Самоил Малчески
Скопје

# ИГРИ И СТРАТЕГИИ

Комбинаториката е една од најхетерогените математички дисциплини. Имено, покрај принципите на збир и производ, методот на вклучување и исклучувања, основните кобинаторни комфигурации, биномната и полиномната формула, проблемите на разбивање, генераторните функции и диференцните равенки, предмет на проучување на комбинаториката е и егзистенцијата на комбинаторните конфигурации. Во овој дел спаѓаат принципот на Дирихле, магичните и латинските квадрати, теоремите на Хол, Рамзеј и Ероу, проблемите кои се решаваат со помош на боење и покривање на множества и геометриски фигури, и математичките игри.

Од наведените области, математичките игри, кои овде се предмет на нашите разгледувања, се една од најнестандардните и најразновидни области. Ние нема да се задржиме на теориските разгледувања и на класичните алгоритми за решавање на определени видови игри, туку ќе разгледаме неколку задачи кои припаѓаат на оваа интересна математичка дисциплина и кои се задавани на матемаички натпревари од повисоко ниво.

На почетокот ќе разгледаме неколку задачи во кои при определени услови треба да се постигне дадена цел, но притоа нема играч кој оневозможува да се постигне целта. Ваквите видови игри се нарекуваат неконкурентски игри.

**Задача 1.** Бесмртна болва се движи по целобројните точки од реалната права, почнувајќи од 0. За секој природен број $k$ таа во $k-$тиот скок скока лево или десно за $2^k+1$ во однос на точката во која се наоѓа. Дали е точно дека за секоја точка со координата природен број постои момент во кој болвата ќе биде во таа точка, ако и е дозволено да минува низ една иста точка повеќе од еднаш?

**Решение.** *Одговор*: ДА.

Нека во еден момент болвата се наоѓа во точка $n\in\mathbb{N}$. Ќе покажеме како болвата ќе премине од точката $n$ во точката $n+1$. Нека болвата стигнала во $n$ со $k-1$ скокови. Тогаш следниот скок на болвата е со дожина $2^k+1$, налево или надесно од местото на кое се наоѓа. Нека тоа е надесно. Имаме

$$\begin{aligned}2^{k+l}+1-(2^k+1)-(2^{k+1}+1)-...-(2^{k+l-1}+1)&=\\ &=(2^{k+l}-2^k-2^{k+1}-...-2^{k+l-1})+1-2^k\\ &=2^k+1-2^k=1.\end{aligned}$$

Тоа е операција која ни дозволува преместување десно за должина 1. Така, почнувајќи од 0, можеме да се преместиме во 1, па потоа во 2 итн.

**Задача 2.** Во непроѕирен сад се наоѓаат 2016 бонбони нумерирани со броевите 1, 2, ..., 2016, при што 1008 бонбони се црвени, а преостанатите 1008 се жолти. Андреј постапува на следниов начин: во еден потез тој извлекува една бонбона од садот (бонбоната не ја гледа додека не ја извлече), ја става на купче пред себе (пред првиот потез нема бонбони во купчето пред Андреј), а потоа може, ако сака, од купчето да одбере некои две бонбони со иста боја и да ги изеде. Андреј ова го повторува вкупно 2016 пати (т.е. се додека има бонбони во садот). Секогаш кога во оваа постапка тој ќе изеде две бонбони (на опишаниот начин), да кажеме нумерирани со броевите $a$ и $b$, Андреј добива $|a-b|$ поени.

1) Докажи дека Андреј може да смисли стратегија која ќе му гарантира најмалку $2\cdot 504^2$ освоени поени на крајот на играта.
2) Дали Адреј може да смисли стратегија која ќе му гарантира повеќе од $2\cdot 504^2$ поени?

**Решение.** 1) Нека црвените бонбони се нумерирани со броевите $c_1 < c_2 < \ldots < c_{1008}$, а жолтите со броевите $z_1 < z_2 < \ldots < z_{1008}$. Бонбоните нумерирани со броевите $c_i$ и $z_i$ ги нарекуваме мали за $i \le 504$ и големи за $i > 504$.

