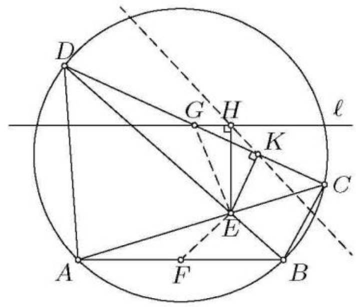
БМО 2011

1. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник кој не е трапез и чии дијагонали се сечат во точката E. Нека средините на отсечките AB и CD соодветно се точките F и G, а l е права која минува низ G и е паралелна со AB. Подножјата на нормалите повлечени од точката E кон правите l и CD соодветно се H и K. Докажи дека правите EF и HK за заемно нормални.

   Решение. Нека претпоставиме дека точката K е меѓу точките G и C. Точките E, G, H и K лежат на кружницата со дијаметар EG, па затоа $\measuredangle EHK = \measuredangle EGK$. Бидејќи триаголниците EAB и EDC се слични: $\measuredangle AEB = \measuredangle DEC$ и $\measuredangle EAB = \measuredangle EDC$, заклучуваме дека триаголниците EFB и EGC исто така се слични. Следува дека

   $$\measuredangle EFB = \measuredangle CGE = \measuredangle KHE,$$

   што заедно со $FB \perp HE$ дава $EF \perp KH$.

2. Нека x, y, z се реални броеви такви што $x + y + z = 0$. Докажи, дека

   $$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geq 0.$$

   Кога важи знак за равенство?

   Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

   $$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} + \frac{(2z+1)^2}{2z^2+1} \geq 3.$$

   Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

   $$|z| = \max\{|x|, |y|, |z|\}.$$

   Тогаш, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува дека

   $$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} \geq \frac{2(x+y+1)^2}{x^2+y^2+1} = \frac{2(1-z)^2}{x^2+y^2+1} \geq \frac{2(1-z)^2}{2z^2+1} = 3 - \frac{(2z+1)^2}{2z^2+1} \geq 3,$$

   што и требаше да се докаже. Знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = 0$ или $(x, y, z) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$, до пермутации.

3. Нека S е конечно множество природни броеви со следново својство: ако S го содржи бројот x, тогаш S ги содржи и сите делители на бројот x. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *добро* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ е степен на прост број. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *лошо* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$,

количникот $\frac{y}{x}$ не е степен на прост број. Едноелементните множества ги сметаме и добри и лоши. Нека k е најголемиот можен број елементи на добро подмножество на S. Докажи, дека k е најмалиот можен број на меѓусебно дисјунктни лоши подмножества чија унија е еднаква на S.

Решение. Јасно, не постојат два елементи на добро множество со k елементи кои припаѓаат на исто лошо множество. Затоа ни требаат барем k лоши множества за да го покриеме S.

Ќе конструираме k лоши множества кои го покриваат S. Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ се сите прости броеви во S. Бидејќи S ги содржи сите делители на своите елементи, секој елемент на S е од облик $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_n^{r_n}$, каде $r_i \le k-1$ за секој i (броевите $\frac{x}{p_i^j}$, $j = 0,1,2,...,r_i$, формираат добро подмножество на множеството S со $r_i + 1$ елементи).

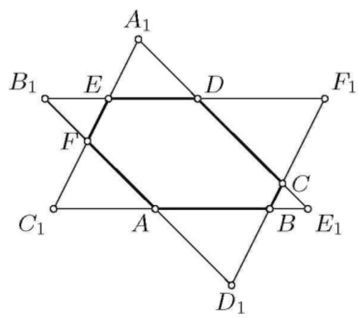
За секој таков $x \in S$ дефинираме $h(x) = r_1 + r_2 + ... + r_n$. Ако $x, y \in S, x < y$ припаѓаат на некое добро множество, тогаш важи $1 \le h(y) - h(x) \le k-1$. Да ги разгледаме множествата $S_m = \{x \in S \mid h(x) \equiv m (\bmod k)\}$, $m = 1,2,...,k$. Овие множества се дисјунктни и нивната унија е еднаква на множеството S. Од претходно изнесеното следува дека секое множество S_m е лошо, што значи дека тоа е бараната конструкција.

4. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник со плоштина 1 и таков што секои две спротивни страни му се паралелни. Правите AB, CD и EF се сечат по парови, при што определуваат триаголник. Слично правите BC, DE и FA определуваат друг триаголник. Докажи дека барем еден од овие два триаголници има плоштина поголема или еднаква на $\frac{3}{2}$.

Решение. Нека правите AB, CD и EF го определуваат триаголникот $A_1C_1E_1$, а правите BC, DE и FA го определуваат триаголникот $B_1D_1F_1$ (види цртеж). Да означиме

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{F_1B_1}} = a, \frac{\overline{BC}}{\overline{A_1C_1}} = b, \frac{\overline{CD}}{\overline{B_1D_1}} = c,$$

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{C_1E_1}} = d, \frac{\overline{EF}}{\overline{D_1F_1}} = e, \frac{\overline{FA}}{\overline{E_1A_1}} = f.$$



Од $P_{ABD_1} = a^2 P_{B_1D_1F_1}$ итн. следува

$$P_{ABCDEF} = (1 - a^2 - c^2 - e^2) P_{B_1D_1F_1} \text{ и}$$

$$P_{ABCDEF}=(1-b^2-d^2-f^2)P_{A_1C_1E_1}.$$

Коефициентите b,d,f може да се изразат преку a,c,e. Од

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{D_1F_1}-\overline{D_1B}-\overline{CF_1}}{\overline{EF}}=1-a-c \text{ и } \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{A_1E}+\overline{EF}+\overline{FC_1}}{\overline{EF}}=2-a-c-e$$

следува $b=\frac{1-a-c}{2-a-c-e}$. Аналогно се добива $d=\frac{1-c-e}{2-a-c-e}$ и $f=\frac{1-e-a}{2-a-c-e}$. Сега за $a+c+e=p$ имаме

$$a^2+c^2+e^2\geq\frac{1}{3}p^2 \text{ и } b^2+d^2+f^2=\frac{3-4p+p^2+a^2+c^2+e^2}{(2-p)^2}\geq\frac{1}{3}\left(\frac{3-2p}{2-p}\right)^2.$$

Нека претпоставиме дека $P_{B_1D_1F_1}<\frac{3}{2}$ и $P_{A_1C_1E_1}<\frac{3}{2}$. Од претходно изнесеното следува дека тоа е еквивалентно со $a^2+c^2+e^2<\frac{1}{3}$ и $b^2+d^2+f^2<\frac{1}{3}$. Но, тогаш од првото неравенство следува $p<1$, а од второто $\frac{3-2p}{2-p}<1$, што не е можно.