НАУМ ЦЕЛАКОСКИ
ЖИВКО МАДЕВСКИ

МАТЕМАТИКА

ЗА ПРИРОДНО –
МАТЕМАТИЧКА
СТРУКА

„ПРОСВЕТНО ДЕЛО"
СКОПЈЕ, 1990

Уредник:
Кирил МИЛЧЕВ

Рецензенти:

д-р Дончо ДИМОВСКИ, доцент на Природноматематичкиот факултет во Скопје,

Гоце ШОПКОСКИ, самостоен педагошки советник по математика во градскиот завод за школство во Штип,

Билјана ВИТАНОВА, професор во училишниот центар „Јане Сандански“ во Струмица

Со решение на Републичкиот педагошки совет бр. 13-135/1 од 29.06.1989 год. се одобрува употребата на овој учебник.

ВОВЕД

Учебников е работен така што со негова помош ќе можеш и самостојно да доаѓаш до знаењата по математика што се предвидени да ги стекнеш во оваа година.

Тука ќе се сретнеш пак со множеството на природните броеви, целите, рационалните и реалните броеви, степените, алгебарските рационални изрази и корените, ќе ги прошириш знаењата за нив и ќе се запознаеш со некои нивни нови својства и примени. Исто така ќе научиш нови поими и факти од математичката логика, која има голема примена во математиката, секојдневниот живот и особено во компјутерските науки.

Материјалот што ќе го изучуваш е разделен во осум теми коишто претставуваат заокружени целини. Секоја тема, пак, е разделена на одреден број лекции кои, исто така, претставуваат заокружени целини. Темите се означени со римските броеви од I до VIII, а лекциите со бројката на темата и редниот број на лекцијата во темата. Така, II.6 значи шестата лекција од втората тема.

Секоја од лекциите е разделена на помали делови – единки, што се означени со букви а. б. в. г. *И тие од своја страна претставуваат заокружени целини. Во секоја од нив прво се воведува новото или се потсетува за некој поим што е изучуван порано, потоа се дава пример и се поставува задача за самостојна работа. На крајот од лекцијата се даваат задачи од сите единки, со чие решавање ќе се заокружи предвиденото во лекцијата. Меѓу тие задачи, во повеќе случаи, има и задачи во квадратчиња. На нив обрни посебно внимание. Тие најчесто не се во врска со она што се изучувало во дадената лекција, но се предвидени за потсетување на она што си го изучувал порано, а што ќе се применува во наредната лекција.*

На крајот на секоја тема има задачи за повторување и утврдување на ученото во темата, а потоа и тест, со чија помош самостојно ќе утврдиш во колкава мера си го совладал материјалот од темата. Пред да започнеш со решава-

њето на тестот, неопходно е да ги решиш задачите што се дадени под насловот: „Задачи за повторување и утврдување“. Доколку некоја од нив не можеш веднаш да ја решиш, утврди од која лекција е и погледај го напишаното во врска со тоа, како и дадените примери.

Во учебникот се дадени и дополнителни задачи во врска со секоја од предвидените лекции. Со нивното решавање ќе можеш уште подобро да го совладаш предвиденото.

На одделни места во учебникот ќе го сретнеш знакот ◑ *На тоа место се дава одредено упатство. Не брзај со неговото користење; прво добро размисли во врска со бараното. Кај одредени содржини или кај некои задачи е ставен знакот * (ѕвездичка). Оваа материја или задачи се од посложен карактер. Нив не мора да ги обработуваш доколку сметаш дека се претешки за тебе.*

На крајот од учебников се дадени одговори или упатства скоро на сите поставени прашања или задачи. Пожелно е пред да го погледнеш одговорот или решението, преку самоконтрола, да се увериш во точноста на решението. Само на тој начин ќе стекнеш самодоверба во себе за совладување на дадена материја.

Низ учебников има и текстови од историјата на математиката. Преку нив ќе можеш да согледаш дека таа се создавала долго време и од голем број луѓе, а новото секогаш доаѓало како резултат на потребите на човекот.

Авторите

ГЛАВА VI.

КОРЕНУВАЊЕ

Видовме (во § VII.2) дека со делењето се решава задача што е обратна на множењето: познат е производот на два множитела и едниот од нив, а се бара другиот множител. Аналогна задача се јавува кај степенувањето: дадена е вредноста на степенот и степеновиот показател, а се бара основата на степенот. Оваа задача е обратна од степенување и се вика **коренување**. Овде ќе се запознаеш со најважните поими и својства во врска со коренувањето.

VI.1. ПОИМ ЗА КОРЕН

а. Нека ни е дадена равенката $x^2 = 4$. За да ја решиме оваа равенка треба да најдеме број чиј квадрат е 4. Еден таков број е 2, бидејќи $2^2 = 4$. Исто така, и бројот -2 е решение на оваа равенка, бидејќи и $(-2)^2 = 4$. Бројот 2 го нарековме *квадратен корен* од бројот 4. И бројот -2 е *квадратен корен* од 4. Бројот 5, пак, е квадратен корен од бројот 25, бидејќи $5^2 = 25$, а и -5 е квадратен корен од 25, бидејќи $(-5)^2 = 25$.

Општо, **квадратен корен** од еден број a е број x чиј квадрат е бројот a, т.е. број што е решение на равенката $x^2 = a$.

Да ја испитаме равенката

$$x^2 = a. \tag{1}$$

1°. a > 0. Видовме дека за $a = 4$ таа има решенија 2 и -2, за $a = 25$ има решенија 5 и -5. Општо, може да се докаже дека за $a>0$ равенката(1) има две решенија што се два спротивни броја. Тоа се и квадратни корени од a. Позитивниот број x за кој $x^2 = a$ го означуваме со симболот $\sqrt{a}$.

Така, $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{36} = 6$.

Другото решение се означува со $-\sqrt{a}$.

2°. a = 0. За $a = 0$ равенката има само едно решение - нулата, бидејќи $0^2 = 0$. Се означува $\sqrt{0} = 0$.

Од 1° и 2° можеме да заклучиме дека: ако $a \geq 0$, тогаш $\sqrt{a} \geq 0$.

3°. a < 0. Нека $a = -4$. Дали равенката $x^2 = -4$ има решение во множеството на реалните броеви? Сигурно нема, бидејќи не постои реален број чиј квадрат е -4.

Значи, квадратен корен од негативен број во множеството на реалните броеви не постои.

1. Утврди кои од следниве искази се вистинити:

а) Бројот 8 е квадратен корен од 16.

б) Бројот 8 е квадратен корен од 64.

в) $\frac{2}{5}$ е квадратен корен од $\frac{4}{25}$.

г) $\sqrt{16} = 4 \vee \sqrt{64} = 8$.

2. Кои од следниве изрази немаат смисла?

а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt{-49}$; в) $\sqrt{0}$; г) $\sqrt[3]{-16}$.

б. Да ја испитаме равенката

$$x^3 = a. \qquad (2)$$

Решение на оваа равенка е секој број x чиј трет степен го дава бројот a. Така, 2 е решение на равенката $x^3 = 8$, бидејќи $2^3 = 8$. Да видиме дали -2 е решение на равенката $x^3 = 8$.

$$(-2)^3 = -8.$$

Значи, -2 не е решение на равенката $x^3 = 8$. Но, -2 е решение на равенката $x^3 = -8$, бидејќи $(-2)^3 = -8$. И за $a = 0$ равенката (2) има едно решение - нулата, бидејќи $0^3 = 0$.

Може да се докаже и општо дека равенката $x^3 = a$ за $a = 0$ има точно едно решение 0, за секој број $a > 0$ има точно едно решение - позитивен број и за секој број $a < 0$ има точно едно решение - негативен број.

Бројот x за кој $x^3 = a$ се вика *трети корен* од a. Според тоа, постои трети корен од кој било реален број и тоа - единствен.

3. Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) 4 е трети корен од 64.

б) -1 е трети корен од -1.

в) Трети корен од -125 е -5.

г) Трети корен од 100 е 10.

в. Општо. Ако a е реален број и n природен број, тогаш секое решение на равенката

$$x^n = a$$

по x во множеството $\mathbf{R}$, ако постои, се вика **n - ти корен** од бројот a.

Можеме да речеме и дека: n - ти корен од бројот a е број чиј n - ти степен е еднаков со a.

Во врска со решенијата на равенката $x^n = a$ ја даваме, без доказ, следнава основна теорема:

T	За секој реален број $a > 0$ и за секој природен број n постои единствен позитивен реален број x што е решение на равенката $x^n = a$.

Во претходните разгледувања видовме дека е тоа случај со равенките $x^2 = a$ и $x^3 = a$. Врз основа на горната теорема може да се докаже дека:

4° *Ако n е парен број и $a > 0$, тогаш равенката $x^n = a$ по x има само две решенија во* $\mathbf{R}$ *– два меѓусебно спротивни реални броеви.*

5° *Ако n е непарен број, тогаш равенката $x^n = a$ има само едно решение во* $\mathbf{R}$ *(независно од тоа каков е a).*

Така, во врска со 4° решенија на равенката $x^2 = 9$ се спротивните броеви 3 и -3, решенија на равенката $x^4 = 16$ се 2 и -2. Решението, пак, на равенката $x^3 = 27$ е 3, а на $x^3 = -343$ е -7.

4. Утврди кои од следниве искази се вистинити:

а) Петти корен од 32 е 2.

б) Петти корен од -32 е 2.

в) Четврти корен од -81 е -3.

г) 2 е седми корен од 128.

Врз основа на утврденото, за решенијата на равенката $x^n = a$ имаме:

6°. *Кога n е непарен број, секогаш постои n-ти корен од бројот a и тоа само еден. Тој корен ќе го означуваме со $\sqrt[n]{a}$ (се чита n-ти корен од a).*

Притоа, бројот n се вика **коренов показател**, бројот a – **поткоренов израз**, а симболот $\sqrt{\ }$ – **знак на коренот** или коренов знак.

Примери: 1) Записот $\sqrt[5]{32}$ означува петти корен од 32. Лесно се проверува дека $\sqrt[5]{32} = 2$ (бидејќи $2^5 = 32$)

2) Записот $\sqrt[3]{-8}$ означува трети корен од -8; равенството $\sqrt[3]{-8} = -2$ е точно, бидејќи $(-2)^3 = -8$.

3) Записот $\sqrt[9]{0}$ означува деветти корен од 0; равенството $\sqrt[9]{0} = 0$ е точно, бидејќи $0^9 = 0$.

7°. Кога n е парен број и $a > 0$, постојат два спротивни броја што се појавуваат како n-ти корен од бројот a. Позитивниот од нив се означува со симболот $\sqrt[n]{a}$, а спротивниот на него број (негативниот корен) се означува со: $-\sqrt[n]{a}$. За $a = 0$ постои единствен n-ти корен од a: $\sqrt[n]{0} = 0$, бидејќи $0^n = 0$. За $a < 0$, n-ти корен од a во множеството на реалните броеви не постои. Се вели уште: изразот $\sqrt[n]{a}$ кога n е парен број и $a < 0$ нема смисла.

Постапката со која се одредува $\sqrt[n]{a}$ се вика **коренување.**

Примери: 4) Записот $\sqrt[6]{64}$ го означува позитивниот шести корен од 64. Равенството $\sqrt[6]{64} = 2$ е точно, бидејќи $2^6 = 64$.

Да напомниме дека натаму, како и досега, наместо $\sqrt[2]{a}$ ќе пишуваме само $\sqrt{a}$ и дека $\sqrt[1]{a} = a$.

Да заклучиме: *кога n е непарен број, $\sqrt[n]{a}$ има смисла за кој било $a \in \mathbf{R}$, а кога n е парен број, тогаш симболот $\sqrt[n]{a}$ има смисла само за $a \geq 0$. Симболот $\sqrt[n]{a}$ за $a \geq 0$ секогаш има смисла.*

5. Одреди кои од следниве изрази имаат смисла:

а) $\sqrt[9]{-8}$ б) $\sqrt[12]{0}$ в) $\sqrt[16]{-256}$ г) $\sqrt[32]{156}$.

Да испитаме на што е еднакво $(\sqrt{4})^2$; $(\sqrt{4})^2 = (2)^2 = 4$. Значи, $(\sqrt{4})^2 = 4$. Исто така $(\sqrt[3]{8})^3 = 8$ и општо,

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

ако записот $\sqrt[n]{a}$ има смисла.

Така, $(\sqrt{-4})^2$ не е еднаков на -4, бидејќи записот $\sqrt{-4}$ во множеството на реалните броеви нема смисла.

6. Одреди на што е еднакво

а) $\sqrt[7]{5^7}$ б) $\sqrt[9]{3^9}$ в) $(\sqrt[4]{-4})^4$

Да испитаме на што е еднакво $\sqrt[n]{a^n}$. Тоа ќе го согледаме преку неколку примери. Прво, да земеме n да е непарен број, на пример $\sqrt[5]{3^5}$. Според дефиницијата за n-ти корен, тоа треба да биде број чиј петти степен е еднаков со поткоренoвиот израз – тоа е бројот 3. Врз основа на тоа, $\sqrt[7]{5^7} = 5$; $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$. Или, општо,

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Да го испитаме случајот кога n е парен број. На пример, очигледно е дека $\sqrt{2^2} = 2$, $\sqrt[4]{5^4} = 5$. Но, $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$, бидејќи $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. Така, $\sqrt[4]{(-5)^4} = 5$.

Значи, кога n е парен број, поткореновиот израз секогаш е позитивен број и $\sqrt[n]{a^n}$ ќе биде позитивен број. Според тоа,

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|.$$

Значи,

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a \text{ кога } n \text{ е непарен број,} \\ |a| \text{ кога } n \text{ е парен број.} \end{cases}}$$

7. Одреди на што е еднакво:

а) $\sqrt[5]{(-7)^5}$ б) $\sqrt[3]{9^3}$ в) $\sqrt[4]{(-4)^4}$ г) $\sqrt[8]{3^8}$.

Од историјата на математиката

Знакот за корен први го вовеле германските математичари во XV век. Прво се користел знакот $\sqrt{\ }$, додека хоризонталната црта над поткореновиот израз го вовел францускиот математичар Рене Декарт во 1637 година. Показателот, пак, на коренот над знакот, како што го користиме сега, воведен е дури во 1829 година од холандскиот математичар Албер Жирар.

g. Вежби

8. Утврди кои од следниве искази се вистинити:

   а) Квадратен корен од 0 е 0.

   б) Трети корен од 343 е 7.

   в) Изразот $\sqrt[3]{-8}$ нема смисла.

   г) Изразот $\sqrt[4]{-16}$ нема смисла.

   д) Четврти корен од 225 е 5.

9. Одреди на што е еднакво

   а) $\sqrt[5]{35^5}$ б) $\sqrt[4]{23^4}$ в) $\sqrt[6]{(-7)^6}$ г) $\sqrt[7]{(-5)^7}$.

10. Кои се квадратните корени од 4, а на што е еднаков $\sqrt{4}$?

11. Спореди ги вредностите на следниве корени:

   а) $\sqrt[3]{8}$ и $\sqrt[6]{8^2}$; б) $\sqrt{5^2}$ и $\sqrt[4]{5^4}$.

VI.2. ПРОШИРУВАЊЕ И СКРАТУВАЊЕ НА КОРЕНИ

a. **Проширување на корени.** Лесно се утврдува дека е точно равенството $\sqrt[3]{8}=\sqrt[6]{64}$ (Задача **11** од минатата лекција). Навистина, $\sqrt[3]{8} = 2$ и $\sqrt[6]{64} = 2$. Но, даденото равенство може да се запише и на следниов начин:

$$\sqrt[3]{2^3} = \sqrt[6]{2^6}.$$

Во случајов, може да се смета дека коренот на десната страна е добиен од коренот на левата страна со множење на кореновиот показател и показателот на степенот под знакот на коренот со 2. Точно е и равенството $\sqrt[4]{3^4} = \sqrt[8]{3^8}$. (Провери!)

Воопшто, важи и следнава теорема:

T	Ако a е позитивен реален број и m, n и p се природни броеви, тогаш $$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}. \qquad (1)$$

Доказ. Според условот на теоремата, и двете страни на равенството (1) се позитивни броеви. За да докажеме дека се еднакви, доволно е да докажеме дека се еднакви одредени степени на изразите од двете страни (врз основа на еквиваленцијата $a^n = b^n \iff a = b$ за $a > 0$, $b > 0$ и $n \in \mathbf{N}$).

Да ја означиме левата страна со L, а десната со D.

$$D^{np} = (\sqrt[np]{a^{mp}})^{np} = a^{mp}$$

$$L^{np} = (\sqrt[n]{a^m})^{np} = ((\sqrt[n]{a^m})^n)^p = (a^m)^p = a^{mp}$$

Значи, $L^{np} = D^{np}$. Оттука следува дека $L = D$, со што теоремата е докажана.

Според оваа теорема, вредноста на коренот $\sqrt[n]{a^m}$ ($a > 0$, $m, n \in \mathbf{N}$) не се менува, ако кореновиот показател и показателот на поткореновиот израз се помножат со еден ист природен број. Со ова е дадено едно својство на коренот што се вика **проширување на коренот.**

Примери: 1. *Да го прошириме со 4 коренот* $\sqrt[3]{a^2}$ ($a > 0$).

Решение. $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[12]{a^8}$.

2. Коренот $\sqrt[3]{ab^2}$ проширен со 3 е еднаков на $\sqrt[9]{(ab^2)^3} = \sqrt[9]{a^3b^6}$.

1. Прошири ги со 3 следниве корени:

а) $\sqrt[5]{a^2}$ б) $\sqrt[3]{a^2b}$ в) $\sqrt[4]{ab^2c^3}$ ($a, b, c > 0$).

Врз основа на равенството (1), корени со различни коренови показатели може да се сведуваат на корени со ист показател.

Пример 3. *Да ги сведеме на ист коренов показател корените:*

$\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{x^2}$ и $\sqrt[6]{y^5}$ ($a > 0$, $x > 0$ и $y > 0$).

Решение. НЗС (3, 4, 6) = 12.

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[12]{a^4};\ \sqrt[4]{x^2} = \sqrt[12]{(x^2)^3} = \sqrt[12]{x^6} \text{ и } \sqrt[6]{y^5} = \sqrt[12]{y^{10}}$$

И натаму ќе сметаме дека променливите во поткореновите изрази примаат позитивни вредности и дека поткореновиот израз во целина е позитивен.

2. Сведи ги на ист коренов показател: $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{y^2}$ и $\sqrt[5]{a}$.

3. Искажи ја теоремата од претходната страница со употреба на квантификаторот „за секој", а потоа запиши ја со помош на симболи.

б **Скратување на корени.** Равенството (1), запишано во обратна насока

$$\boxed{\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}} \qquad (2)$$

упатува на тоа дека *вредноста на еден корен од позитивен реален број не се менува ако кореновиот показател и показателот на поткореновиот израз се поделат со некој нивни заеднички делител.*

Така, ако е даден коренот $\sqrt[n]{a^m}$ ($a > 0$, $m, n \in \mathbf{N}$) и притоа за броевите m и n постои заеднички делител k, тогаш

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:k]{a^{m:k}}}$$

Ова својство се вика **скратување на корени.**

Примери: 4. $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[3]{a^2}$.

5. $\sqrt[8]{a^4b^6} = \sqrt[8]{(a^2b^3)^2} = \sqrt[4]{a^2b^3}$.

4. Упрости ги следниве корени:

а) $\sqrt[8]{x^6}$ б) $\sqrt[20]{a^5b^{10}c^{15}}$.

b. Вежби

5. Прошири ги со 2 следниве корени:

а) $\sqrt[3]{a}$. б) $\sqrt[4]{xy}$.

6. Сведи ги корените на заеднички коренов показател:

а) $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[6]{xy^2}$ и $\sqrt[4]{xy^2}$.

б) $\sqrt{x}$; $\sqrt[4]{x^2y^3}$ и $\sqrt[8]{x^5y^3}$.

7. Упрости ги корените:

а) $\sqrt[6]{x^2y^2}$. б) $\sqrt[8]{x^4y^2z^4}$. в) $\sqrt[4]{x^2 + 2xy + y^2}$.

8. Провери дали се точни дадените равенства:

а) $\sqrt{64 \cdot 25} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{25}$. б) $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27}$

в) $\sqrt{\frac{100}{25}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}$ г) $\sqrt[3]{\frac{64}{8}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{8}}$

VI.3. КОРЕНУВАЊЕ НА ПРОИЗВОД И КОЛИЧНИК

a. **Коренување на производ.** Да пресметаме на што е еднакво $\sqrt{64 \cdot 25}$ (задачата 8 под а од минатата лекција).

$$\sqrt{64 \cdot 25} = \sqrt{1600} = 40, \text{ но и } \sqrt{64} \cdot \sqrt{25} = 8 \cdot 5 = 40.$$

Според тоа, точно е равенството:

$$\sqrt{64 \cdot 25} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{25}.$$

Уочуваме дека квадратен корен од производ на два позитивни броја е еднаков со производот од квадратните корени на тие броеви. Но, општо, важи следнава теорема:

T₁	Ако a и b се позитивни реални броеви, тогаш за секој природен број n важи равенството: $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. (1)

Доказ. Нека $L = \sqrt[n]{ab}$ и $D = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. Броевите L и D се позитивни. За да докажеме дека $L = D$, доволно е да докажеме дека се еднакви некои нивни одредени степени.

$$L^n = (\sqrt[n]{ab})^n = ab.$$

$$D^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$$

Значи, $L^n = D^n$ со што теоремата е докажана (зашто за $L > 0, D > 0$: $L^n = D^n <=> L = D$).

Примери: **1.** $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6.$

2. $\sqrt[4]{81 \cdot 625} = \sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{625} = 3 \cdot 5 = 15.$

3. $\sqrt[3]{8x^3} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{x^3} = 2x.$

1. Одреди на што е еднакво: а) $\sqrt[3]{1000 \cdot 125}$, б) $\sqrt[3]{8x^3a^3}$.

Да го запишеме равенството (1) во обратна насока:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.} \qquad (2)$$

Со равенството (2) е дадено правилото за множење на корени со еднакви коренови показатели.

Можеме да речеме дека:

Производот од корени со исти коренови показатели е корен со истиот показател и со поткоренов израз што е еднаков со производот од поткореновите изрази на корените што се множат.

Пример 4. а) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2 \cdot 3} = \sqrt[3]{6}.$

б) $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{x^3}.$

2. Одреди го производот од корените $\sqrt[7]{x^2} \cdot \sqrt[7]{x^3}$.

Ако два корени што се множат имаат различни коренови показатели, претходно треба да се сведат на корени со еднакви показатели.

Пример 5. $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt[12]{x^4} \cdot \sqrt[12]{y^3} = \sqrt[12]{x^4y^3}.$

3. Одреди ги следниве производи:

а) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}$. b) $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[6]{xy}$.

Равенството (1) може да се прошири и на повеќе од два множитела; така, ако $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$,

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}} \qquad (3)$$

Секако, важи и равенството во обратната насока.

Пример 6. а) $\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{y^2} \cdot \sqrt[4]{z^3} = \sqrt[4]{xy^2z^3}.$

б) $\sqrt[12]{x^6y^4z^3} = \sqrt[12]{x^6} \cdot \sqrt[12]{y^4} \cdot \sqrt[12]{z^3} = \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[4]{z}.$

4. Одреди ги следниве производи:

а) $\sqrt[5]{3x} \cdot \sqrt{2y} \cdot \sqrt[10]{5z}$. б) $\sqrt[4]{2a} \cdot \sqrt[6]{b^2} \cdot \sqrt[3]{3c}$

6. Коренување на количник. Да одредиме на што е еднакво $\sqrt{\frac{100}{25}}$ (Задача 8 под в) од минатата лекција).

$$\sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2, \text{ но и } \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Според тоа точно е равенството:

$$\sqrt{\frac{100}{25}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}$$

Општо важи теоремата:

T₂	Ако a и b се позитивни реални броеви, тогаш за секој природен број n, точно е равенството $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad (4)$$

Теоремата Т.2 се докажува слично како и Т.1. Докажи ја!

Пример 7. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$.

5. Пресметај: $\sqrt[4]{\frac{81}{10\,000}}$.

Равенството (4), запишано во обратната насока, го дава правилото за делење на корени со еднакви коренови показатели.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (5)$$

6. Запиши го, според равенството (5), правилото за делење на корени со исти коренови показатели.

7. Подели го коренот $\sqrt[5]{x^3y^2}$ со коренот $\sqrt[5]{x^2y}$ ($x > 0$, $y > 0$).

Пример 8. Да го одредиме количникот $\frac{\sqrt[6]{xy^2}}{\sqrt[8]{xy^2}}$.

Решение. НЗС $(6, 8) = 24$; $\frac{\sqrt[6]{xy^2}}{\sqrt[8]{x^2y}} = \frac{\sqrt[24]{x^4y^8}}{\sqrt[24]{x^6y^3}} = \sqrt[24]{\frac{x^4y^8}{x^6y^3}} = \sqrt[24]{\frac{y^5}{x^2}}$.

b. Вежби

8. Пресметај:

а) $\sqrt{64\cdot 100}$. б) $\sqrt{4\,900}$ в) $\sqrt[3]{125\cdot 8\cdot 27}$.

9. Пресметај:

а) $\sqrt{25a^2}$. б) $\sqrt[3]{x^3y^6}$.

10. Помножи, а потоа одреди на што е еднакво:

а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}$; б) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{2,5}$; в) $\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot\sqrt{x+1}$.

11. Пресметај на најкраток начин:

а) $\sqrt{101^2-20^2}$. б) $\sqrt{100^2-96^2}$ в) $\sqrt{117^2-108^2}$.

12. Изврши ги назначените операции:

а) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{3x^2}\cdot\sqrt{6x}$. б) $\sqrt[3]{3a}\cdot\sqrt[3]{6a^2}\cdot\sqrt[3]{12}$.

13. Изврши ги назначените операции:

а) $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt[5]{x}$. б) $\sqrt[6]{2a}\cdot\sqrt[3]{3a}\cdot\sqrt[4]{a^2}$.

14. Пресметај:

а) $\sqrt[3]{\frac{8}{1000}}$. б) $\sqrt{\frac{81}{144}}$. в) $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$.

15. Изврши ги назначените операции:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}}$. б) $\sqrt[4]{6^4a^6}:\sqrt{2a^2}$.

16. Изврши ги назначените операции:

а) $\sqrt[3]{4x^2}:\sqrt[4]{2x}$. б) $\sqrt[5]{x^6}:\sqrt[10]{x^2}$.

$\boxed{17}$ Врз основа на теоремата за коренување на производ и својството

$$\sqrt[n]{a^n}=a \qquad (a>0),$$

упрости ги следниве изрази:

а) $\sqrt[3]{a^3\cdot a^2}$. б) $\sqrt[4]{a^4a^3}$. в) $\sqrt[3]{a^5}$.

VI.4. НОРМАЛЕН ВИД НА КОРЕН

a. **Извлекување множители пред знакот на коренот.** Кај коренот $\sqrt[3]{a^5}$ показателот на поткореновиот израз е поголем од показателот на коренот. Можеме да запишеме: $\sqrt[3]{a^5}=\sqrt[3]{a^3\cdot a^2}$.

Врз основа на теоремата за коренување на производ,

$\sqrt[3]{a^3\cdot a^2}=\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}=a\sqrt[3]{a^2}$, т. е.

$$\sqrt[3]{a^5}=a\sqrt[3]{a^2}.$$

Со оваа трансформација на дадениот корен, извлечен е множител пред знакот на коренот.

Примери: 1. $\sqrt[4]{a^9} = \sqrt[4]{a^8\cdot a} = \sqrt[4]{a^8}\cdot\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{(a^2)^4}\cdot\sqrt[4]{a} = a^2\sqrt[4]{a}$

2. $\sqrt[5]{x^{27}} = \sqrt[5]{x^{25}\cdot x^2} = \sqrt[5]{x^{25}}\cdot\sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5]{(x^5)^5}\cdot\sqrt[5]{x^2} = x^5\sqrt[5]{x^2}$.

3. $\sqrt{50} = \sqrt{25\cdot 2} = 5\sqrt{2}$

Од примерите може да се согледа дека извлекувањето на множител пред знакот на коренот може да се поедностави. Така, на пример ако е даден коренот $\sqrt[n]{a^m}$, при што $m > n$ и $m = n\cdot p + q$, $a > 0$, тогаш $a^m = a^{n\cdot p}\cdot a^q = (a^p)^n\cdot a^q$. Во тој случај, пред знакот на коренот се извлекува a^p, а во коренот останува a^q, т. е.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^p\,\sqrt[n]{a^q} \text{ ако } m = n\cdot p+q \ (q < n \text{ и } a > 0)}$$

Примери: 4. $\sqrt[5]{y^{37}} = y^7\cdot\sqrt[5]{y^2}$, бидејќи $37=5\cdot 7+2$

5. $\sqrt[6]{x^7\cdot y^{14}} = xy^2\sqrt[6]{xy^2}$, бидејќи $7 = 6\cdot 1 + 1$, а $14=6\cdot 2+2$

6. $\sqrt[3]{\dfrac{a^7}{b^5}} = \dfrac{a^2}{b}\sqrt[3]{\dfrac{a}{b^2}}$ (Образложи го решението).

1. Извлечи ги пред знакот на коренот множителите што можат да се извлечат:

а) $\sqrt[7]{b^{38}}$. б) $\sqrt[3]{a^8b^9}$. в) $\sqrt[5]{\dfrac{x^5y^6}{z^7}}$. г) $\sqrt{200}$.

б **Внесување множители под знакот на коренот.** Нека е даден изразот $a\sqrt[3]{b}$. Како ќе го внесеме под знакот на коренот множителот што е пред знакот на коренот?

$$a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3b}.$$

Значи, *постапката за внесување на множител под знакот на коренот е обратна од таа за извлекување множител пред знакот на коренот.*

Примери: 7. $x\sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{x^5}\sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{x^5y}$.

8. $x^2\sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{(x^2)^6}\cdot\sqrt[6]{x} = \sqrt[5]{x^{12}x} = \sqrt[6]{x^{13}}$.

9. $4\sqrt{5} = \sqrt{16\cdot 5} = \sqrt{80}$.

Од примериве може да се согледа дека доколку пред коренот има множител за да се внесе под знакот на коренот, треба претходно да се степенува со корeновиот показател.

2. Внеси ги множителите што се пред знакот на коренот:

а) $x\sqrt[4]{y}$. б) $x^3\sqrt[5]{x^2}$. в) $x^2y\sqrt[3]{xy}$. г) $3\sqrt{3}$.

Еве уште неколку примери.

Пример 10. *Да ги внесеме под знакот на коренот множителите што се пред знакот на коренот.*

а) $x\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. б) $\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{b^2}{a}}$. в) $\frac{1}{a}\sqrt[5]{\frac{a}{b}}$.

Решение.

а) $x\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=\sqrt[3]{x^3\cdot\frac{y}{x}}=\sqrt[3]{x^2y}$.

б) $\frac{a}{b}\sqrt[4]{\frac{b^2}{a}}=\sqrt[4]{\frac{a^4}{b^4}\cdot\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt[4]{\frac{a^2}{b^2}}=\sqrt[4]{(\frac{a}{b})^2}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

в) $\frac{1}{a}\sqrt[5]{\frac{a}{b}}=\sqrt[5]{\frac{1}{a^5}\cdot\frac{a}{b}}=\sqrt[5]{\frac{1}{a^4b}}$.

3. Внеси ги множителите што се пред знакот на коренот.

а) $\frac{x}{y}\sqrt[4]{\frac{y}{x}}$. б) $\frac{a^2}{b^3}\sqrt[5]{\frac{b^2}{a^3}}$.

Со неколку примери ќе согледаме како може да се трансформира еден корен со поткоренов израз дропка во корен со поткоренов израз цел алгебарски израз.

Примери:

11. $\sqrt[3]{\frac{x}{y}}=\sqrt[3]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y^2}{y^2}}=\sqrt[3]{\frac{xy^2}{y^3}}=\frac{1}{y}\sqrt[3]{xy^2}$.

12. $\sqrt[4]{\frac{5x}{y^2z^3}}=\sqrt[4]{\frac{5x}{y^2z^3}\cdot\frac{y^2z}{y^2z}}=\sqrt[4]{\frac{5xy^2z}{y^4z^4}}=\frac{1}{yz}\sqrt[4]{5xy^2z}$.

13. $\sqrt[7]{\frac{x^2}{y^{12}}}=\sqrt[7]{\frac{x^2}{y^{12}}\cdot\frac{y^2}{y^2}}=\frac{\sqrt[7]{x^2y^2}}{y^{14}}=\frac{1}{y^2}\sqrt[7]{x^2y^2}$.

4. Во следниве корени ослободи се од именителите на поткореновите изрази:

а) $\sqrt[5]{\frac{x}{y}}$. б) $\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$. в) $\sqrt[6]{\frac{5x}{y^{15}}}$.

b) **Нормален вид на коренот.** За еден корен се вели дека е во **нормален вид** (упростен вид) кога поткореновиот израз: не содржи именител, не содржи множители што можат да се извлечат пред знакот на коренот и кога показателот на коренот и показателот на поткореновиот израз немаат заеднички делител.

Примери за корени во нормален вид:

$3\sqrt{a}$; $ab\sqrt[3]{ab^2}$; $\frac{3}{y}\sqrt[4]{xy}$ $\sqrt{x^2+y^2}$.

Не се во нормален вид следниве корени:

$5\sqrt[3]{a^4}$; $a\sqrt[4]{b^2}$ $(b > 0)$; $\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$; $\sqrt{200}$.

5. За секој од горните корени утврди зошто не е во нормален вид.

Примери за сведување на корени во нормален вид:

14. $\sqrt[3]{\frac{x}{y^7}} = \sqrt[3]{\frac{x}{y^7}\cdot\frac{y^2}{y^2}} = \sqrt[3]{\frac{xy^2}{y^9}} = \frac{1}{y^3}\sqrt[3]{xy^2}.$

15. $\sqrt[6]{\frac{x^8}{y^5}} = \sqrt[6]{\frac{x^8 y}{y^6}} = \frac{1}{y}\sqrt[6]{x^8 y} = \frac{x}{y}\sqrt[6]{x^2 y}.$

16. $\sqrt{200} = \sqrt{100\cdot 2} = 10\sqrt{2}.$

6. Сведи ги во нормален вид следниве корени:

а) $\sqrt[5]{\frac{x}{y}}$, б) $\sqrt[4]{\frac{a^6}{b^4}}$. в) $\sqrt[5]{\frac{3a^{10}}{b^7}}$. г) $\sqrt{40}$.

В е ж б и

7. Извлечи пред знакот на коренот што може да се извлече.

а) $\sqrt[3]{a^3 b}$. б) $\sqrt{16ab^3}$. в) $\sqrt[3]{8a^5 b^{12}}$.

8. Внеси ги под знакот на коренот и притоа упрости го поткореновиот израз:

а) $x^3\sqrt{x}$. б) $3\sqrt[3]{2}$. в) $\frac{x}{y}\sqrt[5]{\frac{y}{x}}$.

9. Сведи ги во нормален вид следниве корени:

а) $\sqrt[3]{a^5 b^8}$. б) $\sqrt[4]{\frac{x}{y}}$ в) $\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.

10. Сведи ги во нормален облик корените во следниве изрази, а потоа упрости ги:

а) $\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. б) $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$. в) $\frac{5x}{y^2}\sqrt[4]{\frac{y^9}{x^3}}$

11. Изврши го назначеното степенување:

а) $(xy)^3$ б) $(a^3b^4)^4$. в) $\left(\frac{x^4}{y^3}\right)^5$.

12. Врз основа на правилата за степенување и теоремата за коренување на производ одреди на што е еднакво.

а) $(\sqrt[5]{a})^3$. б) $(\sqrt[7]{x^2})^4$. в) $\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}\right)^2$.

VI.5. СТЕПЕНУВАЊЕ И КОРЕНУВАЊЕ НА КОРЕНИ

а) Степенување на корен. Да видиме на што е еднаков $(\sqrt[4]{a})^3$ $(a > 0)$.

$(\sqrt[4]{a})^3 = \sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{a^3}$, т.е.

$$(\sqrt[4]{a})^3 = \sqrt[4]{a^3}.$$

Според горното, $(\sqrt[5]{2})^4 = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$. Покажи!

Воопшто, за степенување на корен важи следнава теорема:

T_1	Ако $a \in R^+$ и $n, p \in N$, тогаш е точно равенството $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$ (1)

Доказ. $L^n = ((\sqrt[n]{a})^p)^n = (\sqrt[n]{a})^{np} = ((\sqrt[n]{a})^n)^p = a^p$

$D^n = (\sqrt[n]{a^p})^n = a^p$

$L^n = D^n => L = D$

со што теоремата е докажана.

Пример 1. а) $(\sqrt[3]{a})^2 = \sqrt[3]{a^2}$.

б) $(\sqrt[5]{x^2y^3})^2 = \sqrt[5]{x^4y^6} = y\sqrt[5]{x^4y}$.

1. Изврши го назначеното степенување $(\sqrt[7]{a^2b^3})^2$.

Со равенството (1) е означено како се врши степенување на корен. Со равенството (2), пак, што е добиено со замена на страните на (1), означено е како се врши коренување на степен:

$$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p \qquad (2)$$

Пример 2. а) $\sqrt[4]{a^3} = (\sqrt[4]{a})^3$.

б) $\sqrt[6]{a^4b^2} = \sqrt[6]{(a^2b)^2} = (\sqrt[6]{a^2b})^2$ (за $b \geq 0$).

Забелешка. Уочи дека коренот $\sqrt[6]{a^4b^2}$ во б) има смисла за кои било вредности на a и b, но $(\sqrt[6]{a^2b})^2$ нема смисла за $b < 0$.

За натаму, како што рековме и на стр. 10, во случаите кога кореновиот показател е парен, ќе сметаме дека променливите што се јавуваат во поткореновиот израз (и самиот поткоренов израз) добиваат само позитивни вредности, без тоа посебно да го одбележуваме.

2. Запиши ги во вид на степени следниве корени:

а) $\sqrt[7]{x^4}$. б) $\sqrt[5]{x^3y^3}$. в) $\sqrt[6]{x^4y^6}$.

б Коренување на корен. Кај изразите како $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$; $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2}}$ и сл. имаме коренување на корен. За коренување на корен важи следнава теорема:

T_2	Ако $a \in R^+$ и $m, n \in N$, тогаш е точно равенството $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Доказ. $L^n = (\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}})^n = \sqrt[m]{a}$.

$(L^m)^n = L^{mn} = (\sqrt[m]{a})^m = a$

$D^{mn} = a$

$L^{mn} = D^{mn} => L = D$ што требаше и да докажеме.

Пример 3. а) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[6]{a}$

б) $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{y}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^3y}} = \sqrt[12]{x^3y}$.

3. Упрости ги следниве изрази:

а) $\sqrt[5]{\sqrt[4]{x}}$. б) $\sqrt[3]{a\sqrt{b}}$. в) $\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$

б. Вежби

4. Изврши го степенувањето на коренот, а потоа сведи го коренот на нормален вид:

а) $(\sqrt[4]{ab^2})^4$. б) $\left(\sqrt[4]{\frac{x^2y}{z}}\right)^3$. в) $\left(\sqrt[5]{\frac{4a^3}{c^4}}\right)^3$

5. Упрости ги следниве изрази:

а) $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$. б) $\sqrt[4]{x^3\sqrt{y}}$. в) $\sqrt[5]{a^2\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}}$.

6. Изврши ги назначените операции:

а) $(\sqrt[3]{\sqrt{x}})^2$ б) $(\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[3]{y})^2$

7. Запиши со помош на знакот на корен на што е еднакво:

а) x, ако $x^3 = a$, ($a > 0, x > 0$).

б) x^2, ако $(x^2)^3 = b$, ($x > 0, b > 0$).

в) x^5, ако $(x^5)^4 = c^2$, ($x > 0, c > 0$).

VI.6. СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ РАЦИОНАЛЕН БРОЈ

а. Во почетокот на оваа тема се потсетивме за степенот a^n, каде што n е природен број. Потоа го проширивме поимот за степен и за показател кој било цел број, но притоа направивме ограничување за основата да биде број различен од нула. Тука ќе извршиме уште едно проширување на поимот за степен. Ќе воведеме степен со показател рационален број.

Нека a е даден позитивен број и k даден број од $\mathbf{Q}^+$. Си поставуваме задача да дефинираме степен a^k така што за него да важат сите својства што важат за степен со показател цел број.

Показателот k, бидејќи е рационален број, може да се претстави во вид на дропка $\frac{m}{n}$ каде што m и n се природни броеви. Да го разгледаме симболот

$$a^{\frac{m}{n}}.$$

Нека $\frac{m}{n}$ е некој природен број претставен со дропка, на пример $\frac{4}{2}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{12}{3}$, $\frac{6}{2}$ и сл. Така,

$$5^2 = 5^{\frac{4}{2}}, \text{ а } (5^2)^2 = (5^{\frac{4}{2}})^2, \text{ т. е. } (5^{\frac{4}{2}})^2 = 5^4.$$

Врз основа на дефиницијата за корен, $5^{\frac{4}{2}} = \sqrt{5^4}$. Ова равенство е точно, бидејќи $5^{\frac{4}{2}} = 5^2$, а $\sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2} = 5^2$.

Врз основа на истата постапка,

$(2^{\frac{6}{3}})^3 = 2^6; \quad 2^{\frac{6}{3}} = \sqrt[3]{2^6}$

$(3^{\frac{12}{3}})^3 = 3^{12}; \quad 3^{\frac{12}{3}} = \sqrt[3]{3^{12}}$

Општо, $(a^{\frac{m}{n}})^n = a^m$ или $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $(a > 0)$.

Поради тоа, ја прифаќаме следнава дефиниција.

Ако m и n се природни броеви и ако a е позитивен број, тогаш

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{1}$$

Притоа, $a^{\frac{m}{n}}$ се вика **степен со рационален показател.**

Така, $3^{\frac{4}{2}} = \sqrt{3^4} = 3^2 = 9.$

$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2.$

$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

$x^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{x^4}.$

1. Претстави ги со корени следниве степени:

а) $4^{\frac{6}{3}}$ б) $3^{\frac{2}{5}}$ в) $x^{\frac{1}{3}}$.

Врз основа на равенството (1), секој корен може да се претстави како степен со рационален показател.

Така, $\sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$; $\sqrt[5]{3^4} = 3^{\frac{4}{5}}$

2. Следниве корени запиши ги како степени:

а) $\sqrt[3]{5^2}$ б) $\sqrt[5]{7^3}$ в) $\sqrt[4]{x^3}$

3. Одреди ја вредноста на следниве изрази:

а) $4^{\frac{1}{2}}$ б) $27^{\frac{1}{3}}$ в) $(81 \cdot 16)^{\frac{1}{4}}$

За вака воведениот степен со рационален показател важат сите својства на степени со показател природен број. Важи теоремата

Т	Ако a и b се позитивни реални броеви, а p и q се позитивни рационални броеви, тогаш: (а) $a^p a^q = a^{p+q}$. (г) $(ab)^p = a^p b^p$. (б) $a^p : a^q = a^{p-q}$. (д) $(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}$. (в) $(a^p)^q = a^{pq}$.

Прво ќе докажеме дека својството под (а) важи за $p = \frac{2}{3}$ и $q = \frac{4}{7}$.

1) $\frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{14}{21} + \frac{12}{21}$; $\quad a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{7}} = a^{\frac{14}{21}} \cdot a^{\frac{12}{21}}$.

2) $a^{\frac{14}{21}} a^{\frac{12}{21}} = \sqrt[21]{a^{14}} \cdot \sqrt[21]{a^{12}} = \sqrt[21]{a^{14} \cdot a^{12}} = \sqrt[21]{a^{14+12}}$

$= a^{\frac{14+12}{21}} = a^{\frac{14}{21}+\frac{12}{21}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{7}}$.

Значи, $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{7}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{7}}$ што требаше и да докажеме.

Со тоа докажавме дека (а) важи за овој конкретен случај. Да докажеме и за општ случај.

Познато ни е дека секој од рационалните броеви p и q може да се претстави во вид на дропка, а со тоа и во вид на дропки со еднакви именители.

Нека $p = \frac{m}{n}$, а $q = \frac{k}{n}$, каде што $k, m, n \in \mathbf{N}$.

$a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m a^k} = \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{n}} = a^{p+q}$,

што требаше и да докажеме.

На сличен начин се докажува дека важат и (б), (в), (г) и (д).

Примери: 1. $(a^{\frac{3}{5}})^{\frac{6}{7}} = (\sqrt[5]{a^3})^{\frac{6}{7}} = \sqrt[7]{(\sqrt[5]{a^3})^6} = \sqrt[7]{\sqrt[5]{a^{3\cdot 6}}} = \sqrt[7\cdot 5]{a^{3\cdot 6}} = a^{\frac{3\cdot 6}{5\cdot 7}}$,

т. е. $(a^{\frac{3}{5}})^{\frac{6}{7}} = a^{\frac{3\cdot 6}{5\cdot 7}}$.

2. $(ab)^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{(ab)^5} = \sqrt[7]{a^5 \cdot b^5} = \sqrt[7]{a^5} \cdot \sqrt[7]{b^5} = a^{\frac{5}{7}} \cdot b^{\frac{5}{7}}$.

4. Слично како во горниве примери докажи дека

а) $(\frac{a}{b})^{\frac{3}{4}} = \frac{a^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{3}{4}}}$ $\qquad$ б) $\frac{a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{7}{8}}} = a^{\frac{4}{5}-\frac{7}{8}}$.

5. Претстави ги во вид на степени со рационални показатели следниве изрази:

а) $a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{5}{12}}$. $\qquad$ б) $(c^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{5}}$. $\qquad$ в) $(y^{\frac{5}{8}})^{0,4} \cdot y^{0,25}$.

Во равенството $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(a > 0)$ претпоставивме дека m и n се природни броеви, т. е. дека показателот $\frac{m}{n}$ е позитивен рационален број. На потполно природен начин се воведува и степен чиј показател е негативен рационален број, т. е. прифаќаме дека

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \quad (a > 0)$$

Така, $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$; $a^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$ $(a > 0)$.

И за степени со показател негативен рационален број важат својствата од претходната теорема.

На пример, $(a \cdot b)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{(ab)^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{(ab)^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3b^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{b^3}} =$

$$= \frac{1}{a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} \cdot \frac{1}{b^{\frac{3}{4}}} = a^{-\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{3}{4}}.$$

6. Пресметај

а) $(81 \cdot 16)^{-\frac{1}{4}}$. б) $\left(\frac{36}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}$. в) $\left(\frac{1}{8} \cdot 27^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

Вежби

7. Претстави ги со помош на корени следниве степени:

а) $4^{\frac{7}{8}}$. б) $(a-b)^{\frac{3}{4}}$. в) $x^{\frac{1}{9}}$.

8. Следниве корени запиши ги како степени:

а) $\sqrt[7]{a^4}$ б) $\sqrt[3]{(x-y)^2}$ в) $\sqrt[5]{(ab)^3}$

9. Одреди ја вредноста на следниве изрази:

а) $81^{\frac{1}{4}}$. б) $16^{0,25}$. в) $\left(\frac{27}{1\,000}\right)^{\frac{1}{3}}$.

10. Претстави ги во вид на степени со рационални показатели следниве степени:

а) $x^{\frac{1}{5}} \cdot x^{\frac{3}{10}} \cdot x^{\frac{7}{15}}$. б) $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{2}{5}}$. в) $\left(y^{\frac{3}{5}} : y^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{6}}$.

11. Запиши ги со помош на корени следниве степени:

а) $x^{-\frac{2}{3}}$. б) $3^{-\frac{7}{8}}$. в) $(a-b)^{\frac{3}{4}}$.

12. Пресметај ја вредноста на следниве изрази:

а) $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}$. б) $\left(\frac{27}{1\,000}\right)^{-\frac{1}{3}}$. в) $(0,01)^{-\frac{1}{2}}$.

13. Одреди кои од следниве изрази се цели рационални изрази, а кои дробни рационални изрази:

а) $3x^2 + 5$. б) $\frac{2x + 3}{2}$ в) $\frac{2x + y}{z}$ г) $x^2 + 2x + 1$.

VI.7. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

а. **Поим за ирационален израз.** Да се потсетиме. Изразите од видот:

$$x^2-4y;\ 8a;\ \frac{3x-y}{2z};\ 5;\ (x-y)^2 \text{ и сл.}$$

се викаат *алгебарски рационални изрази* или само *рационални изрази.* Тука се застапени само знаците за операциите собирање, одземање, множење, делење и степенување со показател природен број.

Изразите, пак, во кои е застапено и коренувањето се викаат **ирационални изрази.**

На пример, ирационални изрази се:

$$5\sqrt{x}\ ;\ 6x+\sqrt[3]{x^2}\ ;\ \sqrt[4]{x^3}-2\ ;\ 5x\sqrt{\frac{5y}{3}}\ ;\ 3\sqrt{5} \text{ и сл.}$$

Ирационалните изрази со променливи ќе ги разгледуваме само за вредностите на променливите за кои коренот (каде што тие се наоѓаат) има смисла.

Така, ирационалниот израз $2x+\sqrt{x-1}$ има смисла за $x-1 \geq 0$ т.е. за $x \geq 1$.

1. Одреди кои од следниве изрази се ирационални изрази.

а) $x-\sqrt{x}$. б) $5-x\sqrt{5}$. в) $\sqrt{x-1}+3x+5$. г) $x+1-y$.

2. Одреди за кои вредности на x има смисла ирационалниот израз: $\sqrt{x+1}+3x$.

Кога во даден ирационален израз променливите се заменат со броеви, може да се добие или рационален или ирационален број.

Така, ирационалниот израз $\sqrt{a+b}$ за $a=4$ и $b=12$ станува рационален број, а за $a=1$ и $b=5$ станува ирационален број.

Ирационалниот израз $3\sqrt{5}$ е ирационален број, а ирационалниот израз $\sqrt[3]{125}$ е рационален број.

3. Одреди кои од следниве ирационални изрази се рационални броеви

а) $5\sqrt[3]{8}$. б) $7\sqrt[4]{8}$. г) $4\sqrt[5]{32}$.

4. Одреди барем по две вредности за a и b, така што ирационалниот израз $a\sqrt{a^2+b}$ да е рационален број.

б. **Слични корени.** Ирационалните изрази од видот $A\sqrt{B}$, каде што A и B се рационални изрази, се викаат, исто така, **корени.** Притоа изразот A се вика **коефициент** на коренот.

Така, коефициенти на корените $5\sqrt[3]{a}$, $7a\sqrt[4]{b^2}$ и $(3a-b)\sqrt[5]{10a}$ се соодветно 5, $7a$ и $3a$-b.

Два или повеќе корени што се доведени во нормален вид се викаат **слични корени,** ако имаат еднакви поткоренови изрази и еднакви коренови показатели.

Така, слични се корените: а) $3a\sqrt[3]{5}$ и $7b\sqrt[3]{5}$; б) $a\sqrt{ab^2}$ и $ab\sqrt{ab^2}$.

Слични се, исто така, и корените $7\sqrt{10}$ и $\sqrt{40}$, зашто $\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

5. Покажи дека се слични корените

а) $3\sqrt{20}$ и $8\sqrt{80}$.   б) $a\sqrt[3]{a^5b^7}$ и $b\sqrt[3]{a^2b^{10}}$.

Сведи ги корените во нормален вид.

Собирање и одземање на корени. Да го одредиме збирот $6\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+7\sqrt{3}$. Согласно дистрибутивниот закон (бидејќи се работи за реални броеви), имаме:

$$6\sqrt{2}+3\sqrt{3}-4\sqrt{2}+7\sqrt{3} = (6-4)\sqrt{2}+(3+7)\sqrt{3} = 2\sqrt{2}+10\sqrt{3}.$$

Сличните корени се групирани и е извлечен заедничкиот множител. Оваа трансформација се вика **сведување на слични корени.**

Во горниот пример сите корени беа во нормален вид. Доколку тоа не е случај, потребно е тие да се сведат во нормален вид.

Примери: 1. $5\sqrt[3]{16}-2\sqrt{40}+3\sqrt[3]{250}+7\sqrt{250} = 5\sqrt[3]{8\cdot 2}-2\sqrt{4\cdot 10}+3\sqrt[3]{2\cdot 125}+$
$+7\sqrt{25\cdot 10} = 10\sqrt[3]{2}-4\sqrt{10}+15\sqrt[3]{2}+35\sqrt{10} = 25\sqrt[3]{2}+31\sqrt{10}.$

2. $a\sqrt[3]{ab^2}-b\sqrt[3]{a^4b^8}+c\sqrt[3]{a^5b^{14}} = a\sqrt[3]{ab^2}-ab^3\sqrt[3]{ab^2}+ab^4c\sqrt[3]{a^2b^2} =$
$= (a-ab^3)\sqrt[3]{ab^2}+ab^4c\sqrt[3]{a^2b^2}.$

6. Изврши ги назначените операции:

а) $5\sqrt{3}-2\sqrt{12}+\sqrt[3]{8}$.   б) $a\sqrt{a^3}+b\sqrt{a^5}+c\sqrt{a^7}$.

Собирање и одземање на ирационални изрази. Нека се дадени ирационалните изрази $3\sqrt{3}+4\sqrt{2}$ и $5\sqrt{3}-2\sqrt{2}$. За да ги собереме овие два ирационални изрази, прво ќе ги запишеме последователно и ќе ги сврземе со знакот +, а потоа ќе ги собереме сличните корени.

Така,

$$3\sqrt{3}+4\sqrt{2}+5\sqrt{3}-2\sqrt{2} = 8\sqrt{3}+2\sqrt{2}.$$

Пример 3. Да ја одредиме разликата $(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})-(5\sqrt{a}-7\sqrt{b})$.

Решение. $(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})-(5\sqrt{a}-7\sqrt{b}) = 3\sqrt{a}-2\sqrt{b}-5\sqrt{a}+7\sqrt{b} = -2\sqrt{a}+5\sqrt{b}$.

7. Одреди ја разликата:

$$(5\sqrt{28}-\sqrt[3]{40})-(4\sqrt{63}-3\sqrt[3]{5}).$$

Вежби

8. Одреди кои од следниве изрази се ирационални:

а) $3\sqrt{3}$;   б) 2^3+4;   в) $5\sqrt[7]{8}+3\sqrt{a}$;   г) $\frac{3}{4}+\sqrt{2}$.

9. Одреди за кои вредности на a односно x има смисла изразот:

а) $\sqrt{a}+1$. б) $\sqrt[3]{a}-a$. в) $\sqrt{x-5}+\sqrt{x}$. г) $\frac{5}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{3}$.

10. Одреди 3 вредности за x за кои изразот $\sqrt{x+5}$ е рационален број.

11. Утврди дали се слични корените:

а) $\sqrt[3]{a^2b}$ и $\sqrt[3]{a^{23}b^{10}}$ б) $\sqrt[5]{x^{10}y^{17}}$ и $\sqrt[4]{x^{20}y^{37}}$.

12. Изврши ги назначените операции:

а) $\sqrt[3]{24}+\sqrt{44}-\sqrt{99}+\sqrt[3]{81}$. б) $a\sqrt[3]{b^4}+b\sqrt{a^3}+a\sqrt[3]{b^7}-b\sqrt{a^5}$.

13. Одреди ја разликата: $(4\sqrt[3]{32}+2\sqrt[3]{24})-(5\sqrt[4]{81}-\sqrt[3]{81})$.

$\boxed{14.}$ Сведи ги на еднаков коренов показател следниве корени:

а) $\sqrt[3]{a}$ и $\sqrt[4]{b^3}$. б) $\sqrt[4]{xy^3}$ и $\sqrt[6]{x^3y^2}$.

VI.8. МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Множење на ирационални изрази. Множењето на ирационалните изрази се врши како множењето на рационалните изрази, при што се користи правилото за множење на корени и својствата на корените.

Примери: 1. $(3a\sqrt{2x})(4a^2\sqrt{3x^3}) = 12a^3\sqrt{6x^4} = 12a^3x^2\sqrt{6}$.

2. $4x\sqrt[3]{y^2}\cdot 2x\sqrt{y} = 4x\sqrt[6]{y^4}\cdot 2x\sqrt[6]{y^3} = 8x^2\sqrt[6]{y^7} = 8x^2y\sqrt[6]{y}$.

3. $(\sqrt{a}-2\sqrt{b}+b\sqrt{ab^3})(a\sqrt{ab}) = a\sqrt{a^2b}-2a\sqrt{ab^2}+ab\sqrt{a^2b^4} =$
$= a^2\sqrt{b}-2ab\sqrt{a}+a^2b^3$.

4. $(3\sqrt{a}-2\sqrt{b})(5\sqrt{a}+4\sqrt{b}) = 15\sqrt{a^2}-10\sqrt{ab}+12\sqrt{ab}-8\sqrt{b^2} =$
$= 15a+2\sqrt{ab}-8b$.

1. Одреди го производот на изразите $3\sqrt{a}$ и $5\sqrt{ab}$.
2. Изврши ги назначените операции:
   а) $6\sqrt{a}\cdot(-4\sqrt{a^3})$.
   б) $2\sqrt[3]{ab^2}\cdot 5\sqrt{ab}$.
   в) $4\sqrt[4]{xy^3}\cdot\sqrt[3]{x^2y}$.
   г) $3a\sqrt{\frac{2a}{3b}}\cdot\left(-2b\sqrt{\frac{3a}{b}}\right)$.
   д) $3\sqrt{\frac{x^2}{y}}\cdot 2y\sqrt{\frac{x}{y^2}}$.
3. Изврши ги назначените операции:
   а) $(2\sqrt{x}-3\sqrt{y})\cdot 3\sqrt{x}$.
   б) $(5\sqrt{a}+3\sqrt{b})\cdot(7\sqrt{b}-3\sqrt{a})$.
   в) $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$.

6. Делење на ирационални изрази. Делењето на ирационални изрази се врши како и делењето на рационални изрази, при што се користи правилото за делење на корени и својствата на корените.

Пример 5. Да го одредиме количникот $8\sqrt{9x^4} : 4\sqrt{3x^3}$.

Решение. $8\sqrt{9x^4} : 4\sqrt{3x^3} = \dfrac{8\sqrt{9x^4}}{4\sqrt{3x^3}} = 2\sqrt{\dfrac{9x^4}{3x^3}} = 2\sqrt{3x}$.

Пример 6. Да го одредиме количникот:

$(8\sqrt{x^3y} - 4\sqrt{y^3x} + 6\sqrt{xy}) : 2\sqrt{xy}$.

Решение. $(8\sqrt{x^3y} - 4\sqrt{y^3x} + 6\sqrt{xy}) : 2\sqrt{xy} = \dfrac{8\sqrt{x^3y}}{2\sqrt{xy}} - \dfrac{4\sqrt{y^3x}}{2\sqrt{xy}} + \dfrac{6\sqrt{xy}}{2\sqrt{xy}} =$

$4\sqrt{\dfrac{x^3y}{xy}} - 2\sqrt{\dfrac{y^3x}{xy}} + 3 = 4\sqrt{x^2} - 2\sqrt{y^2} + 3 = 4x - 2y + 3.$

4. Изврши го назначеното делење и упрости го изразот:

а) $12\sqrt{16x^5} : 3\sqrt{4x^2}$. б) $(15\sqrt[3]{x^4y^3} - 12\sqrt[3]{x^3y^5}) : (-3\sqrt{xy})$.

6. В е ж б и

5. Изврши ги означените операции:

а) $3\sqrt[3]{x^2y} \cdot 4\sqrt[3]{xy^2}$. б) $2\sqrt{xy^3} \cdot 3\sqrt[3]{x^3y}$.

в) $(5\sqrt{a} - 3\sqrt{b}) \cdot \sqrt{a}$. г) $(6\sqrt{x} + 3\sqrt{y})(5\sqrt{x} - 4\sqrt{y})$.

6. Изврши ги назначените операции:

а) $\sqrt{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt{9-\sqrt{17}}$. б) $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$.

7. Изврши го множењето на следниве изрази и потоа коренот во добиениот израз сведи го на нормален вид:

а) $6a\sqrt[3]{\dfrac{a^2b}{c^2}} \cdot 8\sqrt[3]{\dfrac{c^3}{a^3b}}$ б) $5z\sqrt[3]{\dfrac{x^3y^2}{z^2}} \cdot 4y\sqrt[3]{\dfrac{z^3}{x^2y^3}}$

8. Изврши ги означените операции:

а) $4\sqrt[3]{x^2y^3z} : 5x\sqrt[3]{xy^2z}$ б) $-2y\sqrt[3]{\dfrac{x}{y^2}} : 3x\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

9. Изврши го назначеното делење во изразите:

а) $25\sqrt[3]{a^2b^4} : 5\sqrt[3]{ab}$. б) $6a\sqrt[4]{x^2-y^2} : (-3a\sqrt[4]{x+y})$.

10. Изврши ги назначените операции:

$(4\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[3]{ab^2} - 2ab + 8\sqrt[4]{a^2b^3}) : 2\sqrt[4]{ab^2}$.

11. Одреди ги следниве производи:

а) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$. б) $(5 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})$. в) $(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$.

VI.9. РАЦИОНАЛИЗИРАЊЕ НА ИМЕНИТЕЛОТ НА ДРОПКА

а. За да ја одредиме вредноста на дропката $\frac{6}{\sqrt{2}}$ треба 6 да го поделиме со некоја приближна вредност на $\sqrt{2}$. Според точноста што сакаме да ја добиеме, можеме да заокружиме на две, три или повеќе децимали. Да земеме на 4 децимали. Значи, треба да го поделиме 6 со 1,4142. Но, *наместо со делење, задачата можеме да ја сведеме на задача со множење*, што е поедноставно.

Броителот и именителот на изразот $\frac{6}{\sqrt{2}}$ ќе ги помножиме со $\sqrt{2}$, т.е.

$$\frac{6}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}. \text{ Значи, } \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Ние извршивме една трансформација на изразот $\frac{6}{\sqrt{2}}$, со која именителот од ирационален израз го претворивме во рационален израз. Оваа трансформација се вика **рационализирање на именителот на дропката.**

Во продолжение ќе се запознаеме како се врши рационализирање на именителот на неколку вида дропки.

Прво ќе утврдиме како се врши рационализирање на именителот на дропка од видот $\frac{A}{\sqrt{B}}$, каде што A е број или израз, а B е позитивен број или израз што може да добива само позитивни вредности.

Примери: 1. $\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}.$

2. $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}.$

3. $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}} = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x-y}} \cdot \frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}} = \frac{(x^2-y^2)\sqrt{x-y}}{x-y} =$

$= \frac{(x-y)(x+y)\sqrt{x-y}}{x-y} = (x+y)\sqrt{x-y}$

Општо,

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A}{\sqrt{B}} \cdot \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$$

1. Рационализирај го именителот на дропката:

а) $\frac{36}{\sqrt{b}}$ б) $\frac{a^2}{\sqrt{a}}$ в) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$

б. Рационализирање на именителот на дропка од видот

$$\frac{A}{a+\sqrt{b}} \text{ и } \frac{A}{a-\sqrt{b}}$$

Примери: 4. $\frac{\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{3\sqrt{5}-5}{4}$.

5. $\frac{13}{4-\sqrt{3}} = \frac{13}{4-\sqrt{3}} \cdot \frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \frac{13(4+\sqrt{3})}{16-3} = \frac{13(4+\sqrt{3})}{13} = 4 + \sqrt{3}$.

6. $\frac{x}{1-\sqrt{x}} = \frac{x}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \frac{x(1+\sqrt{x})}{1-x} = \frac{x+x\sqrt{x}}{1-x}$.

Значи, за да се ослободиме од коренот во именителот $a + \sqrt{b}$, треба броителот и именителот на дропката да се помножат со $a - \sqrt{b}$: $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b$. Доколку, пак, именителот е $a - \sqrt{b}$, треба да се помножат именителот и броителот на дропката со $a + \sqrt{b}$ (Зошто?)

2. Рационализирај го именителот на дропката:

а) $\frac{6}{2+\sqrt{2}}$. б) $\frac{10}{3-\sqrt{5}}$. в) $\frac{x}{x-\sqrt{x}}$.

б. Рационализирање на именителот на дропка од видот

$$\frac{A}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \text{ и } \frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

За да се ослободиме од корените во именителот на првата дропка, броителот и именителот треба да ги помножиме со $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (Зошто?), а на втората дропка - со $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (Зошто?)

Примери: 7. $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{7-3} =$
$= \sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3}) = \sqrt{21} - 3$.

8. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2} = \frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a-b}$.

3. Рационализирај го именителот на дропката:

а) $\frac{14}{\sqrt{10}+\sqrt{3}}$ б) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ в) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

г. Вежби

4. Рационализирај го именителот на дропките во задачите 4 - 7:

а) $\frac{9}{\sqrt{3}}$ б) $\frac{x^3}{\sqrt{x}}$ в) $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}$

5. а) $\frac{28}{4+\sqrt{2}}$. б) $\frac{4}{\sqrt{6}-2}$ в) $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

6. а) $\frac{15}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ б) $\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$ в) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

7.* а) $\frac{10}{5\sqrt{2}+3\sqrt{5}}$. б) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$. в) $\frac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}$.

8. Нека е $A = \sqrt{x+1}$ и $B = \sqrt{x-1}$. Одреди на што е еднакво:

а) A^2, б) B^2 и в) $2AB$.

9. Изврши ги назначените операции:

а) $(3 + \sqrt{2x-1})^2$. б) $(\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+1})^2$.

10. Упрости го равенството:

$(\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5})^2 = 2x^2$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ – VI

1. Изврши ги назначените операции:

а) $\sqrt{xy} \cdot \sqrt[3]{x^2y^2}$. б) $\sqrt[4]{6a^3b^2} : \sqrt[3]{2a^2b}$.

2. Изврши го степенувањето на коренот $(\sqrt[4]{a^3b^2})^3$.

3. Упрости ги следниве изрази:

а) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}$. б) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}}$. в) $\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x^2}}$.

4. Претстави го со помош на корен изразот $(x-2y)^{\frac{7}{8}}$

5. Пресметај ја вредноста на изразот $\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}}$

6. Одреди кои од следниве изрази се ирационални

а) $x^2 - 4x + 1$. б) $2 + \sqrt{x}$. в) $3x + \sqrt{a} + 4$. г) $(a-b)(a+b)$.

7. Утврди дали се слични корените:

а) $\sqrt{80}$ и $3\sqrt{25}$. б) $2\sqrt[3]{x^5y^4}$ и $\sqrt[3]{x^{14}y^8}$.

8. Изврши ги назначените операции:

а) $(2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{32})\sqrt[3]{2}$. б) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$.

9. Изврши ги назначените операции:

$(\sqrt[3]{a^2b} - \sqrt[3]{ab^2}) : \sqrt[3]{ab}$.

10. Рационализирај го именителот на дропката $\dfrac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

11. Да се рационализира именителот на дропката

а) $\dfrac{12}{\sqrt{a+6} - \sqrt{a-6}}$ б) $\dfrac{12a}{\sqrt{a+4} - \sqrt{a}}$ в) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}}$

г) $\dfrac{x}{\sqrt{x - \sqrt{x}}}$ д) $\dfrac{x^2 - y}{\sqrt{x + \sqrt{y}}}$

12. Да се преведе ирационалноста од броителот во именителот:

а) $\dfrac{\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5}}{10}$ б) $\dfrac{\sqrt{3x+x^2} + x}{3x}$

Изврши ги назначените операции и упрости ги изразите (13 – 15):

13. $\dfrac{1}{2+\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$

14. $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\sqrt{\dfrac{x-y}{xy}}$

15. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-y}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-y}}\right)\left(1 + \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}\right)$

ГЛАВА VII

ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

Со поимите линеарна функција, линеарна равенка и линеарна неравенка си се запознал порано. Овде ќе ги прошириме и продлабочиме сознанијата за нив.

VII.1. АЛГЕБАРСКА РАВЕНКА

a. Ако A и B се два алгебарски изрази и ако барем едниот од нив содржи променлива, тогаш за формулата (равенството)

$$A = B \tag{1}$$

се вели дека е **алгебарска равенка**; најчесто за променливите се вели дека **се непознати** во таа равенка.

На пример, ако $A = 2/(x^2+1)$, $B = (x-2)\ /\ (3x-4)$, тогаш

$$\frac{2}{x^2+1} = \frac{x-2}{3x-4} \tag{2}$$

е алгебарска равенка со една непозната.

Такви се и

$$2x = -5,\quad y(y+1) = y^2 + y,\quad x-1 = 1+\sqrt{x}, \ldots .$$

1. Напиши неколку алгебарски равенки.

Може да се формираат и алгебарски **равенки со две или повеќе** непознати; на пример:

$$2x + 3y = 5,\quad x^2 + y^2 - xy = 0,\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \ldots .$$

Ако во равенката (1) непознатата се замени со одреден реален број a и ако тогаш таа равенка стане **точно бројно равенство** („. . . е задоволена"), тогаш за тој број a се вели дека е **решение** на равенката (1) („... ја задоволува равенката").

Така, на пример, бројот -2 **е решение** на равенката (2) зашто:

$$\frac{2}{(-2)^2+1} = \frac{(-2)-2}{3\cdot(-2)-4},\ \text{т. е.}\ \frac{2}{5} = \frac{2}{5};$$

но бројот 5 **не е решение** бидејќи

$$\frac{2}{5^2+1} \neq \frac{5-2}{3\cdot 5-4},\ \text{т. е.}\ \frac{1}{13} \neq \frac{3}{11}.$$

2. Провери дали бројот 1 е решение на равенката (2); а бројот а) -1, б) 3?

3. Согледај решение на равенката:

а) $2x - 1 = x + 2$; б) $\sqrt{x} + 2 = x$.

Забелешка. Сигурно веќе увиде дека секоја алгебарска равенка, претставува предикат со: *една*, *две* или *повеќе* променливи, во зависност од тоа дали равенката има: *една*, *две* или *повеќе* непознати. Затоа и поимите „решение", односно „множество решенија" на равенка се посебни случаи од тие поими кај предикатите.

б. Една равенка може да има и повеќе решенија, а може и да нема решенија; на пример, равенката $x^2 = -1$ нема решение бидејќи квадратот на секој реален број е позитивен.

Во врска со една алгебарска равенка, најчесто, се поставуваат следниве две **основни задачи:**

а) дали равенката има решенија; и, ако има,

б) кои броеви се нејзини решенија.

На пример, равенката (2) има решенија и сите нејзини решенија се -2, 1 и 3, т. е. **множеството решенија** M на таа равенка е

$$M = \{-2, 1, 3\}.$$

Равенката $x^2 + 1 = 0$, пак, нема решение и нејзиното множество решенија е празно.

Значи, една алгебарска равенка може да:

- **има решение**, т. е. **е решлива равенка**, ако нејзиното множество решенија **не е празно**, т. е. $M \neq \varnothing$; или

- **нема решение**, т. е. **е невозможна** (нерешлива, апсурдна) **равенка**, ако нема ни едно решение, т. е. $M = \varnothing$.

4. Кои од следниве равенки се невозможни? Зошто?

а) $x + 2 = 3x$; б) $2x^2 = -3$; в) $0 \cdot (x + 1) = 2$;

г) $x(x + 2) = x^2 + 2x$ д) $x + 1 = 0 \cdot x$; ѓ) $x = x - 1$.

в. За две равенки $A = B$ и $C = D$ се вели дека се **еквивалентни равенки,** ако нивните множества решенија се совпаѓаат; тоа се означува:

$$A = B <=> C = D.$$

Според тоа, ако M_1 е множеството решенија на равенката $A=B$, а M_2 - на равенката $C=D$, тогаш точна е следнава формула

$$(A=B <=> C=D) <=> M_1 = M_2.$$

При таканареченото „решавање на равенките" се користат повеќе својства на релацијата „еднаквост"; тие ни овозможуваат да согледаме „дали две равенки се еквивалентни". Еве некои од нив:

1° $A = T \Rightarrow (A=B \Leftrightarrow T=B)$;

2° $A = B \Leftrightarrow A + C = B + C$;

3° $C \neq 0 \Rightarrow (A=B \Leftrightarrow AC=BC)$.

Првото својство ни укажува дека изразот што е десна (или лева) страна на една равенка секогаш може да се замени со друг израз кој е идентичен со него. На пример, во равенката

$$6x^2 + 2x + 10 = 3x \cdot (2x - 1), \qquad (a_1)$$

десната страна, т.е. $3x \cdot (2x - 1)$ може да се замени со $6x^2 - 3x$, бидејќи тие два израза се идентични па

$$6x^2 + 2x + 10 = 6x^2 - 3x, \qquad (a_2)$$

т.е. равенките (a_1) и (a_2) се еквивалентни.

Сега, согласно со својството 2° можеме да напишеме

$$6x^2 + 2x + 10 - (6x^2 - 3x) = 6x^2 - 3x - (6x^2 - 3x),$$

т. е.

$$5x + 10 = 0,$$

односно

$$5x + 10 - 10 = -10,$$

па

$$5x = -10. \qquad (a_3)$$

Од (a_3), во согласност со својството 3°, добиваме

$$5x \cdot \frac{1}{5} = -10 \cdot \frac{1}{5}, \text{ т. е. } x = -2. \qquad (a_4)$$

Значи: $(a_1) \Leftrightarrow (a_2) \Leftrightarrow (a_3) \Leftrightarrow (a_4)$.

Второто и третото својство 2° и 3° најчесто се познати по искажувањето *„префрлање од едната на другата страна од знакот рамно"*, односно *„множење на равенка со број, различен од нула"*.

5. Докажи ги својствата 1°, 2°, 3°.

◐ Својството 1° следува од симетричноста и транзитивноста на релацијата „=", а 2° и 3° од т. н. монотоност на збирот и производот на реалните броеви.

При практична работа со равенките често се користи и следнава формула

4° $AB = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$.

Согласно со својството 4°, за равенката $(x-3)(x+2)=0$ имаме:

$$(x-3)(x+2)=0 <=> (x-3=0 \vee x+2=0),$$

па, очигледно е дека 3 и -2 се нејзини решенија.

Да се реши *една равенка значи да се најдат сите нејзини решенија.*

6. Користејќи ги својствата 1° - 4°, реши ја равенката

$$2x^2-8x=2x-8.$$

Вежби

7. Кои од следниве равенки се невозможни:

а) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{5x}{6}$; б) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=\frac{5x}{6}+1$; в) $x^3+1=0$.

г) $x^4+1=0$; д) $x^2+1=1-x^2$.

8. Укажувајќи на примената на својствата 1° - 4°, реши ја равенката

а) $7\cdot(2x-3)=10+6x+3\cdot(x-2)$;

б) $3x\cdot(2x+5)=5\cdot(x^2-1)+x^2$.

9. Најди ги сите решенија на равенката

а) $(x^2-x)(x-2)=0$; б) $\frac{x^2-1}{x^2+1}=0$.

10. Зошто следнава равенка има смисла само за позитивни вредности на x ? Реши ја равенката:

а) $\frac{x+3}{x+|x|}=1$; б) $\frac{x+3}{x+|x|}=\frac{1}{2}$.

11. Зошто следнава равенка е невозможна:

$\sqrt{1-x}+\sqrt{x-3}=1$?

VII. 2. ЛИНЕАРНА РАВЕНКА

а. Ако во алгебарските изрази A и B во равенката (1) од минатата лекција, по нивното средување, непознатата x се јавува с а м о со прв степен, тогаш за таа равенка се вели дека е **линеарна равенка.**

Такви се, на пример, равенките:

$$-x+1=2x;\quad 5x=4;\quad 2-x=5x-13,\ldots$$

Со еден пример ќе видиме како „се решава" една (линеарна) равенка.

Пример 1. *Да се реши равенката:*

$$\frac{4x-1}{5}=\frac{2x+1}{3}.$$

Решение.

$$\frac{4x-1}{5} = \frac{2x+1}{3} <=> 3(4x-1) = 5(2x+1)$$

се користи својството 3° (од минатата лекција), при што $C = 15$;

$<=> 12x-3 = 10x + 5$,

се користи својството 1°: левата и десната страна се заменуваат со соодветни идентични изрази;

$<=> 12x - 3 + 3 - 10x = 10x + 5 + 3 - 10x$,

се користи својството 2° : $C = 3 - 10x$; на двете страни се додава по $3 - 10x$;

$<=> 2x = 8$,

се користи својството 1°: страните во равенката се заменуваат со соодветни идентични изрази;

$<=> \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{1}{2} \cdot 8$,

се користи својството 3° : $C = \frac{1}{2}$;

$<=> x = 4$,

се користи својството 1°, при што $\frac{1}{2} \cdot 2x$ се заменува со x, а $\frac{1}{2} \cdot 8$ со 4.

Значи:

$$\frac{4x-1}{5} = \frac{2x+1}{3} <=> x = 4.$$

Равенката $x = 4$ има **само** едно решение и тоа бројот 4 (бидејќи $4 = 4$), па, и дадената равенка, поради еквивалентноста, има **само** едно решение: бројот 4.

Забелешка. За покусо, наместо „бројот 4 е решение на дадената равенка", ќе велиме „дадената равенка има решение $x = 4$".

1. Да се реши равенката

$$x - 5 = \frac{3x+1}{4}.$$

Образложи ги сите чекори при решавањето.

Забелешка. Во твоето досегашно школување сигурно си решавал и си решил многу равенки; сигурно знаеш дека една равенка може „да се чита одлево надесно и оддесно налево", знаеш да „префрлуваш од една страна на друга", да се „ослободуваш од именителите", „да множиш со -1" итн. Продолжи така и во иднина, само внимавај секој чекор во работата да е во согласност со својствата 1° - 3° од минатата лекција, зашто само така ќе може да добиеш еквивалентна равенка.

б. Секоја линеарна равенка може да се доведе во обликот

$$ax = b, \tag{1}$$

каде што a и b се некои реални броеви.

Според тоа, во случајот кога:

1°. $a \neq 0$, равенката е **решлива** и има с а м о едно решение $\frac{b}{a}$;

имено: ако (1) се помножи $\frac{1}{a}$ се добива дека

$$ax = b <=> x = \frac{b}{a},$$

а оттаму и дека бројот $\frac{b}{a}$ е решение;

2°. $a = 0 \land b = 0$, равенката е, исто така **решлива** - секој реален број е нејзино решение; имено, тогаш

$$ax = b <=> 0 \cdot x = 0,$$

а втората равенка е задоволена за секој реален број;

3°. $a = 0 \land b \neq 0$, равенката е **невозможна** (нерешлива, апсурдна), бидејќи равенката $0 \cdot x = b, b \neq 0$, не станува точно бројно равенство за ниеден реален број x.

2. Согледај од кој тип се следниве равенки:

а) $x - 3 = 6x - 5(x - 2)$; б) $2(x - 3) + 2 = x - 4$;

в) $x + 6 = 7x - 6(x - 1)$; г) $\frac{2x-1}{2} - 1 = x - \frac{1}{3}$.

3. За која вредност на бројот m равенката

$$(m - 3)x = m^2 - 3m$$

ќе биде а) невозможна, б) решлива со само едно решение, в) решлива со бесконечно многу решенија?

в. Често пати во една равенка може да се најде некоја буква што може да се смета како познат број; за таква буква, обично, се вели дека е (реален) **параметар.** При решавање на равенки од тој вид треба да бидеме повнимателни!

Да ја решиме следнава задача.

Задача 1. Да се реши равенката

$$\frac{x}{m}+\frac{x}{m-1}=\frac{2m-1}{m(m-1)}, \qquad (*)$$

каде што m е некој познат реален број (параметар).

Решение. Тука, практично, решаваме бесконечно многу равенки што се добиваат за различни реални вредности на параметарот m; имено:

за $m = 3: \frac{x}{3}+\frac{x}{2}=\frac{5}{6}$,

за $m = 2: \frac{x}{2}+x=\frac{3}{2}$,

за $m = -\frac{1}{2}: -2x-\frac{2x}{3}=\frac{8}{3}$, итн.

Пред да почнеме со решавање треба да ги отфрлиме оние вредности на m за кои равенката нема смисла, т. е. **не постои.**

Забележуваме дека за $m = 0$ или $m = 1$ во равенката се појавуваат „дропки со именител нула" (?); бидејќи такви дропки не постојат, следува дека не постојат ни равенки од обликот (*) кога $m = 0$ или $m = 1$.

Затоа, обично се вели дека „ќе ја решаваме равенката (*), но при услов $m \neq 0$ и $m \neq 1$". Според тоа,по множењето со $m(m-1)$ и средувањето, од равенката (*) се доаѓа до равенката

$$(2m-1)\,x = 2m-1.$$

Сега, треба да одговориме на прашањето: за кои вредности на m равенката е решлива?

Според 1°, равенката има само едно решение, ако $2m-1 \neq 0$, т.е. ако $m \neq \frac{1}{2}$; тоа е бројот 1.

Според 2°, пак, равенката е исто така решлива и има бесконечно многу решенија, ако $2m-1=0$, т. е. ако $m=\frac{1}{2}$, зашто е еквивалентна со равенката $0 \cdot x = 0$.

4. Реши ја равенката

$$\frac{x-3}{2m}+\frac{x-2a}{3}=1.$$

Една равенка може да содржи и повеќе различни параметри; во тој случај дискусијата за решливост на равенката се води за секој параметар посебно, а и за евентуални врски меѓу нив.

Така, на пример, равенката

$$\frac{x}{a+b}+\frac{x}{b}=\frac{b}{a+b}$$

има смисла за $b\neq 0$ и $a\neq -b$.

5. Испитај за кои вредности на параметрите a и b е решлива горната равенка.

Вежби

6. Дали се еквивалентни равенките:

а) $x=3$ и $x^2=9$; б) $x+3=x$ и $x=x-3$;

в) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=8$ и $x=15$; г) $\frac{x^2-1}{x-1}=0$ и $x+1=0$.

7. Реши ја равенката, така што ќе ги наведеш и објасниш сите чекори:

а) $(x+1)^2-(x-1)^2=4$; b) $\frac{x-2}{3}=\frac{x}{4}$.

8. Да се реши равенката:

а) $\frac{14x-1}{15}+\frac{2x-3}{5}=\frac{3x-4}{3}$; б) $\frac{4x-3}{3}-\frac{3x-1}{4}-\frac{5x+1}{8}+1=0$;

в) $\frac{5(x+2)}{6}-\frac{2(x-1)}{3}=\frac{3(x-2)}{2}$.

9. Да се реши равенката:

а) $ax+a+1+x=0$; б) $\frac{ax-b}{b}-\frac{bx-a}{a}=a-b$;

в) $\frac{x+2n}{n-1}+\frac{x-2n}{n+1}=1$; г) $\frac{x-a}{x-1}+\frac{x-1}{x-a}=2$.

10. Да се реши равенката:

а) $|x|=2x-5$; б) $x-|x|+4=0$.

VII.3. ЗАДАЧИ ШТО СЕ СВЕДУВААТ НА ЛИНЕАРНА РАВЕНКА

Задача 1. Да се реши равенката

$$\frac{x+1}{x-3}-\frac{x-1}{x+3}=\frac{8x}{x^2-9}.$$

Решение. Постапката за решавање на една равенка треба да се води само кога таа равенка има смисла. Во овој случај за $x=3$, $x=-3$ равенката **нема смисла** бидејќи некои дропки добиваат именител нула.

Затоа, ќе земеме $x\neq 3$ и $x\neq -3$.

Поради тоа што

НЗС $(x-3, x+3, x^2-9) = x^2-9 \wedge x^2-9 \neq 0$,

множејќи ја равенката со x^2-9 се добива:

$$(x+1)(x+3)-(x-1)(x-3) = 8x$$

или, по средувањето,

$$0 \cdot x = 0.$$

Значи, равенката е решлива и секој реален број, различен од 3 и -3, е нејзино решение; множеството решенија ќе биде

$$M = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x \neq -3 \wedge x \neq 3\}.$$

1. Покажи дека равенката

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2} = \frac{2x}{x^2-4}$$

е невозможна, т.е. нема решение.

Задача 2. *Да се реши равенката*

$$\frac{x+a}{a-b}+\frac{x-a}{a+b} = 0.$$

Решение. Равенката нема смисла за $a = b$ и $a = -b$ (Зошто?) па, поради тоа ќе земеме дека параметрите a и b може да бидат кои било реални броеви такви што $a+b \neq 0$ и $a-b \neq 0$. Во тој случај, множејќи ја равенката со $(a+b)$ $(a-b)$ се добива

$$(x+a)(a+b)+(x-a)(a-b) = 0$$

или

$$ax = -ab.$$

За $a \neq 0$ равенката има само едно решение $x = -b$, под услов $b \neq -a$ и $b \neq a$ (Зошто?).

За $a = 0$ и $b \neq 0$ секој број е решение на равенката.

2. Реши ја равенката

$$\frac{x}{x+2a}-\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{16a^2}{4a^2-x^2}.$$

Задача 3. *Со трактор А една нива може да се изора за 10 дена, а со трактор В – за 15 дена. За колку дена двата трактора ќе ја изораат нивата?*

Решение. Задачата ќе ја решиме со т.н. „сведување на единица".

Даземеме дека двата трактора ќе може да ја свршат работата за x дена.

За **еден** ден работа:

- тракторот A ќе изора $\frac{1}{10}$ дел од нивата,

- тракторот B ќе изора $\frac{1}{15}$ дел од нивата,

- двата трактора ќе изораат $\frac{1}{x}$ дел од нивата.

Според тоа

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{10} + \frac{1}{15},$$

од каде се добива $x = 6$.

Проверка. Двата трактора за еден ден ќе изораат $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ дел од нивата, па

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{15}\right) \cdot 6 = 1.$$

3. Еден базен се полни преку една цевка за 4 часа, а наполнет базенот може да се испразни преку друга цевка за 7 часа. За кое време ќе се наполни базенот ако се отворат едновремено двете цевки?

Вежби

4. Да се реши равенката:

а) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{5}{x}$; б) $\frac{x-2}{x+2} + \frac{x+2}{x-2} = 2$;

в) $\frac{3x+1}{x^2+6x+9} = 2 - \frac{2x-5}{x+3}$; г) $\frac{7}{x^2-1} + \frac{8}{x^2-2x+1} = \frac{37-9x}{x^3-x^2-x+1}$.

5. Да се реши равенката:

а) $\frac{x-a}{x-1} + \frac{x-1}{x-b} = 2$; б) $3-a = \frac{4+a}{x-1}$;

в) $\frac{x-3a}{x^2-9} - \frac{2a+3}{x+3} = \frac{a+5}{x-3}$;

г) $\frac{ax-b}{a+b} + \frac{bx+a}{a-b} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

6. Еден базен се полни од две цевки. Првата цевка сама може да го наполни базенот за 9 часа, а втората сама за 10 часа. За кое време ќе се наполни празниот базен ако се отворени едновремено двете цевки?

7. Во едно земјоделско стопанство планирале со своите комбајни да ја свршат жетвата за 14 дена. Пред да почне жетвата набавиле уште извесен број комбајни така што ќе можеле со сета механизација да жнеат секој ден по 20 хектари повеќе и жетвата ја свршиле за 10 дена. Колку вкупно хектари биле ожнеани?

8. Збирот од цифрите на еден двоцифрен број е 13. Ако цифрите си ги заменат местата новиот број е за 9 помал од првиот. Кој е тој број?

9. Колку проценти алкохол има во смесата што се добива од 3 литри 60%-тен и 5 литри 82%-тен алкохол?

10. Во фабриката **А** за одредено време изработуваат 27 производи. По реконструкцијата, времето потребно за изработка на еден производ се намалило за 40 минути, па за истиот временски период сега се изработуваат 36 производи. Колкаво време е потребно сега за изработка на еден производ?

VII.4. ЛИНЕАРНА ФУНКЦИЈА

a. Функцијата

$$f(x) = ax + b, \tag{1}$$

каде што a и b се дадени броеви (константи), како што знаеш, се вика **линеарна функција**.

Ако го искористиме записот $y = f(x)$, тогаш линеарната функција (1) може да се запише и на следниов начин

$$y = ax + b. \tag{2}$$

Со линеарна функција се среќаваме многу често при опишување на разни настани, состојби, процеси во природата, науката, техниката итн.

На пример, вкупните трошоци T за производство на одреден вид стока (на пример – чевли) може да се пресметаат со формулата

$$T(x) = ax + T_0,$$

каде што a – се трошоците по единица производ (пар чевли), T_0 – фиксни трошоци што не зависат од производството (амортизација, кирија и др.), а x – готов производ (број на произведени чифтови чевли).

Сигурно си се сретнал и со други примери:

- поминатиот пат s при рамномерно движење со брзина v_0 се пресметува со формулата:

$$s(t) = s_0 + v_0 t,$$

- брзината v на телото што слободно паѓа се одредува со формулата

$$v(t) = gt + v_0,$$

итн.

1. Потсети се уште на некои закони од физиката што се искажуваат со линеарна функција.

Од формулата (1) се забележува дека:

- коефициентите a и b може да бидат кои било реални броеви;

- **доменот** (дефиниционото подрачје) на функцијата е целото множество реални броеви (Зошто?);

- **графикот** на линеарната функција (1) е множеството

$$G = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y = ax + b\}. \qquad (3)$$

Пример 1. *Да ја разгледаме функцијата* $y = 2x + 3$.

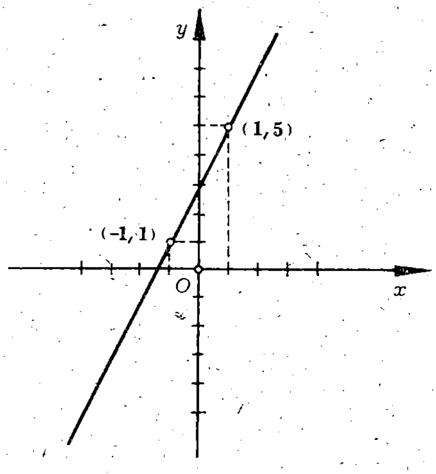
Решение. Функцијата е линеарна зашто е од облик (1), со $a=2$ и $b = 3$. Таа е дефинирана за секој реален број, бидејќи сумата од удвоената вредност на кој било број x и бројот 3 е пак реален број.

Нејзиниот график е множеството

$$G = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R},\ y = 2x + 3\}.$$

б. Ако сакаме да го претставиме геометриски графикот (3) на линеарната функција (1), тогаш тоа го правиме во координатната рамнина, т.е. рамнина во која е зададен еден правоаголен декартов координатен систем.

Ти знаеш дека **графикот на една линеарна функција** секогаш се претставува со **права,** па поради тоа, за нејзиното цртање, доволно е да знаеме две точки, т.е. два различни пара (x, y) од тој график.



Црт. 1

Со нацртаната права на црт. 1 е претставен графикот на функцијата $y = 2x + 3$, бидејќи

$(-1, 1) \in G$,

$(1, 5) \in G$.

Забелешка. Обично, за самата права се вели дека е „график на функцијата ..." или дека „со правата е геометриски претставена функцијата...".

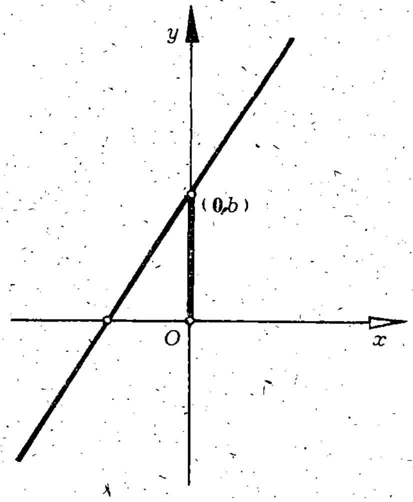
2. Нацртај ги правите со кои графички се претставени функциите:

а) $y = 2x + 1$, $y = 2x - 3$;

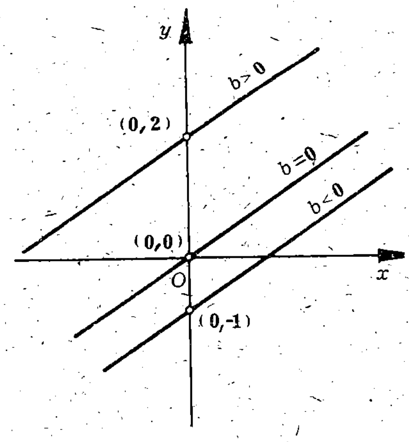
б) $y = x + 1$, $y = -2x + 1$.

Решавајќи ја горната задача сигурно увиде дека положбата на графиците - правите спрема координатните оски зависи од коефициентите a и b на функцијата $y = ax + b$; да се потсетиме на таа зависност.

1°. За $x = 0$ функцијата $y = ax + b$ добива вредност $y = a \cdot 0 + b = b$, па значи графикот (правата) **минува** низ точката $(0, b)$ (црт. 2).



Црт. 2



Црт. 3

Според тоа, ако

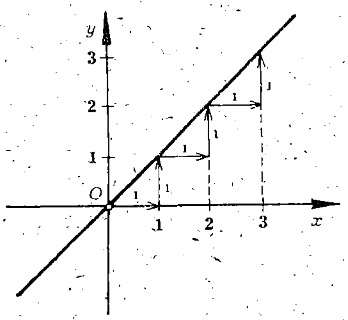
$b > 0$, графикот го сече позитивниот дел на y-оската;

$b = 0$, графикот минува низ координатниот почеток;

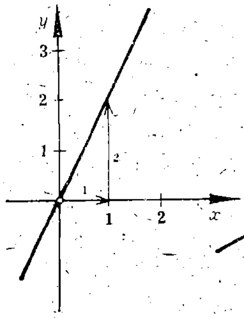
$b < 0$, графикот го сече негативниот дел на y-оската (црт. 3).

Забелешка. Коефициентот b ја одредува „отсечката што графикот ја прави на y-оската", нејзината должина изнесува $|b|$.

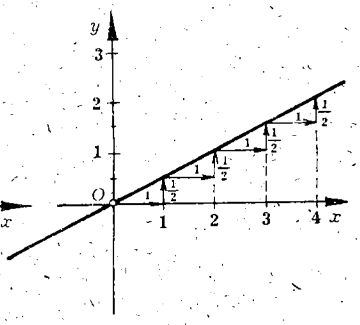
2°. Разгледај ги цртежите 4, 5 и 6 на кои се претставени графиците на функциите $y = x$ $(a = 1)$, $y = 2x$ $(a = 2)$ и $y = \frac{x}{2}$ $(a = \frac{1}{2})$.



Црт. 4

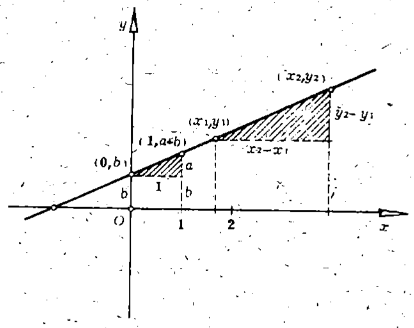


Црт. 5



Црт. 6

На секој од тие цртежи може да се забележи следново: ако променливата (аргументот) x се зголеми за 1, т.е. од 1 на 2, од 2 на 3, од 3 на 4, ..., по секој чекор функцијата се зголемува за 1, односно за 2, односно $\frac{1}{2}$ - точно за толку колку што изнесува нејзиниот коефициент a.



Црт. 7

Тоа важи и општо: Од сличноста на правоаголните триаголници на црт. 7 согледај дека е точно

$$a = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}. \qquad (4)$$

Забелешка. За коефициентот a се вели дека го одредува правецот на графикот (правата) и се нарекува **коефициент на правецот.** Ако две функции имаат ист коефициент на правецот a, тогаш нивните графици се паралелни прави (Зошто?).

Пример 2. *Да ја одредиме линеарната функција чиј график минува низ точките* A (1,1) и B (3,7).

Решение. Да земеме една произволна точка M (x, y) од правата – график на бараната линеарна функција. Коефициентот на правецот ќе го определиме од формулата (4), т.е.:

од A и B: $a = \dfrac{7-1}{3-1}$, а од B и M: $a = \dfrac{y-1}{x-1}$,

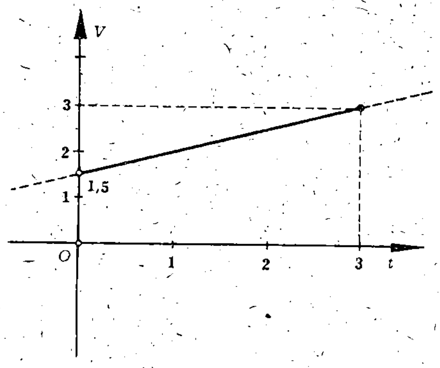
од каде што

$$\frac{y-1}{x-1} = \frac{7-1}{3-1},$$

т.е.

$$y = 3x - 2.$$

3. Одреди ја линеарната функција ако нејзиниот график минува низ точките (-2, 3) и (5,-4).



Црт. 8

4. Полнењето на една цистерна со вино е прикажано со графикот на црт. 8 (непрекината отсечка).

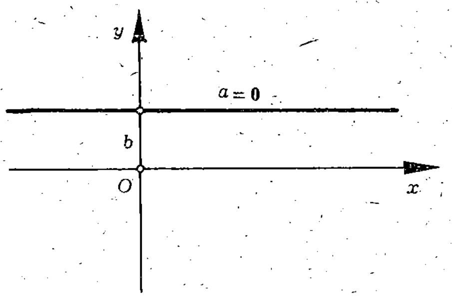
Одговори:

а) колку вино протечува низ цевката за 1 час;

б) колку вино имало во цистерната пред да почне да се полни;

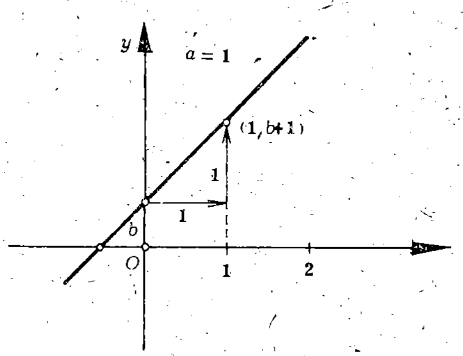
в) напиши ја линеарната функција со која може аналитички да се прикаже овој процес.

b. Менувањето на линеарната функција (нејзиното растење односно опаѓање, брзината на тоа менување) зависи од коефициентот a. Од следниве цртежи може да се согледа таа зависност:

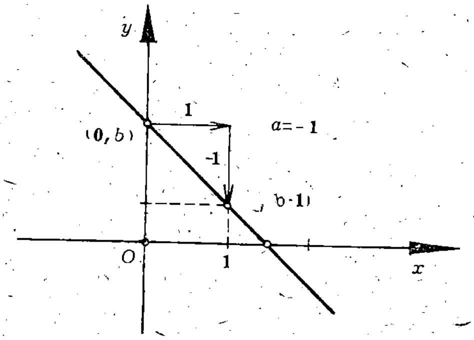


$$y = b$$

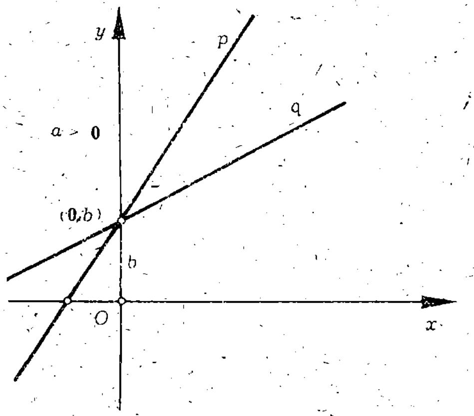
За функцијата се вели дека е константна, т.е. не се менува нејзината вредност со менувањето на аргументот x.



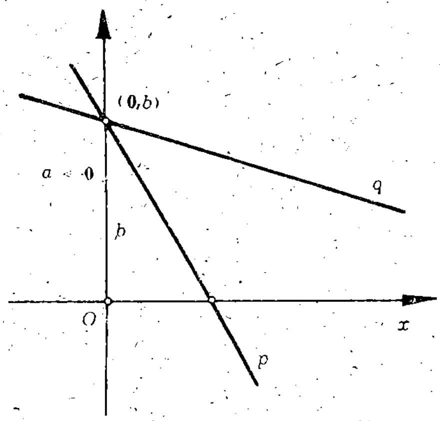
$y = x + b$
рамномерно расте



$y = -x + b$
рамномерно опаѓа



p побрзо расте од q
q побавно расте од p



p побрзо опаѓа од q
q побавно опаѓа од p

5. Нацртај една права во координатниот систем и продискутирај го однесувањето на линеарната функција што е претставена со таа права.

Вежби

6. Претстави ги графички функциите:

а) $y = -2x + 3$ б) $y = -2x - 1$.

7. Нацртај го графикот на функцијата $y = 2x + b$, ако се знае дека тој минува низ точката $A(-1, 2)$.

8. Претстави ја графички функцијата $y = ax - 3$, ако нејзиниот график е права паралелна со графикот на функцијата $y = 2x + 1$.

9. Во функцијата $y = ax + b$ определи ги a и b така што нејзиниот график да минува низ точките $A(0, 2)$ и в) $(-3, 0)$.

VII.5. ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

а Секоја алгебарска равенка што може да се доведе до обликот

$$ax + by = c, \quad (1)$$

каде што a, b, c се реални броеви, се вика **линеарна равенка со две променливи или непознати** x и y.

За броевите a и b се вели дека се **коефициенти пред непознатите**, а c – **слободен член** на равенката.

Ако со замена на непознатата x со бројот α, а y - со бројот β се добие дека (1) е точно бројно равенство, тогаш за **подредената двојка** (α,β) се вели дека е **решение на равенката** (1).

Така, на пример, двојката (2, 3) е решение на равенката

$$5x - 2y = 4;$$

и двојките (4, 8), (-2, -7) се решенија на таа равенка.

1. Најди барем уште 3 решенија на горната равенка.

Од самата равенка $ax + by = c$ се гледа дека во случајот кога $a \neq 0$ или $b \neq 0$, равенката има **бесконечно многу решенија.**

Пример 1. *Да ги најдеме решенијата на равенката*

$$5x - 2y = 4.$$

Решение. Равенката може да ја доведеме во обликот

$$y = \frac{5}{2}x - 2,$$

од каде што, давајќи на непознатата x произволна реална вредност, може да се пресмета втората компонента y на соодветното решение; така, од долната таблица може да се видат повеќе решенија на равенката.

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-7	$-4\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	3	...

Множеството решенија на таа равенка може да се запише на следниов начин

$$M = \{ (x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y = \frac{5}{2}x - 2 \}.$$

Општо, множеството решенија на равенката (1) кога $b \neq 0$ или $a \neq 0$ може да се запише на следниов начин:

- ако $b \neq 0$:

$$M = \{ (x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\},$$

- ако $a \neq 0$

$$M = \{ (x, y) \mid y \in \mathbf{R}, x = -\frac{b}{a}y + \frac{c}{a}\}.$$

2. Најди неколку решенија и одреди го множеството решенија на равенката:

а) $x + y = 1$; б) $-2x + y = 3$.

Задача 1. *Да се најдат сите решенија на равенката:*

а) $2(y + 3x) + 3(y - 2x) = 10$;

б) $\frac{x-1}{4} + \frac{y-1}{3} = \frac{x+4y-5}{12}$.

Решение. По средувањето на равенката, се добива:

а) $y = 2$, т.е. $0 \cdot x + 1 \cdot y = 2$, од каде што се гледа дека секој пар $(x, 2)$ е решение, т.е.

$$M_1 = \{(x, 2) \mid x \in \mathbf{R}\};$$

б) $2x = 5$, т.е. $2 \cdot x + 0 \cdot y = 5$, од каде што се гледа дека секој пар $(\frac{5}{2}, y)$ е решение, т.е.

$$M_2 = \{ (\frac{5}{2}, y) \mid y \in \mathbf{R}\}.$$

Во случајот кога $a = 0$ и $b = 0$, т.е. кога равенката (1) е од обликот $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$, се гледа дека за:

1) $c \neq 0$, равенката е **невозможна** (нерешлива), т.е. нема ни едно решение, па множеството решенија M е празно;

2) $c = 0$, равенката е **решлива** и секој пар реални броеви е нејзино решение, т.е. $M = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

3. Согледај од кој тип се следниве равенки:

а) $3x + 5(3 - y) = 3(5 + x) - 5y$; б) $\frac{x-4}{2} + \frac{y}{3} = \frac{3x+2y}{6} - 2$.

б. Ако во равенката $ax + by = c$ коефициентот $b \neq 0$, тогаш таа може да се доведе до обликот

$$y = kx + n, \tag{2}$$

каде што $k = -\frac{a}{b}$ и $n = \frac{c}{b}$.

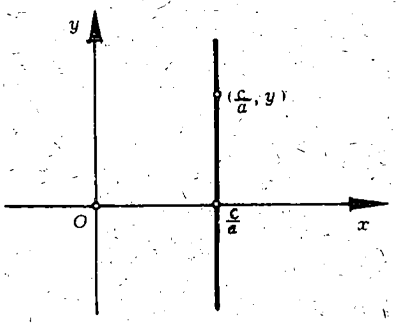
Од тоа може да се заклучи дека со секоја равенка (1), при $b \neq 0$, може да се зададе една линеарна функција (чиј график е права).

Значи, равенката

$$ax + by = c, \quad b \neq 0,$$

претставува права којашто во однос на координатниот систем има коефициент на правец k и на y-оската прави отсечка n, при што

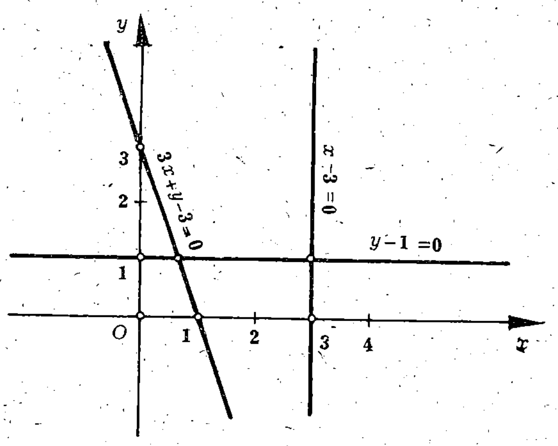
$$k = -\frac{a}{b}, \quad n = \frac{c}{b}.$$



Црт. 1

И во случајот $b = 0$, т.е. кога равенката (1) се сведува на $ax = c$, таа претставува права. Имено, сите решенија на таа равенка се од обликот $(\frac{c}{a}, y)$, т.е. тие претставуваат точки од една права што е паралелна со y-оската (црт. 1).

Поради тоа за равенката (1) се вели дека е **равенка на права.**



Црт. 2

На црт. 2 се нацртани три прави и се назначени нивните равенки.

4. Нацртај ја правата

а) $2x + 3y = 6$; б) $x = 4$; в) $2y = 3$.

5. Одреди го коефициентот на правецот и отсечката на y- оската за правата:

а) $3x - 4y = 12$; б) $x + 2y = 5$,

Која отсечка ја „прави" оваа права на x-оската?

Вежби

6. Најди неколку решенија на равенката:

а) $2x + 3y = 6$; б) $2x = 3$; в) $y + 3 = 0$.

7. Нацртај ја правата зададена со равенката:

а) $3x - 4y = 12$; б) $x - y - 1 = 0$; в) $x + y = 0$.

8. Одреди ги отсечките што правата ги прави на координатните оски, па потоа нацртај ја правата:

а) $x + y = 3$; б) $5x - y - 2 = 0$; в) $x - 2y + 2 = 0$.

9. Најди ја равенката на правата што минува низ точките:

а) $A\ (3, 0)$, $B\ (0, -1)$; б) $A\ (-1, 2)$, $B\ (2, -4)$.

10. Најди ја равенката на правата што на координатните оски прави отсечки m (на x-оската) и n (на y-оската):

а) $m = 1, n = 1$; б) $m = -\frac{2}{3}, n = \frac{1}{4}$; в) $m = -1, n = -2$.

VII.6. ЛИНЕАРНА НЕРАВЕНКА СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

а. Нека A и B се два алгебарски изрази само со една променлива. Ако тие се сврзат со еден од знаците за неравенство $<$, $\leq$, $>$ или $\geq$, на пример,

$$A < B, \tag{1}$$

тогаш се добива предикат со една променлива што се вика **неравенка со една непозната**.

На пример:

$$2x-3 < x+1, \quad \frac{x+1}{x-1} \leq x, \quad x^2+1 > 0, \quad \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3} \geq 0,$$

се неравенки со една непозната.

Ако за некоја вредност на непознатата, неравенката (1) станува точно бројно неравенство, тогаш за таа вредност се вели дека е **решение на неравенката** (1).

Така, на пример, множеството решенија на неравенката

$$x-4 > 0$$

е множеството реални броеви поголеми од 4, т.е. интервалот $(4, +\infty)$; во овој случај би можеле да кажеме дека „дадената неравенка ја задоволува *секој број* $x \in (4, +\infty)$".

Неравенката, пак,

$$x^2 + 5 < 0$$

не е задоволена за ниеден реален број (зошто?), па таа нема решенија.

Решението на следнава неравенка

$$x^4 + 1 > 0$$

е целото множество **R** на реалните броеви, т.е. множеството решенија е интервалот $(-\infty, +\infty)$.

1. Кои од следниве неравенки немаат решение? Зошто?

а) $(x-1)^2 + 2 < 0$; б) $\dfrac{x^2}{x^2+1} \leq 0$; в) $\dfrac{x^2+1}{x^2} \leq 0$.

2. Запиши го множеството решенија на неравенката:

а) $x < 1$; б) $x \leq 1$; в) $x + 2 \geq 0$; г) $x - 5 < 0$.

б. За две неравенки се вели дека се **еквивалентни** ако множеството решенија на едната е еднакво со множеството решенија на другата. Тоа се запишува, на пример, вака:

$$A < B \iff C < D.$$

При изучувањето на броевите се запозна со повеќе **основни својства** на бројните неравенства; тие својства важат и за неравенките. *Например:*

$1^{\circ}.\ A < B <=> B > A;$

$2^{\circ}.\ A < B <=> A + C < B + C,$

каде што C е произволен израз што има смисла за допуштените вредности на променливата во неравенката $A < B$.

Ова својство ни укажува дека и кај неравенките важи „правилото за префрлување" како кај равенките; на пример

$$x-3 \geq 2 <=> x-3+3 \geq 2+3 <=> x \geq 2+3.$$

$3^{\circ}.\ C > 0 => (A < B <=> AC < BC),$

$\quad C < 0 => (A < B <=> AC > BC),$

каде што за C, покрај истото ограничување како во 2°, важи и условот: $C > 0$ (односно $C < 0$) е точно бројно неравенство за секоја допуштена вредност на променливата во $A < B$. Ова својство треба да се користи мошне внимателно; *множењето со негативен број го менува знакот за неравенство во неравенките.*

2. Покажи дека важи следнава еквивалентност:

$$x(x-2) > x^2 - x + 6 <=> x < -6$$

Образложи го секој чекор со помош на својствата 1° - 3°.

б. **Линеарна неравенка.** Секоја неравенка која може со помош на својствата 1°, 2° или 3° да се доведе во обликот

$$ax < b, \tag{2}$$

каде што a и b се реални броеви, се вика **линеарна неравенка со една непозната.**

Од следниве примери може да се согледа како се одредува множеството решенија на една линеарна неравенка во зависност од a и b:

а) $2x < 3 <=> x < \frac{3}{2};\quad x \in (-\infty, \frac{3}{2});$

б) $-5x \leq 3 <=> x \geq -\frac{3}{5};\quad x \in [-\frac{3}{5}, +\infty);$

в) $2x-1 < 2(x+1) <=> 0 \cdot x < 3 <=> 0 < 3,$

т.е. дадената неравенка е еквивалентна со точно бројно неравенство, па нејзиното множество решенија е $\mathbf{R}$, т.е. $(-\infty, +\infty)$; во тој случај се вели дека дадената неравенка е **идентична (безусловна) неравенка;**

г) $\frac{1+3x}{3} < x-1 <=> 0 < -2,$

т.е. дадената неравенка е еквивалентна со неточно бројно неравенство, па, значи неравенката нема решенија.

Пример 1. Да ја решиме неравенката

$$\frac{x+5}{8}-\frac{7x-1}{6}\geqslant\frac{x+1}{3}+\frac{3x-2}{4}+\frac{37}{12}.$$

Решение. Со постапка како кај равенките, се ослободуваме од именителите, ги префрлуваме „непознатите на лево", а „познатите на десно" и, по средувањето, се добива следнава еквивалентна неравенка

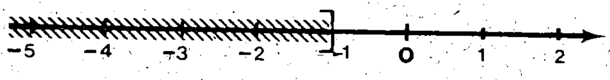
$$-51x\geq 51.$$

Поради $-51\neq 0$, неравенката ја делиме со -51, т.е. ја множимс со $-1/51$ (со негативен број!), па затоа се добива

$$x\leq -1$$

Множеството решенија на дадената неравсенка ќе биде интервалот $(-\infty, -1)$.

Множеството решенија на неравенката може да се прикаже и графички на бројна оска, така што ќе го исшрафираме делот од оската со броевите што припаѓаат на добиениот интервал, како на црт. 1.



Црт. 1

3. Реши ја неравенката:

$$\frac{3-5x}{4}+2\leq\frac{x-6}{2}$$

и прикажи го на бројната оска множеството решенија.

Вежби

4. Да се реши неравенката:

а) $x-(2-x)<3x+7$;

б) $(3x-1)^2+(4x+3)^2\geq(5x+4)^2$.

5. Да се реши неравенката:

а) $\frac{3}{4}-\frac{x}{2}<x$; б) $\frac{2x-3}{4}-\frac{x-1}{3}\geq\frac{x}{2}$.

6. Да се реши неравенката:

а) $\frac{x-5}{2}>3+\frac{3x-2}{6}$ б) $\frac{7x+6}{5}\geq 1+\frac{x+2}{10}$.

VII.7. СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА НЕПОЗНАТА

Нека се зададени две неравенки со една непозната, на пример, $A < B$ и $C < D$. Тие претставуваат предикати со една променлива.

Конјункцијата на тие неравенки (т.е. предикати)

$$(A < B) \wedge (C < D)$$

се вика **систем неравенки со една непозната.**

Тоа претставува барање да се установи дали постојат допуштени вредности на непознатата во двете неравенки, такви што тие неравенки истовремено ги прави точни бројни неравенства. За секој таков број се вели дека е **решение на системот.**

За множеството од сите реални броеви што го задоволуваат еден систем се вели дека е негово **множество решенија**; да се реши еден систем значи да се одреди неговото множество решенија.

Пример 1. *Да го решиме системот*

$$\left| \begin{array}{l} 4x - 3 \geq 5, \\ 1 + x < 16 - 2x. \end{array} \right.$$

Решение. Ако една неравенка од системот се замени со друга што е еквивалентна со неа, тогаш множеството решенија не се менува, па „новиот" систем е **еквивалентен** со дадениот.

Така, дадениот систем може да се сведе на системот

$$\left| \begin{array}{l} x \geq 2, \\ x < 5. \end{array} \right.$$

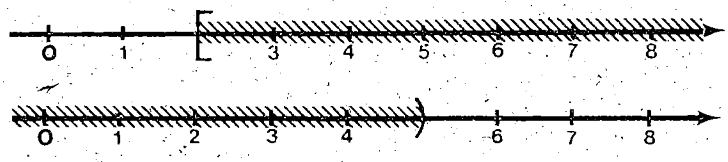
Сега се одредува множеството решенија на секоја неравенка посебно; **пресекот** на тие множества (т.е. заедничкиот дел од интервалите-решенија) ќе биде множеството решенија на системот. За секоја од неравенките во системот може да запишеме

$$x \geq 2, \quad x \in [2, +\infty)$$
$$x < 5, \quad x \in (-\infty, 5)$$

па множеството решенија M на системот ќе биде

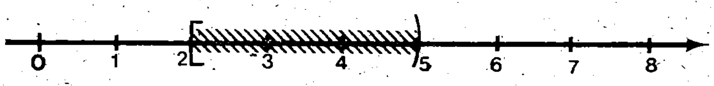
$$M = (-\infty, 5) \cap [2, +\infty) = [2, 5).$$

Множеството M може да го одредиме и графички со помош на бројната оска (црт. 1 и црт. 2):



Црт. 1

или само на една оска:



Црт. 2

Забелешка. Може да се забележи дека при решавање на еден систем неравенки најважниот чекор доаѓа на крајот!

Еве неколку случаи со кои се среќаваме во практиката:

а) $\left| \begin{array}{lll} x < -2, & x < -2, & x \in (-\infty, -2); \\ x > 1, & x > 1, & x \in (1, +\infty); \end{array} \right.$

системот **нема решение**, бидејќи

$$(-\infty, -2) \cap (1, +\infty) = \varnothing.$$

б) $\left| \begin{array}{l} x \leq 3, \\ x \geq 3; \end{array} \right.$ системот има **само едно решение**, бидејќи

$$(-\infty, 3] \cap [3, +\infty) = \{3\}.$$

в) $\left| \begin{array}{l} 0 \cdot x < -1, \\ x > 2; \end{array} \right.$ системот нема решение, бидејќи првата неравенка е неточно бројно неравенство

г) $\left| \begin{array}{ll} 0 \cdot x \leq 3, & x \in (-\infty, +\infty), \\ x < 5, & x \in (-\infty, 5), \end{array} \right.$

па, $M = (-\infty, 5) \cap (-\infty, +\infty) = (-\infty, 5)$ е множеството решенија на системот.

1. Претстави го на бројна оска решението на секој од горните системи а) – г).

2. Реши го системот неравенки:

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{2x}{3} - 1 < \dfrac{x}{5} + \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{4} < \dfrac{x}{6} + \dfrac{5}{2}. \end{array} \right.$$

Скицирај го множеството решенија на бројната оска.

И во случајот кога системот има повеќе од две неравенки, решавањето на задачата оди по иста постапка:

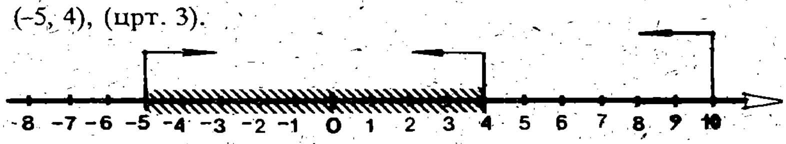
$$\left| \begin{array}{ll} x \leq 10, & x \in (-\infty, 10], \\ x > -5 & x \in (-5, +\infty), \\ x < 4, & x \in (-\infty, 4); \end{array} \right.$$

множеството решенија M на системот ќе биде:

$$M = (-\infty, 10] \cap (-5, +\infty) \cap (-\infty, 4),$$

$$M = (-5, 10] \cap (-\infty, 4) = (-5, 4),$$

т.е. $M = (-5, 4)$, (црт. 3).



Црт. 3

3. **Реши го системот неравенки:**

$$\begin{vmatrix} 2x-1 > x+4, \\ 3x+7 < x+27, \\ 4x-1 > x+20. \end{vmatrix}$$

Некои задачи се сведуваат на решавање систем линеарни неравенки; еве неколку примери.

1) $1 < x \leq 7 <=> \begin{vmatrix} x > 1, \\ x \leq 7, \end{vmatrix}$ т. е. $M = (1, 7]$.

Внимавај: $1 < x - 3 < 5 <=> \begin{vmatrix} x-3 > 1, \\ x-3 < 5, \end{vmatrix}$

т.е.

$$1 < x-3 < 5 <=> 1+3 < x < 5+3.$$

2) $|x| < 5 <=> -5 < x < 5$, т.е. $M=(-5, 5)$;

аналогно:

$$|x-3| \leq 2 <=> -2 \leq x-3 \leq 2$$

т.е.

$$|x-3| \leq 2 <=> \begin{vmatrix} x-3 \geq -2 \\ x-3 \leq 2. \end{vmatrix}$$

3) $(x-3)(x+5) > 0$;

оваа неравенка се сведува на множество од два система неравенки, т.е.

$$(x-3 > 0 \wedge x+5 > 0) \vee (x-3 < 0 \wedge x+5 < 0)$$

(производот на два броја е позитивен ако двата множитела имаат ист знак).

Тоа значи дека множеството решенија M на дадената неравенка е у н и ј а од множествата решенија M_1 и M_2 на двата система:

$$\left|\begin{array}{l} x-3>0, \\ x+5>0, \end{array}\right. \quad M_1=(3,+\infty);$$

$$\left|\begin{array}{l} x-3<0, \\ x+5<0, \end{array}\right. \quad M_2=(-\infty,-5);$$

па

$$M = M_1 \cup M_2 = (-\infty, -5) \cup (3, +\infty).$$

4) $\dfrac{x-8}{x+3} \leq 0;$

и оваа неравенка се сведува на множество од два система неравенки, т.е.

$$(x-8 \leq 0 \wedge x+3>0) \vee (x-8 \geq 0 \wedge x+3<0)$$

(една дропка е негативен број ако броителот и именителот имаат спротивни знаци).

Тоа значи дека множеството решенија M на дадената неравенка е у н и ј а од множествата решенија M_1 и M_2 на двата система:

$$\left|\begin{array}{l} x-8 \leq 0, \\ x+3>0, \end{array}\right. \quad M_1=(-3, 8];$$

$$\left|\begin{array}{l} x-8 \geq 0, \\ x+3<0, \end{array}\right. \quad M_2=\varnothing;$$

па

$$M = M_1 \cup M_2 = (-3, 8) \cup \varnothing = (-3, 8].$$

4. Реши ја неравенката $\dfrac{x+1}{x-4} + \dfrac{1}{2} < 0.$

◑ Прво собери ги дропките!

В е ж б и

5. Реши го системот неравенки:

а) $\left|\begin{array}{l} 2x+3<0, \\ x+3>0; \end{array}\right.$ б) $\left|\begin{array}{l} x-10 \leq 0, \\ 2x+1>0, \\ x-2>0. \end{array}\right.$

6. Реши ја неравенката:

а) $10 \geq x+2 \geq 0;$ б) $|3-x| < 4;$

в) $x(x-3) < 0;$ г) $\dfrac{3}{x+5} \leq -7.$

VII.8. ЗАДАЧИ ЗА РАВЕНКИ СО АПСОЛУТНИ ВРЕДНОСТИ

Со неколку задачи ќе покажеме како се решаваат некои равенки што содржат непозната под знакот за апсолутна вредност.

Да се потсетиме: апсолутната вредност $|a|$ на реалниот број a се определува на следниов начин:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \geqslant 0. \\ -a, & \text{ако } a < 0; \end{cases}$$

поради $|0| = 0$, може да се земе и

$$|a| = -a, \text{ ако } a \leqslant 0.$$

Така, на пример: $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$.

1. Согледај дека:

а) $|a^2| = a^2$, $|a|^2 = a^2$, $\sqrt{a^2} = |a|$, $||a|| = |a|$;

б) $|x-a| = \begin{cases} x-a, & x \in [a, \infty), \\ -(x-a), & x \in (-\infty, a]. \end{cases}$

Прво, да решиме неколку примери:

Пример 1. Да ја решиме следнава равенка

$$3|x| - x = 12.$$

Решение. Бидејќи $|x| = x$ за $x \geqslant 0$ и $|x| = -x$ за $x \leqslant 0$, зададената равенка „се распаѓа" на две равенки:

P_1: $3x - x = 12, x \in [0, +\infty)$,
P_2: $-3x - x = 12, \quad x \in (-\infty, 0]$.

Од тоа:

P_1: $2x = 12, x = 6, \quad$ а $6 \in [0, +\infty)$;
P_2: $4x = 12, x = -3, \quad$ а $-3 \in (-\infty, 0]$.