Нека Андреј во првите 1008 потези не јаде бонбони. Ќе докажеме дека потоа во секој потез тој може да избере една мала и една голема бонбона од иста боја и да ги изеде.

Нека претпоставиме дека во $k-$тиот потез $(k \ge 1009)$ по прв пат Андреј не може да изеде две соодветни бонбони. Тоа значи дека од секоја боја сите бонбони на купчето се или мали или големи. Бидејќи во претходните $k-1009$ потези тој јадел по две бонбони, во купчето има $2018-k$ бонбони. Од друга страна, неизедени бонбони има $2016-2(k-1009)=2(2017-k)$ и тоа од секоја боја еднаков број мали и големи бонбони, па затоа во тој момент на купчето може да има најмногу $2017-k$ бонбони, што противречи на тоа дека на купчето има $2018-k$ бонбони. Со оваа противречност доказот е завршен

На овој начин, бидејќи $c_{i+504}-c_i \ge 504$ и $z_{i+504}-z_i \ge 504$. Андреј може да освои

$$\sum_{i=505}^{1008}(c_i+z_i)-\sum_{i=1}^{504}(c_i+z_i)=\sum_{i=1}^{504}(c_{i+504}-c_i)+\sum_{i=1}^{504}(z_{i+504}-z_i)\ge 2\cdot 504^2 \text{ поени.}$$

2) Ако црвените бонбони се $1,2,\ldots,1008$, а жолтите се $1009,1010,\ldots 2016$, тогаш Андреј може да заработи најмногу

$$(505+\ldots+1008)-(1+\ldots+504)+(1513+\ldots+2016)-(2009+\ldots+1512)=2\cdot 504^2$$

поени. ■

**Задача 3.** На масата се поставени 2009 жетони, секој од кои има бела и црна страна. На почетокот сите жетони се во еден ред и сите, со исклучок на еден, се завртени со белата страна нагоре. Во секој чекор можеме да избереме жетон, завртен со црната страна нагоре, и ги превртуваме двата соседни жетони (или еден, ако сме избрале краен жетон). Определи ги сите почетни положби при кои може да се постигне положба во која сите жетони се завртени со црните страни нагоре.

**Решение.** Да ги нумерираме жетоните последователно со броевите од 1 до 2009 одлево-надесно. Да ја разгледаме положбата во која имаме $k$ црни жетони на местата $t_1, t_2, ..., t_k$, $1 \le t_1 < t_2 < ... < t_k \le 2009$ и да видиме како при нашата операција се менува бројот

$$M = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} t_i = t_1 - t_2 + t_3 - ... + (-1)^{k+1} t_k \ .$$

Ако сме избрале $t_j, 1 \le j \le k$, и $t_j \ne 1, 2009$, $t_{j-1} \ne t_j - 1$ и $t_{j+1} \ne t_j + 1$, тогаш бројот $M$ не се менува, бидејќи „новиот" број е

$$\sum_{i=1, i \ne j}^{k} (-1)^{i+1} t_i + (-1)^{j+1}(t_j - 1) + (-1)^{j+2} t_j + (-1)^{j+3}(t_j + 1) = M \ .$$

Не е тешко да се провери дека $M$ не се менува и во случаите кога $t_{j-1} = t_j - 1$ и $t_{j+1} = t_j + 1$, кога $j = 1$ добиваме дека $M$ се менува во $-M$, а кога $j = 2009$ добиваме дека $M$ се менува во $M + (-1)^{k+1} 2010$. Во сите случаи остатокот при делење на $M$ со 2010 секогаш е $r$ или $2010 - r$, каде $r$ зависи само од почетната кнфигурација. Ако сите жетони станале црни, тогаш

$$M = 1 - 2 + 3 - ... - 2008 + 2009 = 1005 ,$$

колку што е неговата вредност само кога на почетокот црниот жетон е на позицијата 1005.

