R. Despotović (Novi Sad)

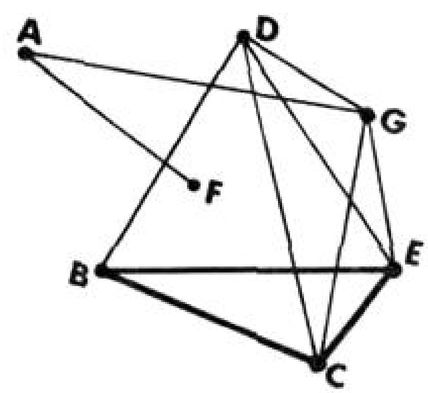
KORIŠĆENJE SHEMA — GRAFOVA U REŠAVANJU NEKIH ZADATAKA

1. Šta je graf?

a) Za školsko takmičenje učenika u šahu prijavilo se 7 takmičara, čija ćemo imena, radi kratkoće, označiti sa A, B, C, D, E, F, G. Posle izvesnog vremena odigran je određen broj partija (nije se igralo po strogom turnirskom sistemu, tj. po kolima), pa je na sastanku šahovske sekcije trebalo utvrditi ko s kim treba još da igra. Da bi to utvrdio predsedavajući je nacrtao na hartiji 7 tačaka, koje je obeležio slovima učesnika: A, B, C, D, E, F, G. Izjavu svakog takmičara o odigranim partijama prikazao je spajanjem odgovarajućih tačaka neprekidnom linijom (sl. 1) Evo tih izjava:

Takmičar ***A:*** pobedio sam G, a izgubio od F;
,, ***B:*** pobedio sam D, a remizirao sa C i E;
,, ***C:*** pobedio sam D, izgubio od G, a remizirao sa B i E;
,, ***D:*** izgubio sam od B i C, a rezimirao sa E i G;
,, ***E:*** pobedio sam G, a remizirao sa B, D i C;
,, ***F:*** pobedio sam A;
,, ***G:*** pobedio sam C, izgubio od A i E, a remizirao sa D.

Sve ove izjave predsedavajući je „zapisao" na sledećoj shemi (sl. 1.), gde zajedničke tačke linija koje su različite od A, B, C, D, E, F, G nemaju nikakvo značenje.



Sl. 1.

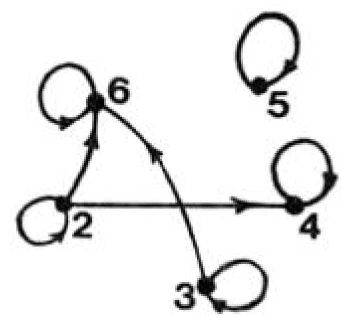
Takva shema se zove ***graf***. On se, znači, sastoji iz konačnog skupa tačaka, koje nazivamo **temenima** i konačnog skupa linija što vezuju te tačke, a koje nazivamo **ivicama** grafa.

Ako bi uočili samo takmičare iz jednog odeljenja škole (npr. B, C, E) i partije koje su oni međusobno odigrali, imali bi deo tog grafa koji se zove ***podgraf*** datog grafa (na slici 1. punom linijom). Međutim ako posmatramo sve takmičare i samo one partije koje su se završile pobedom, odnosno porazom, onda bi u ovom primeru imali obuhvaćena sva temena grafa sa slike 1, ali ne i sve njihove ivice. To bi bio ***parcijalni graf*** datog grafa.

Kada budu završene sve partije tada će odgovarajući graf imati od svakog temena po šest ivica, tj. **svako** teme će biti spojeno sa svakim od ostalih šest. Takav graf se zove ***potpun*** (homogen).

b) Ponekad je pri spajanju temena potrebno naglasiti i smer tog spajanja, pa imamo **orijentisane ivice** i **orijentisan graf,** a ima slučajeva kada je jedno teme spojeno sa samim sobom — to se zove ***petlja grafa***

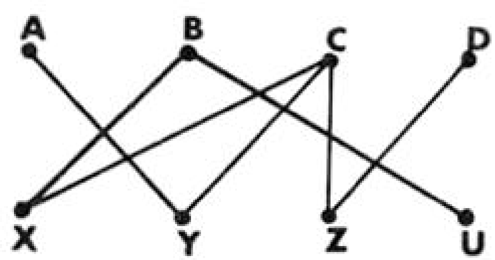
Na primer, uzmimo skup $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ i relaciju tog skupa „x se sadrži u y". Shematski prikaz dat je u obliku grafa na slici 2. To je jedan orijentisan graf na kojem imamo i petlje.



Sl. 2.

c) U nekim slučajevima u skupu temena datog grafa imamo takva dva podskupa, unutar kojih nema međusobnog spajanja temena ivicama, već samo postoje ivice između pojedinih temena koje pripadaju tim različitim podskupovima. Takav graf se zove ***dvostran***. On ima sledeći oblik (vidi sl. 3.):

Sl. 3.