Значи, $x = 6$ и $x = -3$ се решенија на зададената равенка. Направи проверка!

Пример 2. Да ја решиме равенката

$$|2x-4| = 3x-1.$$

Решение. Поради

$$|2x-4| = \begin{cases} 2x-4, & \text{за } 2x-4 \geqslant 0, \text{ т.е за } x \in [2, +\infty), \\ -(2x-4), & \text{за } 2x-4 < 0, \text{ т.е. за } x \in (-\infty, 2], \end{cases}$$

равенката ќе ја решаваме во секој од овие интервали посебно.

Така, ако $x \in [2, +\infty)$, тогаш

$$|2x-4| = 3x-1 \iff 2x-4 = 3x-1,$$

т.е.

$$x = -5;$$

но, $-5 \notin [2, +\infty)$ па -5 не е решение; ако, пак, x $(-\infty, 2]$, тогаш

$$|2x-4| = 3x-1 \iff -(2x-4) = 3x-1,$$

т.е.

$$x = 1$$

е решение на зададената равенка.

Значи, равенката има само едно решение: $x = 1$.

Пример 3. Да ја решиме равенката

$$|x-2| + x = 2.$$

Решение. Поради

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{за } x \in [2, +\infty), \\ -(x-2), & \text{за } x \in (-\infty, 2], \end{cases}$$

зададената равенка ќе биде еквивалентна со соодветната равенка во секој од овие интервали посебно, т.е.

$$|x-2| + x = 2 \iff \begin{cases} x-2+x = 2, & \text{за } x \in [2, +\infty), \\ -(x-2)+x = 2, & \text{за } x \in (-\infty, 2]. \end{cases}$$

а) Во интервалот $[2, +\infty)$, добиваме

$$2x = 4,$$
$$x = 2,$$

а $2 \in [2, +\infty)$, па $x = 2$ е решение на равенката.

б) Во интервалот $(-\infty, 2]$, добиваме

$$-x+2+x = 2,$$
$$0 \cdot x = 0,$$

т.е. секој број од овој интервал ја задоволува равенката.

Значи, равенката има бесконечно многу решенија, а множеството решенија е

$$\mathrm{M} = \{x \mid -\infty < x \leq 2\},$$

т.е. интервалот $(-\infty, 2]$.

Задача 1. Да се реши равенката

$$|x|+2|x+2| = 11 - |3-x|.$$

Решение. Изразот $3-x$ е:

– позитивен: за секој $x \in (-\infty, 3)$,

– негативен: за секој $x \in (3, +\infty)$, па згодно е овие интервали да ги наречеме **интервали на знакот на** изразот $3 - x$.

Така, интервали на знакот на изразот $x + 2$ се:

$(-\infty, -2)$ е интервал на знакот $-$,
$(-2, +\infty)$ е интервал на знакот $+$.

Откако ќе ги најдеме интервалите на знакот на сите изрази што се под знакот за апсолутна вредност, ќе направиме една таблица во која ќе ги одбележиме границите на сите тие интервали и ќе ги внесеме соодветните знаци.

За зададената равенка, таа таблица ќе биде:

	$-\infty$ … -2	-2 … 0	0 … 3	3 … $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$3 - x$	$+$	$+$	$+$	$-$
	1°	2°	3°	4°

Во секој од овие четири интервали равенката ќе добие поинаква форма, па затоа ќе треба да ги побараме нејзините решенија во секој интервал посебно; при одредувањето на формата на равенката ќе треба да внимаваме на дефиницијата за апсолутна вредност.

Така ќе добиеме:

1° $(-\infty, -2]$: $\quad -x - 2(x + 2) = 11 - (3 - x)$

$$-4x = 12,$$
$$x = -3;$$

бидејќи $-3 \in (-\infty, -2]$, следува дека $x = -3$ е решение на равенката;

2° $[-2, 0]$: $\quad -x + 2(x + 2) = 11 - (3 - x),$

$$0 \cdot x = 4;$$

равенката не е решлива во овој интеравал;

3° $[0, 3]$; $\quad x + 2(x + 2) = 11 - (3 - x),$

$$2x = 4$$
$$x = 2;$$

бидејќи $2 \in [0, 3]$, следува дека $x = 2$ е решение на равенката;

4° $[3, +\infty)$: $\quad x + 2(x + 2) = 11 + (3 - x),$

$$4x = 10,$$
$$x = 2{,}5;$$

бидејќи $2{,}5 \notin [3, +\infty)$, следува дека $x = 2{,}5$ не е решение на равенката.

Значи, равенката има две решенија $x_1 = -3$ и $x_2 = 2$.

2. Реши ја равенката

а) $|2x-2| + |x| = 3x-2$; б) $|2x-1| + |3x-2| = 5$.

Задача 2. Да се реши равенката

$$|2-|1-|x||| = 1.$$

Решение. Се препорачува „ослободувањето од апсолутните вредности" да започне „однатре".

Дадената равенка, поради

$$|x| = -x \text{ за } x \in (-\infty, 0],$$
$$|x| = x \text{ за } x \in [0, +\infty),$$

„се распаѓа" на две равенки:

A: $|2-|1+x|| = 1$ во интервалот $(-\infty, 0]$;

B: $|2-|1-x|| = 1$ во интервалот $[0, +\infty)$.

Истата постапка води до „распаѓање" на секоја од овие две равенки на уште по две равенки (во соодветните интервали):

A_1: $|2+(1+x)| = 1$,
$|3+x| = 1$ во $(-\infty, -1]$,

A_2: $|2-(1+x)| = 1$,
$|1-x| = 1$ во $[-1, 0]$;

B_1: $|2+(1-x)| = 1$,
$|3-x| = 1$ во $[1, +\infty)$,

B_2: $|2-(1-x)| = 1$,
$|1+x| = 1$ во $[0, 1]$.

Сега, од секоја од овие равенки ќе се добијат уште по две (во соодветните интервали); поради тоа, пак, што изразите под знакот на апсолутна вредност во A_2 и B_2 се позитивни во посочените интервали, се гледа дека и двете равенки се сведуваат на равенката

$$x = 0$$

што е и решение на дадената равенка (провери го тоа).

Од другите две равенки, A_1 и B_1, се добива:

A_{11}: $-(3+x) = 1$,
$x = -4$ во $(-\infty, -3]$;

т.е. -4 е решение на дадената равенка;

A_{12}: $(3 + x) = 1,$
$x = -2$ во $[-3, -1]$,

т.е. -2 е решение;

B_{11}: $-(3 - x) = 1,$
$x = 4$ во $[3, +\infty)$,

т.е. 4 е решение;

B_{12}: $3 - x = 1,$
$x = 2$ во $[1, 3]$,

т.е. 2 е решение.

Значи, зададената равенка има пет решенија:

$x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 4$.

3. Реши ја равенката

$$||x| - 2| = 5.$$

Вежби

4. Пресметај ја вредноста на изразот

а) $f(x) = |1 - |1 - |x|||$, б) $f(x) = |||x| - 2| - 1| - 2|$ за $x = 0, -1, 1, -2, 2$.

5. Реши ја равенката

а) $|x| - 2x = 3$, б) $\frac{x}{1 + |x|} = 2$; в) $\frac{1 + |x|}{1 - |x|} - \frac{1 - |x|}{1 + |x|} = 0$.

6. Реши ја равенката

а) $|3 - x| + |x + 2| = 0$;

б) $|2x - 1| - |3x - 2| + 1 = 0$;

в) $\left|\frac{x - 1}{2x - 1}\right| = 5$.

7. Реши ја равенката

а) $|x| + |x + 1| + |x + 2| = 9$, б) $|4x - 1| - |2x - 3| + |x - 2| = 0$.

8. Реши ја равенката $||x - 1| - 6| = 2$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ – VII

Во задачите **1** – **5** да се решат равенките:

1. $2x(x - 5) + 3x(x + 4) = x(x + 1) + (2x - 3)^2$.

2. $(3x - 1)^2 + (4x + 3)^2 = (5x + 4)^2$.

3. $\frac{2}{3} + \frac{x + 1}{4} + \frac{x + 2}{5} + \frac{x - 3}{6} = \frac{1}{5}$.

4. $\dfrac{4}{x-3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x-6}=0.$

5. $\dfrac{x-4}{x+4}=\dfrac{x-5}{x+5}.$

6. Мајката е постара од својата ќерка за 26 години; после 10 години таа ќе биде трипати постара од ќерката. Колку години има мајката, а колку ќерката?

7. Растојанието помеѓу станиците А и В патничкиот воз го поминува за 3 саати помалку од товарниот. На која оддалеченост се станиците А и В ако брзината на товарниот воз е 50 km/h, а на патничкиот 80 km/h.

8. Бројот 4575 раздели го на три собироци така што тие да се однесуваат како 3 : 5 : 7.

Во задачите **9 – 12** да се решат равенките и да се дискутира за разни вредности на параметрите:

9. $a(x+b)+b(x+a)=0.$

10. $3-a=\dfrac{4+a}{x-1}.$

11. $\dfrac{3}{x-4}=\dfrac{5a}{a-2x}.$

12. $\dfrac{a}{3a-x}-\dfrac{2}{b-x}=0.$

Во задачите **13 – 16** да се решат неравенките:

13. $\dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x}{7}<1.$

14. $\dfrac{1-(1-(1-(1-x)))}{3}+\dfrac{5+x}{8}\leqslant 0.$

15. $(9x-3)(6x-7)<(18x-1)(3x+2)-1.$

16. $(3x-1)^2+(4x+3)^2\geqslant(5x+4)^2.$

Во задачите **17 – 19** да се реши системот неравенки:

17. $5x-3>1+x,$

$\dfrac{1}{2}-3x<\dfrac{2x}{3}-5,$

18. $\dfrac{2x-1}{5}\geqslant\dfrac{x+1}{2}-4\dfrac{3}{5},$

$\dfrac{3x+2}{7}\leqslant\dfrac{2x}{7}+6.$

19. $x-1>0$, $x+2<0$, $3x+2>0$.

Во задачите **20 – 25** да се решат неравенките што се сведуваат на систем неравенки:

20. $(x+1)\ (x+4)>0$.

21. $x^2-6x+9\geqslant 0$.

22. $\dfrac{x-1}{x+2}<0$.

23. $\dfrac{3x+1}{x-4}\leqslant 3$.

24. $x^2\ (x-5)\geqslant 0$.

25. $x^2+x^2\leqslant 0$.

26. Да се реши равенката

а) $|2x+1|=|x-1|+2$, б) $|2x-3|-|x+1|=5x-10$.

27. Да се реши равенката

а) $|-x-1|+|x+2|=|x+3|$,

б) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=|x+2|$,

в) $\dfrac{x-6|x|+14}{|x-2|+|x+2|}=\dfrac{3}{2}$.

28. Да се реши равенката

а) $\big|\,|x+1|-|x-1|\,\big|=1$, б) $\big|\,\big|\,\big|\,|x|-2\big|-1\big|-2\big|=2$,

в) $|x^2-x-6|=x^2-x-6$.

ГЛАВА VIII

ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ

VIII.1. ЗА ПРАВОАГОЛНИОТ ТРИАГОЛНИК И НЕГОВОТО РЕШАВАЊЕ

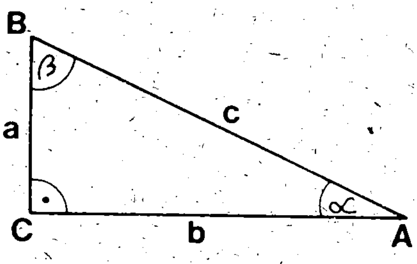
а) Триаголникот како форма се сретнува мошне често во природата, во техниката, при практични мерења итн.

Секој триаголник, пак, може со една своја висина да се разложи на два правоаголни триаголници; исто така, правоаголен триаголник може да е составен дел на повеќе други геометриски фигури (потсети се дека него го сретнуваш кај правоаголникот, ромбот, делтоидот, правилните многуаголници итн.).

Според тоа, правоаголниот триаголник може многу да помогне во изучувањето на други геометриски фигури и при решавање на многу практични задачи; да помогне во поставување и совладување на редица сложени проблеми во геодезијата, градежништвото, машинската техника итн.

Затоа ќе му посветиме посебно внимание. Но, прво ќе се потсетиме на некои поими и својства во врска со него:

1. **Основни елементи** на правоаголниот триаголник се неговите страни (катетите и хипотенузата) и неговите остри агли;



Црт. 1

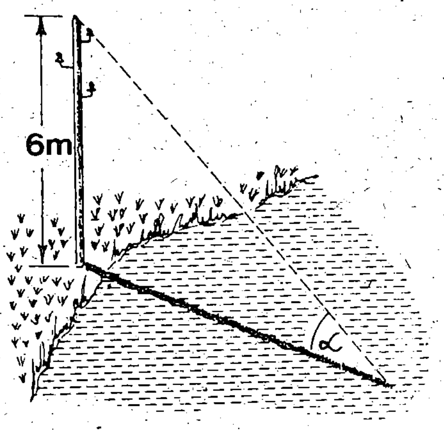
2. Катетите на ΔABC (црт. 1) ќе ги означуваме со a и b, неговата хипотенуза со c, а острите агли со α и β; наедно со нив ќе ги означуваме и нивните мерни броеви. Притоа ќе внимаваме катетата спроти аголот α да ја означиме со a, а таа спроти аголот β - со b. За катетата a ќе велиме уште дека е налегната за аголот β, а спротивна за аголот α; за катетата b - дека е налегната за аголот α, а спротивна за аголот β;

3. За основните елементи е точно

$$\alpha+\beta = 90°, \quad a^2+b^2 = c^2$$

4. Правоаголниот триаголник е наполно определен ако му се познати с а м о д в а основни елементи од кои барем еден е страна. (Зошто?);

5. Да се реши правоаголен триаголник значи од зададените услови во задачата да се одредат с и т е основни елементи на тој триаголник.



Црт. 2

Еве неколку задачи во кои се бара да се најде некој основен елемент на правоаголниот триаголник. Притоа ќе треба да се искористат одредени знаења за слични триаголници.

На црт. 2 се гледа столб висок 6 m, поставен на брегот на езерото, а неговата сенка паѓа на површината на водата; сончевите зраци зафаќаат со земјата агол α.

1. Одреди ја должината на сенката, ако $\alpha = 45°$

2. Колку приближно е долга сенката кога $\alpha = 30°$?

Искористи го правоаголниот триаголник што е дел (половина) од соодветниот рамностран триаголник.

3. Обиди се да ја пресметаш приближно сенката на столбот, ако, на пример, аголот α има $20°$.

Потсети се дека сите правоаголни триаголници со еднакви остри агли се слични меѓу себе; потоа нацртај триаголник што е сличен на оној на црт. 2 ($\alpha = 20°$, висина на столбот 6 m), во размер, на пример, 1:200. Односот меѓу спротивната и налегнатата катета на аголот $20°$ и во двата триаголника ќе биде ист број.

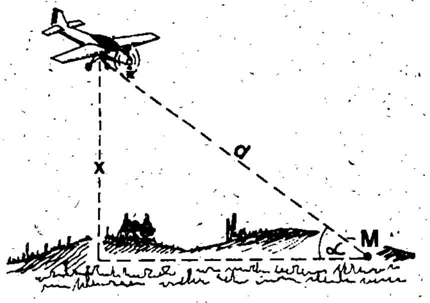
6. Следниве задачи се познати под името о с н о в н и з а д а ч и за решавање правоаголен триаголник:

I. *Да се реши правоаголен триаголник ако му се познати двете катети.*

II. *Да се реши правоаголен триаголник ако му се познати хипотенузата и една катета.*

III. *Да се реши правоаголен триаголник ако му се познати една катета и остар агол.*

IV. *Да се реши правоаголен триаголник ако му се познати хипотенуза и остар агол.*



Црт. 3

Тие задачи може секогаш да се решат графички со *линијар, шестар и аголомер*. Ако задачите се однесуваат за некоја конкретна ситуација, тогаш цртањето се изведува во некој размер, но притоа цртежот треба да се направи прецизно така што бараните елементи да се добијат со што поголема точност.

На пример, нека од точката M (црт. 3) со посебен инструмент е измерено растојанието d до авионот и, исто така, аголот α. Треба да се најде висината на авионот.

Ако оваа состојба на теренот ја претставиме со цртеж во размер 1:100 000 и ако при мерењето на бараната висина на цртежот се направи грешка од 1 mm, тогаш грешката кај вистинската висина ќе изнесува 100 m.

b. Наведените основни задачи може да се решаваат делумно и со сметање; така, во задачите I и II, со користење на Питагоровата теорема може да се пресмета хипотенузата, односно другата катета, во III и IV може да се најде другиот остар агол - и само толку.

Значи, сите тие задачи, со досегашните знаења не можеме да ги решиме комплетно со сметање (ниту да ги најдеме аглите во задачите I и II, ниту страните во III и IV).

Примерот со столбот и неговата сенка не наведува да согледаме дека може да се воспостави определена врска меѓу острите агли и односите на страните во правоаголниот триаголник.

Такво успешно поврзување на аглите и страните е можно со воведување на таканаречените *тригонометриски функции*. Со нивна помош целосно се решаваат со сметање спомнатите основни (како и многу други) задачи за правоаголниот триаголник. Притоа се добиваат многу попрецизни резултати отколку решавањето да се прави графички; се одбегнуваат груби и недопустливи грешки при мерењето (како кај примерот со авионот).

Нашата натамошна работа ќе биде да ги дефинираме и да ги разработиме својствата на тие функции.

Г. **Вежби**

4. Зададени се правоаголните триаголници ABC со $a = 6$, $b = 8$ и $A_1C_1B_1$ со $a_1 = 9$ и $c_1 = 15$.

   а) Покажи дека тие триаголници се слични.

   б) Пресметај ги размерите (односите) на спротивната катета на аголот α и хипотенузата во $\triangle ABC$ и на аголот α_1 во $\triangle A_1C_1B_1$

5. **Нацртај три различни правоаголни триаголници кои имаат еднакви по еден остар агол α и измери им ги страните. Пресметај ги односите на спротивната катета на аголот α и хипотенузата од сите три триаголници. Дали тие триаголници се слични.**

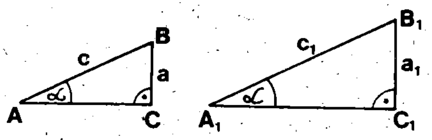
6. **Нацртај два правоаголни триаголници ACB и $A_1C_1B_1$ и означи ги нивните основни елементи. Покажи дека:**

$$\text{ако } \alpha = \alpha_1, \text{ тогаш } \frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}.$$

VIII.2. СИНУС ОД ОСТАР АГОЛ

а. Сигурно ги решаваше задачите 5 и 6 од вежбите во минатата лекција; да се потсетиме, уште еднаш, на последната задача.

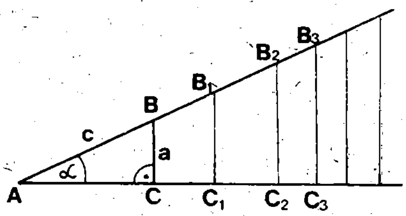
Ако земеме дека во триаголниците на црт. 1 аглите BAC и $B_1A_1C_1$ се еднакви, т.е. $\alpha = \alpha_1$, тогаш тие триаголници се слични, па, $a{:}a_1 = c{:}c_1$ од каде што следува дека



Црт. 1

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a}{c}.$$

Да ги продолжиме краците на $\measuredangle BAC$ и да нацртаме повеќе правоаголни триаголници како на црт. 2. (Колку такви триаголници може да се нацртаат?) Бидејќи сите тие триаголници имаат заеднички агол α секој од нив е сличен со ΔABC.



Црт. 2

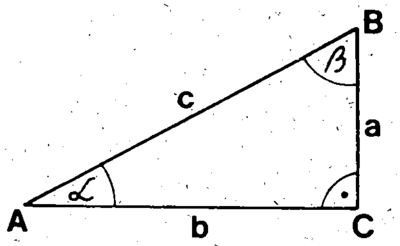
Поради тоа, лесно може да се согледа дека

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} = \frac{a}{c}, \quad \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} = \frac{a}{c}\ldots$$

Значи, во сите правоаголни триаголници со остар агол α о д н о с о т на спротивната катета на тој агол α и хипотенузата, е еден ист број (вредноста на размерот $a : c$).

Тој број, т.е. количникот $\frac{a}{c}$, се вика *синус* од аголот α и се означува со $\sin\alpha$.

Д	Синус од остар агол што е во правоаголен триаголник е односот на спротивната катета на тој агол и хипотенузата.



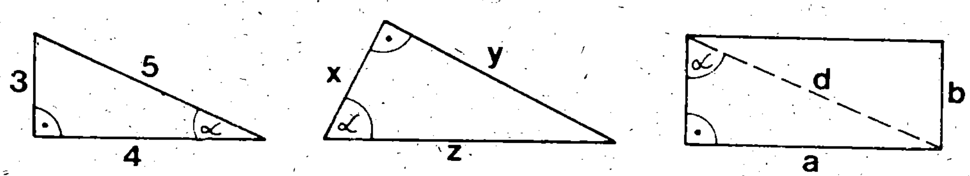
Црт. 3

Така, за правоаголниот триаголник ABC од црт. 3 имаме:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},$$

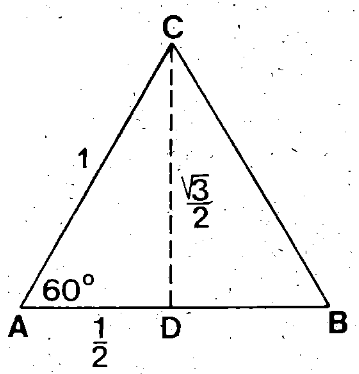
$$\sin\beta = \frac{b}{c}.$$

1. Најди го $\sin\alpha$ од цртежот 4.



Црт. 4

Пример 1. Да го пресметаме $\sin 60°$.



Црт. 5

Решение. Од правоаголниот триаголник ADC, што е половина од рамностраниот триаголник ABC со $\overline{AB} = 1$ (црт. 5), можеме да најдеме:

$$\sin 60° = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

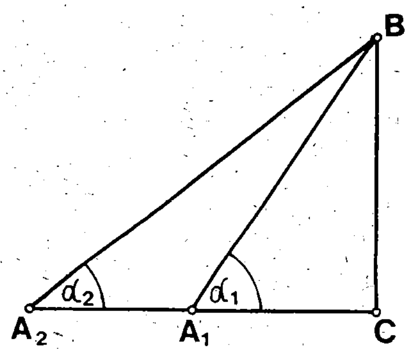
т.е. $\sin 60° \approx 0{,}86602$.

б На црт. 6 правоаголните триаголници A_1CB и A_2CB имаат заедничка катета BC. Тие триаголници имаат различни агли α_1 односно α_2 и различни хипотенузи A_1B, односно A_2B. Поради тоа,

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{A_1B}} \neq \frac{\overline{CB}}{\overline{A_2B}}, \text{ па } \sin\alpha_1 \neq \sin\alpha_2.$$

Значи,

ако $\alpha_1 \neq \alpha_2$ тогаш $\sin\alpha_1 \neq \sin\alpha_2$.

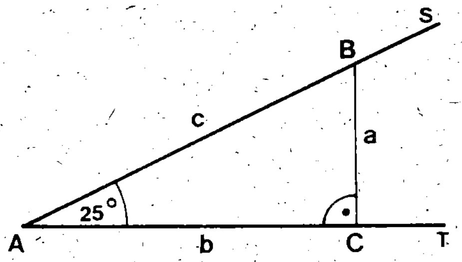


Црт. 6

Ако внимателно се размисли за сето што е речено досега, тогаш може да се согледа дека: синус на кој било остар агол α е определен неименуван број, но и дека се менува кога аголот α ќе се промени. Затоа се вели дека $\sin\alpha$ е функција од аголот α.

b. Да видиме, сега, како ќе го одредуваме синусот од даден агол, на пример, $\sin 25°$.

Да нацртаме агол $\measuredangle SAT = 25°$ и во него да вцртаме правоаголен триаголник ACB како на црт. 7; во тој триаголник, $\measuredangle BAC = 25°$.



Црт. 7

Сега треба внимателно да ги измериме должините на катетата a и хипотенузата c; од црт. 7 ќе измериме $BC = a = 21$ mm и $AB = c = 49$ mm.

Синусот на аголот од 25° ќе биде

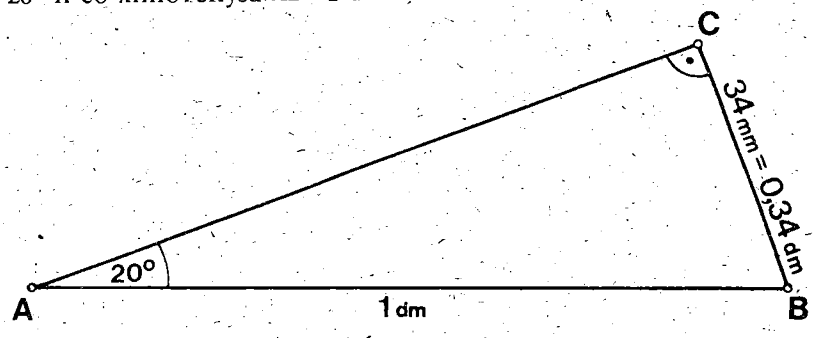
$$\sin 25° \approx \frac{21}{49} \approx 0{,}42.$$

2. Нацртај правоаголен триаголник со остар агол 55°. Одреди го другиот агол β, а потоа на цртежот провери ја неговата големина. (Ако си цртал внимателно, треба да добиеш $\beta = 35°$.) Измери ги прецизно страните на тој триаголник и пресметај ги $\sin 55°$ и $\sin\beta$.

Овој начин на одредување синус од еден агол се вика **графичко одредување на $\sin\alpha$ од зададен агол α.** Природно се наметнува мислата за упростување на таа постапка и, притоа, веднаш се гледа дека е згодно хипотенузата да биде со должина 1. Ќе го искористиме тоа во наредниот пример.

Пример 2. Да го пресметаме $\sin 20°$.

Решение. На црт. 8 е нацртан правоаголен триаголник ACB со остар агол 20° и со хипотенуза $\overline{AB} = 1$ dm.



Црт. 8

Од ΔACB се добива $\sin 20^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, но бидејќи хипотенузата AC има должина 1 dm, лесно заклучуваме дека $\sin 20^\circ$ е еднаков на мерниот број на спротивната катета BC (искажана во овој пример, со дециметри), т.е.

$$\sin 20^\circ \approx 0{,}34$$

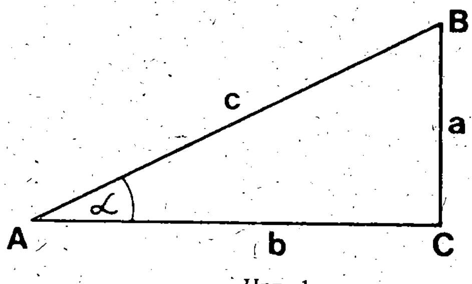
3. Одреди го $\sin 36^\circ$.

Вежби

4. Нацртај рамнокрак правоаголен триаголник и одреди ги синусите на неговите остри агли. (Какви се тие агли?)
5. Даден е правоаголен ΔABC со катети $a = 9$ и $b = 12$. Пресметај ги синусите на неговите остри агли.
6. Дадени се хипотенузата $c = 13$ cm и катетата $a = 1{,}2$ dm на правоаголниот триаголник ABC. Да се пресметаат приближно на четири децимали вредностите на $\sin\alpha$ и $\sin\beta$.
7. Одреди ја графички вредноста на: а) $\sin 35^\circ$ б) $\sin 65^\circ$.
8. Правоаголниот триаголник ABC има катети $a = 36$ mm и $b = 15$ mm. Пресметај го размерот $a{:}c$, т.е. $\sin\alpha$, а потоа пресметај го размерот $b{:}c$, односно размерот на налегнатата катета на аголот α и хипотенузата.

VIII.3. КОСИНУС ОД ОСТАР АГОЛ

Погледај го црт. 1 на кој е нацртан правоаголниот триаголник ABC со остар агол $\alpha = \measuredangle BAC$. Во претходната лекција зборувавме с а м о за размерот $a{:}c$.



Црт. 1

Наполно исто размислување како таму, може да се спроведе и за размерот $b{:}c$. Така се доаѓа до аналоген заклучок дека:

1° во сите правоаголни триаголници со остар агол α односот на налегнатата катета на тој агол и хипотенузата е еден ист број.

2° за различни агли, тој однос е различен.

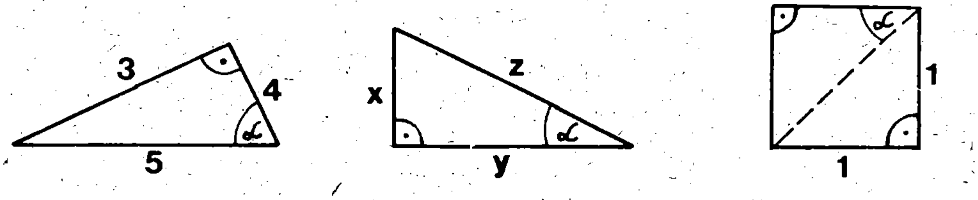
На тој начин дојдовме до уште една функција од аголот α; таа функција се вика **косинус** од аголот α и се означува $\cos\alpha$.

Д	Косинус од остар агол што е во правоаголен триаголник е односот на налегнатата катета на тој агол и хипотенузата.

Така, за правоаголниот триаголник ABC на црт. 1:

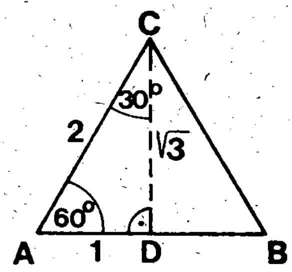
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

1. Најди $\cos\alpha$ според црт. 2.



Црт. 2

Пример 1. *Да ги одредиме* $\cos 60°$ *и* $\cos 30°$.



Црт. 3

Решение. Триаголникот ABC (црт. 3) е рамностран, а ΔADC - правоаголен со остри агли 60° и 30°. Од ΔADC може да се најде

$$\cos 60° = 1:2 = 0{,}5;$$

$$\cos 30° = \sqrt{3}:2 \approx 0{,}866$$

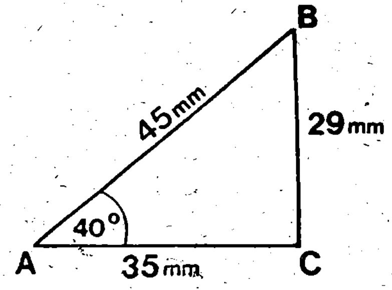
Пример 2. Да се пресмета $\sin^2 60° + \cos^2 30°$.

Решение. Симболот $\sin^2\alpha$ означува $(\sin\alpha)^2$, па

$$\sin^2 60° + \cos^2 30° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2} + \frac{(\sqrt{3})^2}{2^2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1{,}5.$$

б. Со еден пример ќе покажеме како графички се одредува $\cos\alpha$ од зададен агол α.

Пример 3. *Да го одредиме* $\cos 40°$.



Црт. 4

Решение. Прво се црта произволен правоаголен триаголник со агол од 40°. На црт. 4 е нацртан еден таков триаголник, со $\overline{AC} = 3{,}5$ cm и $\overline{AB} = 4{,}5$ cm. Од дефиницијата за $\cos\alpha$ имаме:

$$\cos 40° = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3{,}5}{4{,}5} \approx 0{,}77.$$

2. Најди $\sin 40°$ од истиот црт. 4.

3. Најди $\cos 20^{\circ}$, користејќи го црт. 8 од минатата лекција.

б. Ако во правоаголен триаголник се знае еден остар агол α, тогаш и другиот остар агол β е определен (зошто?), па значи можат да се одредат вредностите на синусот и косинусот и на тој друг агол. Така, од црт. 1 може да се види дека, за $\beta = \sphericalangle ABC$,

$$\sin\beta = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c}.$$

4. Ако другиот агол во правоаголните триаголници на црт. 2 го означиме со β тогаш најди ги $\sin\beta$, $\cos\beta$.

5. Одреди ги синусите и косинусите на острите агли α и β на правоаголниот триаголник ABC зададен со катета $b = 21$ и хипотенуза $c = 29$.

г. Вежби

6. Во правоаголен триаголник ABC, со катета $a=5$ и хипотенуза $c=13$, најди го а) $\cos\alpha$; б) $\sin\alpha$.

7. Со користење на црт. 4 пресметај ги $\cos 50^{\circ}$ и $\sin 50^{\circ}$.

8. Нацртај правоаголен триаголник со агол 42°. Измери ги внимателно страните на тој триаголник и пресметај ги синусите и косинусите на аглите 42° и 48°.

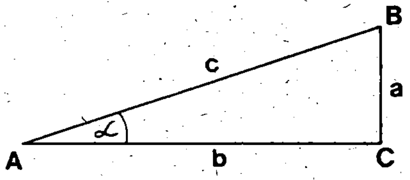
9. Една скала е потпрена на ѕидот така што долниот крај е оддалечен 2,8 m од ѕидот и притоа зафаќа со земјата агол од 65°. Колку е долга скалата?

$\boxed{10}$ Нацртај правоаголен триаголник ABC со страни a, b, c и запиши ги сите размери меѓу страните на тој триаголник.

VIII.4. ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ОД ОСТАР АГОЛ

а. Меѓу катетите a, b на правоаголниот триаголник ABC (црт. 1) можат да се запишат следниве размери

$$a : b \text{ и } b : a.$$



Црт. 1

Вредностите на тие размери остануваат исти во сите правоаголни триаголници со зададен остар агол α, но се менуваат кога аголот α ќе се промени.

Дали можеш да го согледаш тоа? Потсети се како дојдовме до поимот синус од одреден агол!

Двата размера $a{:}b$ и $b{:}a$ определуваат уште две функции.

б За количникот $a{:}b$ се вели дека е тангенс од аголот α којшто лежи спроти катетата a во $\triangle ABC$ (црт. 1), а за количникот $b:a$ – *дека е котангес на тој агол; тие се означуваат со* **tgα**, односно со **ctgα**.

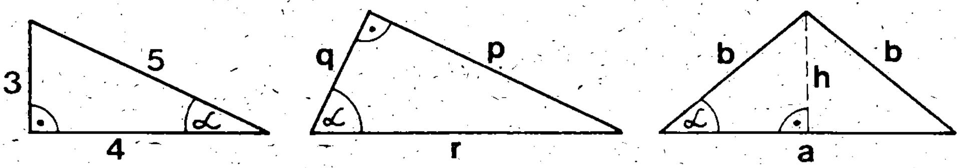
Д	Тангенс од остар агол што е во правоаголен триаголник е односот на спротивната и налегнатата катета на тој агол. Котангенс од остар агол што е во правоаголен триаголник е односот на налегнатата и спротивната катета на тој агол.

Така за правоаголниот триаголник *ABC* на црт. 1:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

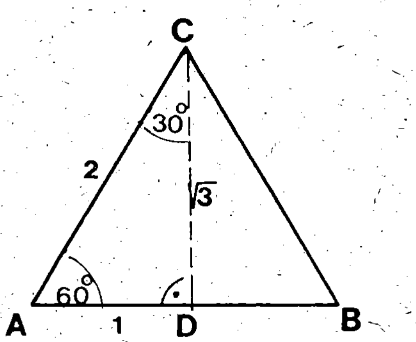
Функциите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ се викаат **тригонометриски функции**. Тоа име доаѓа од зборот „тригонометрија" што значи – мерење на триаголник.

1. Најди $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ според црт. 2.



Црт. 2

Пример 1. *Да го одредиме* $\operatorname{tg}30^\circ$ *и* $\operatorname{ctg}30^\circ$.



Црт. 3

Решение. Триаголникот *ABC* (црт. 3) е рамностран со страна $AB=2$, па од правоаголниот триаголник *ADC* може да се најде

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$$

$$\operatorname{ctg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} \approx 1{,}732$$

2. Најди ги $\operatorname{tg}60^\circ$ и $\operatorname{ctg}60^\circ$.

в Со следниов пример ќе покажеме како графички се одредува $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ од зададен агол α.

Пример 2. *Да ги одредиме* $\operatorname{tg}40^\circ$ *и* $\operatorname{ctg}40^\circ$.

Решение. Прво се црта произволен правоаголен триаголник со агол 40°, па потоа внимателно се мерат неговите страни. Да го искористиме

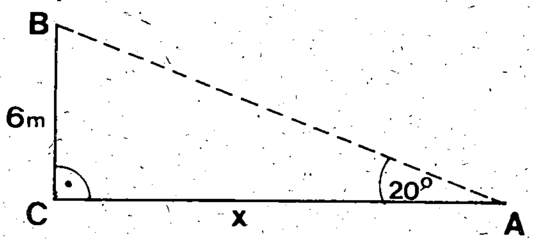
ΔACB на црт. 4 од минатата лекција со катети $\overline{AC}=35$ mm, $\overline{BC}=29$ mm и хипотенузата $AB=45$ mm. Според дефинициите за тангенс и котангенс:

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{29}{35} \approx 0{,}83.$$

$$\operatorname{ctg} 40^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{35}{29} \approx 1{,}20.$$

3. Најди ги tg 20° и ctg 20°.

Сега, откако ги запозна функциите тангенс и котангенс и некои нивни вредности, можеш да замислиш колку полесно и побрзо би ја решил задачата 3 од лекцијата VII.1. во која се бараше да ја одредиш должината на сенката од столбот ако сончевите зраци зафаќаат со земјата агол од 20°.



Црт. 5

Со правоаголниот триаголник ACB на црт. 5 е претставена таа состојба на теренот, од каде што следува дека

$$\frac{x}{6} = \operatorname{ctg} 20^\circ.$$

Сега, сигурно не ти е тешко да добиеш

$$x = 6 \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ,$$

па, ако ја искористиш вредноста на $\operatorname{ctg} 20^\circ \approx 2{,}7$ што ја одреди во задачата 3, лесно ќе најдеш дека

$$x \approx 6 \cdot 2{,}7 = 16{,}2$$

т.е. дека во тој момент сенката на столбот била долга приближно 16,2 m.

Спореди го овој резултат со оној што го доби кога ја разработувавме лекцијата VII.1.

4. Одреди ја приближно висината на дрвото, на пример, од дворот на вашето училиште, ако си измерил дека неговата сенка кон пладне е долга 5,4 m и си оценил дека сончевите зраци зафаќаат со земјата приближно 70°.

Прво, одреди ја графички вредноста на tg 70°.

Ако добро си решавал - дрвото е високо приближно 14,6 m.

Вежби

5. Во правоаголен триаголник ABC, со катети $a=9$ и $b=40$, најди го: а) $tg\alpha$, б) $ctg\alpha$, в) $\sin\beta$, г) $\cos\beta$.

6. Зададен е рамнокрак триаголник со основа 6 cm и висина 4 cm. Пресметај ги тригонометриските функции на аголот при основата.

7. Нацртај правоаголен триаголник со агол 35°. Измери ги внимателно страните на тој триаголник и пресметај ги $\sin 35^\circ$, $\cos 35^\circ$, $tg\,35^\circ$ и $ctg\,35^\circ$.

8. Пополни ја таблицава:

	30°	45°	60°
sin		$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$		
tg			
ctg			$\frac{\sqrt{3}}{2}$

9. Да се одреди вредноста на:

а) $2\cos 60^\circ + 4\cos 60^\circ$;

б) $3\sin 30^\circ tg 30^\circ + \cos 60^\circ ctg 60^\circ$;

в) $(tg 45^\circ + tg 60^\circ)^2 + (tg 45^\circ - tg 60^\circ)^2$;

г) $(1 + \cos 30^\circ)(1 - \cos 30^\circ)$.

10. Провери дали е точно равенството:

а) $3tg 30^\circ + 2\cos 30^\circ = 2ctg 30^\circ$;

б) $3ctg 60^\circ - 2\sin 60^\circ = 0$;

в) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = tg 45^\circ$;

г) $4\sin^2 60^\circ + 4\cos^2 30^\circ = tg^2 60^\circ + ctg^2 30^\circ$;

д) $\dfrac{1}{\sin 30^\circ} + \dfrac{1}{\cos 60^\circ} = (tg 45^\circ + ctg 45^\circ)^2$.

$\boxed{11.}$ Нацртај правоаголен триаголник со катети a, b и хипотенуза c и остри агли 50° и 40°. Покажи дека

$$\sin 50^\circ = \cos 40^\circ \text{ и } \cos 50^\circ = \sin 40^\circ.$$

$\boxed{12.}$ Нека α и β се острите агли во еден правоаголен триаголник.

а) Како се викаат агли чиј збир е 90°? Дали α и β се такви?

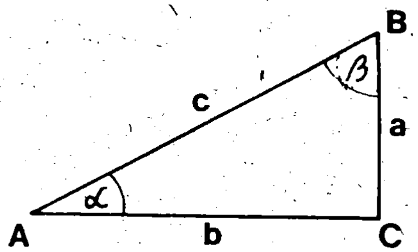
б) Најди го $\cos\beta$, ако се знае дека $\sin\alpha = 0{,}6$.