Останува да докажеме, дека ако на почетокот црниот жетон е на позиција $s = 1005$, тогаш можеме да ги превртиме сите жетони со црната страна нагоре. Навистина, по три чекори во позициите $s, s-1, s+1$ добиваме 5 црни жетони во позициите од $s-2$ до $s+2$. Понатаму, ако сме ги превртиле жетоните

$$s-k, s-k+1, ..., s-1, s, s+1, ..., s+k-1, s+k \ ,$$

кога $k = 2l$ продолжуваме со чекорите во позициите

$$s-2l, s+2l, s-2(l-1), s+2(l-1), ..., s-2, s+2, s \ ,$$

и притоа во позициите

$$s-2l+1, s+2l-1, s-2l+3, s+2l-3, ..., s-1, s+1, s \ ,$$

т.е. во позициите

$$s-k-1, s-k+1, ..., s-1, s, s+1, ..., s+k-1, s+k+1$$

добиваме црни жетони. На сличен начин се разгледува и случајот кога $k$ е непарен. Според тоа, оваа постапка ги дава сите жетони завртени со црната страна нагоре. ■

Во следните задачи ќе се осврнеме на таканаречените конкурентски игри, т.е. на игрите во кои според определени правила играат двајца играчи, при што треба да се определи кој од играчите победува, без разлика како ќе игра противникот. Притоа основна цел е наоѓањето на таканаречената победничка стратегија.

**Задача 4.** На масата има 10 купчиња со 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 ореви. Двајца играчи последователно земаат по еден орев се додека не останат 3 ореви. Ако и трите ореви се од различни купчиња, тогаш играта ја добива играчот кој зема втор (втор играч), а во спротивно играта ја добива играчот кој зема прв (прв играч). Кој играч има победничка стратегија?

**Решение.** *Прв начин*. Купче со еден орев ќе го наречеме единица. Победничка стратегија за првиот играч е следнава:

1) Ако има единиц, тогаш зема една од нив.
2) Не зема од купчиња со парен број ореви.

Бројот на оревите на почетокот е непарен, па затоа тој е непарен пред секој потег на првиот играч. Значи тој во секој чекор може да ги запазува горните правила.

Сега, да забележиме дека по првиот чекор на првиот играч на масата нема единици. Значи, по првиот чекор на вториот играч на масата ќе има најмногу една единица, која првиот ја зема во следниот чекор. Тоа значи дека по секој чекор на вториот играч на масата ќе има најмногу една единица. Ова ќе биде и на крајот на играта, што значи дека првиот играч победува.

*Втор начин*. Нека во секој свој чекор првиот играч зема од најмалото купче. Тогаш по 21-от чекор на првиот играч ќе има најмногу 4 купчиња, а по чекорот на вториот играч ќе има 13 ореви. Ако купчињата се 4, тогаш во најмалото ќе има најмногу 3 ореви. Значи, без разлика колку ореви има во секое купче, по уште три чекори на првиот и на вториот играч ќе има уште 7 ореви и најмногу 3 купчиња. Ако има три купчиња, тогаш во најмалото има најмногу 2 ореви. Значи, колкави и да се купчињата, по уште два чекори на првиот и на вториот играч ќе има три ореви и најмногу 2 купчиња, што значи дека првиот играч победува. ■

**Задача 5.** Марко и Симон последователно поставуваат жетони во полињата табла со димензии $20\times 20$. На почетокот таблата е празна и прв на потез е Марко. Играта ја добива играчот кој прв ќе постави жетон така што во пресечните полиња на два реда и две колони има жетони. Кој од играчите има победничка стратегија?

**Решение.** Ќе докажеме дека Симон има победничка стратегија, која се состои во следново: ако Симон може да победи во некој чекор тој тоа го прави, а во спротивно поставува жетон во полето кое е симетрично (во однос на некоја од средните линии на таблата) на она поле во кое Марко тукушто поставил жетон. Според тоа, по секој чекор на Симон распоредот на жетоните на квадратот е симетричен.

Таблата има $20\cdot 20=400$ полиња, што значи дека по конечен број чекори играта завршува, т.е. еден од играчите победува. Да претпоставиме дека, при опишаната стратегија на Симон, победник е Марко. Тогаш пред неговиот победоносен чекор распоредот на жетоните вклучува три жетони во три од четирите пресечни полиња на два реда и две колони. Ако меѓу овие три жетони нема пар симетрични жетони, тогаш во нивните три симетрични полиња има жетони, што значи дека Симон требало да победи во претходниот чекор. Ако два од трите жетони се симетрични, тогаш и третиот треба да има симетричен и веќе да има правоаголник од жетони, што е противречност. Од добиената противречност следува дека стратегијата на Симон е победничка. ■

**Задача 6.** Во рамнината се обележани сите точки со целобројни координати $(x,y)$ такви што $x^2+y^2\le 10^{10}$. Двајца играчи ја играат следнава игра, при што потезите ги влечат наизменично. Првиот става жетон на обележана точка и точката ја брише. Во секој следен чекор жетонот се преместува во друга одбележена точка и таа се брише. Притоа должината на чекорите треба да расте, но е забрането преместување од точка во симетричната нејзина точка во однос на центарот. Играта ја губи играчот што не може да направи потез. Кој играч има победничка стратегија?

**Решение.** *Одговор*: Првиот играч.

Ќе докажеме поопшто тврдење: *Во игра со горните правила на конечно множество точки $S$ кое го содржи координатниот почеток $O(0,0)$ и е инваријантно при ротација за $90^\circ$ околу $O$, првиот играч има победничка стратегија.*

Ќе користиме индукција по бројот на точките $n$ во $S$. За $n=1$ нема што да докажуваме. Нека $n>1$. Под отсечка ќе подразбираме отсечка со крајни точки во $S$, кои не се симетрични во однос на $O$. Нека $d$ е максималната должина на отсечка и $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n$ се сите отсечки со таа должина (некои точки $A_i$, како и $B_i$ може да се совпаѓаат).

Да забележиме дека $O$ не е крајна точка на ниту една од тие отсечки. Навистина, ако допуштиме дека $OA$ е една од тие отсечки и $B$ (од $S$) е сликата на $A$ при ротацијата за $90^\circ$ околу $O$, тогаш $\overline{AB}=\overline{OA}\sqrt{2}>\overline{OA}$, што е противречност.

Да ги тргнеме од $S$ сите точки $A_i$ и $B_i$. Добиеното множество $S'$ ги исполнува условите на нашето тврдење (бидејќи множеството отсечки $A_iB_i$ е инваријантно при ротација за $90^\circ$ околу $O$). Согласно индуктивната претпоставка првиот играч има победничка стратегија кога се игра на $S'$. Ќе покажеме таква стратегија и на $S$.

Првиот играч игра по стратегијата на $S'$, додека вториот играч не го премести жетонот од точка $X$ во $S'$ во точка $Y$ надвор од $S'$ (последното сигурно се случува, бидејќи првиот играч има победничка стратегија на $S'$). Нека $Y=A_i$. Тогаш првиот играч го преместува жетонот во $B_i$, бидејќи $\overline{A_iB_i}=d>\overline{XA_i}$. Сега вториот играч не може да направи потез, бидејќи нема отсечка со должина поголема од $d$. ■

**Задача 7.** Дадена е $(m+1)\times m$ решетка и жетон во еден од нејзините јазли. Двајца играчи последователно го поместуваат жетонот во соседни јазли, при што не смее да се минува по отсечка која веќе е искористена. Губи играчот кој не може да повлече потез. Докажи дека ако на почетокот жетонот е во еден од јазлите на долната хоризонтала, тогаш првиот играч има победничка стратегија.

**Решение.** Нека решетката е $\{(x,y)\,|\,x=0,1,2,...,m,\ y=0,1,2,...,m-1\}$ и почетната положба на жетонот е во точката $P=(a,0)$. Да означиме

$$Q=(0,a),\ R=(m+1-a,m+1) \text{ и } S=(m+1,m+1-a).$$

Нека $X$ е множеството од сите точки од решетката кои се наоѓаат на контурата и во внатрешноста на четириаголникот определен со правите $PQ,QR,RS$ и $SP$.

