Томи Димовски, Ана Димовска
Скопје

НЕКОИ ЕДНОСТАВНИ ТЕХНИКИ ЗА РЕШАВАЊЕ НА ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ (ВТОР ДЕЛ)

Оваа статија е продолжение на претходната **НЕКОИ ЕДНОСТАВНИ ТЕХНИКИ ЗА РЕШАВАЊЕ НА ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ (ПРВ ДЕЛ)** и е поврзана со решавање на функционалните равенки во кои функциите задоволуваат некои дополнителни услови како: непрекинатост, монотоност, парност и непарност, симетрија, периодичност итн. Ќе бидат разгледани и дадени за вежба на читателот задачи поврзани со оваа област како од IMO, така и од други државни и меѓународни математички натпревари.

1. Непрекинати функции

Некои равенки во кои се срекаваат непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ може да се решат на следниот начин. Најпрво определуваме некои специјални вредности, како на пример $f(0)$ или $f(1)$. Со принципот на математичка индукција ги определуваме вредностите $f(n)$ за секој $n\in\mathbf{N}$, а потоа и вредностите $f(n)$ за секој $n\in\mathbf{Z}$. Во наредниот чекор ги определуваме вредностите $f(\frac{1}{n})$ за $n\in\mathbf{Z}$, а потоа и вредностите $f(\frac{m}{n})$ за $\frac{m}{n}\in\mathbf{Q}$. Конечно, ја користиме непрекинатоста на функцијата f и фактот дека множеството рационални броеви е густо во множеството реални броеви, за да го определиме обликот на $f(x)$ за секој $x\in\mathbf{R}$.

Како илустрација на горе наведеното ќе ја разгледаме Кошиевата равенка.

Пример 1. Определи ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}$.

Решение. Со замена во равенката за $x=y=0$, добиваме $f(0)=0$. Со принципот на математичка индукција се покажува дека $f(nx)=nf(x)$ за секој $n\in\mathbf{N}$ и секој $x\in\mathbf{R}$. Следува дека, $f(n)=nf(1)$ за секој $n\in\mathbf{N}$. Заменуваме $y=-x$ во равенката и добиваме $f(0)=f(x)+f(-x)$, од каде следува дека $f(-x)=-f(x)$ за секој $x\in\mathbf{R}$. За $n\in\mathbf{N}$, $f(-n)=-f(n)=-nf(1)$. Следува дека, $f(n)=nf(1)$ за секој $n\in\mathbf{Z}$. Нека $m\in\mathbf{N}$ и $n\in\mathbf{Z}$. Тогаш $nf(\frac{m}{n})=f(n\cdot\frac{m}{n})=f(m)=mf(1)$. Според тоа, $f(\frac{m}{n})=\frac{m}{n}f(1)$, односно $f(x)=xf(1)$ за секој $x\in\mathbf{Q}$. Нека $x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$. Тогаш бидејќи $\mathbf{Q}$ е густо во $\mathbf{R}$ следува дека постои низа (x_n) од рационални броеви таква што $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Од непрекинатоста на $f(x)$ следува дека

$$f(x) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n f(1)) = xf(1).$$

Според тоа, $f(x) = xf(1)$ за секој $x \in \mathbf{R}$. Бидејќи $f(1)$ може да биде било кој реален број, решението ако постои ќе биде од облик $f(x) = \alpha x$ за константата $\alpha = f(1)$. Лесно се проверува дека овие функции ја задоволуваат дадената равенка. ■

Во следните два примери се користи општото решение на Кошиевата равенка.

Пример 2. Одреди ги сите непрекинати функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ такви што

$$f(\sqrt[3]{x^3 + y^3}) = \sqrt[3]{f^3(x) + f^3(y)},$$

за секои $x, y \in \mathbf{R}$.

