Апроксимације ирационалних бројева рационалним

верзија 1.1: 16.5.2015.

Душан Ђукић

1° **Теореме Дирихлеа и Лиувила**

Ирационалне бројеве не можемо израчунати потпуно тачно - пре свега зато што их не можемо представити као количнике целих бројева, али можемо са произвољном тачношћу. Међутим, за већу тачност потребно је узети разломак са већим имениоцем. Зато нам је од интереса да имамо представу о степену тачности који можемо постићи апроксимирањем реалног (обично ирационалног) броја рационалним у зависности од имениоца.

Дефиниција. Реалан број α је *апроксимабилан са степеном* k ако постоји константа C (која зависи од α) таква да неједнакост $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{C}{q^k}$ има бесконачно много решења $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$).

Размотримо прво случај када је $\alpha = \frac{a}{b}$ рационалан број. Како је тада $|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{1}{bq}$ кад год је $\frac{p}{q} \neq \alpha$, сваки рационалан број је апроксимабилан са степеном 1 и ниједним већим степеном.

Много је занимљиви случај ирационалног броја α. Из наредних тврђења следи да је сваки ирационалан број апроксимабилан са степеном 2.

Т.1 (Дирихле). Нека је α ирационалан и n природан број. Тада постоје $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \{1, 2, \dots, n\}$ такви да је $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{(n+1)q}$.

Доказ. Неједнакост из тврђења је еквивалентна неједнакости $|q\alpha - p| < \frac{1}{n+1}$.

Нека, као и обично, $\{x\}$ означава разломљени део реалног броја x. Међу $n+2$ бројева $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{n\alpha\}, 1$ у интервалу $[0, 1]$, бар два се разликују за мање од $\frac{1}{n+1}$. Ако су то бројеви $\{k\alpha\}$ и $\{l\alpha\}$, довољно је поставити $q = |k - l|$, а ако су то $\{k\alpha\}$ и 0 или 1, довољно је поставити $q = k$; у оба случаја, p је цео број најближи броју $k\alpha$. $\square$

Т.2. Ако је α произвољан реалан број, онда постоји бесконачно много парова природних бројева (p, q) таквих да је $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$.

Доказ. Одмах следи из Дирихлеове теореме. $\square$

Сада ћемо се подсетити шта су алгебарски бројеви.

Дефиниција. Комплексан број α је *алгебарски* ако постоји неконстантан полином P са рационалним коефицијентима такав да је $P(\alpha) = 0$.

Минималан полином алгебарског броја α је полином са рационалним коефицијентима најмањег степена чија је нула α.

Степен алгебарског броја је степен његовог минималног полинома.

За сваки алгебарски број α важе следећа једноставна тврђења:

Т.3. (а) Минималан полином P_α броја α је јединствен до на множење константом.

(б) Полином P_α је нерастављив над $\mathbb{Q}$. Према томе, P_α нема вишеструких нула.

(в) Ако је $Q(x)$ полином са рационалним коефицијентима такав да је $Q(\alpha) = 0$, тада је полином Q дељив полиномом P.

Доказ. (а) Кад би број α имао два различита монична минимална полинома P_1 и P_2 степена n, онда би се и полином $P_1 - P_2$ анулирао у α, што је немогуће јер је његов степен мањи од n.

(б) У супротном би се неки од његових делилаца анулирао у α.

(в) Нека је R остатак при дељењу полинома P са Q. Полином R се анулира у α и има степен мањи од n, па он мора бити нула-полином. $\square$

Следећа теорема говори да алгебарски број степена n не може бити апроксимабилан са степеном већим од n.

Т.4 (Лиувил). Ако је α реалан алгебарски број степена $n > 1$, тада постоји константа $c > 0$ таква да важи $|\alpha - \frac{p}{q}| \geqslant \frac{c}{q^n}$ за све $p \in \mathbb{Z}$ и $q \in \mathbb{N}$.

Доказ. Нека је $P(x)$ минимални полином броја α, а $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ све нуле тог полинома. Ниједна од нула α_i није рационална.

Одаберимо произвољно $\varepsilon > 0$. Ако је $|\alpha - \frac{p}{q}| > \varepsilon$, свакако је и $|\alpha - \frac{p}{q}| > \frac{\varepsilon}{q^n}$. Нека је зато $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \varepsilon$. Постоји константа M таква да је $|x - \alpha_2| \cdots |x - \alpha_n| \leqslant M$ за све $x \in [\alpha - \varepsilon, \alpha, \varepsilon]$. Осим тога, $q^n P(\frac{p}{q})$ је цео број различит од нуле, па је $|P(\frac{p}{q})| \geqslant \frac{1}{q^n}$. Сада добијамо

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \frac{|P(\frac{p}{q})|}{|\frac{p}{q} - \alpha_2| \cdots |\frac{p}{q} - \alpha_n|} \geqslant \frac{1}{Mq^n}\ .$$

Према томе, за константу c можемо узети $\min\{\varepsilon, \frac{1}{M}\}$. $\square$

Специјално, ако је α квадратни ирационалан број, он је апроксимабилан са степеном 2, али ни са једним већим степеном.

Пример. За сваки разломак $\frac{p}{q}$ важи $|\frac{p}{q} - \sqrt{2}| = \frac{1}{q}|p - q\sqrt{2}| = \frac{1}{q} \cdot \frac{|p^2 - 2q^2|}{p + q\sqrt{2}} \geqslant \frac{1}{q(p+q\sqrt{2})}$, што је веће од $\frac{1}{(2+\sqrt{2})q^2}$ ако претпоставимо грубу процену $\frac{p}{q} < 2$.

С друге стране, постоје ирационални бројеви који су апроксимабилни са произвољно великим степеном. По Лиувиловој теореми такви бројеви морају бити трансцендентни (тј. неалгебарски).

Пример. Број $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!}}$ је трансцендентан. Заиста, ако претпоставимо да је алгебарски степена n, онда је израз $q^n|\alpha - \frac{p}{q}| = q^{n-1}|q\alpha - p|$ ограничен одоздо, што није случај јер за свако $k \in \mathbb{N}$ и за $q = 10^{k!}$ и $p = [q\alpha]$ важи $|q\alpha - p| = \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{10^{i!-k!}} < \frac{2}{10^{(k+1)!-k!}} = 2 \cdot 10^{-(k+2-n)k!} \cdot \frac{1}{q^{n-1}}$.

Поменимо још једну теорему чији је доказ теоријски прилично захтеван.

Т (Ротова теорема). Степен апроксимабилности сваког ирационалног алгебарског броја α је једнак 2.

Другим речима, за свако $\varepsilon > 0$ и сваку константу C неједнакост $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{C}{q^{2+\varepsilon}}$ има само коначно много решења $\frac{p}{q}$.

2° **Фарејеви низови**

Дефиниција. Фарејев низ реда $m \in \mathbb{N}$ је растући низ свих рационалних бројева чији имениоци нису већи од m.

Пример. Део Фарејевог низа реда 5 у интервалу $[0, 1]$ је $0, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1$,

Дефиниција. Ако су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ два нескратива разломка, њихова медијанта је разломак $\frac{a+c}{b+d}$.

Приметимо да медијанта два разломка лежи између њих. Заиста, ако је $\frac{a}{b} = x < \frac{c}{d} = y$, онда из $a = bx$ и $c > dx$ следи $a + c > (b + d)x$, тј. $\frac{a+c}{b+d} > x$; аналогно важи $\frac{a+c}{b+d} < y$.

Т.5. Нека су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ разломци такви да је $bc - ad = 1$. Ако је $\frac{a}{b} < \frac{x}{y} < \frac{c}{d}$ за неке $x, y \in \mathbb{Z}$ $(y > 0)$, онда важи $y \geqslant b + d$.

Једнакост важи ако и само ако је $\frac{x}{y}$ медијанта разломака $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

Доказ. Из $\frac{1}{bd} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = (\frac{c}{d} - \frac{x}{y}) + (\frac{x}{y} - \frac{a}{b}) \geqslant \frac{1}{dy} + \frac{1}{by} = \frac{b+d}{bdy}$ следи $y \geqslant b + d$. Ако важи једнакост, мора бити $\frac{x}{y} - \frac{a}{b} = \frac{1}{by}$, одакле је $x = a + c$. □

Део Фарејевог низа реда m у интервалу $[0, 1]$ можемо да конструишемо на следећи начин. Почевши од низа $(\frac{0}{1}, \frac{1}{1})$, примењујемо следећу операцију док год је могуће: ако су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ два узастопна члана низа таква да је $b + d \leqslant m$, између њих додајемо њихову медијанту.

Једноставном индукцијом следи да за свака два узастопна члана $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ овако добијеног низа важи $bc - ad = 1$: заиста, убацивањем медијанте $\frac{a+c}{b+d}$ ово својство остаје на снази јер је $b(a+c) - a(b+d) = c(b+d) - d(a+c) = 1$. Сада, на основу пртходне теореме, сваки разломак који лежи између два суседна члана низа $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ (и не припада низу) има именилац бар $b + d > m$ - дакле, добијени низ јесте Фарејев реда m. Према томе:

Т.6. Ако су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ два суседна члана Фарејевог низа реда m, важи $(b, d) = 1$, $bc - ad = 1$ и $b + d > m$. □

Јасно је да део Фарејевог низа реда m у интервалу $[0, 1]$ има тачно $1 + \sum_{k=1}^{m} \varphi(k)$ чланова.

Т.7 (Хурвиц). За сваки ирационалан број α неједнакост $|\alpha - \frac{p}{q}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}q^2}$ има бесконачно много решења $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$.

Доказ. Претпоставимо да тврђење није тачно тј. да не постоји такви p, q са $q > n$. Нека су $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ суседни чланови Фарејевог низа реда m између којих се налази α. За довољно велико m ће важити $b, d > n$. Како је $|\alpha - \frac{a}{b}| > \frac{1}{b^2\sqrt{5}}$ и $|\alpha - \frac{c}{d}| > \frac{1}{d^2\sqrt{5}}$, мора бити $\frac{1}{b^2\sqrt{5}} + \frac{1}{d^2\sqrt{5}} > \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \geqslant \frac{1}{bd}$, одакле следи $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{d}{b} < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Посматрајмо сада медијанту $\frac{a+c}{b+d}$. Нека је без смањења општости $\frac{a}{b} < \alpha < \frac{a+c}{b+d}$. Слично као малопре налазимо да је $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < \frac{b+d}{b} = \frac{d}{b} + 1 < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, што је у супротности са претходно добијеном неједнакошћу. □

Константа $\sqrt{5}$ у Хурвицовој теореми се не може побољшати, као што се види у следећем примеру.

Пример. Нека је $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $\varepsilon > 0$. Разломака $\frac{p}{q} > \phi + \varepsilon$ за које је $|\frac{p}{q} - \phi| \leqslant \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$ има само коначно много јер је тада $q^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon(\sqrt{5}+\varepsilon)}$. С друге стране, ако је $\frac{p}{q} < \phi + \varepsilon$, онда означавајући $P(x) = x^2 + x - 1 = (x - \phi)(x + 1 + \phi)$ за све $p, q \in \mathbb{N}$ имамо $P(\frac{p}{q}) > \frac{1}{q^2}$ и $|\frac{p}{q} - \phi| = \frac{P(p/q)}{p/q+1+\phi} > \frac{1}{q^2(p/q+1+\phi)} > \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$.

Према томе, неједнакост $|\frac{p}{q} - \phi| < \frac{1}{(\sqrt{5}+\varepsilon)q^2}$ има само коначно много решења $\frac{p}{q}$.

Међутим, може се показати да, за све ирационалне бројеве α који нису облика $\frac{a+b\phi}{c+d\phi}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ |ad - bc| = 1)$, Хурвицова теорема остаје на снази и ако се $\sqrt{5}$ замени са $\sqrt{8}$. Доказ овог тврђења користи својства верижних разломака.

3° Задаци

1. Доказати да је $\{n\sqrt{2}\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$ за све природне бројеве n. Може ли се константа $2\sqrt{2}$ у имениоцу побољшати?

2. Ако су $p, q \in \mathbb{N}$ и $\frac{p}{q} < \sqrt{7}$, доказати да важи $\sqrt{7} - \frac{p}{q} > \frac{1}{pq}$.

3. Ако је a природан број који није потпун квадрат, наћи минимум израза $q^2|\sqrt{a} - \frac{p}{q}|$ по целим бројевима $p, q,\ q > 0$.

4. Ако је $z = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, где су a и b природни бројеви који нису оба квадрати, доказати да је $2z^3\{z\} > 3$.

5. Постоји ли ограничен низ реалних бројева (x_n) који задовољава услов $|x_m - x_n| \geqslant \frac{1}{|m-n|}$ за све различите $m, n \in \mathbb{N}$?