Podskupovi su: $\{A, B, C, D\}$ i $\{X, Y, Z, U\}$

2. Graf i zadaci logičko kombinatorne prirode

To su zadaci za koje nemamo utvrđen postupak ili „formulu" za rešavanje, već zahtevaju određeno razmišljanje, kombinovanje i zaključivanje da bi se dobilo rešenje. Opšte uputstvo za pristup i rešavanje zadataka sa logičkom sadržinom pomoću grafova, sastoji se u sledećem:

— najpre treba dobro uočiti elemente, pretpostavke, uslove i zahteve zadatka;

— zatim na osnovu njih treba predstaviti u obliku grafa sve mogućnosti zadatka i uveriti se da graf odražava njegov tekst;

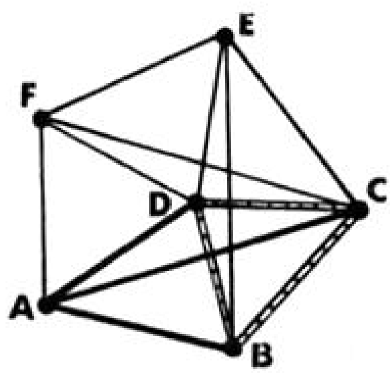
— najzad treba uočiti samo onaj graf, ako ih je bilo više, odnosno deo dobijenog grafa, ili sam graf, koji u potpunosti ispunjava uslove zadatka; a sve one koji dovode do protivurečnosti i neodrživog zaključka treba odbaciti. Tim uočavanjem smo ustvari dobili i rešenje zadatka.

Naravno da je ovo najopštije uputstvo koje se, zavisno od tipa zadatka, može dopuniti nekim pojedinostima. To će biti ilustrovano kroz nekoliko zadataka.

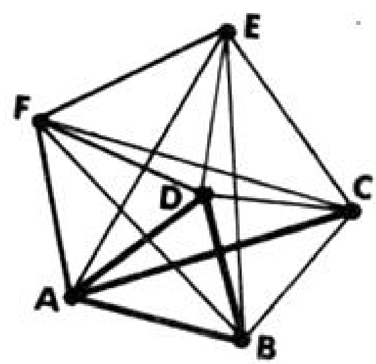
Vezivanje gradova. — *Šest gradova tako je povezano, da svaki par gradova ima direktnu međusobnu saobraćajnu vezu i to bilo železničku, bilo autobusku (ali ne obe).*

Može li se sa sigurnošću tvrditi da među njima postoje tri grada, tako da su sve veze među njima iste vrste.?[1)]

R e š e n j e.– Sadržaj prve rečenice postavljenog zadatka možemo vrlo lako predstaviti u obliku grafa, ako gradovima korespondiramo temena, a vezama između njih ivice grafa (vidi sl. 4a). Dobili smo



Sl. 4a.



Sl. 4b.

jedan potpuni graf sa šest temena. U njemu sada treba uočiti podgraf koji ispunjava zahtev izražen u drugoj rečenici, tj. da uočimo takva tri grada da veze između njih budu iste vrste. Zato uočimo bilo koji grad, tj. teme, npr. A; odatle polaze bar tri autobuske ili bar tri železničke veze, jer dve i dve ne može biti (imamo potpun graf sa pet ivica iz svakog temena)! Neka su to tri autobuske veze do

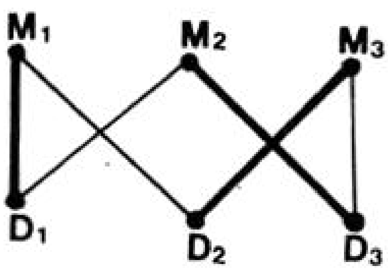
[1)] Tekst zadatka uzet iz monografije prof. *Devidé-a: „Sto elementarnih ali težih zadataka"*.

gradova B, C, D, (na sl. 4a istaknute debljom linijom). Za ova poslednja tri grada postoje dve mogućnosti: 1) ili su sve veze između njih železničke — to bi onda bilo rešenje zadatka (vidi sliku 4a, šrafiranu vezu između B, C, D); 2) ili je bar jedna od tih veza autobuska, npr. $(B, D,)$. Ona sa (A, B) i (A, D) takođe daje potvrdan odgovor na pitanje postavljeno u zadatku (vidi sliku 4b -deblja linija između $A, B,$ i D).

Isti bi postupak bio i do istog bi zaključka došli da smo uzeli da iz A polaze tri železničke veze.