VIII.5. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД КОМПЛЕМЕНТНИ АГЛИ

а. Острите агли α и β на правоаголниот триаголник се комплементни агли, т.е. $\alpha + \beta = 90^\circ$, па можеме да напишеме:

$$\alpha = 90^\circ - \beta \text{ и } \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Од тоа што α и β се комплементни агли следуваат одредени врски меѓу тригонометриските функции од тие агли; ти сигурно го забележа тоа досега, особено при решавање на задачите 11 и 12 од минатата лекција.



Црт. 1

Од дефиницијата на синус, односно косинус, од црт. 1 имаме:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c},$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \sin\beta = \frac{b}{c}.$$

Веднаш се гледа дека

$$\sin\alpha = \cos\beta \text{ и } \cos\alpha = \sin\beta,$$

па, поради $\beta = 90° - \alpha$, се добиваат следниве врски:

$$\sin\alpha = \cos(90°-\alpha). \tag{1}$$

$$\cos\alpha = \sin(90°-\alpha). \tag{2}$$

На пример, ако $\alpha=27°$ и $\beta=63°$, тогаш, поради тоа што $\alpha+\beta=90°$, имаме:

$$\sin 27° = \cos 63°, \qquad \cos 27° = \sin 63°.$$

Пример 1. *Да се најде* α, *ако:*

а) $\sin\alpha = \sin 38°$; б) $\sin\alpha = \cos 38°$.

Решение. Знаеш дека за кои било два различни агли меѓу $0°$ и $90°$ вредностите на синусите (а и на другите тригонометриски функции) од тие агли се различни меѓу себе, т.е.

$$\text{ако } \alpha_1 \neq \alpha_2 \text{ тогаш } \sin\alpha_1 \neq \sin\alpha_2.$$

Поради тоа,

$$\text{ако } \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 \text{ тогаш } \alpha_1 = \alpha_2.$$

Значи: а) од $\sin\alpha=\sin 38°$ следува дека $\alpha=38°$ и

б) од $\sin\alpha=\cos 38°=\sin(90°-38°)$, т.е. од $\sin\alpha=\sin 52°$ следува дека $\alpha=52°$.

1. Одреди го α, ако:

а) $\sin\alpha=\sin 63°30'$; б) $\sin\alpha = \cos 40°$;

в) $\cos\alpha=\cos 35°$; г) $\cos\alpha = \sin 55°55'$.

Слична дискусија можеме да спроведеме и за врските меѓу тангенсите и котангенсите од комплементни агли.

2. Покажи дека:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90°-\alpha). \qquad (3)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90°-\alpha). \qquad (4)$$

3. Одреди го аголот α од равенството:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha 54°$; б) $\operatorname{tg}28° = \operatorname{ctg}\alpha$.

Пример 2. *Да ги упростиме следниве изрази:*

а) $\sin 20° + 3 \cdot \cos 70°$, б) $\dfrac{5\operatorname{tg}40°+3\operatorname{ctg}50°}{3\operatorname{tg}40°-\operatorname{ctg}50°}$

Решение. Знаеме дека $\cos 70° = \sin 20°$ и $\operatorname{ctg}50° = \operatorname{tg}40°$, па:

а) $\sin 20° + 3\cos 70° = \sin 20° + 3\sin 20° = 4\sin 20°$,

или $\sin 20° + 3 \cdot \cos 70° = \cos 70° + 3\cos 70° = 4\cos 70°$;

б) $\dfrac{5\operatorname{tg}40°+3\operatorname{ctg}50°}{3\operatorname{tg}40°-\operatorname{ctg}50°} = \dfrac{5\operatorname{tg}40°+3\operatorname{tg}40°}{3\operatorname{tg}40°-\operatorname{tg}40°} = \dfrac{8\operatorname{tg}40°}{2\operatorname{tg}40°} = 4.$

4. Упрости го изразот:

а) $\dfrac{4\operatorname{tg}20°+5\operatorname{ctg}70°}{9\operatorname{tg}20°}$; б) $\dfrac{5\sin 15°-2\cos 75°}{5\sin 15°+2\cos 75°}$

Пример 3. *Да го одредиме аголот* α, *ако* $\operatorname{tg}35° = \operatorname{ctg}(\alpha - 10°)$.

Решение. Бидејќи

$$\operatorname{ctg}(\alpha - 10°) = \operatorname{tg}(90° - (\alpha - 10°)),$$

па $\operatorname{tg}35° = \operatorname{tg}(90°-(\alpha-10°))$, од каде што $90°-(\alpha-10°) = 35°$; $\alpha = 65°$.

Но, може и полесно: од $\operatorname{tg}35° = \operatorname{ctg}55°$ следува дека $55° = \alpha - 10°$, па $\alpha = 65°$.

5. Одреди го аголот α, ако $\sin(\alpha + 30°) = \cos 20°$.

Забелешка. Обично, за функцијата косинус се вели дека е **кофункција** на синус, но и дека синус е кофункција на косинус. Исто така, за функцијата котангенс се вели дека е кофункција на тангенс, а за тангенсот – дека е кофункција на котангенс.

Со врските (1) - (4) е искажано следново својство:

Секоја тригонометриска функција од даден остар агол е еднаква со соодветната кофункција од неговиот комплементен агол.

b. Вежби

6. Да се најде аголот α, ако се знае дека а) $\sin 23^\circ 16' = \cos\alpha$, б) $\cos 27^\circ 23' = \sin\alpha$, в) $\mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,15^\circ$; г) $\mathrm{ctg}\,5^\circ 45' = \mathrm{tg}\,\alpha$.

7. Да се најде аголот α, ако се знае дека:

   а) $\cos(\alpha + 10^\circ) = \sin 20^\circ$, б) $\mathrm{tg}\,35^\circ = \mathrm{ctg}(\alpha - 15^\circ)$.

8. Да се најде аголот α, ако се знае дека:

   а) $\sin(20^\circ + \alpha) = \cos(20^\circ + \alpha)$, б) $\mathrm{ctg}(\alpha - 10^\circ) = \mathrm{tg}(\alpha + 20^\circ)$.

9. Да се упростат изразите

   $\dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ} + \dfrac{\mathrm{ctg}\,62^\circ}{\mathrm{tg}\,28^\circ}$, б) $\dfrac{\sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ}{\cos^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ}$

10. Да се упростат изразите, ако се знае дека $\alpha + \beta = 90^\circ$:

   а) $\sin\alpha + \cos\beta$, б) $\cos\alpha - \sin\beta$, в) $\sin^2\alpha + \cos^2\beta$, г) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta$

11*. Дали постои остар агол α којшто го има следново својство: секоја тригонометриска функција од тој агол е еднаква со соодветната кофункција од истиот агол?

12. Во правоаголниот триаголник ABC да се пресметаат:

   а) вредностите на $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$;

   б) бројната вредност на изразот $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

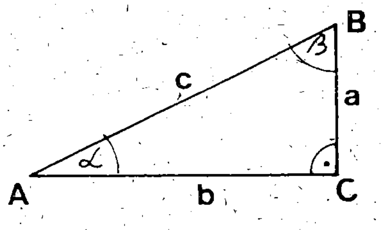
13. Изврши соодветни пресметувања и покажи дека се точни следниве равенства:

   а) $\dfrac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \mathrm{tg}\,45^\circ$, б) $\dfrac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \mathrm{tg}\,60^\circ$, в) $\dfrac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \mathrm{ctg}\,30^\circ$ г) $\mathrm{tg}\,30^\circ \cdot \mathrm{ctg}\,30^\circ = 1$.

VIII.6. ВРСКИ МЕЃУ ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ОД ИСТ АГОЛ

Во оваа лекција сакаме да укажеме на некои врски меѓу тригонометриските функции. И досега, секако, ти си забележал, решавајќи разни задачи, дека такви врски постојат. Тоа, сигурно ти се наметна особено при решавањето на задачите 12 и 13 од минатата лекција.

a. Една од основните врски меѓу синусот и косинусот од еден ист агол α е:



Црт. 1

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.} \qquad (*)$$

На пример, за $\alpha = 30^\circ$, ќе имаме:

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

Да ја докажеме формулата (*). Од правоаголниот триаголник ABC на црт. 1, според дефинициите, можеме да напишеме

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

односно:

$$a = c \cdot \sin\alpha, \quad b = c \cdot \cos\alpha \tag{1}$$

За страните a, b, c знаеме дека, важи Питагоровата теорема:

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{2}$$

Заменувајќи ги a и b од (1) во (2), добиваме

$$(c \cdot \sin\alpha)^2 + (c \cdot \cos\alpha)^2 = c^2,$$

т.е.

$$c^2 \cdot \sin^2\alpha + c^2 \cdot \cos^2\alpha = c^2,$$

па ако поделиме со c^2, добиваме

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

што требаше да докажеме.

1. Провери директно дека

а) $\sin^2 60° + \cos^2 60° = 1$, б) $\sin^2 45° + \cos^2 45° = 1$,

Со користење на формулата (*) може да се одреди $\cos\alpha$, ако е даден $\sin\alpha$ и обратно.

Пример 1. *Да го одредиме* $\cos\alpha$, *ако* $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Решение. Ако во равенството $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ја замениме дадената вредност за $\sin\alpha$, тогаш

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

од каде што

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} = \left(\frac{4}{5}\right)^2,$$

па

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Задачава може да ја решиме и вака: од $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ се добива

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha},$$

па

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{25}},$$

т.е.

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

2. а) Одреди го $\cos\alpha$, ако $\sin\alpha = 0,8$;

б) Одреди го $\sin\alpha$, ако $\cos\alpha = \frac{8}{17}$.

Со неколку примери ќе покажеме како равенството $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ може да се искористи за упростување на одредени изрази.

Пример 2. *Да ги упростиме изразите:*

а) $3 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$, б) $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$.

Решение. а) $3-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha = 3-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha) = 3-1 = 2$.

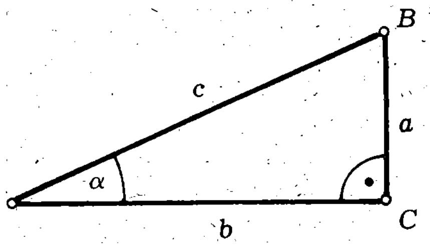
б) $(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = 1-(\cos\alpha)^2 = 1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

3. Упрости ги изразите:

а) $(1-\sin\alpha)\ (1+\sin\alpha)$; б) $\frac{1}{1-\cos\alpha}+\frac{1}{1+\cos\alpha}$

6. Од правоаголниот триаголник ABC на црт. 1 според дефинициите, можеме да напишеме

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



Црт. 1

Во претходниот дел од оваа лекција виде дека може да се напише $a=c\cdot\sin\alpha$ и $b=c\cdot\cos\alpha$, па ако ги замениме, ќе добиеме дека

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{c\cdot\sin\alpha}{c\cdot\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{c\cdot\cos\alpha}{c\cdot\sin\alpha};$$

по скратувањето на овие дропки со c, ќе ги добиеме следниве врски:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};}$$

Од нив, пак, се добива формулата:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1.}$$

Пример 3. *Да покажеме дека* $\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{ctg}30° = 1$.

Решение. $\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{ctg}30° = \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{(\sqrt{3})^2}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

Пример 4. *Да го одредиме* $\operatorname{ctg}\alpha$, *ако* $\operatorname{tg}\alpha=1,6$.

Решение. Од врската $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$ можеме да видиме дека $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ се реципрочни броеви, па

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{1,6} = 0,625.$$

4. а) Одреди го $\operatorname{ctg}\alpha$, ако $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$;

б) Одреди го $\operatorname{tg}\alpha$, ако $\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}25$.

Со помош на основните врски меѓу тригонометриските функции можат да се одредуваат вредностите на три од нив ако е зададена вредноста само на една функција.

Пример 5. *Да ги најдеме вредностите на* $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ *и* $\operatorname{ctg}\alpha$, *ако*

$$\sin\alpha = \frac{5}{13}.$$

Решение. Прво ќе го одредиме $\cos\alpha$, т.е.

$$\cos\alpha = \sqrt{1-(\frac{5}{13})^2} = \sqrt{1-\frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}.$$

Потоа

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{5}{15} : \frac{12}{13} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{5}.$$

5. Одреди ги $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, ако $\cos\alpha = \frac{24}{25}$.

Да разгледаме уште неколку задачи со користење на основните врски.

Задача 1. Да се најдат вредностите на $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, ако $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

Решение. Прво да го одредиме $\operatorname{ctg}\alpha$, т.е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{4}{3}$$

Од $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ имаме дека $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$, т.е. $\sin\alpha = \frac{3\cdot\cos\alpha}{4}$ па ако замениме во равенството $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ќе добиеме

$$(\frac{3\cdot\cos\alpha}{4})^2 + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\frac{9\cdot\cos\alpha}{16} + \cos^2\alpha = 1;$$

по множењето на равенството со 16, добиваме

$$9\cdot\cos^2\alpha + 16\cdot\cos^2\alpha = 16$$

$$25\cdot\cos^2\alpha = 16,$$

$$\cos^2\alpha = \frac{16}{25}$$

од каде што

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Сега не е тешко да се најде дека

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(\tfrac{4}{5})^2} = \frac{3}{5}$$

6. Одреди ги $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $ctg\alpha$, ако $tg\alpha = \frac{8}{15}$

7. Одреди ги $\sin\alpha$ $\cos z$ и $tg\alpha$, ако $ctg\alpha = \frac{7}{24}$

Задача 2. Да се покаже дека е точно равенството:

а) $tg^2\alpha - \sin^2\alpha = tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$;
б) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$.

Решение. Обично, точноста на такви равенства, наречени **тригонометриски идентитети,** може да се покаже на два начина:

1. се трансформираат и левата и десната страна на равенството, – се додека не дојдеме до очигледно вистинито равенство, или
2. се трансформира само едната страна на равенството и се настојува да се сведе на другата.

а) $tg^2\alpha - \sin^2\alpha = tg^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$

$$<=> \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin^2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \sin^2\alpha$$

$$<=> \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \sin^2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha$$

$$<=> \frac{\sin\alpha\,(1-\cos\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$<=> \frac{\sin\alpha \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$<=> \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

(Знаците <=>, обично, не се запишуваат при решавањето.)

б) Ќе ја трансформираме левата страна на равенството:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 =$$
$$= (\sin^2\alpha + 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha) + (\sin^2\alpha - 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha) =$$
$$= 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha + 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = 2;$$

со тоа покажавме дека и левата страна е еднаква со 2.

8. Покажи дека е точно равенството:

а) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;

б) $\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) \cdot \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

Вежби

9. Да се упростат изразите

а) $3 - 2\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha$, б) $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

10. Одреди ги $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, ако:

а) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ б) $\sin\alpha = \frac{9}{41}$ в) $\sin\alpha = 0{,}7$.

11. Одреди ги $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, ако:

а) $\cos\alpha = \frac{20}{29}$ б) $\cos\alpha = 0{,}8$, в) $\cos\alpha = 0{,}55$.

12. Одреди ги $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, ако:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$ б) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{35}$

13. Одреди ги $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, ако:

а) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$, б) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{9}{40}$

14. Да се покаже дека е точно равенството:

а) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$, б) $\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = 0$,

в) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, г) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1-\operatorname{ctg}\alpha}$.

$\boxed{15.}$ Покажи дека е позитивен број следнава разлика

а) $\sin 60° - \sin 45°$, б) $\operatorname{tg}60° - \operatorname{tg}45°$.

$\boxed{16.}$ Која од следниве разлики е позитивен број, а која – негативен број

а) $\sin 45° - \sin 30°$, б) $\operatorname{ctg}45° - \operatorname{ctg}30°$,
в) $\cos 45° - \sin 30°$, г) $\operatorname{tg}60° - \operatorname{tg}30°$.

VIII.7. МЕНУВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ

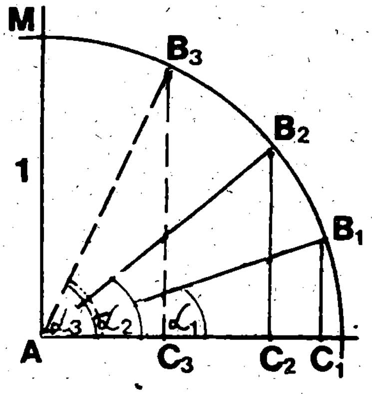
Решавајќи ја задачата **16** од минатата лекција сигурно утврди дека првата разлика е позитивна, а втората негативна, т.е. $\sin 30° < \sin 45°$, односно $\cos 30° > \cos 45°$.

Значи, во тие две задачи увидовме дека, ако остриот агол се зголеми од 30° на 45°, тогаш неговиот синус, исто така, се зголеми, а неговиот косинус се намали. Ќе покажеме дека тоа важи и кога острiот агол зема кои било две вредности.

На црт. 1 е нацртана кружница со центар во точката A и со радиус $AM=1$.

Точките $B_1, B_2, B_3, \ldots$ се избрани произволно на кружницата, а потоа се конструирани правоаголните триаголници:

$$AC_1B_1,\ AC_2B_2,\ AC_3B_3,\ \ldots$$



Црт. 1

Со тоа се определени аглите $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ,при што

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$$

Од цртежот веднаш забележуваме дека поради

$$\overline{B_1C_1} < \overline{B_2C_2} < \overline{B_3C_3} < \ldots$$

и $$\overline{AB_1} = \overline{AB_2} = \overline{AB_3} = \ldots$$

следува

$$\frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{AB_1}} < \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{AB_2}} < \frac{\overline{B_3C_3}}{\overline{AB_3}} < \ldots,$$

т.е. $$\sin\alpha_1 < \sin\alpha_2 < \sin\alpha_3 < \ldots .$$

Значи, ако острiот **агол** α **расте**, тогаш и функцијата $\sin\alpha$ **расте**.

Тоа растење на $\sin\alpha$ е ограничено бидејќи отсечките B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, ... секогаш се помали од $AM=1$, т.е. $\sin\alpha < 1$.

Значи, *ако аголот α расте и се стреми кон 90°, тогаш $\sin\alpha$ расте и се стреми кон 1.*

Од цртежот лесно ќе најдеме оправдување за тоа дека можеме да ги земеме следниве вредности: $\sin 0° = 0$ и $\sin 90° = 1$.

Значи

$$\text{ако } 0° \leq \alpha \leq 90°, \text{ тогаш } 0 \leq \sin\alpha \leq 1.$$

На пример, ако $\alpha_1 = 37°$ и $\alpha_2 = 63°$, тогаш $\sin 63° > \sin 37°$.

Пример 1. *Да најдеме кој од зададените броеви* $\sin 37°$, $\sin 31°$, $\sin 53°$ *е најголем, а кој најмал.*

Решение. Бидејќи $31° < 37° < 53°$, следува дека најголем е бројот $\sin 53°$, а најмал - бројот $\sin 31°$.

1. Подреди ги да растат:

а) $\sin 55^\circ$, $\sin 38^\circ$, $\sin 42^\circ$, б) $\sin 48^\circ$, $\sin 40^\circ$, $\sin 49^\circ$.

б Обиди се на истиот црт. 1 да ги согледаш следниве заклучоци за функцијата $\cos\alpha$

1°. Ако острииот агол α расте така што да се стреми кон 90°, тогаш функцијата $\cos\alpha$ **опаѓа** и се стреми кон нула.

2°. Бидејќи отсечките $AC_1, AC_2, AC_3, \ldots$, на црт. 1 секогаш се помали од $AM = 1$, следува дека функцијата $\cos\alpha$ секогаш е помала од 1, т.е. $\cos\alpha < 1$.

3°. Според цртежот, можеме да прифатиме дека: $\cos 0^\circ = 1$ и $\cos 90^\circ = 0$. Значи,

$$\text{ако } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ, \text{ тогаш } 1 \geq \cos\alpha \geq 0.$$

На пример, ако $\alpha_1 = 15^\circ$, $\alpha_2 = 38^\circ$, $\alpha_3 = 66^\circ$, тогаш $\cos 15^\circ > \cos 38^\circ > \cos 66^\circ$.

2. Одреди кој број е поголем:

а) $\cos 22^\circ$ или $\cos 73^\circ$, б) $\cos 46^\circ$ или $\cos 44^\circ$.

3. Одреди кој број е помал:

а) $\cos 22^\circ$ или $\cos 33^\circ$, б) $\cos 18^\circ$ или $\sin 19^\circ$, в) $\cos 55^\circ$ или $\sin 55^\circ$.

в. На црт. 2 се нацртани повеќе произволни правоаголни триаголници ACB, ACB_2, ACB_3,... со заедничка катета $AC = 1$, што е налегната катета за аглите $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ при што

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots.$$

Од цртежот лесно се забележува дека, поради

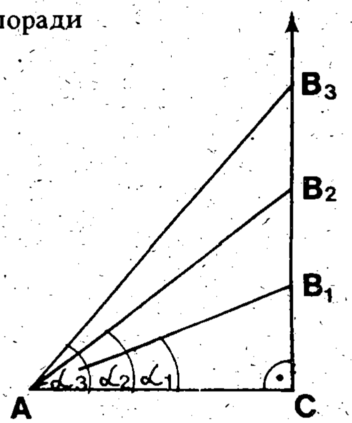
$$\overline{CB_1} < \overline{CB_2} < \overline{CB_3} < \ldots \text{ и } \overline{AC} = 1,$$

следува дека

$$\frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}} < \frac{\overline{CB_2}}{\overline{AC}} < \frac{\overline{CB_3}}{\overline{AC}} < \ldots,$$

$$\text{т.е. } \operatorname{tg}\alpha_1 < \operatorname{tg}\alpha_2 < \operatorname{tg}\alpha_3 < \ldots.$$

Значи, ако острииот **агол** α **расте**, тогаш и функцијата $\operatorname{tg}\alpha$ **расте.**



Црт. 12

Растењето на аголот α е ограничено, бидејќи тој е остар агол, т.е. $\alpha < 90^\circ$, но, растењето на $\operatorname{tg}\alpha$ не е ограничено! Дали согледуваш дека за агли блиску до 90°, нивните тангенси се многу големи броеви? Имено, ако α би имал 90°, тогаш неговиот крак би бил паралелен со правата CB_1.

За таа ситуација во математиката се вели: *ако аголот* α *расте и се стреми кон 90°, тогаш* tgα *расте неограничено, т.е. „се стреми кон бесконечност"* (значи, ако $\alpha \to 90°$, тогаш $\text{tg}\,\alpha \to +\infty$).

Лесно може да се види од цртежот дека е оправдано да се земе tg0°=0. Значи,

$$\text{ако } 0° \leq \alpha < 90°, \text{ тогаш } 0 \leq \text{tg}\alpha < +\infty$$

На пример ако $\alpha_1 = 18°$ и $\alpha_2 = 23°$, тогаш tg23° > tg18°.

Пример 2. *Да ги подредиме броевите* tg35°, tg25°, tg58°, tg83° и tg48° *така да растат.*

Решение. tg25° < tg35° < tg48° < tg58° < tg83°.

4. Одреди кој број е помал:

а) tg88° или tg87°, б) tg5° или tg85°.

Пример 3. *За кои вредности на острииот агол* α *имаме* tgα < 1, *а за кои* tgα > 1.

Решение. Бидејќи од α < 45°, следува дека tgα < tg45°, можеме да заклучиме:

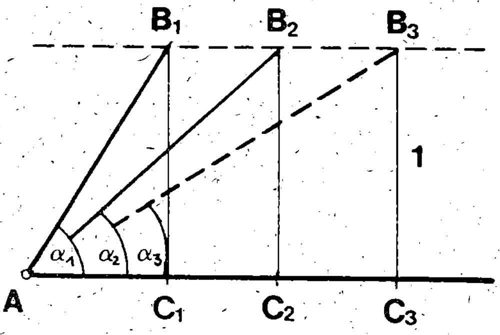
$$\text{ако } \alpha \leq 45°, \text{ тогаш } 0 \leq \text{tg}\alpha \leq 1,$$
$$\text{ако } \alpha \geq 45°, \text{ тогаш } \text{tg}\alpha \geq 1.$$

5. Дали е точно дека: а) tg46° < 1, б) tg44° < 1, в) 1 – tg15° > 0.

Знаеме дека вредноста на ctgα од кој било остар агол α е реципрочната вредност од tgα (од истиот агол), т.е. ctg$\alpha \cdot$ tgα=1.

Разгледај го црт. 3 и обиди се со слични размислувања, како што тоа го направивме за тангенс, да го согледаш менувањето на функцијата ctgα, ако остриот агол α расте (или, пак, опаѓа и се стреми кон нула-агол).

Очигледно е дека може да се земе ctg90° = 0, а слично како за тангенс, ако $\alpha \to 0°$, тогаш ctg$\alpha \to +\infty$.



Црт. 3

Сигурно можеш да утврдиш дека: ако аголот α расте, тогаш функцијата ctgα опаѓа. Значи,

$$\text{ако } \alpha \leq 90°, \text{ тогаш } \text{ctg}\alpha \geq 0$$

На пример ако α_1=33° и α_2=53°, т.е. $\alpha_1 < \alpha_2$, тогаш ctg33° > ctg53°.

6. Одреди кој број е поголем:

а) $\mathrm{ctg}48^\circ$ или $\mathrm{ctg}75^\circ$, б) $\mathrm{ctg}39^\circ$ или $\mathrm{ctg}41^\circ$.

7. Одреди кој број е поголем:

а) $\mathrm{tg}23^\circ$ или $\mathrm{ctg}57^\circ$, б) $\mathrm{tg}10^\circ$ или $\mathrm{ctg}10^\circ$, в) $\mathrm{ctg}35^\circ$ или $\mathrm{tg}55^\circ$.

Вежби

8. Одреди кој број е поголем:

а) $\sin42^\circ$ или $\sin48^\circ$, б) $\cos42^\circ$ или $\cos48^\circ$,

в) $\sin28^\circ$ или $\cos28^\circ$, г) $\sin62^\circ$ или $\cos62^\circ$.

9. Кој од зададените броеви е најголем, а кој најмал:

а) $\sin15^\circ$, $\sin75^\circ$, $\sin45^\circ$; в) $\cos20^\circ$, $\cos70^\circ$, $\cos45^\circ$;

б) $\sin50^\circ$, $\cos40^\circ$, $\sin40^\circ$ г) $\cos15^\circ$, $\sin15^\circ$, $\cos18^\circ$.

10. Дали е точно дека:

а) $\sin25^\circ-\sin40^\circ < 0$, б) $\sin25^\circ-\sin26^\circ > 0$,

в) $\sin80^\circ-\cos80^\circ > 0$, г) $\cos10^\circ-\sin10^\circ > 0$.

11. Одреди кој број е поголем:

а) $\mathrm{tg}12^\circ$ или $\mathrm{tg}81^\circ$, б) $\mathrm{tg}46^\circ$ или $\mathrm{tg}44^\circ$,

в) $\mathrm{ctg}15^\circ$ или $\mathrm{ctg}75^\circ$, г) $\mathrm{ctg}23^\circ$ или $\mathrm{tg}23^\circ$.

12. Дали се позитивни или негативни разликите:

а) $\mathrm{tg}50^\circ-\mathrm{tg}73^\circ$, б) $\mathrm{tg}16^\circ-\mathrm{tg}10^\circ$,

в) $\mathrm{tg}17^\circ-\mathrm{ctg}17^\circ$, г) $\mathrm{tg}58^\circ-\mathrm{ctg}58^\circ$.

13. Дали е точно дека:

а) $\mathrm{tg}23^\circ - 1 > 0$, б) $1 - \mathrm{tg}72^\circ < 0$, в) $\mathrm{tg}51^\circ - 1 > 0$.

14. Дали е точно дека:

а) $\mathrm{ctg}28^\circ > 1$, б) $\mathrm{ctg}54^\circ < 1$, в) $\mathrm{ctg}83^\circ < 1$, г) $\mathrm{ctg}7^\circ < 1$.

15. Подреди ги да опаѓаат вредностите на а) синусот, б) косинусот, в) тангенсот, г) котангенсот од аглите 10°, 20°, 30°, 40°, 50°.

ОД ИСТОРИЈАТА НА МАТЕМАТИКАТА

Како што веќе нагласивме, зборот „тригонометрија" (од грчките зборови „тригонон" – триаголник и „метро" – измерувам) означува мерење триаголници. Тригонометријата била одделена од астрономијата и третирана како самостоен дел од математиката со појавата на трудот „Пет книги за триаголниците од секаков вид" напишана во 1461 година од германскиот математичар Јохан Милер (1436–1476), познат под името Региомонтан.

Раѓањето на тригонометриските функции е сврзано со развитокот на астрономијата – науката за движењето на небесните тела, строежот и развитокот на Вселената – и со географијата.

Елементи на тригонометриски функции се откриени во сочувани документи на стариот Вавилон, каде што астрономијата достигнала значителен развиток.

Старогрчките научници први си ја поставиле задачата да го решат правоаголниот триаголник. За таа цел Хипарх од Никеја во II век п.н.е. ги изработил и првите тригонометриски таблици.

Тригонометриските функции не се појавиле наеднаш. Синусот и косинусот се среќаваат за првпат во индиски трудови за астрономијата од IV до V век, а тангенсот и котангенсот се воведени од IX до X век од страна на научници од исламските земји (ал-Хабиш, ал Батани Абу-л-Вафа и др.), а името тангенс е воведено во 1583 година од германскиот математичар Т. Финк.

Сознанијата за тригонометриските функции биле развивани низ вековите од видни математичари меѓу кои Коперник, Виет, Кеплер и други. Современиот вид на тригонометриските функции се среќаваат првпат во трудовите на големиот математичар **Леонард Ојлер,** кој ги вовел и ознаките што ги користиме и ние.

Л. Ојлер (1707–1783)

VIII. 8. РАБОТА СО ТАБЛИЦА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ

Повеќе пати досега одредувавме вредности на тригонометриските функции; некои од нив беа сосема точни, како на пример, $\sin 30^\circ = 0{,}5$, $\mathrm{tg}\,45^\circ = 1$, итн., а некои беа приближно пресметани, при што го користевме графичкиот метод.

Исто така видовме со неколку примери како се користат тригонометриските функции при решавање на практични задачи. Тие наоѓаат голема примена и во теориските иследувања и во конкретните проблеми, како во математиката, така и во многу други науки (физика, геодезија, астрономија, техника итн.).

Но, за да може тие да се користат при пресметувањата, потребно е да се познати нивните вредности за секој агол. Во математиката постојат методи со кои може да се одредат приближни вредности на овие функции со голема точност. Современите електронски сметачи (компјутерите) овозможуваат пресметување на тие вредности со голем број точни децимали.

Ние ќе користиме таблица за вредностите на тригонометриските функции со пет децимали. Тоа е таблицата II од „Логаритамски таблици" според О. Шлемилх и Ј. Мајцен во издание на „Просветно дело" – Скопје. Таа носи наслов: Природни вредности на тригонометриските функции за аглите од 0° до 90° во интервали по десет минути.

Со помош на оваа таблица во оваа лекција ќе наоѓаме вредности на тригонометриските функции за даден остар агол, а во наредната лекција и ќе го одредуваме аголот што одговара за дадена вредност на тригонометриската функција.

Прво да се запознаеме со устројството на таблицата.

Ако ја разгледаш добро таблицата, сигурно ќе уочиш дека:

1°. Во првата и втората колона (одлево) и во последната и претпоследната колона (оддесно) се дадени степените и минутите, заокружени на цели десетки. Притоа одлево се аглите од 0° до 45°, а оддесно од 45° до 90°.

2°. Во првиот и во последниот ред се ознаките за тригонометриските функции; на пример, на синус (sin) горе, во третата колона, му одговара долу неговата кофункција косинус (cos).

3°. Од таблицата може директно да се одреди вредноста на тригонометриската функција за кој било агол што е даден во степени и минути во цели десетки.

Пример 1. а) $\sin 35^\circ 20' = 0{,}57833$ (стр. 65), но и $\cos 54^\circ 40' = 0{,}57833$

(Бидејќи $35^\circ 20' + 54^\circ 40' = 90^\circ$, $\sin 35^\circ 20' = \cos 54^\circ 40'$).

б) $\mathrm{tg}\, 51^\circ 20' = 1{,}2497$, но и $\mathrm{ctg}\, 38^\circ 40' = 1{,}2497$.

в) $\cos 60^\circ = 0{,}50000 = 0{,}5$ (што ти е веќе познато), но и $\sin 30^\circ = 0{,}5$.

1. Одреди ја вредноста на тригонометриските функции за аголот $\alpha = 28^\circ 20'$ со помош на таблицата.

2. Одреди ја вредноста на тригонометриските функции за аголот $\beta = 76^\circ 10'$ со помош на таблицата.

Со неколку примери ќе покажеме како се одредува вредноста на тригонометриските функции за агли со минути што не се цели десетки.

Пример 2. *Да одредиме на што е еднакво* а) $\sin 31^\circ 24'$ *и* б) $\cos 31^\circ 24'$.

Решение. а) Вредноста на $\sin 31^\circ 24'$ се наоѓа меѓу вредностите на $\sin 31^\circ 20'$ и $\sin 31^\circ 30'$, т.е. $\sin 31^\circ 20' < \sin 31^\circ 24' < \sin 31^\circ 30'$, $\sin 31^\circ 20' = 0{,}52002$, а $\sin 31^\circ 30' = 0{,}52250$.

Разликата $0{,}52250 - 0{,}52002 = 0{,}00248$, или само 248 (имајќи предвид дека пред тој број има 0,00) одговара на 10'. За 1' се зема да одговара $248 : 10 = 24{,}8$. Тоа е дадено во четвртата колона под $D.1'$.

Значи, на 1' одговара поправка 24,8, а на 4' ќе одговара поправка $4 \cdot 24{,}8 = 99{,}2$ или ≈ 99.

Според тоа:

$$\begin{array}{l} \sin 31^\circ 20' = 0{,}52002 \\ \underline{+ \quad 4' \to \quad + \quad 99} \\ \sin 31^\circ 24' = 0{,}52101 \end{array}$$

б) Вредноста на cos31°24' се наоѓа меѓу вредностите на cos31°30' и cos31°20', т.е.

$$\cos 31^\circ 30' < \cos 31^\circ 24' < \cos 31^\circ 20',$$

бидејќи со растењето на аголот α од 0° до 90° $\cos\alpha$ опаѓа од 1 до 0.

D.1'=15,2 (во десеттата колона), што значи на 1' одговара поправка 15,2 а за 4' ќе одговара поправка $4 \cdot 15{,}2 = 60{,}8$ или ≈ 61.

Според тоа:

$$\begin{array}{l} \cos 31^\circ 20' = 0{,}85416 \\ \underline{+ \quad 4' \to \quad - \quad 61} \\ \cos 31^\circ 24' = 0{,}85355 \end{array}$$

Забелешка. Добиената разлика за минутите ќе се додава кај синус и тангенс, а ќе се одзема кај косинус и котангенс.

Пример 3. *Да ја одредиме вредноста на* ctg74°27'.

Решение.

$$\begin{array}{ll} \text{ctg}\,74^\circ 20' = 0{,}28046 & D.1' = 31{,}4 \\ \underline{+ \quad 7' \to \quad - \quad 220} & D.7' = 31{,}4 \cdot 7 = 219{,}8 \\ \text{ctg}\,74^\circ 27' = 0{,}27826 & D.7' \approx 220 \end{array}$$

Значи, ctg74°20' = 0,27826.

3. Одреди ја вредноста на тригонометриските функции:

а) за $\alpha = 28^\circ 35'$ и б) $\beta = 83^\circ 42'$.

б Се запознавме како се наоѓа вредноста на тригонометриска функција од таблица кога е зададен аголот. Преку неколку примери ќе се запознаеме како од таблца ќе го наоѓаме аголот според дадена вредност на тригонометриска фукција.

Пример 4. Да го одредиме аголот α ако е $\sin\alpha = 0{,}55436$.

Решение. Во колоната за синус ја бараме вредноста 0,55436. Бројот се наоѓа во таблицата на страницата 64. На неа одговара аголот 33°40'. т.е. $\alpha = 33^\circ 40'$.

4. Одреди го аголот α ако е: а) $\sin\alpha = 0{,}61795$,

б) $\cos\alpha = 0{,}63383$, в) $\text{tg}\,\alpha = 0{,}70455$, г) $\text{ctg}\,\alpha = 0{,}73333$.

Пример 5. Да го одредиме аголот α ако $tg\alpha = 0,39223$.

Решение. Во колоната за тангенс ја бараме вредноста 0,39223. Таа вредност ја нема таму и затоа се задржуваме на најблиската до неа вредност што е помала од неа, а тоа е 0,39055. Разликата од дадената и најдената вредност е $0,39223 - 0,39055 = 0,00168$ или само 168, имајќи предвид дека пред него е 0,00.

$$\begin{array}{rcl} 0,39055 & = & tg21°20' \\ + \quad 168 & \to & + \quad 5' \\ \hline 0,39223 & = & tg21°25' \\ \alpha & = & 21°25' \end{array} \qquad \begin{array}{l} D.1' = 33,6 \\ 168 : 33,6 = 5 \end{array}$$

5. Одреди го аголот α ако е $\sin\alpha = 0,35155$.

Пример 6. Да го одредиме аголот α ако е $\cos\alpha = 0,88220$.

Решение. Најблиска до оваа вредност што е помала од неа е 0,88155 што одговара на $\cos28°10'$. Разликата меѓу дадената вредност и вредноста во таблицата е 62.

$$\begin{array}{rcl} 0,88158 & = & \cos28°10' \\ + \quad 62 & \to & - \quad 5' \\ \hline 0,88220 & = & \cos28°5' \\ \alpha & = & 28°5' \end{array} \qquad \begin{array}{l} D.1' = 13,7 \\ 62 : 13,7 \approx 5 \end{array}$$

Од овие два примера може да се согледа дека наоѓањето на агол од дадена вредност на тригонометриска функција се спроведува според постапка што е обратна од таа со која се наоѓа вредност на тригонометриска функција за даден агол.

6. Одреди го аголот α ако е а) $\sin\alpha = 0,39405$;
б) $tg\alpha = 0,51408$; в) $\cos\alpha = 0,87500$ и $ctg\alpha = 1,8102$.

(Во поново време, се поголема е употребата на џебни сметачи; со нив многу лесно се одредуваат вредностите на тригонометриските функции за даден агол, како и обратната задача.)

Вежби

5. Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од аглите:
а) $\alpha = 27°40'$; б) $\beta = 35°28'$ и в) $\gamma = 78°44'$.

6. Пресметај ја вредноста на изразот:
а) $12,4\cos36°20'$; б) $13\sin16°10' \cdot \cos16°10'$; в) $\dfrac{13,8tg24°13'}{\cos16°10'}$

7. Прво упрости го изразот, а потоа пресметај ја неговата вредност
а) $\sin36°20' + 5\cos53°40'$; б) $\dfrac{\sin45°20'}{\cos45°20'} + tg16°18' \cdot ctg16°18'$.

8. Одреди го аголот α ако е: а) $tg\alpha = 0,37720$;

б) $\cos\alpha = 0,48242$; в) $\sin\alpha = 0,87321$ и г) $ctg\alpha = 2,0965$.

9. Одреди го аголот α ако е: а) $ctg\alpha = 2,0405$; б) $\sin\alpha = 0,47560$;

в) $tg\alpha = 1,9805$ и г) $\cos\alpha = 0,90102$.

10. Одреди го аголот α во правоаголниот $\triangle ABC$ со катети $a = 7$ и $b = 8$.

11. Одреди го аголот при основата на рамностран триаголник со основа 16 и крак 10.

12. Одреди ги аглите на рамнокракиот трапез со основи 16 и 10 и крак 4.

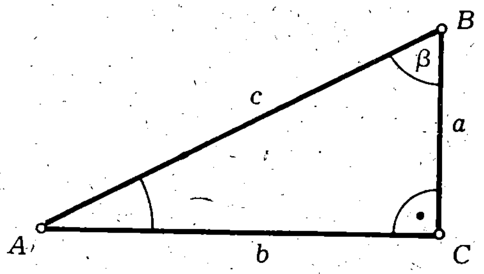
VIII.9. ЗАДАЧИ ЗА РЕШАВАЊЕ НА ПРАВОАГОЛНИОТ ТРИАГОЛНИК

Во првата лекција си поставивме задача да најдеме определени врски меѓу аглите и страните на правоаголниот триаголник за да можеме со нивна помош целосно да го решаваме тој триаголник. Да се потсетиме: да се реши правоаголен триаголник, значи да се одредат с и т е негови основни елементи.

Откако научи како се одредуваат вредностите на тригонометриските функции од таблицата и како се наоѓаат соодветните агли ако се познати тие вредности - можеме да речеме: сега знаеме како се решава правоаголен триаголник!

Со три конкретни задачи ќе го покажеме тоа.

Задача 1. *Да се реши правоаголниот триаголник со зададена хипотенуза $c=25$ и острииот агол $\beta=32°40'$.*



Црт. 1

Зададено: $c=25$, $\beta=32°40'$.

Се бара: a, b и α.

Решение. Погледај го црт. 1.

1. $\alpha = 90°-\beta = 90°-32°40' = 57°20'$.

2. Од $a = c\cdot\cos\beta$ или $a = c\cdot\sin\alpha$ добиваме

$$a = 25\cdot\cos 32°40' = 25\cdot 0,84182 = 21,0455 \approx 21.$$

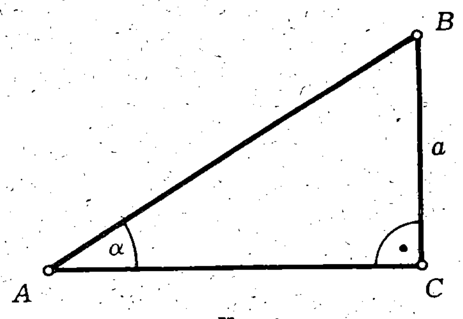
3. Од $b = c\cdot\sin\beta$ или $b = c\cdot\cos\alpha$ добиваме

$$b = 25\cdot\sin 32°40' = 25\cdot 0,53975 = 13,4937 \approx 13,5.$$

Забелешка. Катетата b може да се одреди и од $b^2 = c^2 - a^2$ или $b = a\cdot tg\beta$, но, притоа се користи пресметан елемент којшто е добиен со приближна вредност. Затоа се препорачува, во тој случај, бараните елементи да се одредуваат директно од зададените.

1. Реши го правоаголниот триаголник ако се зададени $c=70$, $\alpha=58°30'$.

Задача 2. *Да се реши правоаголен триаголник со зададени: катета* $a=40$ *и остриот агол* $\alpha=40°$.



Црт. 2

Решение. *Зададено:* $a=40$, $\alpha=40°$.

Се бара: b, c и β.

1. $\beta = 90°-\alpha = 90°-40° = 50°$;

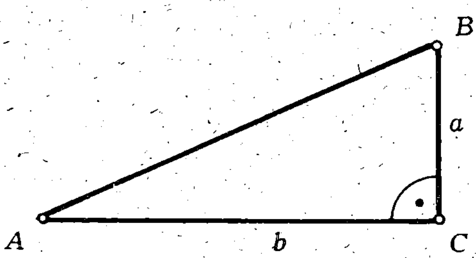
2. $b = a \cdot \operatorname{tg}\beta = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 40 \cdot \operatorname{tg}50° =$
$= 40 \cdot 1{,}1918 = 47{,}7$;

3. $c = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{40}{0{,}64279} = 62{,}2.$

2. Реши го правоаголниот триаголник ако се зададени $b=215$ cm, $\alpha=38°15'$.

Задача 3. *Да се реши правоаголен триаголник со зададени: катетите* $a=40$, $b=42$.

Решение. *Зададено:* $a=40$, $b=42$.



Црт.3

Се бара: c, α и β.

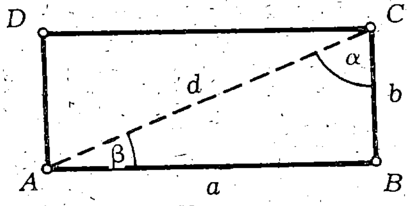
1. $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{40^2+42^2} =$
$= \sqrt{1600+1764} = 58$;

2. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b} = \dfrac{40}{42} = 0{,}95238$;
значи, $\alpha=43°36'$.

3. $\beta = 90°-43°36' = 46°24'$.

3. Реши го правоаголниот триаголник ако се зададени:
а) $=6$, $b=8$; б) $c=17$, $b=8$.

Задача 4. *Да се најдат страните на правоаголникот ако се знае дека неговата дијагонала е долга 25 cm и со страната зафаќа агол од* $36°20'$.



Црт. 4

Решение. Од црт. 4 гледаме дека во правоаголникот $ABCD$ може да се најде правоаголен триаголник ABC како негов составен дел.

Од ΔABC имаме дека

$b = d\sin\beta$, $a = d\cos\beta$

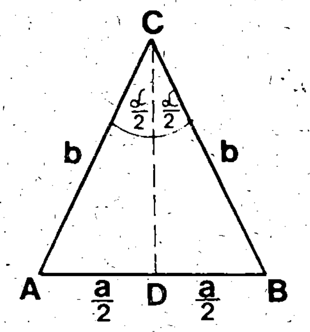
па $b = 25 \cdot \sin 36°20' = 2 \cdot 0{,}59248 = 14{,}8$,

$a = 25 \cdot \cos 36°20' = 25 \cdot 0{,}80558 = 20{,}1$,

т.е. $a=20{,}1$ cm, $b=14{,}8$ cm.

4. Најди го периметарот на правоаголникот $ABCD$ зададен со $d=84$, $\beta=73°$.

Задача 5. *Да се одреди периметарот на рамнокрак триаголник со агол при врвот* $\alpha=44°$ и крак 40 cm.



Црт. 5

Решение. Од правоаголниот триаголник ADC (црт. 5) можеме да најдеме дека

$$\frac{a}{2} = b \cdot \sin\frac{\alpha}{2},$$

т.е. $a = 2 \cdot 40 \cdot \sin 22°$, од каде што

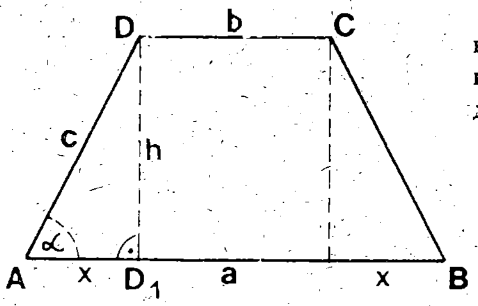
$a = 80 \cdot 0{,}37461 = 30$, $a = 30$ cm.

Значи, периметарот

$L = a+2b = 30+2\cdot 40 = 110$; $L=110$ cm.

5. Најди го периметарот на рамнокракиот триаголник зададен со кракот 15,5 cm и аголот при основата 33°.

Задача 6. *Рамнокракиот трапез е зададен со поголемата основа $a=42$ cm, кракот $c=25$ cm и аголот при дадената основа $47°20'$. Да се најде другата основа и висината.*



Црт. 6

Решение. Од црт. 6 се гледа дека $2x=a-b$, т.е. $b=a-2x$. Значи, од правоаголниот триаголник ADD_1 треба да ги одредиме x и h, односно:

$h = c \cdot \sin\alpha = 25 \cdot \sin 47°20' =$
$= 25 \cdot 0{,}73531 = 18{,}4$;

$x = c \cdot \cos\alpha = 25 \cdot \cos 47°20' =$
$= 25 \cdot 0{,}67773 = 17.$

Бараните елементи на трапезот се:

$h = 18{,}4$ cm и $b = 42 - 2 \cdot 17 = 8$, $b = 8$ cm.

6. Најди ги помалата основа и висината на рамнокрак трапез, ако се зададени: поголемата основа 86, аголот при таа основа 54° и кракот 70.

Вежби

7. Реши го правоаголниот триаголник зададен со:
   а) $c = 84$, $\alpha = 54°20'$; б) $c = 112$ cm, $\alpha = 48°30'$.
8. Реши го правоаголниот триаголник зададен со:
   а) $b = 12$, $\alpha = 73°25'$; б) $a = 215$ cm, $\alpha = 18°30'$.
9. Реши го правоаголниот триаголник зададен со:
   а) $a = 24$, $b = 10$; б) $a = 2$ m, $b = 1{,}5$ m.

10. Реши го правоаголниот триаголник зададен со:

а) $a = 24, c = 30$; б) $b = 7{,}25, c = 12{,}5$.

11. Пресметај го периметарот на правоаголникот со страна $a = 16$ и аголот меѓу таа страна и дијагоналата $\alpha = 36^{\circ}20'$.

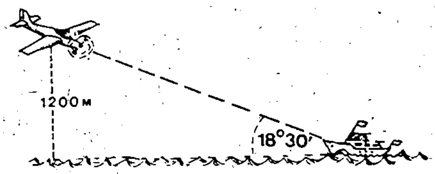
12. Пресметај го периметарот на правоаголникот на кој аголот меѓу дијагоналите му е $64^{\circ}40'$ и дијагоналата $d = 10$.

13. Пресметај го периметарот на рамнокракиот триаголник со основа 16 cm и агол при основата $\alpha = 38^{\circ}10'$.

14. Пресметај ги аглите на рамнокракиот трапез со основи 18 и 10 и крак 6.

VIII.10. ЗАДАЧИ ОД ПРИМЕНА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИТЕ ФУНКЦИИ ВО ПРАКТИЧНИ МЕРЕЊА

Задача 1. Пилотот на авионот (црт. 1) му јавува на капетанот на рибарскиот брод дека под себе забележал големо јато риби и дека се наоѓа на висина од 1 200 m. Од бродот го мерат аголот спрема морето под кој го гледаат авионот и наоѓаат дека изнесува 18°30'. Колку е далеку бродот од јатото риби?



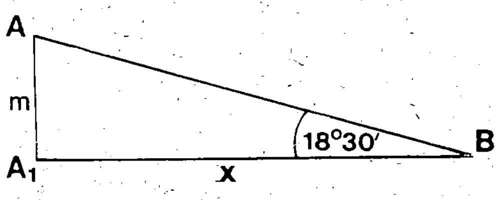
Црт. 1

Решение. Ситуацијата во задачата може да се прикаже со правоаголниот триаголник на црт. 2, каде што бараното растојание е означено со x; од цртежот се гледа дека

$$\mathrm{ctg}\, 18^{\circ}30' = \frac{x}{1200},$$

т.е. $x = 1\,200 \cdot \mathrm{ctg}\, 18^{\circ}30' =$
$= 1\,200 \cdot 2{,}9887 = 3\,586{,}4.$

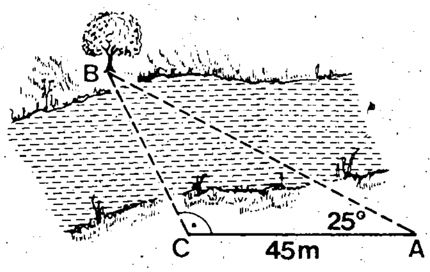
Значи, бродот е оддалечен од јатото риби 3586,4 m.



Црт. 2

1. Пресметај ја таа далечина ако авионот е на висина од 500 m. (Аголот останува ист).

Задача 2. *Со цел да се одреди ширината на реката (црт. 3) измерени се: растојанието $\overline{AC} = 45$ m и аголот $\beta = 25^{\circ}$. Да се најде ширината на реката.*



Црт. 3

Решение. Од цртежот се гледа дека:

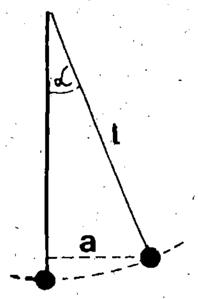
$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}},$$ од каде што

$$\overline{BC} = \overline{AC} \cdot \mathrm{tg}\beta = 45 \cdot \mathrm{tg}25^{\circ} = 45 \cdot 0{,}46631 = 20{,}98,$$

т.е. бараната ширина е ≈ 21 m.

2. Одреди ја ширината на таа река, ако $\overline{AC} = 100$ m, $\beta=20°$.

Задача 3. *На конец закрепен со еден крај и долг* $l=1{,}2$ m *обесена е тешка топка (нишало). За колкав агол* α *е отклонето нишалото од рамнотежната положба ако е направен отклон(амплитуда)* $a=17$ cm (црт. 4).



Црт. 4

Решение. Од црт. 4 се гледа дека $\sin\alpha = \frac{a}{l}$, па формулата со која се пресметува амплитудата гласи

$$a = l \cdot \sin\alpha$$

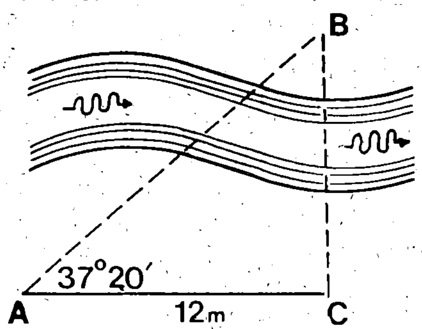
Во нашата задача: $l = 1{,}2$ m $= 120$ cm и $a=17$ cm, па

$$\sin\alpha \doteq \frac{17}{120} = 0{,}14166,$$

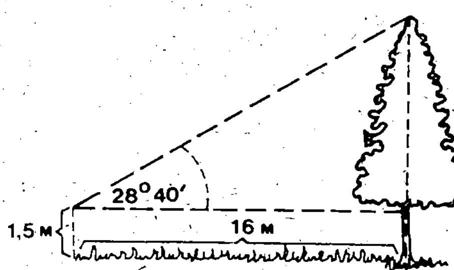
од каде што $\alpha \approx 8°9'$.

3. Најди го аголот на отклонувањето на нишалото со должина 0,85 m, кога амплитудата изнесувала $a = 13$ cm.

Задача 4. Да го одредиме растојанието $\overline{BC}$ на црт. 1 според дадените елементи.



Црт. 1



Црт. 2

Решение. $\text{tg}\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

$$\overline{BC} = \overline{AC}\text{tg}\alpha,\ \overline{BC} = 12\text{tg}37°12' = 12 \cdot 1{,}3111 \approx 15{,}73;\quad \overline{BC} \approx 15{,}73 \text{ m}.$$

4. Одреди ја висината на дрвото на црт. 2 според дадените елементи

В е ж б и

5. Пресметај ја висината на фабричкиот оџак ако од точка M, што е на растојание 76 m од неговото подножје, оџакот се гледа под агол (спрема земјата) од 28°.

6. До која висина допираат пожарникарските скали долги 25 m кога ќе се наведнат спрема земјата под агол 58°.

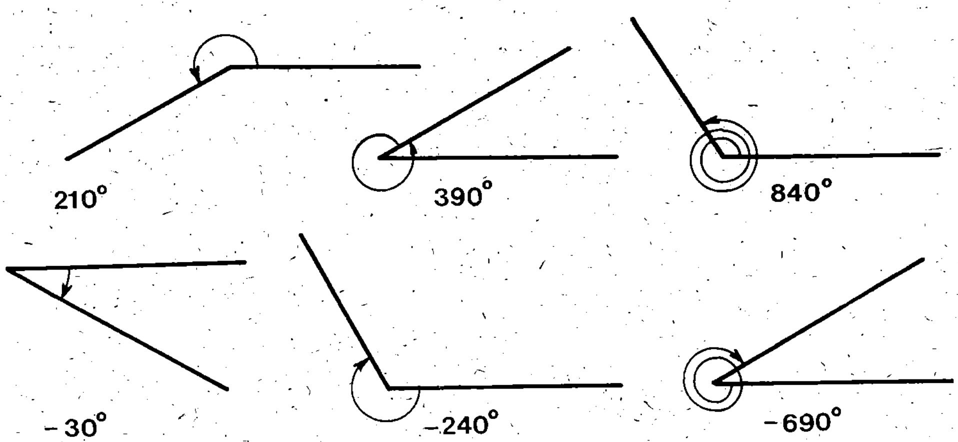
7. Колкава амплитуда (отклон) прави нишалото долго 63 cm (l = 63 cm), ако аголот на отклонувањето од рамнотежната положба е 5°50'.

$\boxed{8.}$ Нацртај правоаголен триаголник ABC со хипотенуза $\overline{AB} = 1$ (на пример $\overline{AB} = 1$ dm) и агли $\sphericalangle A = 30°$ и $\sphericalangle B = 60°$. Измери ги неговите катети и установи дека $\overline{BC}$ = син30° ≈ 0,5 и $\overline{AC}$ = cos30° ≈ 0,87.

VIII.11. СИНУС И КОСИНУС НА АГЛИ ПОГОЛЕМИ ОД 90°

а. Во разни процеси во техниката или при некои настани во природата, често пати се налага, да се воведат и агли што „имаат поveќе од 90°" или да се мерат во „негативна насока". На пример, поголемата сказалка на часовникот за 10 минути „опишува" агол од −60°, за еден час − агол од −360°, а за едно деноноќие − агол од 24 (−360°) = = − 8 640°; такви агли се сретнуваат во физиката при кружни движења, при изучувањето на нишалото и сл.

На црт. 1 се претставени (геометриски) неколку такви агли.



Црт. 1

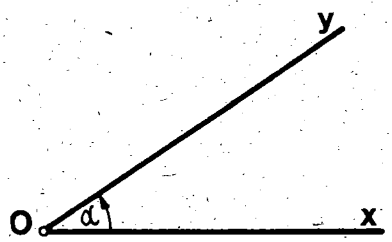
1. Нацртај ги аглите од 120°, −120°, 540°, −540°, 770°.

При разгледување на такви проблеми, исто така, се налага да се користат и тригонометриските функции од такви агли. Но, како да се „определуваат" нивните вредности, како „да се излезе" од правоаголниот триаголник?

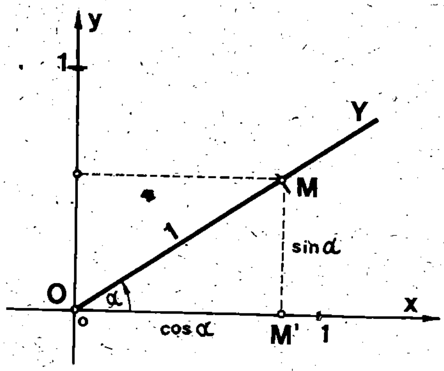
Во задачата 8 од претходната лекција може да се согледа дека во случајот кога хипотенузата на еден правоаголен триаголник се земе како единична мерка за должина, тогаш должините на неговите катети бројно се еднакви со вредностите на синусот и косинусот на еден од неговите остри агли.

Тоа својство може да се искористи за одредување вредности на синусот и косинусот од зададен агол (и кога тој „не е во правоаголен триаголник") со помош на следнава конструкција.

Зададениот агол $\sphericalangle XOY = \alpha$ (црт. 2) ќе го „сместиме" во координатен систем така што: неговото теме да биде во координатниот почеток, неговиот „прв" крак да се совпадне со позитивниот дел на x–оската, а на „вториот" крак да се пренесе (од темето) отсечка OM со единична должина, т.е. $\overline{OM} = 1$, како на црт. 3.

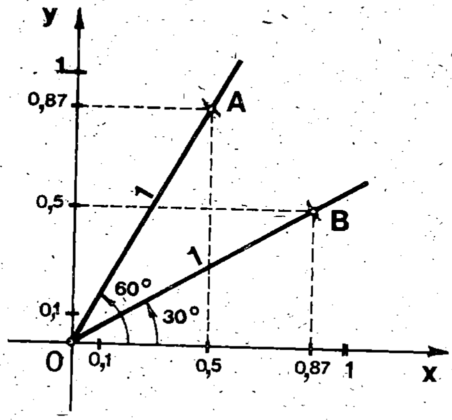


Црт. 2



Црт. 3

Сега, лесно може да се прочитаат вредностите на $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$: на x–оската – $\cos\alpha$, а на y–оската – $\sin\alpha$ (црт. 3).



Црт. 4

Така, на црт. 4 се назначени

$\cos 60° = 0{,}5$; $\cos 30° \approx 0{,}87$,

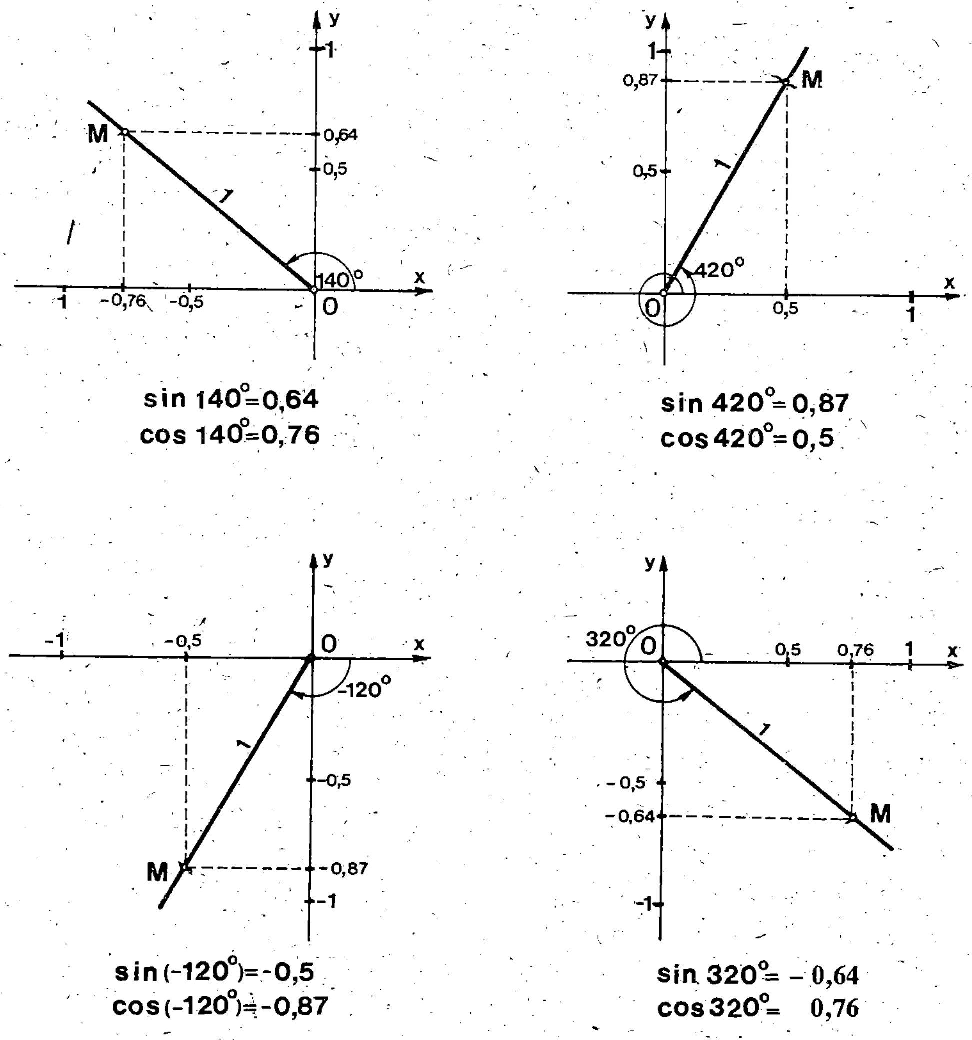
односно

$\sin 30° = 0{,}5$; $\sin 60° \approx 0{,}87$.

2. Одреди ги приближно $\cos 45°$ и $\sin 45°$.

б. Оваа постапка за одредување вредности на синусот и косинусот со помош на координатен систем, ни овозможува да воведеме **синус и косинус и на агли поголеми од 90° и на „негативни" агли**, а и како да ги одредуваме нивните вредности.

На пример, на црт. 5 се гледа како можат да се најдат вредностите на синусот и косинусот од аглите 140°, 320°, –120°, 420°.



Црт. 5

3. Нацртај координатен систем и на него означи го cos225°, sin405°, cos(–45°), sin(–405°).

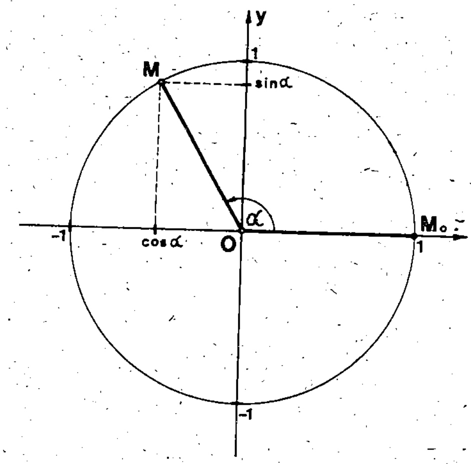
Сигурно забележуваш дека бројните вредности на косинусот и синусот се одредуваат на ист начин како што се одредуваат координатите на точки во однос на еден декартов правоаголен координатен систем; точките со чии координати се наоѓаат тие бројни вредности **секогаш се на растојание 1 од координатниот почеток**, т.е. лежат на една кружница со радиус 1 и центар во координатниот почеток.

Таа кружница се вика **тригонометриска кружница**.

На црт. 5 е нацртана тригонометриска кружница и на неа е означена точката M што соодветствува на аголот α, каде што $\alpha = \sphericalangle M_0OM$. Таа точка има координати: $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, т.е.

$$M(\cos\alpha, \sin\alpha).$$

И натаму, секогаш ќе сметаме дека „првиот" крак OM_0 на аголот $\alpha = \sphericalangle M_0OM$ се совпаѓа со позитивниот дел на x-оската.



Црт. 6

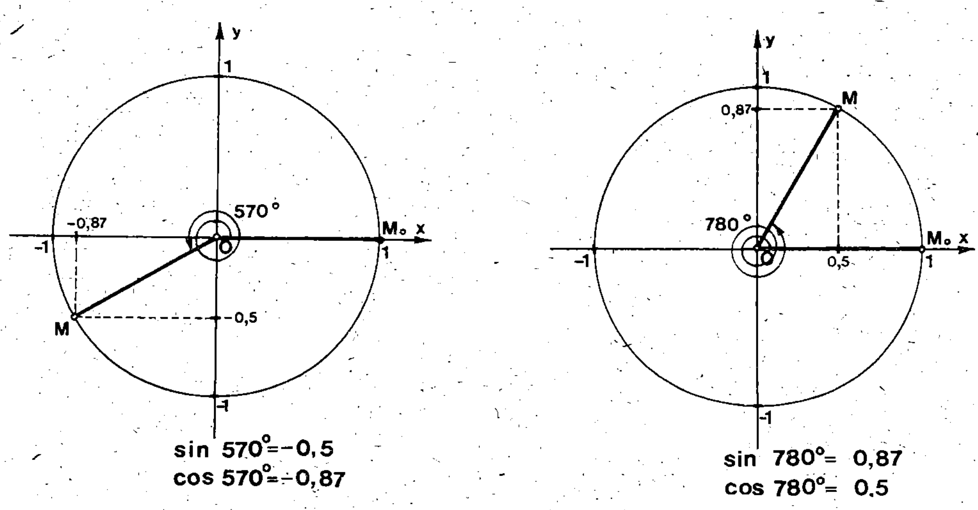
4. Нацртај тригонометриска кружница и означи ги на неа точките M_1, M_2, M_3 и M_4, што соодветствуваат (со ред) на аглите 135°, 315°, –45°, –135°.

5. Со помош на тригонометриска кружница, одреди ги вредностите на:

а) sin90°, cos90°; б) sin180°, cos180°;
в) sin270°, cos270°; г) sin360°, cos360°.

Колку е: sin0°, cos0°?

6. На црт. 7, со помош на тригонометриска кружница, се одредени вредностите на синусот и косинусот на аглите 570° и 780°.



Црт. 7

6. Со помош на тригонометриска кружница, утврди кои од следниве равенства се точни:

а) $\sin 450° = \sin 90°$; б) $\cos 380° = \cos 20°$;
в) $\sin 500° = \sin 50°$.

Од овие примери може да се согледа едно мошне важно својство на функциите синус и косинус; имено,

$$\sin 570° = \sin(210° + 360°) = \sin 210°,$$
$$\sin 780° = \sin(60° + 2 \cdot 360°) = \sin 60°;$$

$$\cos 570° = \cos(210° + 360°) = \cos 210°,$$
$$\cos 780° = \cos(60° + 2 \cdot 360°) = \cos 60°.$$

Тоа важи и општо, т.е.

$$\sin(\alpha + к \cdot 360°) = \sin\alpha, \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha + к \cdot 360°) = \cos\alpha, \qquad (2)$$

каде што к е цел број, т.е. к = 0, ±1, ±2, . . . , а α е некој агол од 0° до 360°, т.е. $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$.

6. Одреди ги со цртеж вредностите:

а) $\sin 750°$; б) $\cos 1140°$.

$1140° = 3 \cdot 360° + 60°$.

Пример 1. Да го пресметаме изразот

$$A = \frac{\sin 45° + \sin 405° - \sin 765°}{\cos 45° - \cos 405° + \cos 765°}.$$

Решение. Бидејќи $405° = 360° + 45°$ и $765° = 2 \cdot 360° + 45°$, следува дека

$$A = \frac{\sin 45° + \sin(45° + 360°) - \sin(45° + 2 \cdot 360°)}{\cos 45° - \cos(45° + 360°) + \cos(45° + 2 \cdot 360°)},$$

$$A = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \operatorname{tg} 45° = 1.$$

Равенствата (1) и (2) укажуваат дека по секои 360°, **вредностите** на синусот и косинусот **се повторуваат.** Поради тоа се вели дека тригонометриските функции синус и косинус имаат својство на периодичност (или дека тие се периодични функции) со период Т од 360°, т.е. Т = 360°.

Вежби

7. Одреди ги приближно (со помош на тригонометриска кружница):
   а) $\sin 54°$; б) $\cos 162°$; в) $\sin(-37°)$; г) $\cos(-198°)$.

8. Да се пресмета изразот

   а) $\frac{1+\cos 400°}{1+\cos 40°}$; б) $\frac{1+\cos 1800°}{1-\sin 1800°}$; в) $\frac{\cos 360° + \cos 750° - \cos 1110°}{\sin 360° + \sin 750° - \sin 1110°}$.

9. Нацртај тригонометриска кружница и означи ги на неа точките што соодветствуваат (со ред) на аглите:

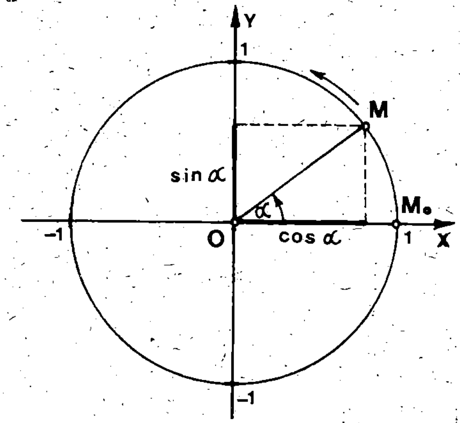
   а) 0°, 0°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°, 210°, 240°, 270°, 300°, 330°, 360°;
   б) –180°, –125°, –120°, –90°, –60°, –30°, 0°, 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°.

10. Одреди го а) $\sin\alpha$, б) $\cos\alpha$, ако

$$\alpha = 0°, 90°, 180°, 270°, 360°.$$

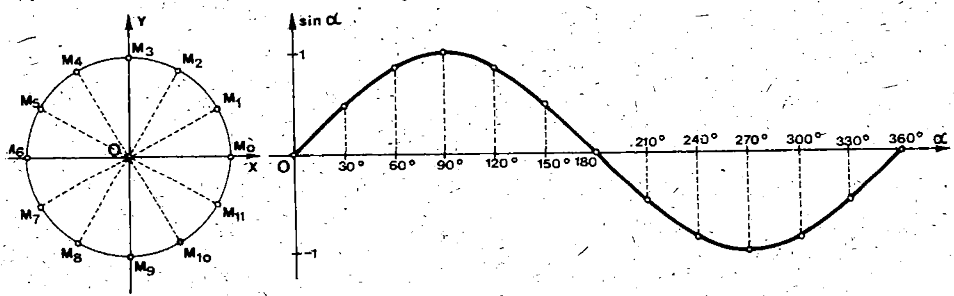
VIII.12. ГРАФИЦИ НА ФУНКЦИИТЕ СИНУС И КОСИНУС

а. Аголот α да го сместиме во тригонометриска кружница и, потоа, да си замислиме дека тој се менува непрекинато и расте од 0° до 360°, односно соодветната точка на аголот да направи едно обиколување на кружницата (црт. 1). Тогаш **менувањето** на $\sin\alpha$, односно $\cos\alpha$, т.е. промените на отсечките од y–оската, односно од x–оската со чии должини тие се изразуваат, може да се претставаат нагледно со една крива линија.



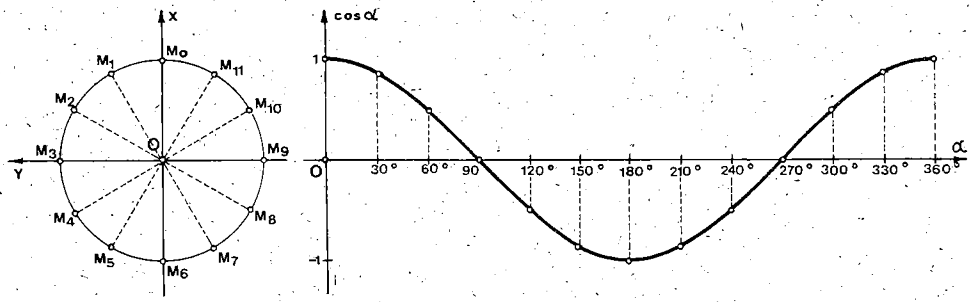
Црт. 1

Конструкцијата на таа крива (графикот на функцијата) може да се види на црт. 2, односно на црт. 3.



Црт. 2

Забелешка. На црт. 3 тригонометриската кружница е нацртана во координатен систем чијашто x–оска е во „вертикална”, а y–оска во „хоризонтална” положба. Тоа е направено само заради полесно пренесување на вредностите на $\cos\alpha$, т.е. за поздогодно цртање на соодветната крива.



Црт. 3

На графиците се забележуваат следните, таканаречени, **карактеристични точки** што се добиваат кога аргументот α има 0°, 90°, 180°, 270° или 360°; тоа се:

1° **нули на функцијата** (или пресеци на нејзиниот график со оските); се добиваат кај
– **синусот** за $\alpha = 0°$, $\alpha = 180°$, $\alpha = 270°$,
– **синусот** за $\alpha = 90°$, $\alpha = 270°$;

2° **максимум** на функцијата (max) се добива кај
– **синусот** за $\alpha = 90°$,
– **косинусот** за $\alpha = 0°$ и $\alpha = 360°$;
во тие точки функциите имаат **најголема вредност** 1;

3° **минимум** на функцијата (min) се добива кај
– **синусот** за $\alpha = 270°$,
– **косинусот** за $\alpha = 180°$;
во тие точки функциите имаат **најмала вредност –1.**

α	0°	90°	180°	270°	360°
sinα	нула 0	max 1	нула 0	min –1	нула 0
cosz	max 1	нула 0	min –1	нула 0	max 1

1. Нацртај го графикот на $\sin\alpha$ кога аголот α се менува од –180° до 180°, т.е. $-180° \leq \alpha \leq 180°$.

Постапи како што тоа е направено на црт. 2, при што на оската α ќе ги означиш аглите $-180°$, $-150°$, ..., $-30°$, $0°$, $30°$ ..., $150°$ $180°$.

Забелешка. Заради директно цртање на графикот на синусот и косинусот во координатен систем $0xy$, аргументот на функцијата, наместо со α, ќе го означуваме со x, а вредностите на самата функција со y, т.е. ќе пишуваме

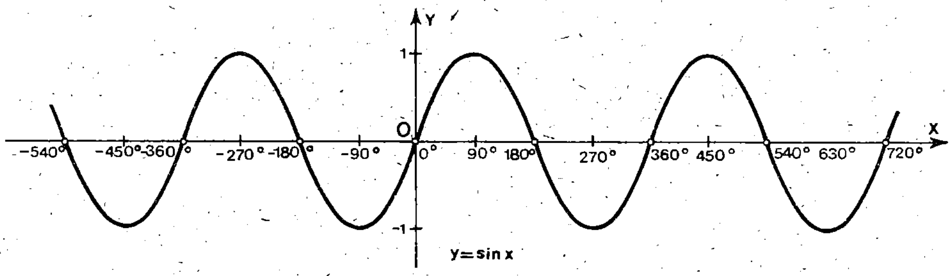
$$y = \sin x \text{ и } y = \cos x.$$

6. Својството на периодичност ни овозможува лесно да го нацртаме графикот на $\sin x$, односно на $\cos x$, и кога аголот x е негативен и кога тој е поголем од $360°$; имено, делот од графикот во секој од интервалите

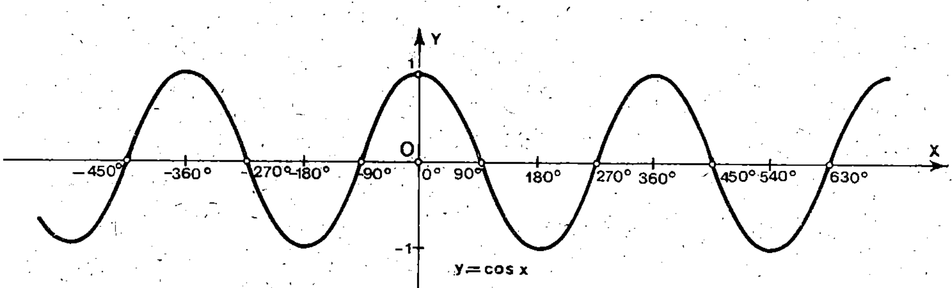
$$\ldots, [-720, -360°], [-360°, 0°], [360°, 720°], \ldots$$

ќе биде ист како оној (што го нацртавме) во „**првиот интервал**” од $0°$ до $360°$.

На црт. 4 и црт. 5 се дадени „комплетните” графици на функциите $y=\sin x$, односно $y=\cos x$.



Црт. 4



Црт. 5

Лесно се забележува дека графиците на синусот и косинусот се претставени со **иста** крива; тие се разликуваат само по својата положба спрема координатниот систем. Секоја крива од таков облик се вика **синусоида**.

2. Ако графикот на а) $y=\sin x$, б) $y=\cos x$ го црташ во интервалот 1) [360°, 720°], 2) [–180°, 180°], тогаш за кои вредности на аргументот x се добиваат карактеристичните точки?

б При разгледувањето на функциите $y=\sin x$ и $y=\cos x$ секогаш сметавме дека аргументот x е агол изразен во степени; тоа го користевме при решавање на геометриските задачи во кои се јавува правоаголен триаголник. Но, во техниката, физиката и др. се сретнуваат проблеми при чие решавање се користат овие функции, а аргументот x може да биде: време, температура, растојание и сл.

Затоа е згодно аргументот x да се искажува преку (неименувани) реални броеви. За да може да го користиме сето што досега го знаеме за тригонометриските функции, доволно ќе биде да ви кажеме како се искажува со реален број агол што е зададен со степени. Тоа се постигнува ако за аголот се воведе, таканаречено, **радијанско мерење:**

За агол од 180° се вели дека има π радијани, т.е. просто, наместо $x = 180°$ се пишува $x = \pi$.

Така, за аглите што имаат 30°, 45°, 90°, 360°, 480°, . . . ќе сметаме дека се искажуваат со броевите: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, 2π, $\frac{8\pi}{3}$, . . . , соодветно; наместо $\alpha = 60°$, ќе запишеме $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

На пример, својството за периодичност на синусот ќе може да се запише на следниов начин:

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

односно дека периодот $T = 2\pi$.

3. Со кои броеви може да ги искажеш мерите на аглите од: –120°, 0°, 135°, 270°, 390°.

г Вежби

4. Нацртај го графикот на $y=\cos x$ во интервалот $[-\pi, \pi]$ па потоа нацртај го „комплетниот" график на таа функција.

5. Нацртај го графикот на функцијата
а) $y = 1 + \cos x$; б) $y = -\sin x$; в) $y = 2\sin x$.

а) „Секое y" од $y = \cos x$ зголеми го за 1;
б) „Секое y" од $y = \sin x$ земи го со спротивен знак;
в) „Секое y" од $y = \sin x$ зголеми го двапати.

6. Нацртај го графикот на функцијата
а) $y = 1 - \sin x$; б) $y = -\cos x$; в) $y = \frac{1}{2}\cos x$.

7. За кои вредности (во радијани) на аргументот x се добиваат карактеристичните точки (нула, max и min) на функцијата
а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$.

VIII.13. НЕКОИ ЗАДАЧИ ЗА ГРАФИЦИТЕ НА ФУНКЦИИТЕ СИНУС И КОСИНУС

Во формулата со која се задава една тригонометриска функција може да фигурираат разни параметри кои го „деформираат” обликот на синусоидата.

Така, на пример, ако

$$y = a\sin(bx+c), \qquad y = a\cos(bx+c),$$

тогаш

- бројот a ни покажува колку е најголемата (max) вредност на функцијата; тој број се вика **амплитуда**;
- бројот b влијае на периодот T на функцијата; имено, T се наоѓа од равенката
$$bT = 2\pi, \text{ т.е. } T = \frac{2\pi}{b};$$
- броевите b и c ја одредуваат „првата” карактеристична точка, од равенката
$$bx + c = 0,$$
т.е. таа точка се добива за $x = -\frac{c}{b}$;
- „првиот интервал” во кој обично ќе го цртаме едниот дел од графикот, започнува со првата карактеристична точка” има „должина” еднаква на периодот T; во овој случај тој интервал ќе биде
$$[-\frac{c}{b}, -\frac{c}{b} + T] = [-\frac{c}{b}, -\frac{c}{b} + \frac{2\pi}{b}];$$
- другите карактеристични точки треба внимателно да се одредуваат од соодветните равенки; и тие може да се променат зависно од броевите a, b и c.

Со следниве две задачи ќе покажеме како практично се црта графикот на една таква функција.

