Партиције природног броја

друга-0.1 верзија: 27.1.2013.

Душан Ђукић

1° Увод

Партиција природног броја n је представљање n у облику збира неколико природних бројева, при чему је редослед сабирака небитан. Са $p(n)$ означавамо број партиција n. На пример,

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1;$$

зато је $p(4) = 5$. Обично се додефинише $p(0) = 1$.

Партиција се често представља графички *Фереровим дијаграмом*; на пример

$$\begin{array}{|ccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & & & \end{array}$$

представља партицију $5 + 2$ броја 7, где број тачака у врсти одговара једном сабирку; исти пример може да се чита и по колонама, као партиција $2+2+1+1+1$ броја 7. За две овако повезане партиције кажемо да су *конјуговане*.

Неке теореме о партицијама одмах следе из графичких представљања.

Теорема 1. Број партиција n на највише k сабирака једнак је броју партиција n на сабирке не веће од k.

Доказ. Конјуговањем партиције на највише k сабирака добија се партиција на сабирке не веће од k, чиме је успостављена бијекција између ова два типа партиција. □

2° Функције генератрисе

Функције генератрисе у облику степених редова су једно од најважнијих оруђа у изучавању партиција. Функција генератриса низа $p(n)$ је

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots} . \tag{1}$$

Како долазимо до овог израза? Посматрајмо партицију броја n у којој има k_i сабирака једнаких i ($i \in \mathbb{N}$): $n = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \cdots$. Ова партиција доприноси коефицијенту уз x^n у производу

$$F(x) = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots)\cdots$$

са 1, и то као сабирак $x^{k_1} \cdot x^{2k_2} \cdot x^{3k_3} \cdots$ у развоју овог производа.

Треба имати у виду да су бесконачни збир и производ у (1) конвергентни само за $|x| < 1$.

Пример. • Генератриса за број партиција на непарне сабирке је

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots} ;$$

• Генератриса за број партиција у највише t сабирака (или у сабирке не веће од t) је

$$G_t(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^t)} .$$

Многа тврђења о партицијама имају и комбинаторне и алгебарске доказе.

Пример. Доказати да је број партиција броја n без сабирака једнаких 1 једнак $p(n)-p(n-1)$.

Доказ 1. Имамо једноставну бијекцију између партиција броја n у којим се појављује сабирак 1 и свих партиција броја $n-1$ (брисање сабирка 1). Дакле, међу $p(n)$ партиција броја n, у тачно $p(n-1)$ њих се појављује јединица. $\triangle$

Доказ 2. Тај број је једнак коефицијенту уз x^n у производу $\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots} = (1-x)F(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(p(n)-p(n-1))x^n$, а он је једнак $p(n)-p(n-1)$. $\triangle$

Међутим, није увек свеједно који ћемо приступ да одаберемо. На пример, следеће тврђење има једноставан алгебарски доказ, док је комбинаторни тежи - видети задатке.

Теорема 2. Број партиција n на различите сабирке је једнак броју партиција на непарне сабирке.

Доказ. Број партиција на различите сабирке и број партиција на непарне сабирке генерисани су функцијама

$$F_1(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots \quad \text{и} \quad F_2(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}.$$

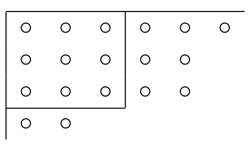
Ако F_1 препишемо као $F_1(x) = \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdots$, сви фактори $(1-x^{2k})$ се скраћују, а оно што остаје је управо $F_2(x)$. $\square$

3° Неки алгебарски идентитети

Доказ следеће Ојлерове формуле за $F(x)$ је добар пример примене комбинаторике у алгебарским идентитетима.

Теорема 3. $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2\cdots(1-x^n)^2}$.
(Сабирак за $n=0$ је по конвенцији једнак 1.)

Доказ. У графичком представљању партиције, посматрајмо највећи квадрат који формирају тачке у горњем левом углу. Нпр. на доњем дијаграму $(18=6+5+5+2)$ то је 3×3 квадрат.



Тада се слика састоји од квадрата са t^2 тачака и два "репа" који представљају партиције неких бројева r и s на по највише t сабирака, при чему је $r+s=n-t^2$ (на нашој слици је $r=2$, $s=7$ и $t=3$).

Бројеви партиција r и s на по највише t сабирака су редом коефицијенти уз x^r и x^s у $G_t(x)$. Сабирањем по свим r,s са $r+s=n-t^2$ следи да је број партиција броја n са датим t једнак коефицијенту уз x^{n-t^2} у $G_t(x)^2$, тј. коефицијенту уз x^n у

$$x^{t^2}G_t(x)^2 = \frac{x^{t^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2\cdots(1-x^t)^2}\ .$$

Сабирањем ових израза по свим t закључујемо да је коефицијент уз x^n у $\sum_t x^{t^2}G_t(x)^2$ једнак $p(n)$ за све n, дакле $\sum_t x^{t^2}G_t(x)^2 = F(x)$. $\square$

Следећа два идентитета су Ојлерово дело:

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2n})} \quad \text{и}$$
$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^6)\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n^2+n}}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2n})}\,.$$

У свом доказу, Ојлер је увео други параметар a. Наиме, оба ова идентитета су директне последице следећег, за $a=1$ и $a=x$ редом.

Теорема 4. $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1+ax^{2n+1})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n^2}a^n}{(1-x^2)\cdots(1-x^{2n})}.$

Доказ. Уведимо други параметар a и посматрајмо

$$K(a,x)=(1+ax)(1+ax^3)(1+ax^5)\cdots=1+c_1(x)a+c_2(x)a^2+\cdots\,.$$

Како је $K(a,x)=(1+ax)K(ax^2,x)$, изједначавање коефицијената даје $c_m=c_{m-1}x^{2m-1}+c_mx^{2m}$ за све m (где је $c_0=1$), па индукцијом добијамо

$$c_m=\frac{x^{m^2}}{(1-x^2)(1-x^4)\cdots(1-x^{2m})}\,.\ \square$$

И следеће тврђење се доказује на исти начин (докажите!):

Теорема 5. $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+ax^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^na^n}{(1-x^2)\cdots(1-x^{2n})}.\ \square$

По теореми 4 имамо

$$K(z,x)=F(x^2)\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{n^2}z^n\prod_{j=0}^{\infty}(1-x^{2n+2+2j}).$$

(Приметимо да смо суму допунили негативним индексима n: наиме, за $n<0$ одговарајући сабирак је нула.)

Даље, примена теореме 4 за $a=-x^{2n+1}$, па онда замена места сумама по m и n, дају

$$\begin{aligned}\frac{K(z,x)}{F(x^2)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{n^2}z^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^mx^{m^2+m+2nm}}{(1-x^2)\cdots(1-x^{2m})}\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^mx^mz^{-m}}{(1-x^2)\cdots(1-x^{2m})}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{(n+m)^2}z^{n+m}=\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1}{1+x^{2j+1}z^{-1}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{n^2}z^n,\end{aligned}$$

при чему последња једнакост следи из теореме 5 за $z=a^{-1}$.

Овако смо показали тзв. *Јакобијев идентитет о троструком производу*:

Теорема 6. За $|x|<1$ и $z\neq 0$ важи

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n})(1+x^{2n-1}z)\left(1+x^{2n-1}z^{-1}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{n^2}z^n.\ \square$$

Специјално, замењујући x и z са $x^{3/2}$ и $-x^{1/2}$ добијамо:

Теорема 7. $\displaystyle\frac{1}{F(x)}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nx^{\frac{n(3n+1)}{2}}$

$$=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+\cdots\ \square$$

Теорема 7 има лепу комбинаторну интерпретацију. Коефицијент уз x^n у производу $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$ је једнак суми $(-1)^{a(\pi)}$ по свим партицијама π броја n на различите сабирке, где је $a(\pi)$ број сабирака у π; дакле, он је једнак $E(n)-O(n)$, где $E(n)$ означава број партиција n на паран број различитих сабирака, а $O(n)$ на непаран број различитих сабирака. Према томе,

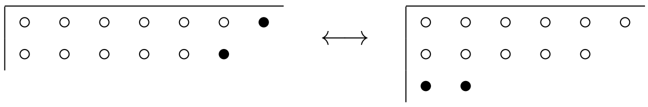
Теорема 8. За $n=\frac{k(3k\pm1)}{2}$ је $E(n)-O(n)=(-1)^k$; у супротном је $E(n)=O(n)$. □

Ово тврђење има и чисто комбинаторни доказ. Наиме, "скоро" свакој партицији са парним бројем различитих сабирака можемо да придружимо другу са непарним бројем различитих сабирака (и обрнуто) на следећи начин:

(1) ако је крајња десна дијагонала краћа за бар 2 од крајње доње врсте, пребацимо је испод те врсте;

(2) у супротном, применимо инверзно пресликавање.

$7+6 \qquad\qquad 6+5+2$



Међутим, за $n=\frac{k(3k\pm1)}{2}$ једна партиција не одговара ниједној другој: то је партиција

$$n=\frac{k(3k-1)}{2}=(2k-1)+\cdots+(k+1)+k, \quad \text{односно} \quad n=\frac{k(3k+1)}{2}=2k+\cdots+(k+2)+(k+1).$$

У тим случајевима је $E(n)-O(n)=(-1)^k$. На слици су приказане ове партиције за $n=12$ и $n=15$ (у оба случаја је $k=3$):

$5+4+3 \qquad\qquad 6+5+4$

У сваком другом случају кореспонденција је добро дефинисана, те је тада $E(n)=O(n)$. □

Замењујући x и z са $x^{1/2}$ и $x^{1/2}z$ у Јакобијевом идентитету добијамо

$$(1+z^{-1})\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)(1+x^nz)(1+x^nz^{-1})=\sum_{m=0}^{\infty}(z^m+z^{-m-1})x^{\frac{m(m+1)}{2}},$$

што након дељења са $1+z^{-1}$ постаје

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)(1+x^nz)(1+x^nz^{-1})=\sum_{m=0}^{\infty}x^{\frac{m(m+1)}{2}}z^{-m}(1-z+z^2-\cdots+z^{2m}).$$

Пошто обе стране за $|x|<1$ равномерно конвергирају по z у интервалу $(-1,0)$, пуштањем $z\to-1$ добијамо још један познат Јакобијев идентитет:

Теорема 9. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^3=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)x^{\frac{m(m+1)}{2}}$. □

4° Рекурентне релације

Најпознатија рекурентна једначина за $p(n)$ је следећа, Ојлерова. Изједначавање коефицијената у $F(x)(1-x-x^2+x^5+x^7-\cdots)=1$ (теорема 7) даје

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+p(n-15)-\cdots,\quad n>1.$$

Овде су $1,2,5,7,12,15,\ldots$ бројеви облика $\frac{k(3k\pm1)}{2}$.

Следећа занимљива рекурентна релација је мање погодна за тачно израчунавање вредности $p(n)$ за велике n, али је од помоћи у одређивању њеног реда величине. Узимајући логаритамске изводе обе стране у (1) добијамо

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} np(n)x^{n-1}}{\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{ix^{i-1}}{1-x^i}\ .$$

Упоређивање коефицијената уз x^{n-1} нам даје

$$np(n)=\sum_{i=1}^{n}\sigma(i)p(n-i),$$

где је $\sigma(i)$ збир делилаца броја i.

5° Мало о асимптотском и аритметичком понашању $p(n)$

Харди и Рамануџан су доказали асимптотску формулу

$$p(n)\sim\frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}.$$

Касније је Радемахер добио тачну формулу за $p(n)$ у облику конвергентног бесконачног реда:

$$p(n)=\frac{\pi^2}{3\sqrt{3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k}{k^{5/2}}\frac{u_k\cosh u_k-\sinh u_k}{u_k^3},$$

где је $u_k=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{k\sqrt{3}}\sqrt{n-\dfrac{1}{24}}$ и $A_k=\sum\limits_{\substack{1\le h\le k\\(h,k)=1}}\exp\left(i\pi\sum\limits_{j=1}^{k-1}\dfrac{j}{k}\left(\left\{\dfrac{hj}{k}\right\}-\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{2i\pi hn}{k}\right)$.

Упркос једноставној дефиницији $p(n)$, о њиховим аритметичким својствима се зна релативно мало. Најједноставније аритметичко својство је дао Рамануџан:

$$5\mid p(5m+4),\ \ 7\mid p(7m+5)\ \text{ и }\ 11\mid p(11m+6)\ \text{ за све целе } m\ge 0.$$

Он је такође навео идентитете из којих прве две релације одмах следе, мада није навео доказе:

$$\sum_{k=0}^{\infty}p(5k+4)x^k=\frac{5F(x^5)^5}{F(x)^6};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}p(7k+5)x^k=\frac{7F(x^7)^3}{F(x)^4}+\frac{49xF(x^7)^7}{F(x)^8}.$$

Заправо, познате су конгруенције ове врсте по сваком модулу - изузев оних дељивих са 2 или 3!

6° Задаци

1. Доказати да је број партиција природног броја n у којима се сваки паран сабирак појављује највише једном једнак броју партиција n у којима се сваки сабирак појављује највише три пута.

   Решење. Функција генератриса за први тип партиција је
   $$g_1(x) = \prod_{2\nmid k}(1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots) \cdot \prod_{2\mid k}(1 + x^k) = \frac{(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^6)\cdots}{(1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5)\cdots}$$
   Заиста, за непарно k, сабирци једнак k одговарају чиниоцу $(1 + x^k + x^{2k} + x^{3k} + \cdots)$, док за парно k они одговарају чиниоцу $(1 + x^k)$.

   Функција генератриса за други тип партиција је
   $$g_2(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^3 + x^6 + x^9)\cdots = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + x^k)(1 + x^{2k}).$$
   Из теореме 2 следи да је $g_1(x) = g_2(x)$.

2. Доказати Глејшерову теорему: број партиција n на сабирке који нису дељиви са d једнак је броју партиција у којима се ниједан сабирак не појављује d или више пута.

   Решење. Број партиција у којима сабирци нису дељиви са d генерисан је функцијом $g(x) = \prod_{d\nmid n} \frac{1}{1-x^n}$.

   С друге стране, функција генератриса за број партиција у којима се сваки сабирак појављује највише $d-1$ пута је $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + x^n + \cdots + x^{(d-1)n}) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^d n}{1-x^n}$ што је након скраћивања бројиоца тачно једнако $g(x)$.

   Напомена. Упоредити са теоремом 2.

3. Дати комбинаторни доказ теореме 2, тј. конструисати бијекцију између два типа партиција.

   Решење. Посматрајмо партицију $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ броја n на различите сабирке. Сваки сабирак n_i се може написати у облику $2^{r_i} m_i$, где је r_i ненегативан цео и m_i непаран број. Груписањем по непарном делу m_i добијамо
   $$n = \sum_i 2^{r_i} m_i = \sum_{2\nmid m} k_m \cdot m, \quad \text{где је} \quad k_m = \sum_{m_i = m} 2^{r_i}.$$
   Десна страна у овом изразу представља партицију n на непарне сабирке (k_m сабирака једнаких m), чиме је успостављена бијекција каква нам треба (докажите!).

   На пример, партицији $32 = 10 + 6 + 5 + 4 + 2 + 1$ на различите одговара партиција $32 = 5+5+5+3+3+1+1+1+1+1+1+1$ на непарне сабирке, јер је $10+6+5+4+2+1 = 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 5 + 2^2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 = (2^2 + 2 + 1) \cdot 1 + 2 \cdot 3 + (2 + 1) \cdot 5 = 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5$.

4. Доказати да је број самоконјугованих партиција броја n једнак броју оних партиција n у којима су сви сабирци непарни и различити.

   Решење. Слика приказује бијекцију између ова два типа партиција. Детаље препуштамо вама.

$$\begin{array}{|lllll}
\multicolumn{5}{c}{5+5+4+4+2} \\ \hline
\spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \\
\spadesuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit \\
\spadesuit & \diamondsuit & \clubsuit & \clubsuit & \\
\spadesuit & \diamondsuit & \clubsuit & \heartsuit & \\
\spadesuit & \diamondsuit & & &
\end{array}
\quad \longleftrightarrow \quad
\begin{array}{|lllllllll}
\multicolumn{9}{c}{9+7+3+1} \\ \hline
\spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit & \spadesuit \\
\diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & \diamondsuit & & \\
\clubsuit & \clubsuit & \clubsuit & & & & & & \\
\heartsuit & & & & & & & &
\end{array}$$