Mladići i devojke. — *Od tri mladića i tri devojke svaki mladić poznaje tačno dve devojke i svaka devojka tačno dva mladića. Pokazati da se mladići i devojke mogu svrstati u parove tako da se u svakom paru nađu poznanici.*[2)]

Rešenje.—Iz teksta zadatka se vidi da ovde treba iskoristiti dvostrani graf, jer međusobno poznavanje samo mladića ili samo devojaka zadatak nije uslovio. Odgovarajući graf bi bio (vidi sl. 5.). U njemu sada treba utvrditi da postoji takav parcijalni graf koji predstavlja rešenje zadatka. U tom cilju dovoljno je da uočimo samo jedan par poznanika, npr. (M_1, D_1), mada je u ovom zadatku sasvim svejedno od kojeg bi para pošli, jer nas neće dovesti do protivurečnosti. To naravno nije uvek slučaj. Ostala dva para su onda potpuno određena, tj. (M_2, D_3) i (M_3, D_2).



Sl. 5.

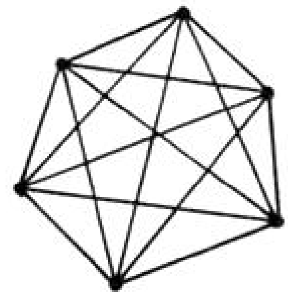
Savetovanje. — *Na jedno gradsko savetovanje prosvetnih radnika bilo je pozvano iz svake škole 5 nastavnika, a svaki od pozvanih nastavnika radio je u dve škole i predstavljao je na tom savetovanju njih obe. Ma koja moguća kombinacija dveju škola imala je na tom savetovanju jednog i samo jednog predstavnika.*

Koliko škola ima u gradu? Koliko je nastavnika pozvano na savetovanje?

Rešenje.—Ako pristupimo crtanju grafa na osnovu uslova zadatka, prvo ćemo uočiti da će nam temena grafa predstavljati

(2) Tekst zadatka uzet iz edicije *Matematička biblioteka*, № 32 — Matematičke olimpijade u Čehoslovačkoj, Mađarskoj i Rumuniji.

škole, a da će prosvetni radnici biti predstavljeni ivicama koje spajaju ma koja dva temena. Pođemo li od uslova da je iz svake škole pozvano na savetovanje 5 prosvetnih radnika, onda to znači da iz svakog temena grafa mora polaziti po pet ivica. To dovodi do „konstrukcije" potpunog grafa sa 6 temena (vidi sliku 6.). Iz broja temena zaključujemo da je u gradu bilo 6 škola, a prema broju ivica vidimo da je na savetovanje bilo pozvano 15 prosvetnih radnika.

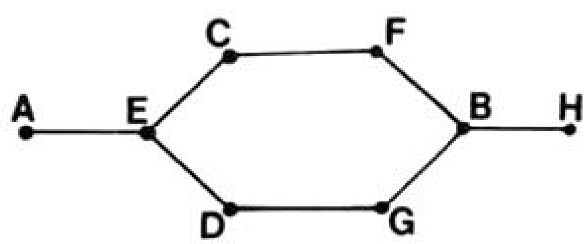


Sl. 6.

Izlet. — *Otac i njegova dva sina spremali su se da odu na izlet. Za prevoz su imali samo jedan motorbicikl sa dva sedišta. Međutim, motor je mogao poneti samog oca, bilo jednog ili oba sina, ali nije mogao poneti oca i sina, a naravno ni svu trojicu.*

Kako će svi otići na izlet? Rešenje treba da sadrži najmanji moguć broj putovanja od kuće do izletišta i natrag.

Rešenje.—Uočimo najpre da pri prevozu motorbiciklom od kuće do izletišta mogu nastupiti na polaznoj stanici (kod kuće) sledeće kombinacije „izletnika": $A=\{O$—otac, S_1—prvi sin, S_2—drugi sin$\}$, $B=\{S_1, S_2\}$, $C=\{O, S_1\}$, $D=\{O, S_2\}$, $E=\{O\}$, $F=\{S_1\}$, $G=\{S_2\}$, $H=\emptyset$, gde nam skup A predstavlja stanje kada još niko nije stigao na izletište, a skup H stanje kada na polaznoj stanici nije bilo više nikoga. Ako sada navedenim skupovima korespondiramo temena grafa, a promene stanja na polaznoj stanici, tj. svako putovanje bilo u odlasku ili povratku, označimo kao ivice grafa, onda možemo pristupiti „konstrukciji" grafa prema uslovima zadatka. Dobili bi graf kao na slici 7. Iz njega zaključujemo da postoje dva načina da se sva trojica odvezu na izlet i to sa najmanje putovanja, a u oba slučaja se mora pet puta motorbiciklom proći staza od kuće do izletišta.

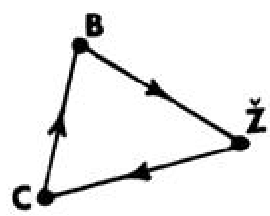


Sl. 7.

