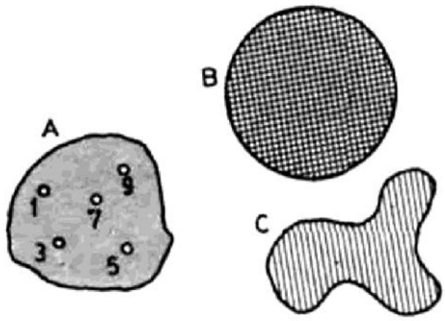
Владимир Стојановиќ
Белград

РЕШАВАЊЕ НА НЕКОИ ЗАДАЧИ СО ПОМОШ НА ОЈЛЕР-ВЕНОВИ ДИЈАГРАМИ

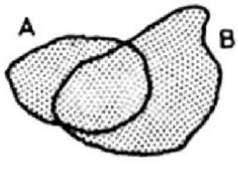
За полесно да ги воочиме различните односи меѓу множествата се користиме со нивно графичко претставување. Одделни множества, како множеството природни броеви, множеството цели броеви, итн., можеме да ги претставиме со помош на бројна полуоска или бројна оска. Но, воопшто за графичко претставување на множествата пракрични се таканаречените *Ојлер-Венови дијаграми*.

Некое множество, конечно или бесконечно, се претставува со помош на дел од рамнината, ограничен со затворена крива линија, која не се самопресекува и ги опфаќа сите елементи на тоа множество. Овој дел (површина) се нарекува *Ојлер-Венов дијаграм*. Таа, со сите свои или само со одделни точки, го претставува множеството. На цртежот десно се прикажани неколку такви дијаграми. Ако само одделни точки на површината претставуваат елементи на множеството, тогаш дијаграмот може да се дополни со запишување на елементите, како што е тоа направено кај множеството $A=\{1,3,5,7,9\}$. Често пати е корисно различните множества да ги означиме со различни шрафирања, како што на горниот цртеж тоа е направено за множествата B и C.

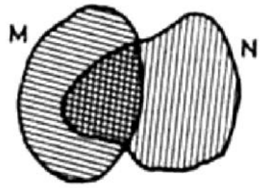


По договор, контурата на дијаграмот ги опфаќа сите елементи на множеството. Затоа празното множество $\varnothing$ нема свој дијаграм.

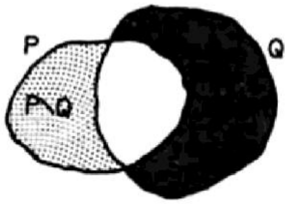
Пред да преминеме на решавање на некои задачи со помош на Ојлер-Веновите дијаграми, ќе се потсетиме како графички се претставуваат унијата, пресекот и разликата на две множества.



Унија на множествата A и B е множеството од сите елементи, кои припаѓаат барем на едното од множествата A и B. На цртежот лево дијаграмот на унијата на множествата A и B е целата шрафирана површина. Притоа заедничките елементи на множествата ги запишуваме само еднаш.



Пресек на две множества M и N е множеството од сите заеднички елементи на овие две множества. На цртежот десно пресекот на множествата M и N е шрафиран со помош на квадратчиња.

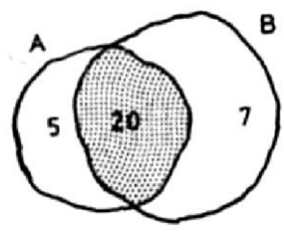


Разлика на две множества P и Q (означуваме $P\setminus Q$ и читаме P разлика Q), е множеството од сите елементи кои припаѓаат на множеството P, а не припаѓаат на множеството Q (на цртежот лево разликата $P\setminus Q$ е шрафирана со точки). Обратно, $Q\setminus P$ (Q разлика P) е множеството кои ги содржи само елементите на множеството Q кои не припаѓаат на множеството P (на горниот цртеж лево разликата $Q\setminus P$ е обоена со црно).