Задача 1. да се нацрта графикот на функцијата

$$y = \sin\frac{2x}{3}.$$

Решение. Да ги одредиме периодот и карактеристичните точки на функцијата:

– **период:** $\frac{2T}{3} = 2\pi$, т.е. $T = 3\pi$;

–**прва карактеристична точка:**

$$\frac{2x}{3} = 0, \text{ т.е. } x = 0,$$

– **прв интервал:**

$$[0, T] = [0, 3\pi];$$

значи, делот од графикот што ќе го цртаме ќе биде во овој интервал, а потоа ќе го „продолжиме" налево и надесно;

– **нули** (за функцијата синус): се оние вредности на x кои се решенија на равенките

$$\frac{2x}{3} = 0, \qquad \frac{2x}{3} = \pi, \qquad \frac{2x}{3} = 2\pi;$$

значи, нулите на функцијата се:

$$x = 0, \qquad x = \frac{3\pi}{2} \text{ и } x = 3\pi;$$

– **max и min** (за функцијата синус) се добиваат за оние вредности на x кои се решенија на равенките:

$$\frac{2x}{3} = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \frac{2x}{3} = \frac{3\pi}{2};$$

значи,

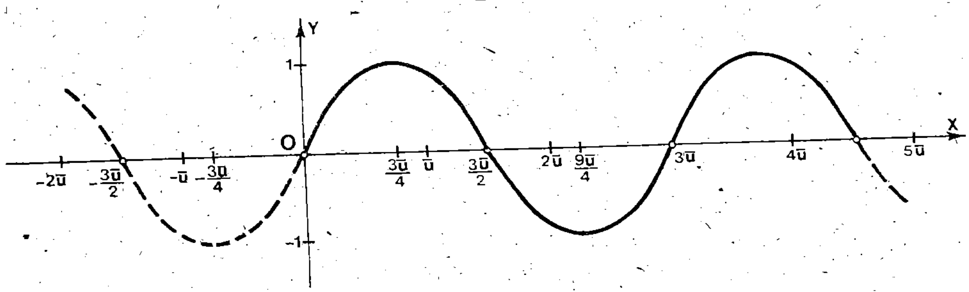
max е 1 за $x = \frac{3\pi}{4}$, т.е. во точката $M_1\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$,

min е –1 за $x = \frac{9\pi}{4}$, т.е. во точката $M_2\left(\frac{9\pi}{4}, -1\right)$.

Да ја формираме следнава таблица:

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	3π
y	0	1	0	–1	0
	нула	max	нула	min	нула

Графикот на $y = \sin\frac{3x}{2}$ е на црт. 1.



Црт. 1

Задача 2. Да се нацрта графикот на функцијата

$$y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Решение. Да ги одредиме амплитудата, периодот и карактеристичните точки на функцијата:

– **амплитуда:** $a = 3$; т.е. најголемата вредност на функцијата е 3, а најмалата е -3;

– **периодот:** $T = 2\pi$;

– **прва карактеристична точка:** таа точка ќе ја одредиме од равенката

$$x - \frac{\pi}{3} = 0, \text{ т.е. } x = \frac{\pi}{3};$$

– **прв интервал:**

$$\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + T\right] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + 2\pi\right] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right];$$

– **нули** (за функцијата косинус) се оние вредности на x кои се решенија на равенките

$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2};$$

значи, нулите на функцијата се:

$$x = \frac{5\pi}{6} \quad \text{и} \quad x = \frac{11\pi}{6};$$

– **max** и **min** (за функцијата косинус): бидејќи амплитудата е позитивна, т.е. $a > 0$, следува дека функцијата има **max** во точките чии x координати се решенија на равенките

$$x - \frac{\pi}{3} = 0 \quad \text{и} \quad x - \frac{\pi}{3} = 2\pi,$$

а **min** во точката чија x координата е решение на равенката

$$x - \frac{\pi}{3} = \pi;$$

значи,

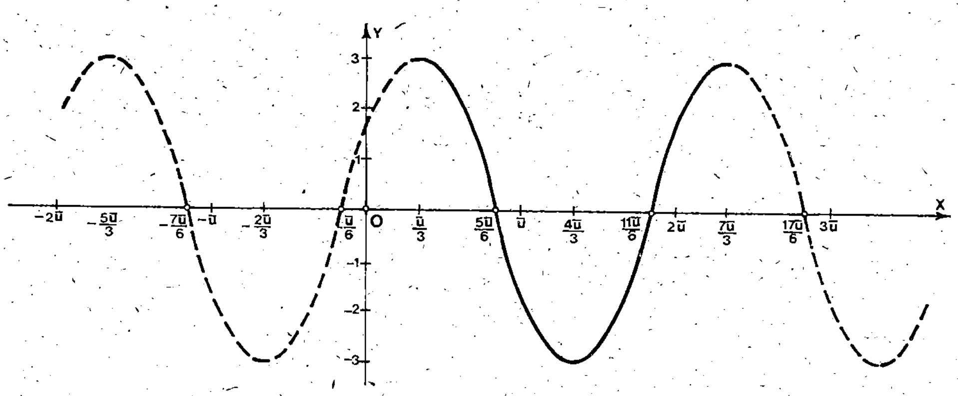
max е 3 за $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{7\pi}{3}$, т.е. во точките $M_1\left(\frac{\pi}{3}, 3\right)$, $M_2\left(\frac{7\pi}{3}, 3\right)$,

min е -3, т.е. во точката $M_3\left(\frac{4\pi}{3}, -3\right)$.

Да ја формираме следнава таблица

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$
y	3	0	-3	0	3
	max	нула	min	нула	max

Графикот на $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ е на црт. 2.



Црт. 2

1. Нацртај го графикот на функцијата

$$y = 3\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Вежби

2. Дадена е функцијата:

   1° $y = -5\sin(2x + \pi)$; 2° $y = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{2}\right)$.

   Да се одредат:

   а) амплитудата, б) периодот, в) првата карактеристична точка,

   г) првиот интервал, д) нулите и ѓ) max и min на функцијата.

3. Најди ги периодот и првиот интервал на функцијата:

   а) $y = \cos\left(2\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)\right)$ б) $y = \sin\frac{3x-4}{2}$

4. Нацртај ги графиците на функциите од задачите 2. и 3.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ - VIII

1. Зададени се правоаголните триаголници ABC со $a=5$, $c=13$ и $A_1B_1C_1$ со $b_1 = 24$ и $c_1 = 26$.

   а) Покажи дека тие триаголници се слични.

   б) Пресметај ги размерите меѓу спротивната и налегнатата катета на аголот α од ΔABC и аголот α_1 од $\Delta A_1B_1C_1$.

2. Пресметај го приближно на 4 децимали $\operatorname{tg}\alpha$ од ΔABC од претходната задача.

3. Одреди ја графички вредноста на а) $tg28^O$; б) $tg73^O$.

4. Нацртај правоаголен триаголник со агол 35^O и измери ги внимателно неговите катети; пресметај ги $tg35^O$ и $ctg35^O$.

5. Одреди ги графички $tg22^O$ и $ctg22^O$.

6. Во правоаголниот триаголник ABC со $a=10$ и $c=26$, најди го:

а) $tg\alpha$, $ctg\alpha$; б) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

7. Во ΔABC од претходната задача најди ги $\sin\beta$, $\cos\beta$, $tg\beta$ и $ctg\beta$.

8. Нацртај правоаголен триаголник со агол 58^O. Измери ги внимателно страните на тој триаголник и пресметај ги $\sin58^O$, $\cos58^O$, $tg58^O$ и $ctg58^O$.

9. Да се одреди вредноста на:

а) $10\sin30^O + 20\cos60^O$;

б) $(tg45^O+\sin30^O)^2+(tg45^O-\sin30^O)^2$;

в) $(1+\sin60^O)(1-\sin60^O)$.

10. Провери дали е точно равенството:

а) $2\cos60^O + 2\sin30^O = 2$;

б) $3tg30^O - 3ctg60^O = 0$;

в) $tg45^O + ctg45^O = 4\sin45^O\cdot\cos45^O$.

11. Да се најде аголот α ако се знае:

а) $\sin53^O24' = \sin\alpha$; б) $\cos34^O15' = \cos\alpha$;

в) $\sin\alpha = \cos54^O$; г) $\cos\alpha = \sin17^O35'$.

12. Да се најде аголот α ако се знае:

а) $tg\alpha = tg83^O15'$; б) $ctg\alpha = tg54^O15'$;

в) $ctg54^O54' = tg\alpha$

13. Да се упростат изразите:

а) $\dfrac{tg80^O}{ctg10^O}+\dfrac{ctg53^O}{tg37^O}$; б) $\dfrac{\sin15^O}{\cos75^O}-\dfrac{\cos40^O}{\sin50^O}$.

14. Одреди го $\cos\alpha$ ако:

а) $\sin\alpha = 0{,}6$; б) $\sin\alpha = 0{,}32$; в) $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$.

15. Одреди го $\sin\alpha$ ако:

а) $\cos\alpha = \dfrac{20}{29}$; б) $\cos\alpha = 0{,}8$; в) $\cos\alpha = \dfrac{2}{7}$.

16. Да се упростат изразите:

а) $\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+1}{\cos^2 + \sin^2\alpha}$; б) $\dfrac{1}{1-\cos\alpha}+\dfrac{1}{1+\cos\alpha}$.

17. Одреди ги другите тригонометриски функции ако:

а) $\sin\alpha = \dfrac{12}{37}$; б) $\cos\alpha = 0{,}25$; в) $tg\alpha = \dfrac{20}{21}$; г) $ctg\alpha = \dfrac{45}{53}$.

18. Да се упрости изразот:

а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+tg^2\alpha$; б) $(1+tg^2\alpha)\cos^2\alpha$.

19. Да се покаже дека е точно равенството:

а) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-tg^2\alpha=1$; б) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{tg^2\alpha}$.

20. Да се реши правоаголен триаголник зададен со:

а) $c = 29$, $\alpha = 46^{\circ}24'$; б) $a = 39$; $\beta = 64^{\circ}1'$;

в) $a = 48$, $b = 55$; г) $c = 23$, $a = 15{,}5$.

21. Зададени се основите 24 dm и 15 dm на еден рамнокрак трапез. Да се пресмета периметарот на трапезот и аголот на големата основа.

22. Да се најде периметарот на разностран триаголник ако се зададени: $h_c = 25$, $\alpha = 64°24'$ и $\beta = 45°18'$.

ГЛАВА IX

ПЛОШТИНА НА МНОГУАГОЛНИК И КРУГ

Секојдневниот живот често пати наметнува проблеми за определување плоштина на одредени објекти што имаат форма на многуаголник или круг. На некаков начин, секој од нас си создал претстава за поимот плоштина и за тоа дека таа се искажува со некој број.

Во математиката поимот плоштина е основен поим какви што се, на пример, поимите *точка, права, број, множество* и др. Таквиот поим, како што е познато, н е с е д е ф и н и р а, туку обично, се согледува и се осмислува преку некои негови својства што, просто, се наметнуваат.

За поимот **плоштина на многуаголник** се прифаќаат следниве основни својства што, сите заедно, се познати под името **аксиома за плоштина:**

1° Плоштината P на еден многуаголник е секогаш позитивен реален број, т.е. $P > 0$;

2° Плоштината на многуаголникот не зависи од неговата местоположба, т.е. складните многуаголници имаат еднакви плоштини;

3° Ако многуаголникот е составен од два или повеќе многуаголници што не се преклопуваат, тогаш неговата плоштина е збир од плоштините на тие делови;

4° За квадратот со страна a се зема дека има плоштина a^2.

Четвртото својство овозможува да се утврди таканаречената **мерна единица** за плоштина. И покрај тоа што за таква единица може да се земе кој било квадрат, со Светскиот систем мерки (SI) е прифатено таа да биде квадрат со страна 1 m што е наречен **квадратен метар** и се означува со 1 m^2.

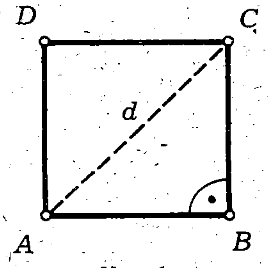
Поимот **плоштина на круг,** пак, се осмислува користејќи го поимот за плоштина на многуаголник.

IX.1. ПЛОШТИНА НА ПАРАЛЕЛОГРАМ

a. Плоштината P на к в а д р а т со страна a, според својството 4° од Аксиомата, се пресметува со формулата

$$P = a^2$$

Така, квадрат со страна $a = 25$ cm има плоштина $P = 625 \text{ cm}^2 = 6{,}25 \text{ dm}^2 = 0{,}0625 \text{ m}^2$



Црт. 1

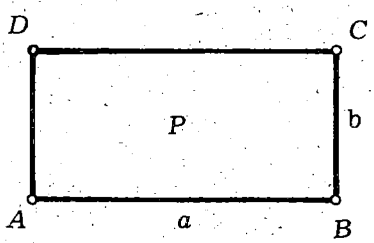
Дијагоналата d и страната a на квадратот (црт. 1) се поврзани со релацијата $d = a\sqrt{2}$ (зошто?), па, плоштината на тој квадрат може да се пресмета и со формулата

$$P = \frac{d^2}{2}.$$

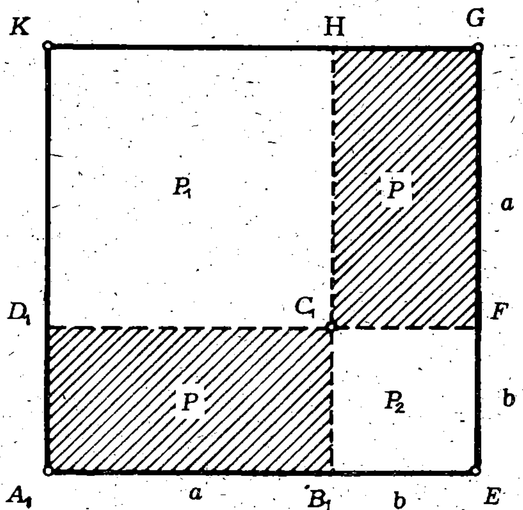
Плоштината, пак, на правоаголник може да се пресмета со формула што е искажана со следнава теорема:

T	Плоштината P на правоаголник со димензии a и b е бројот $a \cdot b$, т.е. $P = ab$.

Доказ: Нека е даден правоаголникот $ABCD$ со страни a и b, како на црт. 2, а неговата плоштина да ја означиме со P.



Црт. 2



Црт. 3

За да је докажеме теоремата, ќе нацртаме квадрат A_1EGK со страна $a + b$, како на црт. 3, чии составни делови се два правоаголника ($A_1B_1C_1D_1$ и $FGHC_1$), складни со дадениот и два квадрата (D_1C_1HK и B_1EFC_1) со страна a, односно b.

Според својствата 2° и 3° од Аксиомата, за плоштината P^* на квадратот A_1EGK имаме

$$P^* = P_1 + P_2 + 2P,$$

а користејќи ја формулата за плоштина на квадрат, добиваме

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2P$$

од каде што следува дека

$$P = ab$$

Со тоа, теоремата е докажана.

Задача 1. *Да се пресмета плоштината на правоаголникот со страна* $a = 12$ cm *и дијагонала* $d = 13$ cm.

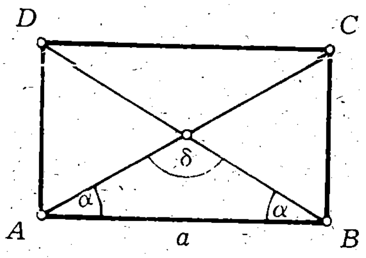
Решение. За да се пресмета плоштината, потребно е претходно да се најде страната b:

$$b = \sqrt{d^2-a^2};\ b = \sqrt{169-144} = \sqrt{25};\ b = 5\text{cm}$$

$$P = 12\cdot 5 = 60;\quad P = 60\ \text{cm}^2$$

Задача 2. *Да се пресмета плоштината на правоаголникот $ABCD$ со страна* $\overline{AB} = 14{,}3$ cm *и аголот меѓу дијагоналите спроти страната* AB, $\delta = 120°46'$.

Решение. Страната b може да се определи од правоаголниот триаголник ABC (црт. 4), на кој му е позната страната a; аголот α може да се определи со помош на дадениот агол δ.



Црт. 4

$$\alpha+\alpha+\delta = 180°;\quad 2\alpha = 180° - 120°46'$$

$$\alpha = 29°37';\quad b = a\,\mathrm{tg}\alpha;$$

$$b = 14{,}3\cdot 0{,}5685 \approx 8{,}13;\quad b \approx 8{,}13\ \text{cm}.$$

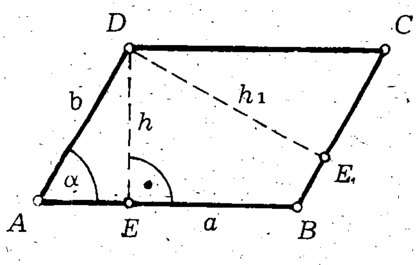
$$P \approx 14{,}3\cdot 8{,}13 \approx 116{,}26;\quad P \approx 116{,}26\ \text{cm}^2.$$

б) Плоштината P на ромбоидот може да се пресмета како производ на неговата основа a и соодветната висина h, т.е.

$$P = ah.$$

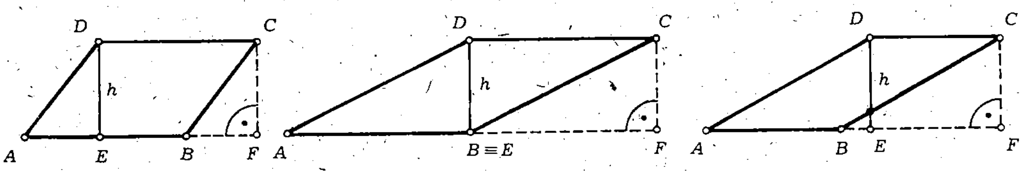
Така, плоштината на ромбоидот $ABCD$ на црт. 5 со основа $\overline{AB} = a$ и висина $\overline{DE} = h$, односно, со основа $\overline{BC} = b$ и висина $\overline{DE_1} = h_1$ може да се пресмета со формулата

$$P = ah = bh_1.$$



Црт. 5

Во зависност од тоа каде ќе падне подножјето E на висината DE, се разликуваат случаите како на црт. 6.



Црт. 6

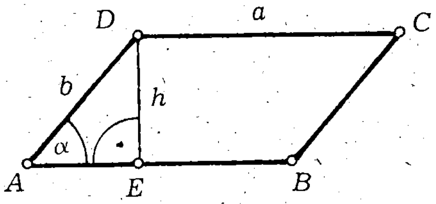
Обиди се во секој од овие случаи да докажеш дека

$$P_{ABCD} = P_{EFCD} = ah$$

1. Страните на еден ромбоид се $a = 8$ cm и $b = 6$ cm. Висината кон страната a е 3 cm. Колкава е висината кон страната b?

Задача 3. Да се пресмета плоштината на ромбоидот со страни $a = 9$ cm и $b = 4$ cm и аголот меѓу нив $\alpha = 36°20'$.

Решение. Од правоаголниот триаголник AED (црт. 7) лесно се уочува како ќе се најде висината h со помош на страната b и аголот α:



Црт. 7

$$\sin\alpha = \frac{h}{b}; \quad h = b\cdot\sin\alpha;$$

оттука следува дека

$$P = ab\sin\alpha.$$

Тоа е уште една формула за пресметување на плоштината на ромбоид кога ни се зададени страните и аголот меѓу нив.

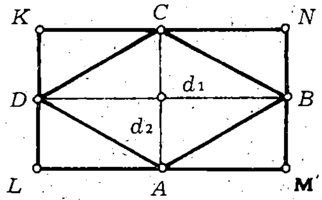
Според тоа, $P = 9\cdot 4\cdot \sin 36°20' \approx 21{,}16$; $P \approx 21{,}16$ cm².

2. Пресметај ја плоштината на ромбоидот со страни $a = 16{,}4$ cm и $b = 7{,}8$ cm и аголот меѓу нив $\alpha = 48°20'$

Лесно се согледува дека формулата $P = ah$ важи и за ромбот, зашто истите случаи што ги разгледавме за ромбоидот се јавуваат и кај него. Бидејќи таа важи и за правоаголник и квадрат, следува дека со неа може да се пресметува плоштината на секој паралелограм.

3. Пресметај ја висината на ромбот на кој страната му е 12,5 cm, а плоштината 80 cm².

На црт. 8 е даден ромбот $ABCD$. Потоа е конструиран четириаголникот $KLMN$, така што неговите страни се паралелни со дијагоналите на ромбот.



Црт. 8

Врз основа на овој цртеж обиди се да најдеш формула за пресметување на плоштината на ромб со помош на неговите дијагонали.

Прво, потсети се што знаеш за дијагоналите на ромбот, потоа утврди каков е четириаголникот *KLMN*, како ќе ја пресметаш неговата плоштина со помош на d_1 и d_2 и, на крајот, во каков меѓусебен однос се плоштината на ромбот и четириаголникот *KLMN*.

Сигурно доби дека

$$P = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

Задача 4. *Да се пресмета плоштината на ромбот со страна $a = 10$ cm и дијагонала $d_1 = 12$ cm*

Решение. За да ја определиме плоштината, потребно е претходно да ја определиме другата дијагонала.

Од правоаголниот триаголник *OAB* (црт. 8).

$$\frac{d_1}{2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}; \quad \frac{d_1}{2} = \sqrt{100-36} \doteq 8; \quad d_1 = 16 \text{ cm}.$$

$$P = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96; \qquad P = 96 \text{ cm}^2.$$

Плоштината на ромбот со страна a и агол α ($\alpha < 90^\circ$) што го зафаќаат страните може да се најде и од

$$P = a^2 \sin\alpha. \quad \text{(Зошто?)}$$

4. Пресметај ја плоштината на ромбот со страна 8,3 dm и $\alpha = 38^\circ 34'$.

Вежби

5. Пресметај ја плоштината на квадрат со а) страна 5,3 cm; б) дијагонала 6,4 dm.

6. Определи ја плоштината на правоаголникот со страни a и b:

   а) $a = 2$ cm и $b = 3$ cm; б) $a = 1/2$ cm, $b = 4$ cm;

   в) $a = 0{,}2$ m, $b = 0{,}6$ m; г) $a = 3\frac{1}{4}$ m и $b = \frac{7}{13}$ dm.

7. Пресметај ја (усно) плоштината на квадратот со страна:

   а) 5 cm, б) $\frac{3}{4}$ cm, в) 0,5 cm.

8. Определи ја плоштината на правоаголникот со страни a и b ако е а) $a = 164{,}3$ m, $b = 73{,}5$ m; б) $a = 3$ m, $b = 7$ m; в) $a = 16{,}7$ cm, $b = 3{,}2$ dm.

9. Колкупати ќе се промени плоштината на правоаголникот:

   а) ако една страна му се зголеми 5 пати,

   б) ако едната страна му се зголеми 3 пати, а другата му се намали 4 пати?

10. Колкупати ќе се зголеми плоштината на квадратот ако страната му се зголеми за 2, 3, 4 ... пати?

11. Пресметај ја плоштината на правоаголник на кој дијагоналите му зафаќаат агол $\alpha = 50^\circ 15'$ и страната спроти овој агол - 16,5 cm.

12. Пресметај ја плоштината на ромбоидот на кој страните му се 13,5 dm и 17,4 cm и аголот меѓу нив $47^\circ 10'$.

13. Страните на паралелограмот се 8 cm и 10 cm. Пресметај ја неговата плоштина ако поголемата од неговите висини е 6 cm.

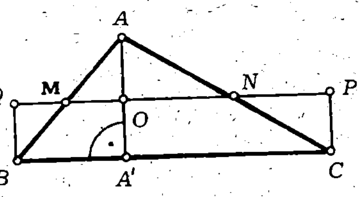
14. Определи ја плоштината на ромбот со страна 16 dm и радиус на впишаната кружница од 6 dm.

15. Определи ја плоштината и висината на ромбот со страна a = 12 dm и агол меѓу страните $\alpha = 61^{\circ}20'$.

$\boxed{16.}$ На црт. 9 во ΔABC се повлечени висината AA' и средната линија MN и притоа е нацртан правоаголникот $BCPQ$.

а) Докажи дека: $\Delta AMO \cong \Delta BMQ$ и $\Delta AON \cong \Delta CPN$.

б) Докажи дека $\overline{AO} = \overline{OA'} = \overline{BQ}$.



Црт. 9

IX.2. ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

a. Плоштината P на триаголникот, како што знаеш, се пресметува со формулата

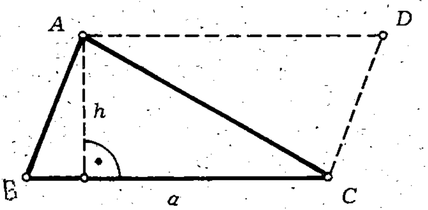
$$P = \frac{ah}{2},$$

т.е. таа е еднаква со половината од производот на неговата основа и соодветната висина.

Навистина, ако триаголникот ABC (црт. 1) го дополниме до паралелограмот $ABCD$, така што

$$AD \parallel BC \text{ и } CD \parallel AB$$

тогаш страната AC е негова дијагонала и го дели на два складни триаголника (Зошто?).



Црт. 1

Поради тоа, според својствата 2° и 3° од Аксиомата, за плоштината P на триаголникот ABC имаме

$$2P = ah.$$

1. Докажи ја формулата за плоштина на триаголник со користење на задачата 16 од минатата лекција.

Секоја страна на ΔABC може да се земе за основа и затоа е точно дека

$$P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

Задача 1. *Да се пресмета страната на рамностраниот триаголник со плоштина* **43,25 cm²**.

Решение. Прво, обиди се да докажеш дека плоштината P на рамностраниот триаголник со страна a може да се пресмета со формулата

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

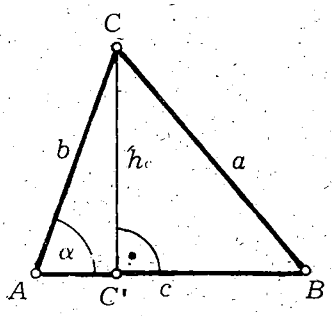
па потоа

$$a^2 = \frac{4P\sqrt{3}}{3} = \frac{4 \cdot 43{,}24 \cdot 1{,}73}{3} \approx 99{,}76,$$

$$a \approx \sqrt{99{,}76} \approx 9{,}988; \quad a \approx 10\,\mathrm{cm}.$$

2. Пресметај ја плоштината на рамнокракиот триаголник со основа 24 и крак 15.

Плоштината P на триаголникот може да се пресмета и со користење на тригонометриските функции, кога триаголникот е зададен со две страни и аголот зафатен од нив.



Црт. 2

Така, за ΔABC на црт. 2 имаме

$$P = \frac{1}{2}ch_c.$$

Но, од правоаголните триаголници ACC' и BCC' може да се најде дека

$$h_c = b\sin\alpha = a\sin\beta,$$

па за плоштината P на ΔABC се добива

$$P = \frac{bc\sin\alpha}{2} \text{ и } P = \frac{ac\sin\beta}{2}.$$

На сличен начин може да се добие и формулата

$$P = \frac{ab\sin\gamma}{2}.$$

Забелешка. Горните формули важат и кога ΔABC е тапоаголен со, на пример, $\gamma > 90^\circ$. Во тој случај треба да се користи равенството

$$\sin\gamma = \sin(180^\circ - \gamma), \quad \gamma > 90^\circ,$$

со коешто ќе се запознаеш во понатамошното изучување на тригонометријата.

Пример 1. *Да ја пресметаме плоштината на правоаголниот триаголник со катети* $a = 8$ cm и $b = 1{,}3$ dm.

Решение: Бидејќи аголот $\gamma = 90^\circ$ и $\sin 90^\circ = 1$, тогаш сигурно може да видиш дека плоштината на правоаголен триаголник со катети a и b се пресметува со формулата

$$P = \frac{ab}{2}$$

Така, ќе имаме $\quad P = \frac{8 \cdot 13}{2} = 52;\ P = 52\ \text{cm}^2 = 0{,}52\ \text{dm}^2.$

Задача 2. *Да ја пресметаме плоштината на* $\triangle ABC$, *зададен со страните* $b = 8$ cm, $c = 12$ cm *и аголот* $\alpha = 36°40'$.

Решение. Замснувајќи во формулата

$$P = \frac{bc\sin\alpha}{2},$$

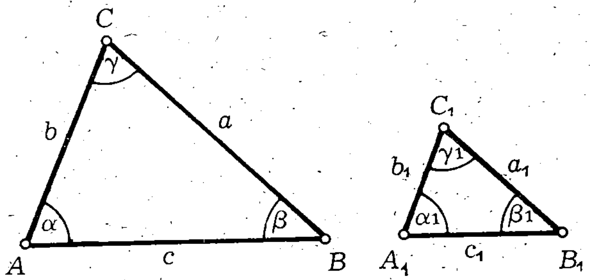
се добива: $\quad P = \frac{8 \cdot 12 \cdot \sin 36°40'}{2} \approx 48 \cdot 0{,}59716 \approx 28{,}66;\ P = 28{,}66\ \text{cm}^2.$

3. Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со крак $b = 12$ cm и аголот при основата $68°23'$.

b) За слични триаголници важи следнава теорема:

T	Плоштините на два слични триаголници се однесуваат како квадратите на нивните соодветни страни.

Доказ. Нека триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ (црт. 3) се слични. Со P да ја означиме плоштината на $\triangle ABC$, а со P_1 - плоштината на $\triangle A_1B_1C_1$.



Црт. 3

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\frac{bc\sin\alpha}{2}}{\frac{b_1c_1\sin\alpha}{2}} = \frac{b \cdot c}{b_1 \cdot c_1} = \frac{b}{b_1} \cdot \frac{c}{c_1}.$$

Но, од сличноста имаме $b : b_1 = c : c_1$, па се добива

$$\frac{P}{P_1} = \frac{b^2}{b_1^2} \text{ и } \frac{P}{P_1} = \frac{c^2}{c_1^2}.$$

На сличен начин се покажува дека $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^2}$. Значи:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^2} = \frac{b^2}{b_1^2} = \frac{c^2}{c_1^2}.$$

Пример 2. *Плоштините на два слични триаголници ABC и $A_1B_1C_1$, со основи a и a_1, се соодветно 49 и 36. Основата $a = 7$. Да ја одредиме основата a_1 и висините h и h_1.*

Решение. Врз основа на горната теорема, $P : P_1 = a^2 : a_1^2$. Заменувајќи ги дадените вредности на оваа пропорција се добива:

$49 : 36 = 49 : a_1^2$ од каде што $a_1^2 = 36$; $a_1 = 6$.

Од формулата за плоштина на триаголник, за висините на овие триаголници, добиваме:

$$h = \frac{2P}{a} = \frac{2\cdot 49}{7} = 14 \text{ и } h_1 = \frac{2P_1}{a_1} = \frac{2\cdot 36}{6} = 12.$$

Пример 3. *Нива со форма на триаголник е нацртана во размер 1 : 200. Плоштината на триаголникот на цртежот е 1,75 dm^2. Да ја одредиме плоштината на нивата.*

Решение. Ако ја означиме со P плоштината на нивата, а со P_1 плоштината на цртежот, тогаш, според условот на задачата, $a : a_1 = 200 : 1$, па:

$$P : P_1 = 200^2 : 1^2. \text{ т.е. } P : P_1 = 40\,000 : 1.$$

Ако ја замениме дадената вредност за P_1 ќе добиеме

$$P : 1,75 = 40\,000,$$

од каде што $P = 70\,000$; $P = 70\,000$ dm^2 или $P = 700$ m^2.

4. Нива со форма на триаголник има плоштина 64 ари. Таа е претставена на план во размер 1 : 500. Колку квадратни сантиметри е плоштината на триаголникот на планот?

Вежби

5. Колку ќе се зголеми плоштината на триаголникот ако:

а) основата му се зголеми трипати, а висината му се намали четирипати;

б) основата му се намали двапати и висината му се намали петпати.

6. Колку проценти ќе се зголеми плоштината на триаголникот ако основата му се зголеми 50%, а висината му се намали 30%?

7. Пресметај ја плоштината на правоаголниот триаголник со катети a и b и хипотенуза c ако: а) $a = 12$, $b = 10$; б) $a = 2,4$, $c = 2,6$; в) $a = 15$ и еден од аглите 45°.

8. Пресметај ја плоштината на рамнокракиот ΔABC со основа a, крак b, агол при основата α и агол при врвот β, зададен со:

а) $a = 15$ cm и $\alpha = 48^\circ 15'$; б) $b = 8$ dm и $\beta = 55^\circ$; в) $a = 18$ cm и $\beta = 29^\circ 40'$.

9. Пресметај ја плоштината на $\triangle ABC$ зададен со а) $a = 5$, $b = 8$ и $\gamma = 45°$; б) $b = 9$, $c = 7$ и $\alpha = 30°15'$; в) $a = 5{,}6$, $c = 7{,}5$ и $\beta = 44°15'$; г) $b = 8$, $\beta = 68°$, $\gamma = 72°40'$.

10. Нацртај триаголник ABC; потоа, со права што ќе минува низ темето A, раздели го на два триаголника чии плоштини ќе се однесуваат како 5 : 3.

11. Плоштините на два слични триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ се 81 и 25. Страната b на $\triangle ABC$ е 9. Одреди ја страната b_1 на $A_1B_1C_1$ и висината h_1 што е спуштена кон неа.

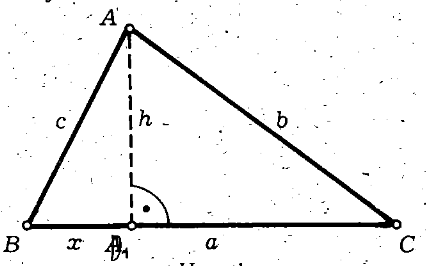
$\boxed{12.}$ Нацртај $\triangle ABC$ зададен со $c = 6$ cm, $\alpha = 50°$ и $\gamma = 70°$, а потоа во него впиши кружница.

$\boxed{13.}$ Нацртај $\triangle ABC$ зададен со $c = 5$ cm, $b = 6$ cm и $\alpha = 55°$, а потоа опиши околу него кружница.

IX.3. ДРУГИ ФОРМУЛИ ЗА ПЛОШТИНА НА ТРИАГОЛНИК

Страните a, b и c, радиусите r и R на впишаната и опишаната кружница и плоштината P на триаголникот се сврзани со повеќе формули што често се користат за решавање разни задачи за триаголникот. Во оваа лекција ќе се запознаеме со некои од нив.

а. Плоштината на триаголникот може да се пресмета и во случајот кога се дадени с а м о неговите страни. Таа формула ќе ја изведеме.



Црт. 1

Од правоаголните триаголници ABA_1 и ACA_1 со заедничка катета AA_1, што е висина на $\triangle ABC$ (црт. 1), имаме:

$$h^2 = c^2 - x^2, \qquad (1)$$
$$h^2 = b^2 - (a-x)^2,$$

од каде што
$$b^2 - (a-x)^2 = c^2 - x^2,$$
$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}.$$

Ако добиената вредност за x ја замениме во првото равенство од (1), по средувањето, доаѓаме до равенството.

$$4a^2h^2 = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2.$$

Заменувајќи за $ah = 2P$ и раставувајќи ја постапно десната страна на прости множители, добиваме:

$$16P^2 = (2ac + a^2 - b^2 + c^2)(2ac - a^2 + b^2 - c^2),$$
$$16P^2 = ((a+c)^2 - b^2)(b^2 - (a-c)^2),$$
$$16P^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c). \qquad (2)$$

Ако ја воведеме ознаката

$$2s = a+b+c,$$

б ја

тогаш

$$-a+b+c = a+b+c-2a = 2(s-a),$$

$$a-b+c = 2(s-b),$$

$$a+b-c = 2(s-c),$$

па, со замена во (2) добиваме

$$16P^2 = 2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c).$$

т.е.

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Оваа формула е наречена **Херонова формула** во чест на старогрчкиот математичар Херон.

Пример 1. Плоштината на триаголникот со страни 12 cm, 35 cm и 37 cm, може да се пресмета како што следува.

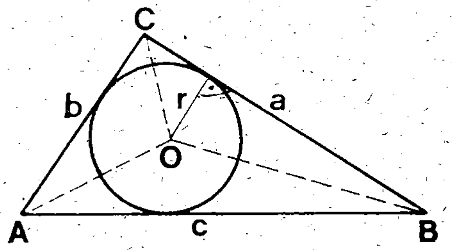
$$2s = 12+35+37 = 84, \quad s = 42,$$

$$P = \sqrt{42(42-12)(42-35)(42-37)} = \sqrt{44\,100} = 210,$$

$$P = 210\ \text{cm}^2.$$

1. Пресметај ги висините на триаголникот со страни 17, 21, 24.

б. На црт. 2 е нацртан ΔABC и во него е впишана кружница со радиус r. Од центарот O на кружницата се повлечени отсечките OA, OB и OC и со тоа ќе добиени триаголниците:



Црт. 2

$$AOB,\ BOC,\ COA.$$

Ако нивните плоштини ги означиме со P_1, P_2, P_3, тогаш

$$P_1 = \frac{cr}{2},\ P_2 = \frac{ar}{2},\ P_3 = \frac{br}{2},$$

па, според својството 3° од Аксиомата

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{r}{2}(a+b+c) = rs;$$

т.е.

$$P = rs, \quad r = \frac{P}{s}.$$

Пример 2. *Да го пресметаме радиусот на вписаната кружница во триаголникот со страни $a = 12$, $b = 15$ и $c = 17$.*

Решение. $r = \dfrac{P}{s}$; $s = \dfrac{12+15+17}{2} = 22$;

$$P = \sqrt{22(22-12)(22-15)(22-17)} \approx 87{,}75 \quad \text{(Провери !)}$$

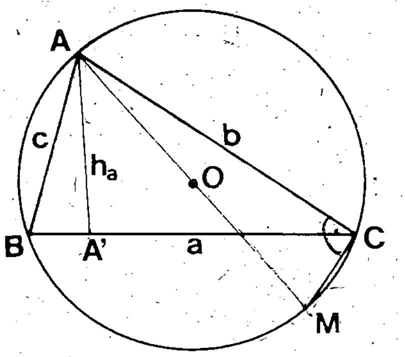
$$r = \frac{87{,}75}{22} \approx 3{,}99; \quad r = 3{,}99.$$

2. Најди го радиусот на вписаната кружница на правоаголниот триаголник со хипотенуза 10 cm и катета 6 cm.

Радиусот на кружницата опишана околу ΔABC се пресметува со формулата

$$R = \frac{abc}{4P}$$

Ќе го докажеме тоа.



Црт. 3

На црт. 3 околу ΔABC е опишана кружница со радиус R. Низ темето A и центарот O е повлечена права до пресекот со кружницата и притоа е добиена точката M ($\overline{MA} = 2R$).

Триаголникот AMC е правоаголен (зошто?) и е сличен со правоаголниот $\Delta ABA'$ ($\measuredangle ABC = \measuredangle AMC$, зошто?). Поради тоа,

$$h_a : c = b : 2R, \text{ од каде што } h_a = \frac{bc}{2R}.$$

Бидејќи $P = \dfrac{1}{2} a h_a$, следува дека $P = \dfrac{abc}{4R}$, $R = \dfrac{abc}{4P}$.

Пример 3. *Да го пресметаме радиусот на опишаната кружница на триаголникот со страни $a = 5$, $b = 8{,}4$ и $c = 9{,}6$.*

Решение.

$$R = \frac{abc}{4P}; \quad P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}; \quad s = \frac{5+8{,}4+9{,}6}{2} = 11{,}5$$

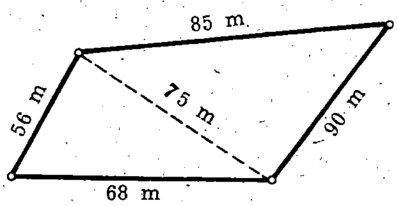
$$P = 20{,}98; \quad R = 4{,}8 \quad \text{(Провери !)}$$

3. Пресметај го радиусот на вписаната и радиусот на опишаната кружница на триаголникот ABC со страни 7, 7 и 9.

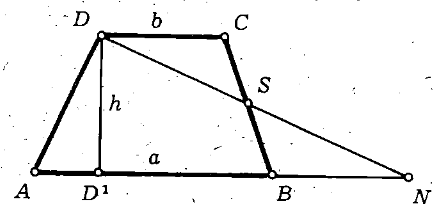
Вежби

4. Пресметај ја плоштината на триаголникот со страни 17, 21 и 24.

5. Пресметај ја плоштината на земјишната парцела претставена на црт. 4.



Црт. 4



Црт. 5

6. Користејќи ја Хероновата формула изведи ја формулата за плоштина на рамностран триаголник.

7. Одреди ја најмалата висина во триаголникот со страни 13, 84 и 85.

8. Пресметај ја плоштината и радиусите на впишаната и опишаната кружница на правоаголниот триаголник со катета 48 cm и хипотенуза 73 cm.

9. Најди ја плоштината на рамностраниот триаголник за кој важи $R \cdot r = 216$.

10. На црт. 5 е даден трапезот $ABCD$. Точката S е средина на страната CB. Врз основа на цртежот утврди дека трапезот $ABCD$ и триаголникот AND се еднаквоплоштни фигури, т.е. имаат еднакви плоштини.

