Катерина Аневска, Скопје

ПИТАГОРОВИ ТРОЈКИ

Дефиниција 1. Решенијата на равенката

$$x^2+y^2=z^2 \tag{1}$$

$x,y,z\in\mathbb{N}$, ги нарекуваме *Питагорови тројки*. За Питагоровата тројка (x,y,z) ќе велиме дека е *примитивна* ако $\text{NZD}(x,y,z)=1$.

Коментар. Ако за Питагоровата тројка (x,y,z) важи $d=\text{NZD}(x,y,z)$ >1, тогаш $(\frac{x}{d},\frac{y}{d},\frac{z}{d})$ е примитивна Питагорова тројка. Според тоа, за да ги определиме решенијата на равенката (1), доволно е да ги определиме само примитивните тројки (x,y,z), а останатите решенија се од облик $(kx,ky,kz), k\in\mathbb{N}$.

Теорема 1. Во множеството природни броеви равенката (1) има бесконечно многу решенија (x,y,z) такви што $\text{NZD}(x,y,z)=1$ и истите се дадени со

$$x=u^2-v^2,\ y=2uv,\ z=u^2+v^2, \tag{2}$$

каде што $u,v\in\mathbb{N}$, $\text{NZD}(u,v)=1$, $u>v$ и u и v се со различна парност.

Доказ. Од условот следува дека x е непарен, y е парен и z е непарен број. Затоа, $2\,|\,(x+y)$ и $2\,|\,(z-x)$. Според тоа

$$\frac{z+x}{2}\cdot\frac{z-x}{2}=(\frac{y}{2})^2 \tag{3}$$

каде $\frac{z+x}{2},\frac{z-x}{2}$ и $\frac{y}{2}$ се природни броеви. Понатаму, $\text{NZD}(x,z)=1$, бидејќи ако x и z имаат заеднички прост делител, тој е делител и на y, што противречи на претпоставката дека $\text{NZD}(x,y,z)=1$. Ако $d=\text{NZD}(\frac{z+x}{2},\frac{z-x}{2})$, тогаш $d\,|\,z=\frac{z+x}{2}+\frac{z-x}{2}$ и $d\,|\,x=\frac{z+x}{2}-\frac{z-x}{2}$ и како $\text{NZD}(x,z)=1$ добиваме дека $d=1$. Понатаму, ако искористиме дека производот на два заемно прости броеви е точен квадрат ако и само ако и двата броја се точни квадрати, од равенството (3) следува дека постојат u и v такви што

$$\frac{z+x}{2}=u^2,\ \frac{z-x}{2}=v^2.$$

Според тоа, постојат u и v такви што важи (2). Ако $d\,|\,u$ и $d\,|\,v$, тогаш $d^2\,|\,x, d^2\,|\,y$ и $d^2\,|\,z$, т.е. $d^2=1$. Значи, $\text{NZD}(u,v)=1$. Конечно, од

$\text{NZD}(x,y,z)=1$ следува дека u и v се со различна парност, а од $x>0$ следува дека $u>v$.

Обратно, нека u и v се такви што важи (2), каде што $u,v\in\mathbb{N}$, $\text{NZD}(u,v)=1$, $u>v$ и u и v се со различна парност. Тогаш

$$(u^2-v^2)^2+(2uv)^2=(u^2+v^2)^2 \;,$$

т.е. со (2) е дадено решение на (1). Сега, од $u>v$ следува дека $x>0$, $y>0$, $z>0$. Понатаму, ако p е прост број таков што

$$p\,|\,d_1=\text{NZD}(u^2-v^2,2uv,u^2+v^2)\,,$$

тогаш $p\,|\,(u^2+v^2+2uv)$ и $p\,|\,(u^2+v^2-2uv)$. Според тоа, $p\,|\,(u+v)^2$ и $p\,|\,(u-v)^2$, па затоа $p\,|\,u+v$ и $p\,|\,u-v$. Но, тоа значи $p\,|\,2u$ и $p\,|\,2v$ и како $\text{NZD}(u,v)=1$ добиваме дека $p=2$. Сега, u и v се со различна парност, па затоа u^2+v^2 е непарен бро, што противречи на $2\,|\,(u^2+v^2)$. Од добиената противречност следува $d_1=1$, т.е. $\text{NZD}(x,y,z)=1$, што значи дека со (2) е дадено примитивно решение на (1). ■

Пример 1. Докажи, дека ако радиусот на кругот е непарен прост број, тогаш околу него можат да се опишат точно два нескладни примитивни Питагорови триаголници.

Решение. Ако

$$a=m^2-n^2,\, b=2mn,\, c=m^2+n^2$$

е примитивна Питагорова тројка, тогаш радиусот на опишаниот круг на соодветниот триаголник е

$$r=\tfrac{1}{2}(a+b-c)=n(m-n)\,.$$

Ако r е непарен прост број p, тогаш мора да биде

$$n=1, m=p+1, a=p(p+2), b=2(p+1), c=p^2+2p+1,$$

$$n=p, m=p+1, a=2p+1, b=2p(p+1), c=2p^2+2p+2\,,$$

што значи дека можат да се опишат точно два нескладни примитивни Питагорови триаголници. ■

Пример 2. Нека x,y,z се природни броеви такви што

$$x^2+y^2=z^4 \text{ и } \text{NZD}(x,y)=1\,.$$

Докажи дека $7\,|\,xy$. Дали условот $\text{NZD}(x,y)=1$ е потребен?

Решение. Условот $\text{NZD}(x, y) = 1$ е потребен. Навистина, на пример, за броевите $x = 15, y = 20$ и $z = 5$ важи $15^2 + 20^2 = 5^4$, но $7 \nmid 15 \cdot 20$.

Нека $\text{NZD}(x, y) = 1$ и x, y, z се такви да $x^2 + y^2 = z^4$. Тогаш од теорема 1 следува дека постојат природни броеви m и n такви што

$$x = m^2 - n^2, \ y = 2mn \text{ и } z^2 = m^2 + n^2 .$$

Да претпоставиме дека $7 \nmid y$. Тоа значи дека $7 \nmid m$ и $7 \nmid n$. Но, квадрат на цел број кој не се дели со 7, при делење со 7 дава остаток 1, 2 или 4. Бидејќи ниту еден од збировите $1+2$, $1+4$ и $2+4$ не е еднаков на 1, 2 или 4 и не е делив со 7, од равенството $z^2 = m^2 + n^2$ следува дека броевите m и n при делење со 7 имаат еднакви остатоци, па затоа $7 \mid x = m^2 - n^2$. ■

Пример 3. Нека p, q и r се прости броеви и нека n е природен број таков што

$$p^n + q^n = r^2 . \tag{4}$$

Докажи, дека $n = 1$.

Решение. Јасно, еден од трите броеви p, q и r е парен.

Ако $r = 2$, тогаш од равенството $p^n + q^n = 4$ следува $p = q = 2$ и $n = 1$.

Нека претпоставиме дека $p > q = 2$. Нека претпоставиме дека $n > 1$ е непарен број. Сега равенството (4) можеме да го запишеме во обликот

$$(p+2)(p^{n-1} - 2p^{n-2} + 2^2 p^{n-3} + ... - 2^{n-2} p + 2^{n-1}) = r^2 .$$

Понатаму,

$$p^{n-1} - 2p^{n-2} + ... - 2^{n-2} p + 2^{n-1} = 2^{n-1} + (p-2)(p^{n-2} + 2^2 p^{n-4} + ... + 2^{n-3} p) > 1$$

и $p + 2 > 1$, па затоа мора двата множители да се еднакви на r. Сега од (4) следува $p^n + 2^n = (p+2)^2 = p^2 + 4p + 4$, што не е можно за $n \geq 3$.

Нека претпоставиме дека $n > 1$ е парен број и нека $n = 2m$. Сега равенството (4) можеме да го запишеме во обликот

$$(p^m)^2 + (2^m)^2 = r^2 ,$$

па од теорема 1 следува дека

$$p^m = a^2 - b^2, \ 2^m = 2ab \text{ и } r = a^2 + b^2 ,$$

за некои природни броеви a и b такви што $\text{NZD}(a, b) = 1$. Затоа a и b се степени на бројот 2, т.е. $b = 1$ и $a = 2^{m-1}$. Според тоа, $p^m = 4^{m-1} - 1 < 4^m$ и бидејќи p е прост број добиваме дека единствена можност е $p=3$. Но, тогаш $3^m=4^{m-1}-1$, што очигледно не е точно за $m=1,2,3,4$, а за $m\geq 5$ со индукција се докажува дека $4^{m-1}>3^m+1$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека $n=1$.

Примери на тројки прости броеви кои го задоволуваат условот на задачата се $p=7, q=2, r=3$; $p=23, q=2, r=5$ и $p=47, q=2, r=7$. ■

Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС на СММ