Ако бројот $a$ е парен, да ги обоиме точките од $X$ во две бои на следниов начин: ја боиме $(x,y)$ во црвено, ако $x+y-a$ е парен број, а во сино ако $x+y-a$ е непарен број. Нека во првиот чекор првиот играч го премести жетонот од $P=(a,0)$ во $(a,1)$, која е сина точка. Тогаш не е тешко да се види дека првиот играч е на потез кога жетонот е во црвена точка, а вториот е на потез кога жетонот е во сина точка. Уште повеќе, секоја црвена точка е соседна со непарен број сини точки во кои жетонот до тогаш не бил поставен. Според тоа, првиот играч секогаш има непарен број можности, во случајов барем една. Останува да видиме дека од сините точки не може да се излезе од $X$, бидејќи контурата на $X$ се состои од црвени точки. Според тоа, доволно е првиот играч да игра само во $X$ и тој победува.

Случајот кога $a$ е непарен се разгледува аналогно. ■

**Задача 8.** Нека $p$ е прост број и нека $M=a_0+10a_1+...+10^{p-1}a_{p-1}$. Играчите $A$ и $B$ играат игра, при што играчот $A$ игра прв. Тие наизменично бираат број $i$ од множеството $\{0,1,...,p-1\}$ кој претходно не е избран, па на местото на $a_i$ запишуваат некоја цифра (може и нула). Целта на играчот $A$ е по завршување на играта бројот $M$ да биде делив со $p$. Докажи дека $A$ има победничка стратегија.

**Решение.** Ќе велиме дека играчот прави потез $(i,a_i)$ ако во својот потез избира индекс $i$, потоа број $a_i$ од множеството $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Ако $p=2$ или $p=5$, тогаш играчот $A$ во првиот потез го избира потезот (0,0) и победува независно од следните потези бидејќи $M$ на крајот на играта ќе биде делив со 10.

Сега нека $p$ е прост број различен од 2 и 5. Играчот $A$ во првиот потез го избира потезот $(p-1,0)$. Од малата теорема на Ферма следува

$(10^{\frac{p-1}{2}})^2\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $p\,|\,(10^{\frac{p-1}{2}})^2-1=(10^{\frac{p-1}{2}}-1)(10^{\frac{p-1}{2}}+1)$.

Бидејќи $p$ е прост број поголем од 2 разликуваме два случаја.

1) $p\,|\,10^{\frac{p-1}{2}}+1$. Во овој случај, секогаш кога играчот $B$ ќе направи потез $(i,a_i)$, играчот $A$ ќе направи потез $(j,a_j)=(i+\frac{p-1}{2},a_i)$ ако $i<\frac{p-1}{2}$ или потез $(j,a_j)=(i-\frac{p-1}{2},a_i)$ ако $i\ge\frac{p-1}{2}$. Забележуваме дека $p$ е делител на $a_i10^i+a_j10^j$, па затоа по секој потез на $A$ збирот на дотогаш избраните

членови ќе биде делив со $p$. На овој начин $p-1$ членови се поделени во парови чиј збир е делив со $p$, па затоа на крајот од играта $M$ ќе биде делив со $p$, т.е. $A$ има победничка стратегија.

2) $p\,|\,10^{\frac{p-1}{2}}-1$. Во овој случај, секогаш кога играчот $B$ ќе направи потез $(i,a_i)$, играчот $A$ ќе направи потез $(j,a_j)=(i+\frac{p-1}{2},9-a_i)$ ако $i<\frac{p-1}{2}$ или потез $(j,a_j)=(i-\frac{p-1}{2},9-a_i)$ ако $i\geq\frac{p-1}{2}$. Важи $a_i 10^i + a_j 10^j = 9\cdot 10^i$, па затоа на крајот на играта имаме

$$M=\sum_{i=0}^{\frac{p-3}{2}} 9\cdot 10^i = 10^{\frac{p-1}{2}}-1\equiv 0(\mathrm{mod}\, p),$$

што значи дека $A$ има победничка стратегија.

**Задача 9.** Дадени се природни броеви $n$ и $k$, за кои $n\geq k\geq 2$. Андреј ја игра следнава игра со Мартин, кој располага со $2n$ карти, при што за секој $i=1,2,...,n$ бројот $i$ е запишан точно на две карти. Мартин во произволен редослед ги реди картите со запишаните броеви надолу. Андреј прави чекор на следниов начин: избира $k$ од картите на Мартин и тој му ги кажува броевите запишани на нив. Ако меѓу овие $k$ карти има две со еднакви броеви запишани на нив Андреј победува. Ако нема, Мартин ги размешуваа само картите кои во овој потез ги избрал Андреј (притоа Андреј не го гледа) и Андреј повторно е на потез. Ќе велиме дека играта е добитна за Андреј, ако постои природен број $m$ и стратегија со која Андреј може да победи во најмногу $m$ чекори, независно од како Мартин ги размешува картите. За кои вредности на $n$ и $k$ играта е добитна за Андреј?

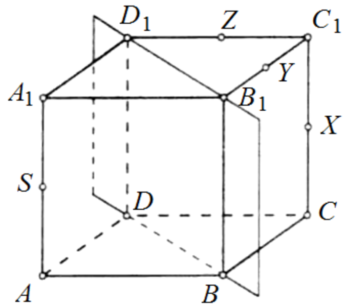
**Решение.** Играта е добитна ако и само ако $n\neq k$.

Нека $2\leq k<n$. Да ги нумерираме местата на кои Мартин ги поставува картите последователно со броевите од 1 до $2n$. Последователно прашуваме за картите кои се наоѓаат на местата $(1,2,...,k);(2,3,...,k+1)$ итн. на карјот на местата $(2n-k+1,2n-k+2,...,2n)$. Последователно споредувајќи два соседни одговори на Мартин, ги дознаваме вредностите на картите кои по поставувањето на последното прашање ќе се наоѓаат на местата $1,2,...,2n-k$. Бидејќи $k<n$, ги знаеме местата на повеќе од $n$ карти, па затоа можеме да најдеме две еднакви. Сега со следниот чекор Андреј победува.

Ако $n=k$, тогаш ако Андреј не победил во првиот чекор, имаме $n$ карти и на секоја од нив секој од броевите $1,2,...,n$ е запишан точно по еднаш. Откако Мартин ќе ги размеша картите, Андреј нема информација за редоследот на тие карти. Тврдиме дека тоа значи дека играта не е добитна за Андреј. Навистина, нека $S$ е множеството од тие карти, а $\overline{S}$ е множеството од преостанатите $n$ карти. Андреј не може да победи ако избира карти само од $S$ или само од $\overline{S}$. Ако Андреј избере неколку карти од $S$, а останатите ги избере од $\overline{S}$, може да се случи изборот од $\overline{S}$ да е комплементарен на изборот од $S$. Јасно, не постои стратегија со која последната ситуација може да се избегне. ■

**Задача 10.** Дадена е коцка. По нејзините рабови се движат мравка и два пајаци. Нивните најголеми брзини се еднакви. На почетокот двата пајаци се наоѓаат во едно теме, а мравката се наоѓа во дијагоналното спротивно теме. Докажи дека пајаците секогаш може да ја фатат мравката. Во текот на движењето и мравката и пајаците имаат информација за моменталната положба на сите учесници во потерата.