***Tri druga.** — U parku su se srela tri druga: profesor Belić, pisac Crnković i lekar Žutić. „Zanimljivo, jedan od nas ima belu, drugi crnu, a treći žutu kosu, ali nijedan od nas nema onu boju kose na koju ukazuje njegovo prezime" — primeti crnokosi. „Ti si u pravu" — reče Belić.*

Koju boju kose ima svaki od ta tri druga?[3]

Rešenje.—Ako drugovima korespondiramo temena grafa, koja ćemo obeležiti početnim slovima njihovih prezimena (B, C, $\check{Z}$), a spojimo ivicom ona temena za koja je moguće dovesti u vezu početno slovo prezimena i boju kose, pri čemu istovremeno B, C, $\check{Z}$ znače i odgovarajuću boju, onda ćemo dobiti sledeći graf (vidi sl. 8.). Petlji nema, jer prema uslovu zadatka nijedan nema boju kose na koju ukazuje početno slovo njegovog prezimena. Međutim, sada taj graf treba orijentisati, tj. da od dve mogućnosti za svakog druga za boju kose, utvrdimo onu pravu. Zato uočimo zadnji deo prve rečenice zadatka i izjavu Belića. Govorio je crnokosi, a dao mu je za pravo Belić, što znači da Belić nije crn. Time je određena orijentacija od B ka $\check{Z}$, a ne od B prema C. Takođe. za ostala dva, pa je zaključak: Belić — žuta kosa, Žutić — crna, Crnković — bela.



Sl. 8.

***Odakle su.** — Pet učenika iz pet raznih gradova došli su da bi učestvovali na takmičenju iz matematike — Saveznoj matematičkoj olimpijadi.*

„Odakle ste vi?" — upitani su.

Evo šta je svaki od njih odgovorio.

Antić: „Ja sam došao iz Zagreba, a Danevski živi u Bihaću".

Bernik: „U Bihaću živi Cvejić; ja sam doputovao iz Skoplja".

Cvejić: „Iz Zagreba sam doputovao ja, a Bernik iz Maribora".

Danevski: „Ja sam doputovao iz Bihaća, a Erić iz Niša".

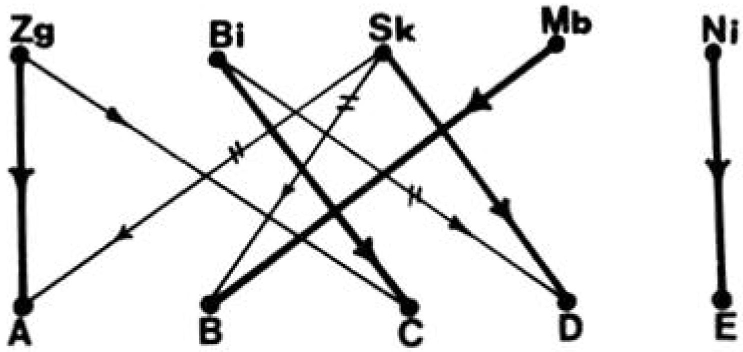
Erić: „Da, ja sam stvarno iz Niša, a Antić živi u Skoplju".

U odgovoru svakog učenika jedna je tvrdnja bila istinita, a druga lažna. Na osnovu toga treba utvrditi odakle je doputovao svaki učenik.[4].

---

[3]), [4]) Tekstovi zadataka uzeti su iz *Matematičkog lista* za učenike osnovne škole br. II.4 iz 1968. godine.

R e š e n j e. — I ovde ćemo iskoristiti dvostrani graf da bi došli do rešenja zadatka. Jedan podskup temena predstavljaće učenici, a drugi podskup gradovi. Elemente tih podskupova vezivaćemo ivicama prema odgovorima učenika. Dobićemo sledeći graf (vidi sliku 9).



Sl. 9.

U ovom grafu treba izdvojiti takav parcijalni graf u kojem će svako teme donjeg podskupa biti spojeno samo sa jednim temenom gornjeg podskupa. Time ćemo dobiti i odgovor na pitanje postavljeno u zadatku.

Moramo se najpre odlučiti za jedan par. Neka to bude (A, Z_g), tj. da je Antić iz Zagreba. Tada drugi deo Antićeve izjave nije tačan, pa precrtavamo da je Danevski došao iz Bihaća. Isto tako ne može Cvejić doći iz Zagreba, pa je tačno da je Bernik iz Maribora. Bernik sada ne može biti iz Skoplja, pa je tačno da je Cvejić doputovao iz Bihaća. Pošto prvi deo izjave Danevskog takođe nije tačan, onda je Erić došao iz Niša; a s obzirom da je prvi deo Erićeve izjave tačan, onda Antić nije došao iz Skoplja, već ostaje da je iz Skoplja došao Danevski.

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија