XXIII олимпијада

1. Дадена е функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_0$, за која важи:

   1) за секои m и n, $f(m+n)-f(m)-f(n)=0$ или 1,

   2) $f(2)=0$,

   3) $f(3)>0$,

   4) $f(9999)=3333$.

   Пресметај $f(1982)$.

   Решение. За $m=n=1$ според 1) и 2) добиваме $0=f(2)=2f(1)$ или $0=2f(1)+1$. Вториот случај не е можен бидејќи функцијата прима ненегативни вредности. Затоа $f(1)=0$.

   За $m=2, n=1$ важи $f(3)=f(2)+f(1)=0$ или $f(3)=f(2)+f(1)+1=1$, што според 3) значи $f(3)=1$.

   Јасно, $f(3n+3)\geq f(3n)+f(3)=f(3n)+1$, од каде со индукција се докажува дека $f(3n)\geq n$. Ако за некој n важи строго неравенство, тогаш тоа е исполнето и за секој број поголем од n. Бидејќи $f(9999)=3333$, заклучуваме дека $f(3n)=n$, за секој $n\leq 3333$. Во нашиот случај важи

   $$1982=f(3\cdot 1982)\geq f(2\cdot 1982)+f(1982)\geq 3f(1982),$$

   па според тоа

   $$661>\tfrac{1982}{3}\geq f(1982)\geq f(1980)+2=660.$$

   Значи, $f(1982)=660$.

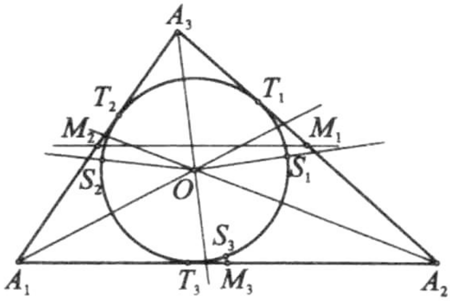
   Забелешка. Функцијата $f(n)=[\frac{n}{3}]$ ги задоволува условите на задачата.

2. Даден е разностран $\triangle A_1A_2A_3$ со должина на страните a_1,a_2,a_3 (a_i е должина на страна спроти темето A_i). Нека M_i е средината на страната a_i, T_i е точка во која впишаната кружница во триаголникот ја допира страната a_i, а S_i е симетрична точка на точката T_i во однос на симетралата на внатрешниот агол кај темето A_i ($i=1,2,3$). Докажи дека правите M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 се сечат во една точка.

   Решение. *Прв начин.* Точките S_1, S_2 и S_3 припаѓаат на впишаната кружница. Осната симетрија во однос на симетралата на аголот A_1 го пресликува лакот T_3S_1 на впишаната кружница во лакот T_2T_1, а осната симетрија во однос на симетралата на аголот A_2 лакот T_3S_2 го пресликува во лакот T_1T_2. Затоа

$$T_3S_1 = -T_2T_1 = T_1T_2 = -T_3S_2$$

(при што ознаките $T_3S_1, -T_2T_1, T_1T_2, -T_3S_2, \ldots$ се ознаки за ориентирани лаци на впишаната кружница). Од овде следува дека $S_1S_2 \parallel A_1A_2$ и заради тоа $S_1S_2 \parallel M_1M_2$. Слично се докажува дека $S_1S_3 \parallel M_1M_3$ и $S_2S_3 \parallel M_2M_3$. Значи, триаголниците $M_1M_2M_3$ и $S_1S_2S_3$ имаат паралелни страни па затоа постои хомотетија или транслација со која едниот се пресликува во другиот. Транслација не постои бидејќи опишаната кружница околу $\triangle M_1M_2M_3$ има поголем радиус од опишаната кружница околу $\triangle S_1S_2S_3$ (т.е. впишаната кружница на $\triangle A_1A_2A_3$, бидејќи $\triangle A_1A_2A_3$ е разностран). Затоа



постои хомотетија и нејзин центар е заедничката точка на правите M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3. (Овие прави постојат бидејќи $M_i \neq S_i$, а триаголникот $\triangle A_1A_2A_3$ е разностран).

Втор начин. Поставуваме координатен систем така што координатниот почеток да биде во центарот O на кружницата впишана во $\triangle A_1A_2A_3$, а радиусот на впишаната кружница да е еднаков на 1. Со мали букви ги означуваме комплексните броеви (афиксите) кои соодветствуваат на дадените точки означени со големи букви. Точни се равенствата $t_1\overline{t_1} = t_2\overline{t_2} = t_3\overline{t_3} = 1$. Тетивите $\overline{T_2T_3}$ и $\overline{T_1S_1}$ на дадената кружница се паралелни, бидејќи и двете се нормални на симетралата на аголот A_1, па затоа $t_2t_3 = t_1s_1$, односно $s_1 = t_2t_3\overline{t_1}$. Аналогно, $s_2 = t_1t_3\overline{t_2}$ и $s_3 = t_1t_2\overline{t_3}$. Според тоа,

$$s_3 - s_2 = t_1(t_2\overline{t_3} - t_3\overline{t_2}).$$

Бројот во заградата е имагинарен, како разлика на два коњугирано комплексни броеви, што значи $OT_1 \perp S_2S_3$ па затоа правите A_2A_3 и S_2S_3 се паралелни.

Понатаму решавањето е исто како и во првиот начин.

3. Ги разгледуваме низите позитивни реални броеви $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ со својство

$$1 = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots$$

а) Докажи дека за секоја низа со тоа својство постои $n \in \mathbb{N}$ таков што

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geq 3.999\ .$$

б) Определи низа $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ со тоа својство, при што е исполнето

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4\ .$$

Решение. а) Воведуваме ознаки

$$\frac{x_{i-1}}{x_i}=k_i\ (\ i=1,2,\ldots\ ).$$

Тогаш,

$$\frac{x_0^2}{x_1}=x_0k_1=k_1 \text{ и } x_1=\frac{1}{k_1}\ ,$$

$$\frac{x_1^2}{x_2}=x_1k_2=\frac{k_2}{k_1} \text{ и } x_2=k_1\frac{x_1^2}{k_2}=\frac{1}{k_1k_2}\ ,$$

$$\frac{x_2^2}{x_3}=x_2k_3=\frac{k_3}{k_1k_2} \text{ и } x_3=k_1k_2\frac{x_2^2}{k_3}=\frac{1}{k_1k_2k_3}\ \text{, итн.}$$

За општиот член на низата добиваме

$$S_n=\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=k_1+\frac{k_2}{k_1}+\frac{k_3}{k_1k_2}+\ldots+\frac{k_n}{k_1k_2\ldots k_{n-1}}$$
$$=k_1+\frac{1}{k_1}(k_2+\frac{1}{k_2}(k_3+\ldots+\frac{1}{k_{n-2}}(k_{n-1}+\frac{k_n}{k_{n-1}})\ldots)).$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека за секои $a,c>0$ важи $x+\frac{a}{x}\geq 2\sqrt{a}$. Со повеќекратна примена на ова неравенство добиваме

$$S_n=k_1+\frac{1}{k_1}(k_2+\frac{1}{k_2}(k_3+\ldots+\frac{1}{k_{n-2}}(k_{n-1}+\frac{k_n}{k_{n-1}})\ldots))$$
$$\geq k_1+\frac{1}{k_1}(k_2+\frac{1}{k_2}(k_3+\ldots+\frac{1}{k_{n-3}}(k_{n-2}+\frac{2}{k_{n-2}})\ldots))$$
$$\geq k_1+\frac{1}{k_1}\cdot 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}\ \geq 2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots\sqrt{2}}}}\ =y_n\ .$$

За да најдеме $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, изразот го запишуваме во облик $y_n=2\sqrt{y_{n-1}}$, од што следува $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=4$, со што е докажано тврдењето.

б) Низата $x_n=2^{-n}$ го задоволува дадениот услов:

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}=2^1+2^0+\ldots+2^{-n+2}=4-2^{-n+2}<4\ ,$$

за секој $n\in\mathbb{N}$.

4. Дадена е равенката

$$x^3-3xy^2+y^3=n\ .$$

Ако $n \in \mathbb{N}$ е таков што дадената равенка има целобројно решение (x, y), докажи дека тогаш равенката има барем три целобројни решенија. Докажи дека за $n = 2891$ оваа равенка нема ниту едно целобројно решение.

Решение. Левата страна на равенката ја запишуваме во облик

$$x^3 - 3xy^2 + y^3 = (y-x)^3 - 3(y-x)x^2 + (-x)^3 = (-y)^3 - 3y(x-y)^2 + (x-y)^3 .$$

Јасно, ако парот (x, y) е решение на равенката, тогаш и паровите $(y-x, -x)$ и $(-y, x-y)$, исто така се решенија на дадената равенка и притоа било кои два од овие три пара $(x, y), (y-x, -x)$, $(-y, x-y)$ не се еднакви меѓу себе, бидејќи во спротивно добиваме $x = y = 0$, што не е можно заради претпоставката $n \neq 0$.

За да докажеме дека за за $n = 2891$ оваа равенка нема ниту едно целобројно решение, истата ќе ја запишеме во видот

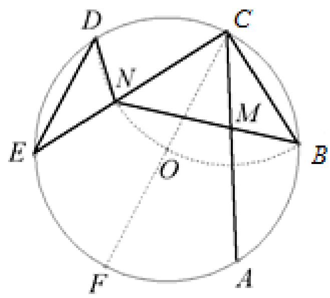
$$(x+y)^3 - 3xy(x+2y) = 2891. \qquad (1)$$

При делење на трети степени на цели броеви со 9 се добиваат остатоци 0 и ± 1. При делење на $xy(x+2y)$ се добива остаток 0, освен во случај кога $x = 3k+1$, $y = 3m+2$, кога остатокот е 2. Во тој случај $(x+y)^3$ е делив со 9. Од друга страна $2891 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 9)$, од каде следува дека равенката (1) нема решение во множеството цели броеви.

5. На дијагоналите AC и CE на правилниот шестаголник $ABCDEF$ се избрани внатрешни точки M и N, такви што $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \lambda$. Пресметај го λ, ако се знае дека точките B, M и N лежат на иста права.

Решение. *Прв начин.* Од $\overline{CM} = \overline{EN}$, следува дека триаголниците BCM и DEN се складни, па затоа $\measuredangle NBC = \measuredangle NDE$. Освен тоа $\measuredangle BCE = 90^\circ$, $\measuredangle DEC = 30^\circ$, па затоа

$$\begin{aligned}\measuredangle DNB &= \measuredangle CNB + \measuredangle DNC \\ &= (90^\circ - \measuredangle NBC) + (\measuredangle DEC + \measuredangle NDE) \\ &= 120^\circ.\end{aligned}$$

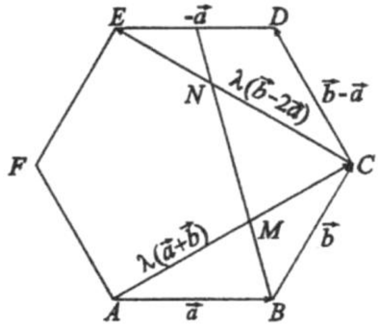


Тоа значи дека отсечката BD се гледа од точката N под ист агол како и од центарот O на кружницата опишана околу правилниот шестаголник. Затоа N лежи на кружница со центар во C, и радиус $\overline{CD} = \overline{CB}$, т.е. $\overline{CN} = \overline{CB}$. Конечно,

$$\lambda = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CB}}{CE} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

бидејќи во правоаголниот триаголник BCE, $\measuredangle EBC = 60^\circ$.

Втор начин. Ако ги воведеме ознаки $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, добиваме $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\overrightarrow{CE} = \vec{b} - 2\vec{a}$. Од $\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CE}} = \lambda$ имаме



$$\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AC} = \lambda(\vec{a} + \vec{b}) \text{ и}$$

$$\overrightarrow{CN} = \lambda\overrightarrow{CE} = \lambda(\vec{b} - 2\vec{a}).$$

Точките B, M и N се колинеарни и затоа

$$\overrightarrow{BM} = \mu\overrightarrow{BN} \quad (1)$$

за некој μ. Ги изразуваме $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BN}$ со помош на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \lambda(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a},$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \vec{b} + \lambda(\vec{b} - 2\vec{a}),$$

и ако замениме во (1) добиваме

$$\vec{a}(\lambda - 1 + 2\lambda\mu) + \vec{b}(\lambda - \mu - \lambda\mu) = 0,$$

Бидејќи $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се линеано независни вектори, добиваме:

$$\lambda - 1 + 2\lambda\mu = 0$$

$$\lambda - \mu - \lambda\mu = 0$$

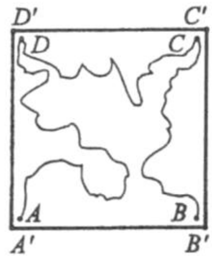
од каде што наоѓаме $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Даден е квадрат S со должина на страната 100. Нека $L = A_0A_1A_2...A_n$ е полигонална линија во S која самата себе не се допира и не се пресекува, таква што $A_0 \neq A_n$. Нека за секоја точка P од страните на квадратот S постои точка од линијата L чија што оддалеченост од P не е поголема од $\frac{1}{2}$.

Докажи дека на L постојат две точки X и Y меѓу кои растојанието не е поголемо од 1, а должината на линијата L меѓу тие точки не е помала од 198.

Решение. Според условите, полигоналната линија L навлегува во појас со ширина $\frac{1}{2}$ по должината на сите страни на квадратот $A'B'C'D'$. Притоа линијата L мора да ги посети околините на точките A, B, C и D (види ги цртежите), така што ќе се приближи и до темињата на квадратот на растојание $d \leq \frac{1}{2}$. Зависно од редоследот по кој се посетуваат точките A, B, C, D, односно нивната околина, линијата L може да биде во облик на буквата N или во облик на буквата U. Во двата случаја точката C на линијата L се наоѓа меѓу точките A и B.

До точките од страната $A'B'$ линијата L се доближува или со нејзиниот дел од A до C или со нејзиниот дел од C до B. Врз основа на ова точките од страната $A'B'$ ги делиме на две множества од конечен број интервали. Пресекот на овие две множества не може да биде празно множество. Затоа постои точка P од страната $A'B'$ што е на растојание помало од $\frac{1}{2}$ од некоја точка X на делот на линијата меѓу точките A и C и што е истовремено на растојание помало од $\frac{1}{2}$ од некоја точка Y што припаѓа на делот на L меѓу C и B.



Од неравенството на триаголник и $d(P,X)<\frac{1}{2}$, $d(P,Y)<\frac{1}{2}$ следува $d(X,Y)<1$. Истовремено должината на линијата меѓу точките X и C не е помала од 99, бидејќи точките X и C се на растојание кое не е помало од $\frac{1}{2}$ од $A'B'$ и $D'C'$, соодветно. Од исти причини и должината на линијата меѓу точките C и Y не е помала од 99. Конечно, од претходно изнесеното следува дека должината на линијата меѓу точките X и Y не е помала од 198.