Сега ќе решиме неколку задачи кои на прв поглед немаат никаква врска со Ојлер-Веновите дијаграми.

Задача 1. На писмена вежба по математика се дадени три задачи. Секој ученик решил барем по една задача и никој не ја решил третата задача. Првата задача ја решиле 25 ученици, втората задача ја решиле 27 ученици, а 20 ученици ги решиле првата и втората задача. Колку ученици правеле писмена вежба?

Решение. Сите ученици може да се распоредат во две множества: множество A на ученици кои ја решиле првата задача и множество B на ученици кои ја решиле втората задача. Да ги претставиме овие множества со помош на Ојлер-Венови дијаграми. Бидејќи овие множества имаат заеднички елементи, треба да нацртаме дијаграми на две множества кои се сечат (цртеж десно).



Оние дваесе ученици, кои ја решиле и првата и втората задача, ги претставуваат заедничките елементи на множествата A и B, т.е. тоа се елементите на пресекот на овие множества (шрафираната површина). Бидејќи првата задача ја решиле 25 ученици, заклучуваме дека само првата задача ја решиле $25-20=5$ ученици. Само втората задача ја решиле $27-20=7$ ученици.

Ги внесуваме овие податоци во горниот дијаграм и добиваме дека писмената вежба ја работеле $5+20+7=32$ ученици. ■

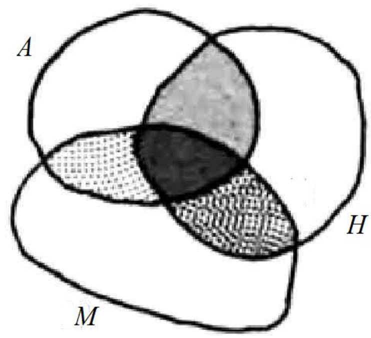
Задача 2. Во одделение од 35 ученици, на крајот на првото полугодие недоволни оценки имало само од три предмети, и тоа од англиски јазик 6, од хемија 7 и од математика 10 недоволни оценки. Само по две недоволни оценки имаат 6 ученици. Знаеме дека 4 ученици имаат единици по англиски јазик и хемија, а 3 ученици имаат единици по англиски јазик и математика. По три единци имаат 2 ученика.

а) Колку ученици немале недоволни оценки?

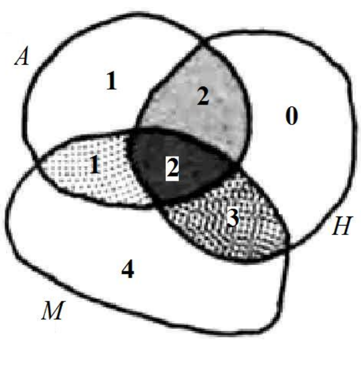
б) Колку ученици имаат само по две недоволни оценки и тоа од англиски јазик и математика?

в) Колку ученици имаат само по една недоволна оценка и од кој предмет?

Решение. Со A да го означиме множеството од сите ученици кои имаат единици по англиски, со H множеството од сите ученици кои имаат единица по хемија и со M множеството од сите ученици кои имаат единица по математика. Два ученика имаат единици по сите три предмети и тие го претставуваат заедничкиот дел (пресекот) на сите три множества. Освен тоа, бидејќи постојат ученици кои имаат единици по англиски и хемија (пресек на A и H), потоа пресек на англиски и математика (пресек на A и M) и по хемија и математика (пресек на H и M), дијаграмите на множествата A, H и M треба да ги избереме така што овие пресеци постојат (цртеж десно).