**Решение.** Нека коцката е $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и нека во почетниот момент пајаците $P_1$ и $P_2$ се наоѓаат во темето $A$, а мравката се наоѓа во темето $C_1$. Добра стратегија за пајаците е следнава: Пајакот $P_2$ се движи кон темето $C_1$ по патот $A-D-D_1-C_1$, а пајакот $P_1$ се движи така што е во симетрична положба со мравката во однос на центарот на коцката. Движењето на мравката може да биде такво што:

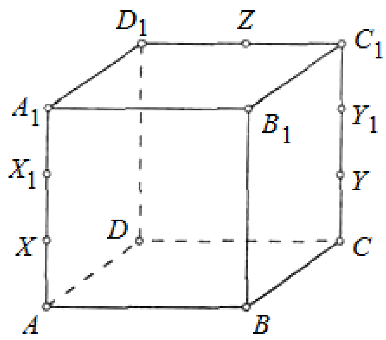



1) Мравката никогаш не доаѓа во некоја од средините $X, Y, Z$ на отсечките $C_1C, C_1B_1, C_1D_1$, т.е. се движи само по отсечките $C_1X, C_1Y, C_1Z$, без точките $X, Y, Z$. Тогаш мравката ја фаќа пајакот $P_2$ на некоја од овие отсечки.
2) Мравката во текот на движењето стигнува во некоја од точките $X, Y, Z$, да кажеме во моментот $t_1$ е во точката $X$. Во тој момент пајакот $P_1$ е во средината $S$ на отсечката $AA_1$. Од моментот $t_1$ па понатаму пајакот $P_1$ се движи така што е во симетрична положба со мравката во однос на рамнината $BB_1D_1D$. Ако мравката во текот на движењето по моментот $t_1$ дојде во некоја од точките $B, B_1, D_1, D$, тогаш во таа точка ја фаќа пајакот $P_1$. Во спротивен случај ја фаќа пајакот $P_2$, кој по доаѓањето во точката $C_1$ ја заробува мравката на отсечката $C_1B_1$, или по доаѓањето од $C_1$ во $C$ ја заробува мравката на една од отсечките $CB$ или $CD$. ■

**Задача 11.** Дадена е коцка. По нејзините рабови се движат мравка и три пајаци. Мравката е три пати побрза од секој од пајаците. Докажи дека пајаците секогаш може да ја фатат мравката. Во текот на движењето и мравката и пајаците имаат информација за моменталната положба на сите учесници во потерата.

**Решение.** Нека коцката е $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\overline{AB} = a$ и нека $X$ и $X_1$ се точки од работ $AA_1$, а $Y$ и $Y_1$ се точки од работ $CC_1$ такви што важи

$$\overline{AX} = \overline{XX_1} = \overline{X_1A_1} = \tfrac{a}{3},\ \overline{CY} = \overline{YY_1} = \overline{Y_1C_1} = \tfrac{a}{3}.$$




Добра стратегија за пајаците, да ги означиме со $P_1, P_2$ и $P_3$ е следнава. Во некој момент $t_0$ пајаците $P_1$ и $P_2$ стигнуваат во точките $X$ и $Y$, соодветно. Во текот на натамошната потера по мравката пајакот $P_1$ ќе се движи само по работ $AA_1$, а пајакот $P_2$ само по работ $CC_1$. По моментот $t_0$ пајакот $P_3$ тргнува во потера по мравката. Мравката при бегањето пред пајакот $P_3$ не смее да се задржува многу долго на рабовите $AA_1$ и $CC_1$, бидејќи во спротивно пајакот $P_3$ ќе ја зароби со еден од пајаците $P_1$ и $P_2$ на некоја од отсечките $AX, A_1X, CY, C_1Y$. Очигледно, при движењето по другите рабови пајакот $P_3$ може да ја примора мравката да дојде во некое од темињата $B, D, B_1$ или $D_1$. Навистина, ако мравката во моментот $t_0$ се нашла на работ $BB_1$, тогаш пајакот $P_3$ и се приближува и ја принудува мравката да дојде во темето $B$ или во темето $B_1$. Ако мравката во моментот $t_0$ се наоѓа на некоја од страните на квадратот $ABCD$, тогаш пајакот $P_3$ ја принудува да дојде во некое од темињата $B$ или $D$, бидејќи мравката не смее од точките $A$ и $C$ да оди по рабовите $AA_1$ и $CC_1$, на кои ја чекаат пајаците $P_1$ и $P_2$. Аналогно се разгледуваат останатите можни положби на мравката во моментот $t_0$. Сега, ќе разгледаме два случаја.

