центарот на кружницата на деветте точки за триаголникот лежи на Ојлеровата права.

Упатство: Бидејќи симетралата на тетивата на кружницата проаѓа низ неговиот центар, јасно е дека нормалите подигнати во точките Q и T, средини на тетивите EP и FR од кружницата на деветте точки, ќе проаѓаат низ центарот S на таа кружница. Бидејќи O е центар на опишаната кружница околу ΔABC и H е негов ортоцентар, следува дека точката S е средина на отсечката HO (зошто?). Што значи S лежи на Ојлеровата права.



2. За секој триаголник центарот O на опишаната кружница, тежиштето M, центарот O_o на кружницата на деветте точки и ортоцентарот лежат на една права, и за нив важи $\overline{OM}:\overline{MO_o}:\overline{O_oH} = 2:1:3$.

Упатство: Од примерот 1 следува дека $\overline{MH} = 2\cdot\overline{OM}$. Додека од вториот начин на примерот 2 имаме дека O_o е средина на отсечката OH.