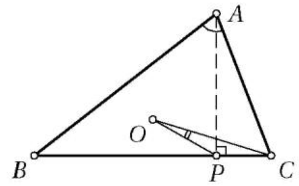
XLII олимпијада

1. Нека ABC е остроаголен триаголник, O е центар на неговата опишана кружница и P е подножјето на висината повлечена од темето A кон страната BC. Ако $\measuredangle BCA \geq \measuredangle ABC + 30^{\circ}$, докажи дека $\measuredangle CAB + \measuredangle COP < 90^{\circ}$.

Решение. Бидејќи $\measuredangle OCP = 90^{\circ} - \measuredangle A$, треба да докажеме дека $\measuredangle OCP > \measuredangle COP$, т.е. $\overline{OP} > \overline{CP}$. Според неравенството на триаголник доволно е да докажеме дека $\overline{CP} < \frac{1}{2}\overline{CO} = \frac{1}{2}R$. Навистина, од правоаголниот триаголник ACP и синусната теорема за триаголникот ABC следува



$$\begin{aligned}\overline{CP} = \overline{AC}\cos\gamma &= 2R\sin\beta\cos\gamma \\ &\leq 2R\sin\beta\cos(\beta+30^{\circ}) \\ &= R(\sin(2\beta+30^{\circ})-\sin 30^{\circ}) < \tfrac{1}{2}R.\end{aligned}$$

2. Докажи, дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1.$$

за секои позитивни реални броеви a,b,c.

Решение. *Прв начин*. Ќе определиме константа $k>0$ така што

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^k}{a^k+b^k+c^k}\text{, за секои } a,b,c>0. \qquad (1)$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a^k+b^k+c^k)^2 \geq a^{2k-2}(a^2+8bc),$$

т.е. со неравенството

$$(a^k+b^k+c^k)^2 - a^{2k} \geq 8a^{2k-2}bc.$$

Од друга страна, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$(a^k+b^k+c^k)^2 - a^{2k} = (a^{2k}+b^k+c^k)(b^k+c^k) \geq 8a^{\frac{k}{2}}b^{\frac{3k}{4}}c^{\frac{3k}{4}}.$$

Според тоа, неравенството (1) е исполнето за $k=\frac{4}{3}$. Сега, ако (1) го собереме со соодветните неравенства за $\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}$ и $\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$ го добиваме бараното неравенство.

Втор начин. Да означиме

$$x=\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}},\ y=\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \text{ и } z=\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}.$$

За броевите $x,y,z>0$ важи

$$f(x,y,z)=(\tfrac{1}{x^2}-1)(\tfrac{1}{y^2}-1)(\tfrac{1}{z^2}-1)=8^3. \qquad (1)$$

Треба да докажеме дека за броеви $x,y,z>0$ за кои е исполнет условот (1) важи $x+y+z\geq 1$.

Бидејќи функцијата f строго монотоно опаѓа по секоја променлива x,y,z, доволно е да докажеме дека ако $x,y,z>0$ и $x+y+z=1$, тогаш важи $f(x,y,z)\geq 8^3$. Бидејќи

$$\tfrac{1}{x^2}-1=\tfrac{(x+y+z)^2-x^2}{x^2}=\tfrac{(2x+y+z)(y+z)}{x^2},$$
$$\tfrac{1}{y^2}-1=\tfrac{(x+y+z)^2-y^2}{y^2}=\tfrac{(x+2y+z)(x+z)}{x^2},$$
$$\tfrac{1}{z^2}-1=\tfrac{(x+y+z)^2-z^2}{z^2}=\tfrac{(x+y+2z)(x+y)}{z^2},$$

неравенството $f(x,y,z)\geq 8^3$ е еквивалентно со неравенството

$$(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)(x+y)(y+z)(z+x)\geq 8^3x^2y^2z^2. \qquad (2)$$

Од неравенството межу аритметичката и геометриската средина следува

$2u+v+w\geq 4\sqrt[4]{u^2vw}$ и $u+v\geq 2\sqrt{uv}$,

па ако првото неравенство го земеме за броевите $2x,y,z; x,2y,z$ и $x,y,2z$, а второт за броевите x,y: y,z и z,x, а потоа добиените неравенства ги помножиме го добиваме неравенството (2).

3. На математички натпревар учествувале 21 момче и 21 девојче. Секој од нив решил најмногу 6 задачи. За секое момче и за секое девојче постои барем една задача која и двајцата ја решиле. Докажи, дека постои задача која ја решиле барем три момчиња и барем три девојчиња.

Решение. За една задача ќе велиме дека е *тешка за момчињата* ако ја решиле најмногу две момчиња, а *тешка за девојчињата* ако ја решиле најмногу две девојчиња.