1) Мравката во некој момент $t_1 > t_0$ дошла во некое од темињата $B$ или $D$, да кажеме во $B$. По моментот $t_1$, пајакот $P_1$ се движи на следниот начин: ако мравката се движи по рабовите на ѕидот $ABB_1A_1$ во насока $A-B-B_1-A_1$, пајакот $P_1$ се движи по работ $AA_1$ кон темето $A_1$. Ако мравката се движи по рабовите на ѕидот $ABCD$ во спротивна насока, тогаш пајакот $P_1$ тргнува кон темето $A$. Мравката не може да стигне во темето $A$ пред пајакот $P_1$, бидејќи $\overline{AX} = \frac{a}{3}$ и $\overline{BA} = a$. Исто така, мравката не може да стигне во темето $A_1$ пред пајакот $P_1$, бидејќи $\overline{XA_1} = \frac{2a}{3}$, $\overline{BB_1} + \overline{B_1A_1} = 2a$. Ако мравката го напушти ѕидот $ABB_1A_1$, тргнувајќи од точката $B$ по работ $BC$ или тргнувајќи од точката $B_1$ по работ $B_1C_1$, тогаш додека мравката се движи по рабовите на квадратот $ABCD$ пајакот $P_1$ мирува (во точката $X$, ако мравката тргнала по работ $BC$, односно во точката $X_1$, ако мравката тргнала по работ $B_1C_1$). Според тоа, пајакот $P_1$ може да ја спречи мравката да побегне преку темињата $A$ и $A_1$. Аналогно се докажува дека пајакот $P_2$

може да ја спречи мравката да побегне преку темињата $C$ и $C_1$. Бидејќи пајакот $P_3$ оди по мравката, мравката ќе биде фатена на некој од рабовите $BA, BC, BB_1, B_1A_1$ или $B_1A_1$.

2) Мравката во некој момент $t_2 > t_0$ дошла во некое од темињата $B_1$ или $D_1$, да кажеме во темето $B_1$. Бегајќи пред пајакот $P_3$ по моментот $t_2$, мравката мора од темето $B_1$ да дојде во некое од темињата $B, C_1$ или $A_1$. За тоа време пајаците $P_1$ и $P_2$ може да се движат така што ќе ја постигнат следнава цел:
а) Во моментот на доаѓање на мравката во темето $B$ пајаците $P_1$ и $P_2$ ќе се наоѓаат во точките $X$ и $Y$, со што задачата се сведува на случајот 1).
б) Во моментот на доаѓање на мравката во темето $A_1$ или темето $C_1$, да кажеме во моментот $t_3$, пајаците $P_1$ и $P_2$ се наоѓаат во точките $X_1$ и $Y_1$. По моментот $t_3$, пајаците $P_1$ и $P_2$ чекаат во точките $X_1$ и $Y_1$, додека мравката бегајќи пред пајакот $P_3$ не дојде во некое од темињата $B_1$ или $D_1$. Позицијата кога пајаците $P_1$ и $P_2$ се наоѓаат во точките $X_1$ и $Y_1$, а мравката во некое од темињата $B_1$ или $D_1$ е аналогна на позицијата во случајот 1). Со тоа докажавме дека пајаците може да ја фатат мравката.

Литература

1. Maldenović, P., Petrović, V.: Stereometrija – izabrani problem, Matematiskop, Beograd, 2002
2. Бойваленков, П., Димитров, С., Маринов, М., Тодоров, Т.: Национални олимпиади по математика 2015-2016, УНИМАТ СМБ, София, 2018
3. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
4. Ђукић, Д., Радовановић, М.: Математичке олимпијаде средљошколаца од 2012 до 2019 године, ДМ Србије, Београд, 2012
5. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, Београд, 2012