Решение. Функционалната равенка можеме да ја напишеме во облик

$$f^3(\sqrt[3]{x^3 + y^3}) = f^3(x) + f^3(y).$$

Со замена $x = y = 0$ во равенката добиваме $f(0) = 0$. Со замена $y = -x$, се добива дека $f(-x) = f(x)$, односно дека f е непарна функција. Воведуваме смена $x^3 = t, y^3 = u$ и добиваме

$$(f(\sqrt[3]{t+u}))^3 = f^3(\sqrt[3]{t}) + f^3(\sqrt[3]{u}).$$

Нека $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ е функција дефинирана со $g(t) = (f(\sqrt[3]{t}))^3$. Тогаш $g(t+u) = g(t) + g(u)$. Равенката $g(t+u) = g(t) + g(u)$ е Кошиева, од каде следува дека $g(t) = \alpha t$ за $\alpha \in \mathbf{R}$. Тогаш од $(f(\sqrt[3]{t}))^3 = g(t) = \alpha t$, добиваме дека $f(x) = \beta x$, каде што $\beta = \sqrt[3]{\alpha}$. ■

Пример 3. Одреди ги сите непрекинати функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_0^+$ такви што

$$f(\sqrt[6]{x^6 + y^6}) = f(x) + f(y),$$

за секои $x, y \in \mathbf{R}$.

Решение. Со замена $x = y = 0$ во равенката добиваме $f(0) = 0$. Од друга страна, за $x < 0$ и $y = 0$, добиваме дека $f(-x) = f(x)$, односно дека f е парна функција. Според тоа, доволно е да ја определиме функцијата $f(x)$ за $x > 0$. Дефинираме $g : \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+$ со $g(x) = f(\sqrt[6]{x})$. Заменуваме и добиваме

$$g(x^6 + y^6) = g(x^6) + g(y^6).$$

Воведуваме смена $x=\sqrt[6]{t}, y=\sqrt[6]{u}$ и добиваме $g(t+u)=g(t)+g(u)$, за $t,u\geq 0$. Решение на последната равенка е $g(x)=\alpha x$ за $\alpha\in\mathbf{R}_0^+$. Оттука, следува $f(\sqrt[6]{x})=g(x)=\alpha x$, односно $f(x)=\alpha x^6$. ■

Пример 4. Определи ги сите непрекинати фумкции $f(x)$ за $x>0$ такви што

$$f(x+y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)},$$

за секои $x,y\in\mathbf{R}^+$.

Решение. Очигледно е дека $f(x)\neq 0$ за секој $x\in\mathbf{R}^+$. Заменуваме $y=x$ во дадената равенка и добиваме

$$f(2x)=\frac{f(x)f(x)}{f(x)+f(x)}=\frac{f(x)}{2}.$$

Заменуваме $y=2x$ во дадената равенка и добиваме

$$f(3x)=\frac{f(x)f(2x)}{f(x)+f(2x)}=\frac{f(x)\frac{f(x)}{2}}{f(x)+\frac{f(x)}{2}}=\frac{f(x)}{3}.$$

Лесно се покажува со принципот на математичка индукција дека $f(nx)=\frac{f(x)}{n}$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Заменуваме $x=1$ во последното равенство и добиваме $f(n)=\frac{f(1)}{n}$, за секој $n\in\mathbf{N}$. Уште повеќе, $f(1)=f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$, односно $f\left(\frac{1}{n}\right)=nf(1)$. Тогаш за $m,n\in\mathbf{N}$ имаме

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=f\left(m\cdot\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{m}f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{m}f(1).$$

Според тоа, $f(x)=\frac{f(1)}{x}$, за секој $x\in\mathbf{Q}^+$. Нека $x\in\mathbf{R}^+\setminus\mathbf{Q}$. Тогаш постои низа (x_n) од позитивни рационални броеви таква што $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$. Од непрекинатоста на $f(x)$ следува дека

$$f(x)=f(\lim_{n\to\infty}x_n)=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(1)}{x_n}=\frac{f(1)}{s}.$$

Според тоа, $f(x)=\frac{\alpha}{x}$ за $\alpha\in\mathbf{R}^+$ се бараните функции. ■

2. Дополнителни испитувања

Методите кои до сега ги разгледавме за жал не се доволни за решавање на посложени проблеми. Најчесто се потребни некои дополнителни испитувања во врска со функциите. Некои од нив се на пример:

- Дали функцијата е парна, дали е непарна? (во овие случаи доволно е да разгледуваме кога $x>0$).