Ќе го оцениме бројот на паровите момче-девојче такви што и двајцата решиле некоја задача тешка за момчињата. Да разгледаме произволно девојче. Според условот, меѓу шесте задачи кои ги решила, најмногу 5 се тешки за момчињата, т.е. овие задачи се решени од најмногу 2 момчиња. Според тоа, бројот на разгледуваните парови е помал или еднаков на $21\cdot 5\cdot 2=210$.

Слично, има најмногу 210 парови момче-девојче такви што и двајцата решиле некоја задача која е тешка за девојчињата. Меѓутоа, вкупниот број парови момче-девојче е $21^2=441$. Значи, во најмалку 21 пар задачата која и двајцата ја решиле не е тешка ниту за девојчињата ниту за момчињата. Јасно, оваа задача ја решиле најмалку три момчиња и најмалку три девојчиња.

4. Нека n е непарен природен број поголем од 1 и нека $k_1, k_2, ..., k_n$ се цели броеви. За секоја пермутација $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ нека

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i \ .$$

Докажи, дека постојат различни пермутации b и c такви што $n!$ е делител на бројот $S(b) - S(c)$.

Решение. Нека претпоставиме дека сите $n!$ броеви $S(a)$ се различни по модул $n!$. Тогаш збирот $\sum\limits_{a} S(a)$ по сите пермутации е кунгруентна со

$$0 + 1 + ... + (n!-1) = \tfrac{(n!-1)n!}{2} \equiv \tfrac{n!}{2} (\text{mod } n!)$$

Од друга страна, секој од броевите k_i во збирот $\sum\limits_{a} S(a)$ се јавува со коефициент

$$(n-1)!(1 + 2 + ... + n) = \tfrac{n+1}{2} n!,$$

а овој збир за непарен n е делив со $n!$. Затоа, $\sum\limits_{a} S(a) \equiv 0 (\text{mod } n!)$, што е противречност.

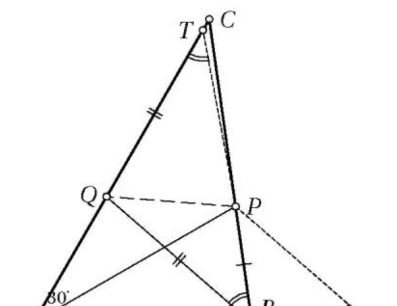
5. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle CAB = 60^\circ$. Симетралата на аголот BAC ја сече страната BC во точка P, а симетралата на аголот ABC ја сече страната CA во точка Q. Ако $\overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AQ} + \overline{QB}$, определи ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. Нека S и T се точки на правите AB и AC, со распоред $A - B - S$ и $A - Q - T$, соодветно такви што $\overline{BS} = \overline{BP}$ и $\overline{QT} = \overline{QB}$. Дадено е дека

$$\overline{AS} = \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AQ} + \overline{QB} = \overline{AT} \ .$$

Бидејќи $\measuredangle PAS = \measuredangle PAT$, триаголниците APS и APT се складни, па затоа $\measuredangle ATP = \measuredangle ASP = \frac{1}{2}\beta = \measuredangle QBP$, т.е. $\measuredangle QTP = \measuredangle QBP$.

Ако точката P не е на правата BT, триаголниците QBP и QTP мора да се складни, па затоа P лежи на симетралата на $\measuredangle BQT$. Бидејќи AP е симетрала на $\measuredangle QAB$, P е центар на припишаната кружница на $\triangle QAB$, па затоа и BP симетрала на $\measuredangle QBS$. Според тоа,



$$\measuredangle PBQ = \tfrac{1}{2}\beta = \measuredangle PBS = 180^\circ - \beta ,$$

па затоа $\beta = 120^\circ$, што не е можно.

Според тоа, $P \in BT$, што значи дека $T \equiv C$. Сега, од $\overline{QC} = \overline{QB}$ добиваме $120^\circ - \beta = \gamma = \tfrac{1}{2}\beta$, па затоа $\beta = 80^\circ$ и $\gamma = 40^\circ$.

6. Нека a,b,c,d се природни броеви, такви што $a > b > c > d$ и

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c) . \qquad (1)$$

Докажи, дека $ab + cd$ не е прост број.

Решение. Равенството (1) е еквивалентно на равенството

$$a^2 - ac + b^2 = b^2 + bd + d^2 .$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}(ab + cd)(ad + bc) &= ac(b^2 + bd + d^2) + bd(a^2 - ac + c^2) \\ &= (ac + bd)(a^2 - ac + c^2).\end{aligned} \qquad (2)$$

Нека претпоставиме дека $ab + cd$ е прост број. Од $a > b > c > d$ следува дека $ab + cd > ac + bd > ad + bc$ и како $ab + cd$ е прост број следува дека

$$\mathrm{NZD}(ab + cd, ac + bd) = 1 .$$

Сега, од (2) следува дека $ac + bd \mid ad + bc$, што противречи на

$$ac + bd > ad + bc .$$

Конечно, од добиената противречност следува дека $ab + cd$ не е прост број.