6. Доказати да међу произвољних 20 узастопних природних бројева постоји број d такав да неједнакост $n\sqrt{d} \cdot \left\{n\sqrt{d}\right\} > \frac{5}{2}$ важи за све природне бројеве n.

7. Нека су $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ и $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоје цели бројеви $q_1, q_2, \dots, q_n$ и p који нису сви нула такви да је $|q_i| \leqslant m_i$ за свако i и $|q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + \dots + q_n\alpha_n - p| < \frac{1}{(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_n+1)}$.

8. Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ реални бројеви и $m \in \mathbb{N}$. Доказати да постоје цели бројеви $p_1, p_2, \dots, p_n$ и природан број $q \leqslant m^n$ такви да је $|q\alpha_i - p_i| \leqslant \frac{1}{m}$ за $i = 1, \dots, n$.

9. Доказати да је сваки члан Фарејевог низа реда m медијанта својих суседа.

10. За $n \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$, означимо са X_n скуп свих парова (a, b) узајамно простих природних бројева таквих да важи $a < b \leqslant n < a + b$. Доказати да је $\sum_{(a,b)\in X_n} \frac{1}{ab} = \frac{1}{2}$.

11. Доказати да за сваки ирационалан број α постоји бесконачно много природних бројева n таквих да је $\{n\alpha\} < \frac{1}{n}$.

12. Доказати да се константа 1 из бројиоца у претходном задатку не може поправити. Другим речима, за свако $C < 1$ постоји ирационалан број α такав да неједнакост $\{n\alpha\} < \frac{C}{n}$ има само коначно много решења $n \in \mathbb{N}$.

13. Нека су a, b, c, d цели бројеви. Ако ирационалан број z има степен апроксимабилности n, доказати да онда и број $\frac{az+b}{cz+d}$ има степен апроксимабилности n.

14. Доказати да постоји константа C таква да за сваки разломак $\frac{p}{q}$ важи $|\frac{p}{q} - e| > \frac{C}{q^2 \ln q}$. (Последица: степен апроксимабилности броја e је 2.)

4° **Решења**

1. За $m = [n\sqrt{2}]$ важи $\{n\sqrt{2}\} = n\sqrt{2} - m = \frac{2n^2-m^2}{n\sqrt{2}+m} > \frac{1}{2n\sqrt{2}}$. Једнакост се не достиже, али како једначина Пеловог типа $2n^2 - m^2 = 1$ има бесконачно много решења $(m_i, n_i)_{i=1}^{\infty}$, за свако од тих решења важи $n_i\{n_i\sqrt{2}\} = \frac{1}{\sqrt{2}+m_i/n_i}$, што за довољно велике m_i, n_i постаје произвољно блиско броју $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

2. Ако је $\frac{p}{q} < 2$, тврђење тривијално важи. У супротном је $q < \frac{1}{2}p$ и $\sqrt{7} - \frac{p}{q} = \frac{1}{q}(q\sqrt{7} - p) = \frac{7q^2-p^2}{q(q\sqrt{7}+p)} > \frac{7q^2-p^2}{pq(1+\sqrt{7}/2)}$. Како је израз $7q^2 - p^2$ позитиван и не може да буде 1 или 2 (по модулу 7), следи $\sqrt{7} - \frac{p}{q} \geqslant \frac{3}{pq(1+\sqrt{7}/2)} > \frac{1}{pq}$.

3. Мозeмо да сматрамо да је $p > 0$. Посматрани израз је једнак $f(p, q) = \frac{|p^2-aq^2|}{p/q+\sqrt{a}}$. Ако је $\frac{p}{q} < \sqrt{a}$, онда је $f(p, q) > \frac{1}{2\sqrt{a}}$. У случају $\frac{p}{q} > \sqrt{a} + 1$ важи $f(p, q) > 1$. Такође, ако је $\sqrt{a} < \frac{p}{q} < \sqrt{a} + 1$ и $p^2 - aq^2 > 1$, важи $f(p, q) > \frac{2}{2\sqrt{a}+1} > \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

   Нека је сада $p^2 - aq^2 = 1$. При овом услову највећа вредност $\frac{p}{q}$, и самим тим најмања вредност $f(p, q)$, достиже се за најмање нетривијално решење Пелове једначине $(p, q) = (p_1, q_1)$: $f(p_1, q_1) = \frac{1}{p_1/q_1+\sqrt{a}} < \frac{1}{2\sqrt{a}}$.

4. Минимални полином броја z је $P(x) = (x-z)(x-\sqrt{a}-\sqrt{b})(x+\sqrt{a}-\sqrt{b})(x-\sqrt{a}+\sqrt{b}) = x^4 - 2(a+b)x^2 + a^2 + b^2 - 2ab$. За $c = [z]$ имамо $\{z\} = \sqrt{a}+\sqrt{b}-c$, $c+\sqrt{a}+\sqrt{b} < 2z$ и $(c+\sqrt{a}-\sqrt{b})(c-\sqrt{a}+\sqrt{b}) \leqslant c^2 < z^2$, па тако добијамо

$$2z^3\{z\} > (\sqrt{a}+\sqrt{b}-c)(c+\sqrt{a}+\sqrt{b})(c+\sqrt{a}-\sqrt{b})(c-\sqrt{a}+\sqrt{b}) = -P(c).$$

Притом је $-P(c) \equiv -(x^2+a+b)^2 \equiv 0$ или $3 \pmod 4$, па због $-P(c) > 0$ мора бити $-P(c) \geqslant 3$.

5. Доказаћемо да низ $x_n = c\{n\sqrt{2}\}$ за неку константу $c > 0$ задовољава услове. За $m - n = q > 0$ и неко $p \in \mathbb{Z}$ имамо $|x_m - x_n| = c|q\sqrt{2} - p| = \frac{c(2q^2-p^2)}{q\sqrt{2}+p}$, па пошто је $|q\sqrt{2}-p| < 1$, следи $|m-n|\cdot|x_m-x_n| > \frac{cq}{2q\sqrt{2}+1} > \frac{c}{2\sqrt{2}+1}$. Дакле, можемо узети $c = 2\sqrt{2}+1$.

6. Како за $m = \left[n\sqrt{d}\right]$ важи

$$n\sqrt{d}\left\{n\sqrt{d}\right\} = n\sqrt{d}\left(n\sqrt{d}-m\right) = n\sqrt{d}\cdot\frac{dn^2-m^2}{n\sqrt{d}+m} > n\sqrt{d}\cdot\frac{dn^2-m^2}{2n\sqrt{d}} = \frac{dn^2-m^2}{2},$$

довољно је одабрати d тако да за све $m, n \in \mathbb{N}$ важи $dn^2 - m^2 \notin \{1,2,3,4\}$. Ово постижемо избором $d = 20k+15 = 5(4k+3)$ за $k \in \mathbb{N}_0$. Заиста, тада m^2+2 и m^2+3 нису дељиви са 5, док m^2+1 и m^2+4 немају делиоце облика $4k+3$, тако да ниједан од бројева m^2+1, m^2+2, m^2+3 и m^2+4 не може бити дељив са d.

7. Поделимо интервал $[0,1]$ на $M = (m_1+1)\cdots(m_n+1)$ подинтервала дужине $\frac{1}{M}$. Посматрајмо свих M бројева облика $\{x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n\}$, $0 \leqslant x_i \leqslant m_i$. Ако неки од њих припада интервалу $[0, \frac{1}{M})$, задатак је решен. У супротном сви они леже у преосталих $M-1$ подинтервала, па нека два леже у истом, рецимо $\sum_i x_i\alpha_i$ и $\sum_i y_i\alpha_i$. Тада је растојање од броја $\sum_i (x_i - y_i)\alpha_i$ до најближег целог броја мање од $\frac{1}{M}$.

8. Поделимо хиперкоцку $[0,1]^n$ на m^n хиперкоцки странице $\frac{1}{m}$. За $q = 1, \dots, m^n$ посматрајмо тачке $A_q(\{q\alpha_1\}, \dots, \{q\alpha_n\})$. Ако нека од њих припада хиперкоцки $[0, \frac{1}{m}]^n$, задатак је решен. У супротном неке две припадају истој хиперкоцки, рецимо A_k и A_ℓ $(k < \ell)$, а онда $\{(\ell - k)\alpha_i\} \in [0, \frac{1}{m}] \cup [1 - \frac{1}{m}, 1]$ за свако i.

9. Нека су $\frac{a}{b}$, $\frac{x}{y}$ и $\frac{c}{d}$ три узастопна члана Фарејевог низа. По Т.6 важи $bx - ay = cy - dx = 1$, одакле решавањем система по x и y налазимо $x = \frac{a+c}{bc-ad}$ и $y = \frac{b+d}{bc-ad}$. Дакле, $\frac{x}{y} = \frac{a+c}{b+d}$.

10. Нека је $0 = \frac{x_0}{y_0}, \frac{x_1}{y_1}, \dots, \frac{x_k}{y_k} = \frac{1}{2}$ део Фарејевог низа реда m у интервалу $[0, \frac{1}{2}]$. Приметимо да се сваки од парова у X_n појављује тачно једном међу паровима (y_{i-1}, y_i) и (y_i, y_{i-1}), $i = 1, 2, \dots, k$. Заиста, за дато $(a,b) \in X_n$ постоје јединствени $c, d \in \mathbb{N}_0$ такви да важи $c \leqslant \frac{a}{2}$, $d \leqslant \frac{b}{2}$ и $|bc - ad| = 1$, и тада су $\frac{c}{a}$ и $\frac{d}{b}$ суседни чланови Фарејевог низа реда m. Према томе,

$$\sum_{(a,b)\in X_n} \frac{1}{ab} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{y_{i-1}y_i} = \sum_{i=1}^{k} (\frac{x_i}{y_i} - \frac{x_{i-1}}{y_{i-1}}) = \frac{1}{2}.$$

11. Посматрајмо два суседна члана $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ Фарејевог низа неког реда m између којих се налази α. Ако одаберемо m тако да важи $b < d$, имамо $\alpha - \frac{a}{b} < \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd} < \frac{1}{b^2}$, тј. $\{b\alpha\} = b\alpha - a < \frac{1}{b}$.

Остаје да покажемо да можемо да одаберемо жељено m на бесконачно много начина. Пођимо од произвољног реда m_0 и одговарајућих суседних чланова $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Како $\frac{a+kc}{b+kd} \to \frac{c}{d}$ када $k \to \infty$, важи $\frac{a+kc}{b+kd} < \alpha < \frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$ за неко $k \in \mathbb{N}$. Можемо узети $m = b + (k+1)d$: чланови $\frac{a+kc}{b+kd}$ и $\frac{a+(k+1)c}{b+(k+1)d}$ су тада суседни у Фарејевом низу реда m.

12. Нека је $\alpha = \sqrt{k^2-1}$, $k \in \mathbb{N}$ $(k \geqslant 2)$. За $m = [n\alpha]$ имамо $\{n\alpha\} = n\alpha - m = \frac{(k^2-1)n^2-m^2}{n\alpha+m} > \frac{K}{2n\sqrt{k^2-1}}$, где је $K = \min\{(k^2-1)x^2 - y^2 \mid x, y \in \mathbb{Z}, y^2 < (k^2-1)x^2\}$.

Покажимо да је $K = 2k - 2$: одатле ће следити $\{n\alpha\} > \frac{1}{n}\sqrt{\frac{k-1}{k+1}}$. Из теорије једначина Пеловог типа знамо да једначина $(k^2-1)x^2 - y^2 = K$ има бар једно решење у коме је $2y^2 \leqslant K(k-1)$, а како је $x \geqslant 1$, имамо $k^2 - 1 \leqslant y^2 + K \leqslant \frac{K(k+1)}{2}$, тј. $K \geqslant 2(k-1)$.

13. Дефинишимо $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Неједнакост $|z - \frac{p}{q}| < \frac{M}{q^n}$ има бесконачно много решења $\frac{p}{q}$. По теореми о средњој вредности је $|f(z) - \frac{ap+bq}{cp+dq}| = |f(z) - f(\frac{p}{q})| = f'(\xi)|z - \frac{p}{q}|$ за неко ξ између $\frac{p}{q}$ и z. Како су изрази $f'(\xi)$ и $\frac{cp+dq}{q}$ ограничени, из претходне неједнакости следи оцена $|f(z) - \frac{ap+bq}{cp+dq}| < \frac{N}{(cp+dq)^n}$ за неку константу N.

    Слично, пошто је $g(f(z)) = z$ за функцију $g(x) = \frac{b-dx}{cx-a}$, степен апроксимабилности броја z није мањи од степена апроксимабилности $f(z)$.

14. Ово нећу доказати, то је да сами истражујете. Уверавам вас да не користи дубоку теорију. Користиће вам да читате нешто о верижним разломцима.

Београд, 2015