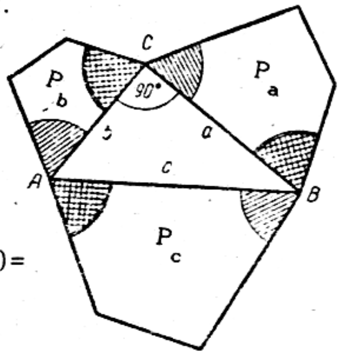
Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус

Димитар Цицев
Скопје

ОБОПШТУВАЊЕ НА ПИТАГОРОВАТА ТЕОРЕМА И ТЕОРЕМАТА НА ЕВКЛИД

Теоремата на Питагора важи за плоштината на квадратите конструирани на страните на правоаголниот триаголник. Квадратите меѓу себе се слични фигури. Дали ќе важи оваа теорема за плоштините на произволно земени слични фигури, конструирани над хипотенузата и катетите на правоаголниот триаголник? Ова прашање си го поставил (прв во историјата) Евклид околу 300 години по Питагора и докажал дека важи таквата теорема. Евклид утврдил: Ако над катетите и хипотенузата на правоаголниот триаголник се конструираат какви и да се слични фигури каде што катетите и хипотенузата се соодветни страни a, b и c тогаш важи равенството $P_a+P_b = P_c$, каде што P_a, P_b и P_c се плоштини на тие фигури.



Сл. 1.

Доказ: $\frac{P_a}{P_c} = \frac{a^2}{c^2}$; $\frac{P_b}{P_c} = \frac{b^2}{c^2}$,

или $P_a c^2 = P_c a^2$; $P_b c^2 = P_c b^2$.

Собирајќи ги левите и десните страни добиваме:

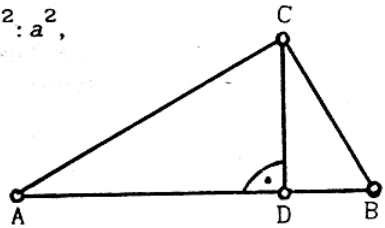
$P_a c^2+P_b c^2 = P_c a^2+P_c b^2$ или $c^2(P_a+P_b)= =P_c(a^2+b^2)$, па поради $c^2 = a^2+b^2$ следува $P_a+P_b = P_c$.

$P_a+P_b = P_c$ е обопштена Питагорова теорема. Прокл (5 в. од н.е.) укажува на генијалноста на Евклид со оваа теорема и дека широко и длабоко ги гледал проблемите, со што ја ставил науката на несоборлива основа.

Евклид дава и еден друг доказ што не е во врска со Питагоровата теорема.

Тука се добиваат три триаголници конструирани над хипотенузата (∠ABC), и над катетите (ΔACD и ΔBCD) соодветно. Тие триаголници меѓу себе се слични, па нивните плоштини се однесуваат како квадратите на соодветните страни, или како плоштини на квадратите, конструирани над хипотенузата и катетите:

Следува: $P_{ABC}:P_{ACD}:P_{BCD} = c^2:b^2:a^2$,



Сл. 2

или $P_{ABC} = kc^2$

$P_{ACD} = kb^2$

$P_{BCD} = ka^2$

но поради $P_{ABC} = P_{ACD}+P_{BCD}$ следува

$$kc^2 = kb^2+ka^2 \Leftrightarrow kc^2 = k(a^2+b^2) \Leftrightarrow c^2 = a^2+b^2.$$

Ако над хипотенузата и катетите се конструираат какви и да било слични многуаголници, секогаш нивните плоштини се однесуваат како плоштината на триаголниците ABC, ACD и BCD и пак се доаѓа до Евклидовата теорема.

Да разгледаме уште едно обопштување на Питагоровата теорема. Ќе ја докажеме теоремата: Над страните AB и AC на произволниот триаголник ABC, како над соодветни основи се конструирани два какви и да било паралелограми: ABEF и ACGH од надворешна страна. Во продолжение страните EF и GH се сечат во точката M. Да се докаже дека паралелограмот конструиран над страната BC што има друга страна еднаква и паралелна на страната AM има плоштина еднаква на збирот на двете површини.

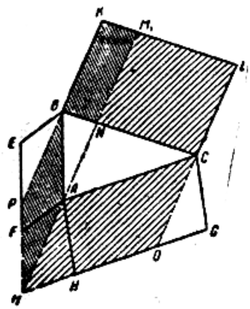
Доказ: По услов да е $\overline{AM} = \overline{BK}$ и повлекувајќи $DC \parallel MM_1$ и $BP \parallel AM$

имаме $P_{CLM_1N} = P_{AMOC} = P_{AHGC}$;

$P_{BKM_1N} = P_{MPBA} = P_{BEFA}$,

од кое следува $P_{BKLC} = P_{AHGC}+P_{ABEF}$.

Докажаната теорема ја вклучува во себе Питагоровата теорема, како посебен случај. (Ако триаголникот е правоаголен) Докажете сами.



Сл. 3.