Пресекот на сите три множества е најтемно шрафираниот дел во дијаграмот и тој има 2 елементи. Да го запишеме овој податок на соодветното место во дијаграмот (цртеж лево). Пресекот на множествата A и H има четири елементи (4 ученици имаат единици по англиски јазик и хемија). Бидејќи 2 од нив имаат и трета единица, заклучуваме дека $4-2=2$ ученика имаат единици само од англиски јазик и хемија. На ист начи се добива дека само $3-2=1$ ученик има единициа од англиски јазик и математика. Да ги запишеме овие податоци во дијаграмот. До сега добивме дека $1+2=3$ ученици имаат само по две единици. Но, само по две



единици имаат 6 ученици, па затоа единици по хемија и математика имаат $6-3=3$ ученици.

Треба уште да видиме колку ученици имаат по една единица и од кој предмет (нештрафираните делови од горниот цртеж десно). Единици по англиски јазик имаат 6 ученици. Двајца од нив веќе имаат единца по хемија, еден по математика и двајца и по хемија и по математика. Според тоа, единица само по англиски јазик има $6-2-1-2=1$ ученик. На ист начин се добива дека единица само по математика имаат $10-3-1-2=4$ ученици, а единица само по хемија имаат $7-2-3-2=0$ ученици (види цртеж горе лево). Сега од податоците во дијаграмот добиваме:

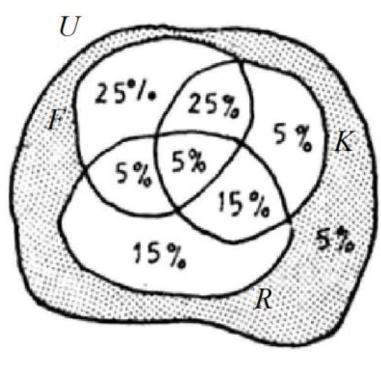
а) Недоволни оценки имаат $1+2+1+2+3+4=13$ ученици, што значи дека $35-13=22$ ученици имаат само позитивни оценки.

На прашањата под б) и в) одговорете сами. ■

Задача 3. Во училишниот извештај се дадени податоци за спортските активности на учениците: 50% од учениците играат кошарка, а 40% ракомет. 10% од учениците се занимаваат со ракомет и фудбал, а 5% од учениците се занимаваат со сите три спортови. За фудбал воопшто не се заинтересирани 40% од учениците. 30% од учениците играат фудбал, а не играат кошарка, а 20% играат ракомет, а за кошарка не се интересираат.

Колку проценти од учениците на ова училиште не се занимаваат со ниту еден спорт?

Решение. Со F да го означиме множеството ученици кои играат фудбал, со K множеството ученици кои играат кошарка и со R множеството ученици кои играат ракомет. Заклучувајќи како во претходните две задачи го добиваме дијаграмот прикажан на цртежот десно (со U е означено множеството од сите ученици). При пресметувањето на запишаните проценти, имавме некои податоци дадени поинаку отколку во претходните задачи. На пример, од податокот дека 40% од учениците не игра фудбал, заклучуваме дека 60% од учениците игра фудбал. Освен тоа, дадени се податоци дека множеството $F\setminus K$ содржи 30% од учениците на училиштето, а множеството $R\setminus K$ содржи 20% од учениците на училиштето. Од дијаграмот гледаме дека $25+25+5+5+5+15+15=95\%$ од учениците се занимава барем со



еден спорт. Последното значи дека множеството $U\setminus(R\cup K\cup F)$ содржи $100-95=5\%$ од учениците, т.е. 5% од учениците не се занимава со ниту еден спорт. ■

На крајот од ова наше дружење ви препорачувам самостојно да ја решите следнава задача.

Задача 4. На еден математички конгрес имало 100 учесници и секој од нив говори барем еден од јазиците: англиски, француски или руски.

Руски јазик говорат 57 учесници, англиски 58, руски и француски 28 и англиски и француски 34 учесници. Понатаму, 5 учесници говорат само француски, точно два јазика говорат 49 учесници, а сите три јазици ги говорат 11 учесници.

а) Колку учесници на конгресот говорат француски јазик?

б) Колку учесници на конгресот говорат само руски јазик?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија