ММО 1998

1. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$ и $\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EC}$. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC, а N е средина на страната AE. Определи го $\measuredangle NTD$.

2. Докажи дека броевите 1, 2, 3, ..., 1997, 1998 не може да се разбијат на три групи така што збирот на броевите во првата група е делив со 2000, збирот на броевите во втората група е делив со 3999 и збирот на броевите во третата група е делив со 5998.

3. Даден е триаголник ABC. Нека p,q,r се произволни позитивни реални броеви. Ја применуваме следва постапка: страната AB ја продолжуваме преку B до точка A' така што $\overline{BA'}=p\overline{AB}$, страната BC ја продолжуваме преку C до точка B' така што $\overline{CB'}=q\overline{BC}$, страната CA ја продолжуваме преку A до точка C' така што $\overline{AC'}=r\overline{CA}$.

Дефинираме функција f со $f(p,q,r)=\frac{P_{A'B'C'}}{P_{ABC}}$, каде со P_{XYZ} е означена плоштината на триаголникот XYZ.

Докажи дека за сите позитивни реални броеви x,y,z и за произволен природен број n важи равенството

$$f(x,y,z)+f(x+1,y+1,z+1)+...+f(x+n-1,y+n-1,z+n-1)=n^3 f(\tfrac{x}{n},\tfrac{y}{n},\tfrac{z}{n})$$

4. Докажи дека за секој триаголник ABC важи неравенството

$$\frac{ab+bc+ca}{4P}\geq\sqrt{3}$$

каде што a,b,c се страните на триаголникот, а P е неговата плоштина.

5. Нека $\{a_n\}$ е низата зададена со $a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2-\sqrt{4-a_n^2}}$, $n\geq 1$ и нека $\{b_n\}$ е низата зададена со $b_n=2^{n+1}a_n$. Докажи дека за секој природен број n важи $b_n<7$ и $b_n<b_{n+1}$.