- Дали е функцијата периодична? (ако е периодична доволно е да го ограничеме доменот на функцијата на некој конечен интервал).
- Дали е функцијата инјекција, дали е сурјекција?
- Дали функцијата има фиксна точка (дали постои x за кој $f(x)=x$)?
- Дали постои некаква симетрија?
- Ако функцијата е дефинирана на $\mathbf{N}$, тогаш каноничната репрезентација може да биде од корист.

Некои од горенаведените идеи ќе ги разгледаме во следните примери.

Пример 5. Покажи дека сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што $f(x+4)+f(x-4)=f(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$, се периодични и дека постои најмал заеднички период $T>0$ за сите тие функции.

Решение. На местото на x заменуваме $x+4$ и добиваме

$$f(x+8)+f(x)=f(x+4).$$

Ја заменуваме првата равенка во втората и добиваме

$$f(x+8)+f(x-4)=0.$$

Повторно на местото x заменуваме $x+4$ и добиваме

$$f(x+12)+f(x)=0.$$

За $y=x+12$ добиваме

$$0=f(y+12)+f(y)=f((x+12)+12)+f(x+12)=f(x+24)+f(x+12).$$

Од последните две равенки следува дека $f(x+24)=f(x)$, за секој $x\in\mathbf{R}$. Според тоа, $T=24$ е заеднички период за сите функции $f(x)$ кои ја задоволуваат дадената равенка. Следно ќе покажеме дека $T=24$ е најмалиот позитивен период за овие функции.

Нека $f(x)=\sin\frac{\pi x}{12}$. Тогаш $T=24$ е најмалиот позитивен период за $f(x)$. Бидејќи $\sin\frac{\pi(x+4)}{12}+\sin\frac{\pi(x-4)}{12}=\sin\frac{\pi x}{12}$, односно $f(x)$ ја задоволува дадената равенка, следува дека $T=24$ е најмалиот позитивен период за овие функции (ако постои помал заеднички позитивен период, тогаш $T=24$ не е најмалиот позитивен период за $f(x)=\sin\frac{\pi x}{12}$, што претставува контрадикција). ■

Пример 6. (Romania 1999) Нека функцијата $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ е сурјекција, а функцијата $g:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ е инјекција. Ако $f(n)\geq g(n)$ за секој $n\in\mathbf{N}$, докажи дека $f=g$.

Решение. Нека $A=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\neq g(n)\}$ и нека претпоставиме дека $A\neq\emptyset$. Тогаш и $B=\{g(n)\mid n\in\mathbf{N}\}$ е исто така непразно подмножество од $\mathbf{N}$. Според тоа, множеството B има најмалку еден елемент. Нека $g(a), a\in A$ е најмалиот елемент на B . Тогаш од инјективноста на $g(n)$ следува дека $g(a)<g(b)$, за секој $b\in A\setminus\{a\}$. Од дефиницијата на A и од условот на задачата, следува дека $g(a)< f(a)$. Од сурјективноста на $f(n)$, следува дека постои $c\in \mathbf{N}$ таков што $f(c)=g(a)< f(a)$. Јасно е дека $c\neq a$. Повторно, од инјективноста на $g(n)$ следува дека $g(c)\neq g(a)=f(c)$. Според тоа, $c\in A$ и $g(c)< f(c)=g(a)$, што не е можно (a е најмал елемент на B). Следува дека, $A=\varnothing$, односно $f(n)=g(n)$, за секој $n\in\mathbf{N}$. ■

Пример 7. (IMO 1983) Определи ги сите функции $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$ такви што за сите $x,y\in\mathbf{R}^+$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

Решение. Заменуваме во равенката $x=y=1$ и добиваме $f(f(1))=f(1)$. Ако замениме $x=1$ и $y=f(1)$ во равенката добиваме $f(f(f(1)))=\left(f(1)\right)^2$. Од последните две равенства добиваме $\left(f(1)\right)^2=f(f(f(1)))=f(f(1))=f(1)$. Според тоа, $f(1)(f(1)-1)=0$. Бидејќи $f(x)>0$, следува дека $f(1)=1$, односно $x=1$ е фиксна точка за $f(x)$. Ако замениме $y=x$ во равенката добиваме $f(xf(x))=xf(x)$, што значи дека за секој $x\in\mathbf{R}^+$, $xf(x)$ е фиксна точка за $f(x)$.

Нека претпоставиме дека $x_0>1$ е фиксна точка за $f(x)$. Тогаш од претходната дискусија следува дека $x_0 f(x_0)=x_0^2$ е фиксна точка за $f(x)$. Исто така, $x_0^2 f(x_0^2)=x_0^4$ е фиксна точка за $f(x)$. Со принципот на математичка индукција се покажува дека за секој $k\in\mathbf{N}$, x_0^{2k} е фиксна точка за $f(x)$. Бидејќи $x_0>1$, $\lim\limits_{k\to+\infty} x_0^{2k}=+\infty$. Оттука следува дека

$$\lim_{k\to+\infty} f(x_0^{2k})=\lim_{k\to+\infty} x_0^{2k}=+\infty ,$$

што е спротивно на условот на задачата.

Нека претпоставиме дека $0<x_0<1$ е фиксна точка за $f(x)$. Ако заменеме $y=x_0$ и $x=\frac{1}{x_0}$ во дадената равенка добиваме

$$1=f(1)=f(\tfrac{1}{x_0}\cdot x_0)=f(\tfrac{1}{x_0}\cdot f(x_0))=x_0 f(\tfrac{1}{x_0}) .$$

Следува дека $f(\frac{1}{x_0})=\frac{1}{x_0}$, односно $\frac{1}{x_0}>0$ е фиксна точка за $f(x)$, што е спротивно на претходната дискусија.

Следува дека $x=1$ е единствената фиксна точка за $f(x)$. Бидејќи за секој $x\in\mathbf{R}^+$, $xf(x)$ е фиксна точка за $f(x)$, следува дека $xf(x)=1$, за секој $x\in\mathbf{R}^+$.

Лесно се проверува дека $f(x)=\frac{1}{x}$ е навистина функција која ги задоволува условите на задачата.■

Задачи за самостојна работа

1. Определи ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што $f(1)=1$ и $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)+f(y)$ за сите $x,y\in\mathbf{R}$.

2. (Iran 2014) Определи ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}_0^+\to\mathbf{R}_0^+$ такви што $f(xf(y))+f(f(y))=f(x)f(y)+2$ за сите $x,y\in\mathbf{R}_0^+$.

3. Определи ги сите непрекинати функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y)$ за сите $x,y\in\mathbf{R}$.

4. Определи ги сите функции $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ такви што $f(f(x)+y)=2x+f(f(y)-x)$ за сите $x,y\in\mathbf{R}$.

5. (IMO 1990) Определи функција $f:\mathbf{Q}^+\to\mathbf{Q}^+$ таква што $f(xf(y))=\dfrac{f(x)}{y}$ за сите $x,y\in\mathbf{Q}^+$.

Литература

[1] D. Djukic, V. Jankovic, I. Matic, N. Petrovic, The IMO compendium, Springer, New York, 2011

[2] Р. Малчески, А. Малчески, Функции и функционални равенки, Армаганка, Скопје, 2019

[3] P. Vaderlind, The quest for functions - Functional equations for тhe beginners, Stockholm University, 2005