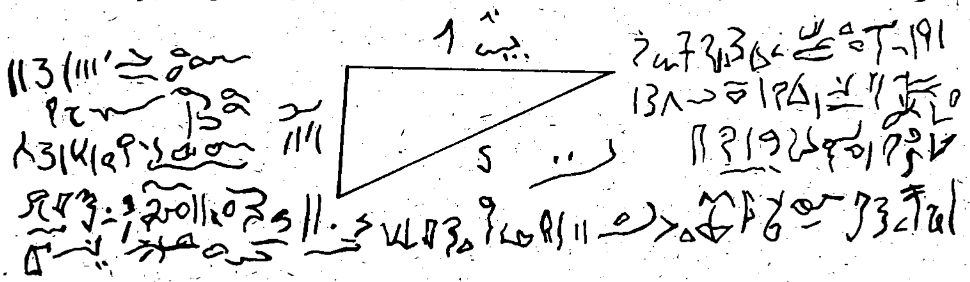
ОД ИСТОРИЈАТА НА МАТЕМАТИКАТА

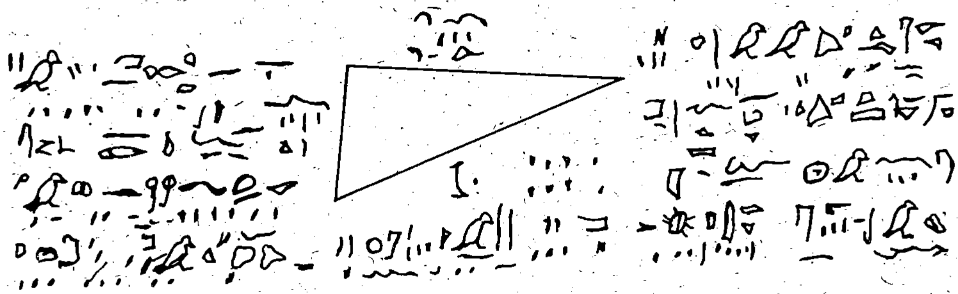
Потребата за наоѓање плоштина на разни фигури се појавила многу одамна. Во врска со тоа најголемиот старогрчки историчар Херодот (V век п.н.е.) за рагањето на геометријата во Стариот Египет пред околу 4 000 години го напишал следново: „Египетскиот фараон Сезоострис је разделил обработливата земја на Египќаните и, според големината на земјата им земал на соодветен начин данок. Се случувало реката Нил да се излее од коритото и да уништи дел од дадените парцели. По барање на сопствениците на оштетените парцели фараонот испракал земјомери за да утврдат каков дел од парцелите се уништени. Тоа се првите чекори од рагањето на геометријата на Египет, од каде што преминала во Грција”.

Оттука и нејзиното име геометрија што е составено од грчките зборови: „геа” - земја, „метрон” - мерка и значи мерење земја.

Со развитокот на земјоделието, градежништвото, занаетчиството и трговијата се наложила потреба да се конструираат и изработуваат се поразлични и посложени фигури чијашто плоштина требало да се пресметува. И така, геометријата со текот на времето полека престанува да се интересира само за мерењето на земјата и станува наука што ги изучува формите, големините и мегусебните положби на фигурите. но, и покрај тоа, таа си го задржала името што секогаш ќе потсетува на тоа дека таа потекнала од практичните потреби на лугето и дека има голема примена и денес во секојдневната практика.

На цртежот е прикажан начинот на пресметувањето на плоштината на триаголникот во папирусот на Ахмес (пред околу 4 000 години). Горе е дадено клинописно, а долу хиероглифска транскрипција.





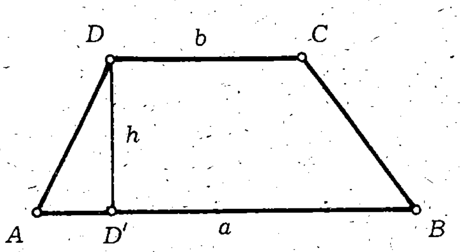
IX.4. ПЛОШТИНА НА ТРАПЕЗ И ТРАПЕЗОИД

Доколку ја реши задачата 10 (од VIII.3) ти сигурно откри како може да се пресмета плоштината на трапезот на кој му се дадени основите и висината h.

Ќе докажеме дека за плоштината на трапезот со основа a и b и висина h важи следнава теорема:

Плоштината на трапезот е еднаква со производот на полузбирот од неговите основи и висината, т.е.

$$P = \frac{a+b}{2}h .$$



Црт. 1

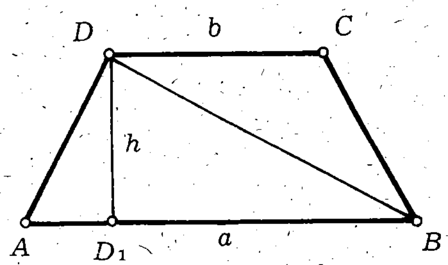
Дадено е: Трапез со основи a и b и висината h (црт. 1).

Треба да докажеме: $P = \dfrac{a+b}{2}h$.

Анализа. За да ја определима плоштината на трапезот $ABCD$, доволно е да го разбиеме на геометриски фигури чии плоштини знаеме да ги пресметаме со помош на a, b и h.

Тоа можеме да го направиме и ако трапезот $ABCD$ го трансформираме во еднаквоплоштна фигура чија плоштина можеме, исто така, да ја пресметаме со помош на дадените елементи. Задачата 10 од VIII.3 дава идеја за тоа.

Доказ (со помош на разделувањето на трапезот на две фигури). На црт. 2, со повлекувањето на дијагоналата BD, трапезот се разбива, на два триаголника со основа a, односно b и висина h. Поради тоа,



Црт. 2

$$P_{ABD} = \frac{ah}{2}\ ;\quad P_{BCD} = \frac{bh}{2}\ .$$

Според третото својство на Аксиомата за плоштина, добиваме

$$P_{ABCD} = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{a+b}{2}h\ ,\ \text{т.е. } P = \frac{a+b}{2}\cdot h\ ,$$

што требаше и да докажеме.

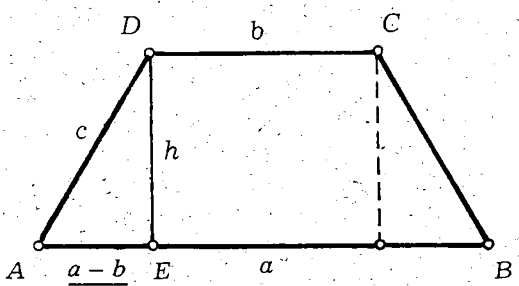
Пример 1. *Да ја пресметаме плоштината на трапезот со основи* 10 *и* 8 *и висина* 7.

Решение. $P = \frac{a+b}{2}\cdot h\ ;\quad P = \frac{10+8}{2}\cdot 7 = 63\ ;\quad P = 63\ .$

1. Докажи ја формулата за плоштина на трапез врз основа на идејата во задача 10 од минатата лекција.

Пример 2. *Да ја пресметаме плоштината на рамнокракиот трапез со основа* 15 *и* 7 *и крак* 5.

Решение. Од дадените елементи прво треба да ја најдеме висината h.



$\frac{a-b}{2}$

Црт. 3

Во правоаголниот ΔAED (црт.3),

$$\overline{AE} = \frac{a-b}{2}\quad \text{(Зошто?)}$$

па,

$$h^2 = c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = 9,\ h = 3\ ,$$

$$P = \frac{15+7}{2}\cdot 3 = 33\ ;\ P = 33\ .$$

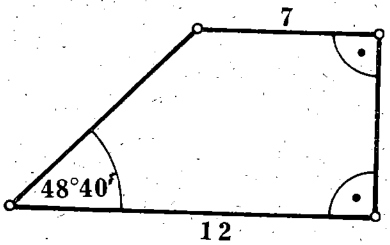
2. Пресметај ја плоштината на рамнокракиот трапез со основи 20 и 5 и дијагонала 20.

Задача 1. *Да се пресмета плоштината на рамнокракиот трапез со основи $a = 15$ cm, $b = 7$ cm и агол $\alpha = 75°50'$.*

Решение: Од правоаголниот триаголник AED на црт. 3, во кој $\alpha = \sphericalangle DAE$, се добива:

$$h = \frac{a-b}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha = 4 \cdot 3{,}9617 \approx 15{,}85\ ,$$

$$P = \frac{15+7}{2} \cdot 15{,}85 \approx 174{,}35\ ; \quad P \approx 174{,}35\ \text{cm}^2\ .$$



Црт. 4

3. Пресметај ја плоштината на правоаголниот трапез од црт. 4.

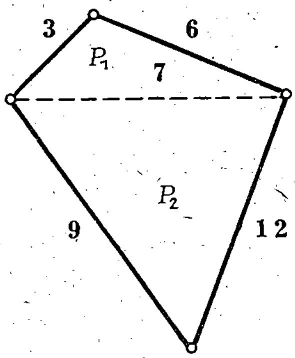
б Плоштината на еден четириаголник (трапезоид) може да се пресмета со помош на Хероновата формула ако му се дадени сите страни и една од дијагоналите.

Така, плоштината P на четириаголникот од црт. 5 ќе ја пресметаме како што следува:

$$P_1 = \sqrt{8(8-7)(8-3)(8-6)} = \sqrt{80} \approx 8{,}94$$

$$P_2 = \sqrt{14 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt{980} \approx 31{,}3$$

$$P = P_1 + P_2 \approx 40{,}24$$



Црт. 5

Ако, пак, четириаголникот има нормални дијагонали, како на црт. 6, тогаш неговата плоштина може да се пресмета со формулата

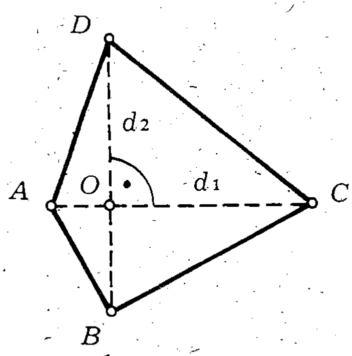
$$P = \frac{d_1 d_2}{2}\ ,$$

зашто

$$P = P_{ADC} + P_{ABC} = \frac{d_1 \cdot \overline{OD}}{2} + \frac{d_1 \cdot \overline{OB}}{2}\ ,$$

т.е.

$$P = \frac{d_1}{2}(\overline{OD} + \overline{OB}) = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}\ .$$



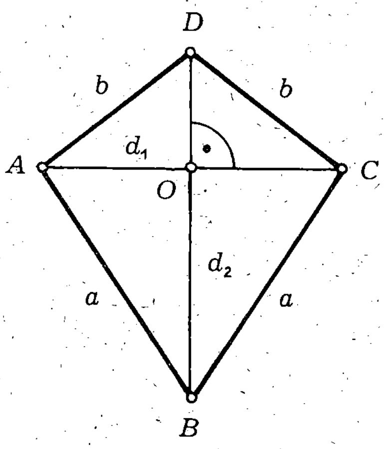
Црт. 6

Така, за плоштината на делтоидот со дијагонали $d_1 = 16$ cm и $d_2 = 2$ cm ќе имаме:

$$P = \frac{16 \cdot 20}{2} = 160\,, \quad P = 160\ \text{cm}^2 = 1{,}6\ \text{dm}^2\,.$$

Задача 2. *Да се пресмета плоштината на делтоидот со страни* 17 *и* 13 *и една дијагонала* 30.

Решение. Да ги означиме страните на тој делтоид како на црт. 7:



Црт. 7

$$\overline{AD} = \overline{CD} = b = 17\,,$$
$$\overline{AB} = \overline{CB} = a = 113\,.$$

За страните на ΔABD важи неравенството

$$\overline{AD} + \overline{DB} > \overline{AB}\,,$$

т.е. $17 + \overline{DB} > 113$, $\overline{DB} > 96$,

од каде што следува дека дадената дијагонала не може да биде оска на симетрија на делтоидот ($\overline{DB} \neq 30$).

Значи, $\overline{AC} = d_1 = 30$, па од рамнокраките триаголници ACD и ACB се добива

$$\overline{OD} = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{64} = 8\,,$$
$$\overline{OB} = \sqrt{113^2 - 15^2} = \sqrt{12544} = 112\,,$$

т.е. $\overline{BD} = d_2 = 120$, па

$$P = \frac{30 \cdot 120}{2} = 1\,800$$

4. Во делтоид со страни 10 и 6 е впишана кружница со радиус 3. Пресметај ја плоштината на тој делтоид.

5. Рамнокраките триаголници ABC и ADC со заедничка основа $\overline{AC} = 20$ cm и $\measuredangle ABC = 86°30'$, $\measuredangle ADC = 138°46'$ образуваат делтоид како на црт. 7. Пресметај ја неговата плоштина.

Вежби

6. Пресметај ја плоштината на трапез со средна линија $s = 40$ cm и висина $h = 7$ cm.

7. Пресметај ги плоштината и периметарот на правоаголен трапез со основи 16 cm и 5 cm, и крак што не е нормален на основите: $c = 17{,}5$ cm.

8. Пресметај ги плоштината и периметарот на рамнокрак трапез со основи 25,5 cm и 16,5 cm и дијагонала $d = 29$ cm.

9. Плоштината на еден трапез е 420 cm^2, а основите се 25,5 cm и 16,5 cm. Пресметај ја висината.

10. Пресметај ја плоштината на трапез со основи 6 m и 2 m, а краците му се 1,3 m и 3,7 m.

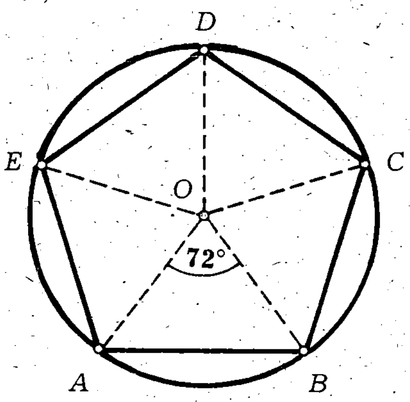
11. Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основа 18 m, крак 12 m и агол при основата $\alpha = 48°50'$.

$\boxed{12.}$ Во кружница со радиус 3 cm впиши правилен а) шестаголник, б) триаголник и пресметај ја неговата плоштина.

IX.5. ПРАВИЛЕН МНОГУАГОЛНИК. ПЕРИМЕТАР И ПЛОШТИНА

а. Рамностраниот триаголник и квадратот се правилни многуаголници. И секој многуаголник (конвексен) со *еднакви страни* и *еднакви агли* се вика **правилен многуаголник.** Така имаме: **правилен петаголник, правилен шестаголник,** итн.

Пример 1: *Во дадена кружница да впишеме правилен петаголник.*



Црт. 1

Решение. За да го нацртаме бараниот петаголник доволно ќе биде да нацртаме последователно пет централни агли од 72° ($5 \cdot 72° = 360°$) како на црт. 1.

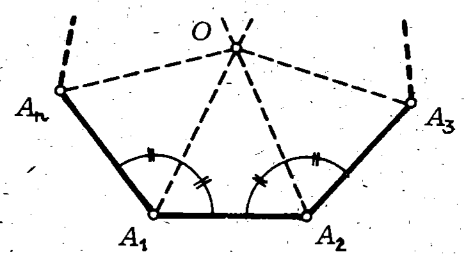
Од складноста на триаголниците OAB, OBC, ..., OEA (според признакот CAC) следува дека петаголникот $ABCDE$ има еднакви страни и еднакви агли, па значи – тој е правилен.

1. Во кружница со радиус 3 cm впиши правилен осумаголник.

2. Објасни ја постапката за цртање на правилен n - аголник со помош на шестар, линијар и агломер.

Точно е следново својство:

Т	Околу секој правилен многуаголник може да се опише кружница.



Црт. 2

Доказ*. Нека $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ е правилен n-аголник (црт. 2), т.е.

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \ldots = \overline{A_nA_1}$$

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2 = \ldots = \sphericalangle A_n.$$

Да ги повлечеме симетралите на $\sphericalangle A_1$ и $\sphericalangle A_2$ и нека тие се сечат во точката O; значи, $\triangle OA_1A_2$ е рамнокрак со $\overline{OA_1} = \overline{OA_2}$ (Зошто?).

Бидејќи $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3}$, $\overline{OA_2}$ – засдничка страна и $\sphericalangle A_1A_2O = \sphericalangle A_3A_2O$; следува дека $\triangle OA_1A_2 \cong \triangle A_2A_3$.

Од тоа може лесно да се заклучи дека OA_3 е симетрала на $\sphericalangle A_3$ (зошто?) и

$$\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \overline{OA_3}.$$

Ако се продолжи со разгледување на паровите соседни триаголници во многуаголникот, ќе се добие:

$$\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \ldots = \overline{OA_n}.$$

Од тоа следува дека сите темиња на правилниот многуаголник лежат на кружница со центар во O.

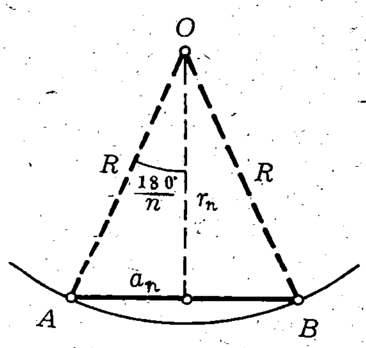
Со тоа теоремата е докажана.

Точно е и тоа дека во секој правилен многуаголник може да се впише кружница; таа е концентрична со нејзината опишана кружница.

3*. Докажи го горното тврдење.

◐ Обиди се да покажеш дека средините на страните на правилен многуаголник се еднакво оддалечени од центарот на опишаната кружница.

6. Страната a_n и радиусите R и r_n на опишаната и вписаната кружница на правилниот n - аголник $AB \ldots$ се елементи на еден рамнокрак триаголник (црт. 3); тој се вика **карактеристичен триаголник** на многуаголникот.



Црт. 3

4. Од $\triangle OAB$ на црт. 3 согледај дека се точни следниве формули:

$$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}, \quad a_n = 2r_n\operatorname{tg}\frac{180°}{n},$$

$$r_n = R\cos\frac{180°}{n}.$$

5. Пресметај ги a_3, a_4, a_6, a_{10}, во зависност од R.

b. Ако во правилниот n-аголник темињата се сврзат со неговиот центар, се добиваат n складни триаголници (карактеристични триаголници). Искористи го тоа и докажи ги следниве формули за пресметување периметар L_n и плоштина P_n на правилниот n-аголник:

$$L_n = 2nR\sin\frac{180°}{n} \quad \text{или} \quad L_n = 2nr_n\operatorname{tg}\frac{180°}{n},$$

$$P_n = \frac{n}{4}\cdot a^2\cdot \operatorname{ctg}\frac{180°}{n} \quad \text{или}$$

$$P_n = n\cdot R^2\cdot \sin\frac{180°}{n}\cdot\cos\frac{180°}{n}.$$

6. Од горните равенства изведи ги формулите за периметар и плоштина на:

а) рамностран триаголник;

б) квадрат;

в) правилен шестаголник.

Пример 2. *Плоштината на правилен осумаголник со страна* $a_8 = 5$ е

$$P_8 = \frac{1}{4}\cdot 8\cdot 25\operatorname{ctg}\frac{180°}{8} = 50\cdot\operatorname{ctg}22°30' \approx 50\cdot 2{,}4142$$

$$P_8 \approx 120{,}71\ .$$

7. Пресметај ја плоштината на правилен дваесетаголник впишан во кружница со радиус 10 cm.

Забелешка. Не е неопходно да се помнат формулите за L_n и P_n. Секоја од нив може да се добие од карактеристичниот триаголник при решавањето на задачата. Задачите од овој вид може да се решаваат со формулите:

$$L_n = n\cdot a_n\ , \quad P_n = \frac{1}{2}\cdot\ n\,a_n h \quad (h = r_n)\ ,$$

кога одделно се бараат елементите што не се познати.

Г. Вежби

8. Пресметај ја плоштината на правилниот деветаголник со страна 12.

9. Пресметај ја плоштината и периметарот на правилниот дванаесетаголник што е впишан во кружница со радиус 6 cm.

10. Во кружница со радиус 8 cm е впишан и опишан правилен шестаголник. Определи ја разликата на плоштините на овие два многуаголника.

11. Пресметај ја плоштината на правилниот триесетаголник што е опишан околу кружница со радиус 20.

12. Во дворот на едно училиште, на парцела со форма на правилен шестаголник се засадени цвеќина. Таа треба да се загради со 3 реда жици. Колку метри жица ќе биде потребно ако плоштината на парцелата е 692 cm^2.

$\boxed{13.}$ Во круг со радиус $R = 10$ cm се впишани правилен шестаголник, правилен осумаголник и правилен дванаесетаголник.

а) Пресметај го периметарот на кружницата $L = 2R\pi$ и на многуаголниците.

б) Пресметај ја плоштината на кругот $P = R^2\pi$ и на многуаголниците P_6, P_8 и P_{12}.

в) Одреди ги разликите $P - P_6$, $P - P_8$ и $P - P_{12}$ Како се менуваат тие со растењето на бројот на страните на многуаголникот?

г) Ако во истата кружница се впишат правилен дваесетаголник и правилен стоаголник кој од нив ќе има поголема плоштина?

IX.6. ПЕРИМЕТАР НА КРУЖНИЦА. ПЛОШТИНА НА КРУГ

Со формулите за пресметување периметар на кружница и плоштина на круг се запозна порано и ги користеше во решавање на разни задачи. Тие формули и тука нема да ги докажеме затоа што се потребни и други математички знаења, но ќе дадеме едно објаснување како се доаѓа до нив.

а. Ти веќе знаеш дека две кружници секогаш се слични меѓу себе; коефициентот на сличноста се определува од односот на нивните дијаметри.

Така, за периметрите L_1 и L_2 на две кружници со дијаметри d_1 и d_2 може да се напише

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{d_1}{d_2}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{L_1}{d_1} = \frac{L_2}{d_2}.$$

Оттука следува дека може да се смета дека односот помеѓу периметарот на која било кружница и нејзиниот дијаметар е еднаков на фиксен број, кој се означува со π, т.е.

$$\frac{L}{d} = \pi.$$

Земајќи дека $d = 2r$, се добива

$$L = 2r\pi,$$

при што r е радиусот на таа кружница.

Така, периметарот на кружница со $r = 15$ cm ќе биде

$L = 2 \cdot 15 \cdot \pi = 30\pi, \qquad L = 30\pi$ cm.

Забелешка. Бројот π е ирационален број; тој не може да се претстави со конечен децимален број, ниту пак со бесконечен периодичен децимален број. Затоа во практиката земаме само некоја негова приближна вредност и тоа 3,14, т.е.

$$\pi \approx 3{,}14 .$$

Инаку бројот π е пресметан со многу децимали; еве ги првите дваесет;

$$\pi = 3{,}14159265358979323846 \ldots$$

Пример 1. *Да го пресметаме радиусот на кружницата со периметар* 78,5 cm

Решение: Од равенството $78{,}5 = 2 \cdot r \cdot 3{,}14$, се добива $r \approx 12{,}5$ cm.

1. Најди како ќе се промени периметарот на кружницата, ако нејзиниот радиус се зголеми: 2 пати, 3 пати, ..., n пати.

2. Најди за колку ќе се зголеми периметарот на кружницата со радиус а) 1 cm, б) 10 cm, в) 100 cm, ако нејзиниот радиус се зголеми за 1 cm.

Пример 2. *Да претпоставиме дека Земјиниот екватор се зголемил (се издолжил) само за* 12,56 m *и се „издигнал" над површината на Земјата. Дали некој од луѓето на Земјата ќе може да помине под „новиот" екватор, а да не се наведне?*

Решение. Да ги означиме со:

– L должината на екваторот и R радиусот на Земјата;

– L^* Должината на „новиот екватор" и R^* неговиот радиус; тогаш

$$L^* = L + 12{,}56 \text{ m} = L + 4 \cdot 3{,}14 \text{ m},$$

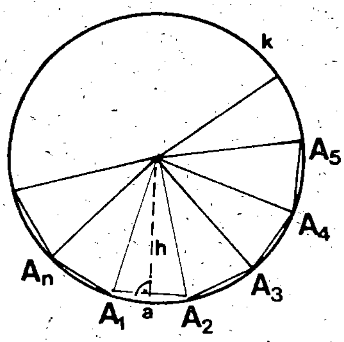
т.е.

$$L^* = 2R\pi + 2 \cdot 2 \cdot \pi \text{ m} = 2\pi(R + 2m) ,$$

од каде што следува дека $R^* = R + 2$m.

Значи, „новиот екватор" ќе се издигне над Земјината површина за 2 m, па под него ќе може да поминат, не наведнувајќи се, сите оние што не се повисоки од 2 m.

На црт. 1 е дадена кружница со радиус r. Треба да покажеме дека плоштината на кругот што е ограничен со неа е еднаква со $r^2\pi$.



Црт. 1

Во кружницата впишуваме правилен n-аголник. Неговата плоштина се пресметува со формулата

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot L_n \cdot h ,$$

каде што L_n е периметарот на многуаголникот, т.е. $L_n = n \cdot a$, а h - апотемата (висина на неговиот карактеристичен триаголник).

Плоштината на n - аголникот впишан во дадена кружница зависи од n и тоа колку што n е поголем природен број, толку и плоштината е поголема. Тоа сигурно го утврди и со решавањето на задачата 13 од претходната лекција. Ако со P ја означиме плоштината на кругот, тогаш разликата P-P_n, со растењето на n, станува се помала и помала и може да се рече дека многуаголникот просто ја исполнува кружницата.

Тоа, пократко, можеме да го искажеме вака: „P_n се стреми кон P" и да запишеме

$$P_n \to P. \qquad (1)$$

Што станува, во тој случај, со апотемата и периметарот на правилните многуаголници? Кон што се стремат тие?

Сигурно насети дека апотемата ќе се стреми кон радиусот r, а периметарот L_n кон периметарот L на кружницата што го запишуваме:

$$h_n \to r, \quad L_n \to L. \qquad (2)$$

Од формулата

$$P_n = \frac{1}{2} L_n h_n$$

според (2), имаме

$$P_n \to \frac{1}{2} Lr,$$

но бидејќи $P_n \to P$,

$$P = \frac{1}{2} Lr.$$

Заменувајќи го L со $2r\pi$, добиваме $P = \frac{1}{2} \cdot 2r\pi \cdot r$, т.е.

$$P = r^2\pi.$$

На пример, плоштината на кругот со радиус $r = 10$ cm е

$$P = 10^2 \cdot 3{,}14 = 314; \quad P = 314 \text{ cm}^2.$$

3. Периметарот на еден круг е 94,2 cm. Пресметај ја неговата плоштина.

Забелешка. Поимот „периметар на круг", често, ќе ни го означува периметарот на кружницата со која е ограничен кругот.

b Вежби

4. Плоштината на еден круг е $9{,}61\pi$ cm^2. Пресметај го неговиот периметар.
5. Два круга имаат еднакви радиуси. Ако радиусот на едниот се зголеми за 1, а периметарот на другиот се зголеми за 2π, кој од нив ќе има поголема плоштина?
6. Колкав е радиусот на кругот на кој мерните броеви на неговата плоштина и на неговиот параметар се еднакви?

7. Пресметај ја плоштината на кругот, впишан во квадрат чија плоштина е 64 cm^2.

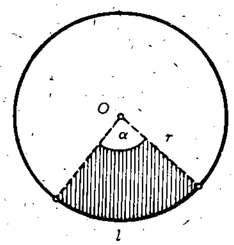
8. Пресметај ја плоштината на квадратот впишан во круг чија плоштина е $256\pi \text{ cm}^2$.

9. Пресметај ги периметрите на впишаната и опишаната кружница на правилен шестаголник со плоштина $150\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

10. Изрази ја плоштината на еден круг со помош на периметарот и радиусот на нејзината кружница.

IX.7. ПЛОШТИНА НА ДЕЛОВИ ОД КРУГОТ

а) Делот од кругот што е зафатен со даден централен агол се вика **кружен исечок** или **кружен сектор.** На црт. 1, со шрафираниот дел е претставен еден кружен исечок.



Црт. 1

Како да ја пресметаме плоштината на кружниот исечок во круг со радиус r и централен агол α (црт. 1)?

Да претпоставиме дека кругот е разделен на 360 еднакви исечоци, секој со централен агол од 1°. Плоштината P_1 на таков кружен исечок е 360-ти дел од плоштината на кругот, т.е.

$$P_1 = \frac{r^2\pi}{360}.$$

Ако, пак, централниот агол е α, тогаш плоштината на соодветниот исечок ќе биде α пати поголема од P_1 т.е.

$$P = \frac{r^2\pi\alpha}{360}.$$

Така, плоштината на исечокот во круг со радиус $r = 12$ cm и централен агол $\alpha = 40^\circ$ е

$$P = \frac{12^2 \cdot \pi \cdot 40}{360} = 16\pi\,; \quad P = 16\pi \text{ cm}^2.$$

1. Пресметај ја плоштината на кружен исечок ако се зададени:

а) $r = 30$ cm, $\alpha = 30^\circ$; б) $r = 5$ cm, $\alpha = 56^\circ 32'$.

Плоштината на кружниот исечок, зададен со r и α, може да се пресмета и со помош на должината l на припадниот кружен лак. Сигурно се сеќаваш дека

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180},$$

па поради тоа, плоштината P на исечокот може да се најде и со формулата

$$P = \frac{lr}{2},$$

што, секако, ти личи на формула за плоштина „триаголник со основа l и висина r".

На пример, за плоштината на една четвртинка од кругот со радиус $r = 1$ cm, ќе добиеме

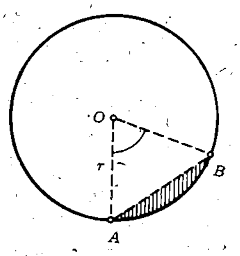
$$l = \frac{r\pi\alpha}{180} = \frac{1 \cdot \pi \cdot 90}{180} = \frac{\pi}{2}\,\text{cm},$$

па

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = \pi; \quad P = \pi\ \text{cm}^2.$$

2. Пресметај ја должината на лакот од кружницата со радиус $r = 2\pi$ што припаѓа на кружен исечок со плоштина $P = \pi^2$.

б. Дел од кругот зафатен со еден негов лак и со соодветната тетива се вика **кружен отсечок или кружен сегмент.**



Црт. 2

На црт. 2, со шрафираниот дел е претставен еден кружен отсечок; во кругот со радиус r, отсечокот е определен со тетивата AB или централниот агол α.

Задача 1. *Да се пресмета плоштината на кружниот отсечок со централен агол $\alpha = 60°$ во круг со радиус 12 cm.*

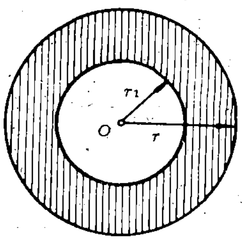
Решение. Плоштината на кружниот отсечок, на пример, на црт. 2 е *разлика* од плоштината на кружниот исечок OAB и плоштината на ΔOAB.

Триаголникот OAB е рамностран (зошто?) со страна r, па поради тоа

$$P = \frac{r^2\pi \cdot \alpha}{360} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12^2\pi \cdot 60}{360} - \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 24\pi - 36\sqrt{3}$$

$$P = 12(2\pi - 3\sqrt{3})\ \text{cm}^2.$$

3. Пресметај ја плоштината на кружен отсечок во круг со $r = 10$ cm и централен агол $\alpha = 35°20'$.

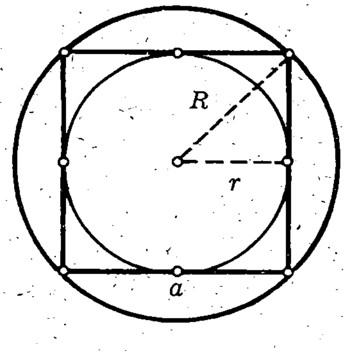


Црт. 3

в. Шрафираниот дел од кругот на црт. 3 претставува еден кружен прстен; неговата плоштина може да се најде како *разлика* од плоштините на (концентричните) кругови со радиуси r и r_1, т.е.

$$P = r^2\pi - r_1^2\pi = (r^2 - r_1^2)\pi.$$

Пример 1. *Да ја пресметаме плоштината на кружниот прстен што го формираат опишаната и вписаната кружница на квадрат со страна* $a = 1$ dm.



Црт. 4

Решение. Од црт. 4 е јасно дека

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad r = \frac{a}{2};$$

поради тоа имаме:

$$P = (R^2 - r^2)\,\pi = \frac{a^2\pi}{4},$$

т.е. $P = \frac{\pi}{4}$ dm^2.

4. Пресметај ја плоштината на пресекот на водоводна цевка ако дијаметарот на надворешниот круг е 10 cm, а дебелината е 2 mm.

Вежби

5. Плоштината на кружен исечок е 28,26 m^2, а неговиот централен агол има 40°. Пресметај ја плоштината на кругот.

6. Пресметај го централниот агол на исечокот со радиус 5 cm и лак 4 cm.

7. Пресметај ја плоштината на кружен отсечок, ако соодветната тетива е m, а соодветниот централен агол е 120°.

8. Пресметај ја плоштината на кружниот прстен што го формираат опишаната и впишаната кружница на:

   а) рамностраниот триаголник со страна 6 cm;

   б) правилниот шестаголник со страна 8 cm;

   в) правилниот деветаголник со страна 9 cm;

9. Пресметај ја плоштината на дел од кружниот прстен со $r = 20$ cm и $r_1 = 12$ cm што соодветствува на централен агол од 40°.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ–IX

1. Да се најдат страните a, b и дијагоналата d на правоаголник со плоштина 36 m^2 и $a:b = 9:4$.

2. а) Како ќе се измени плоштината на квадратот ако неговата 1) страна, 2) дијагонала се зголеми 10 пати,

   б) Колку пати треба да се зголеми 1) страната, 2) дијагоналата на квадратот, за да може неговата плоштина да се зголеми 16 пати?

3. Пресметај ја плоштината на правоаголникот зададен со:

   а) страната $a = 1{,}2$ и дијагоналата $d = 1{,}3$;

   б) дијагоналата $d = 12$ и аголот меѓу дијагоналата и страната $a = 30°$.

4. Пресметај ја плоштината на паралелограмот со страни 7,2 и 4,3 и агол меѓу нив $\alpha = 48°20'$.

5. Пресметај го периметарот и плоштината на ромбот на кој дијагоналите му се 26 и 24.

6. Плоштината на еден паралелограм е 15,91 m^2, а висините му се 4 cm и 6 cm. Определи го периметарот.

7. Определи го периметарот и плоштината на ромбот со страна 16 dm и радиус на впишаната кружница од 6 dm.

8. Плоштината на еден паралелограм е 24 cm^2. Точката на пресекот на дијагоналите е оддалечена од страните 2 cm и 3 cm. Пресметај го периметарот на паралелограмот.

9. Пресметај го периметарот на ромбот на кој плоштината е 18 cm^2, а еден од аглите е 30°.

10. Правоаголник со димензии 7,4 dm и 5,5 dm има иста плоштина со паралелограм со основа 8,6 dm. Најди ја неговата висина.

11. Пресметај ја плоштината на рамнокракиот триаголник со основа 26 и крак 85.

12. Докажи дека плоштината на ΔABC е еднаква со производот од должината на отсечката што ги поврзува средините на страните CA и CB и висината h_c.

13. Какви се плоштините на триаголниците што имаат иста основа, а врвовите им лежат на една права паралелна со основата?

14. Пресметај ја плоштината на правоаголниот триаголник ABC со катети a и b и хипотенуза c, зададен со:

а) $a = 34{,}5$ m и $\alpha = 63°10'$; б) $b = 21$ cm и $\alpha = 48°$;

в) $c = 16$ cm и $\beta = 68°40'$.

15. Пресметај ја плоштината на триаголник зададен со:

а) $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, $\gamma = 72°32'$;

б) $c = 41{,}5$ cm, $b = 37{,}5$ cm, $\alpha = 67°18'$.

16. Пресметај ја плоштината на рамнокрак триаголник со основа a, крак b, агол при основата α и агол при врвот γ, ако

а) $a = 85$, $\alpha = 63°24'$; б) $h = 24$, $a = 30$;

в) $a = 42$, $\gamma = 78°36'$; г) $b = 7{,}2$, $\gamma = 38°$.

17. Периметрите на два слични триаголници се 35 cm и 28 cm. Пресметај го односот меѓу нивните плоштини.

18. Страната на еден триаголник е 5 cm. Колку изнесува соодветната страна на сличен триаголник, ако плоштината му е трипати поголема?

19. Да се пресмета плоштината на триаголник со страни:

а) 25 cm, 29 cm, 36 cm; б) 16,4 cm, 17,3 cm, 25,5 cm.

20. Да се пресмета радиусот на впишаната и опишаната кружница на триаголник со страни:

а) 13, 14, 15; б) 37, 15, 44; в) 12, 15, 17.

21. Да се пресмета плоштината на паралелограмот со страни 25 cm и 6 cm и една дијагонала 29 cm.

22. Најди ја најмалата и најголемата висина на триаголникот од задача 19.

23. Плоштината на еден трапез е 150, едната од основите му е 11, а висината е 10. Колкава е другата основа?

24. Пресметај ја плоштината на правоаголен трапез со основи 9 и 4 чија бочна страна зафаќа агол од 45°.

25. Пресметај ја плоштината на правоаголниот трапез, ако помалата основа е 7, а бочните страни се 4 и 5.

26. Плоштината на еден трапез е 49, основите му се однесуваат како 3:4, висината му е 7. Одреди ги неговите основи.

27*. Да се пресмета плоштината на трапезот со основи $a = 34$ cm, $b = 12$ cm и агли прилегнати на a се 45° и 34°20′.

28.*Пресметај ја плоштината на трапезот со основи 60 m, 20 m и краци 37 m и 13 m.

29. Пресметај ја плоштината на делтоид со страни 8 cm, 15 cm и дијагонала 18 cm.

30. Пресметај ја плоштината на четириаголникот $ABCD$ со страни:

$\overline{AB} = 64$, $\overline{BC} = 70$, $\overline{CD} = 81$, $\overline{AD} = 69$ и дијагонала $\overline{AC} = 76$.

31. Пресметај ја плоштината на правилен n-аголник со страна a и r, R - радиуси на неговата впишана и опишана кружница, ако

а) $n = 10$, $R = 4{,}8$ dm; б) $n = 15$, $r = 9{,}7$ cm;

в) $n = 12$, $R = 5$ dm; г) $n = 6$, $r = 9$.

32. Во кружница со радиус R е впишан, а околу неа е опишан правилен n-аголник. Да се најде односот на нивните

а) периметри, б) плоштини (специјално за $n = 3,4,6$).

33. Старогрчкиот математичар Архимед сметал дека плоштината на еден круг е еднаква со плоштината на квадратот чија страна е $\frac{\sqrt{154}}{14}$ од дијаметарот на тој круг; во стариот Египет, пак, се сметало дека страната на тој квадрат треба да е $\frac{8}{9}$ од дијаметарот. Кој од нив бил поблиску до вистинската вредност на бројот π?

34. Од кружна плоча со радиус 4 dm треба да се изреже правилен петаголник. Пресметај колку проценти отпадоци ќе има при тоа.

35.*Рамнокрак трапез има основи 14 cm и 2 cm и крак 10 cm; пресметај ја плоштината на кругот зафатен од опишаната кружница на тој трапез.

36. Колкава е плоштината на кругот зафатен од кружница со периметар а) 6π, б) 16π, в) 12, г) 2π.

37. Две концентрични кружници со радиуси R и r, $R > r$ формираат кружен прстен. Да се најде плоштина на прстенот, ако тетивата на поголемата кружница што ја допира помалата - има должина 2 cm.

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

VI. КОРЕНУВАЊЕ

VI.1. **1.** Под б), в) и г). **2.** Под б) **4.** Под а) и г). **5.** Под а), б) и г). **6.** а) 5. б) 3. в) $\sqrt[4]{-4}$ нема смисла. **7.** а) –7. б) 9. в) 4. г) 3. **8.** Под а), б) и г). **10.** а) 2 и –2. б) 2. **11.** Имаат еднакви вредности.

VI.2. **1.** б) $\sqrt[9]{a^6b^3}$. **3.** $(\forall a \in \mathbf{R}^+)\ (\forall m, n, p \in \mathbf{N})\ \left(\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}\right)$ **6.** б) $\sqrt[8]{x^4}$; $\sqrt[8]{x^4y^6}$ и $\sqrt[8]{x^5y^3}$. **8.** Сите равенства се точни. б) $\sqrt[3]{8 \cdot 27} = \sqrt[3]{216} = 6$ и $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{27} = 2 \cdot 3 = 6$.

VI.3. **1.** а) $\sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[3]{125} = 10 \cdot 5 = 50$. **2.** $\sqrt[7]{x^5}$. **3.** б) $\sqrt[12]{x^5y^2}$. **4.** а) $\sqrt[10]{1440x^2y^5z}$. **7.** $\sqrt[5]{xy}$. **8.** в) $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$. **10.** а) 10. б) 5. в) $x + 1$. **11.** а) $\sqrt{101^2 - 20^2} = \sqrt{(101-20)(101+20)} = \sqrt{81 \cdot 121} = 9 \cdot 11 = 99$. **17.** а) $\sqrt[3]{a^3 \cdot a^2} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a\sqrt[3]{a^2}$. в) $a\sqrt[3]{a^2}$.

VI.4. **1.** а) $b^5\sqrt[7]{b^3}$ г) $10\sqrt{2}$. **2.** б) $\sqrt[5]{x^{17}}$. г) $\sqrt{27}$. **3.** а) $\sqrt[4]{\frac{x^3}{y^3}}$ б) $\sqrt[5]{\frac{a^7}{b^{13}}}$ **4.** в) $\frac{1}{y^3}\sqrt[6]{5xy^3}$. **6.** в) $\frac{a^2}{b^2}\sqrt[5]{3b^3}$. **7.** б) $4b\sqrt{ab}$. **8.** б) $\sqrt[3]{54}$. **9.** а) $ab^2\sqrt[3]{a^2b^2}$. **10.** $\frac{1}{a+b}\sqrt{a^2 - b^2}$. **11.** б) $a^{12}b^{16}$. **12.** а) $\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{a^3}$

VI.5. **1.** $\sqrt[7]{a^4b^6}$. **2.** б) $(\sqrt[6]{xy})^3$. **3.** а) $\sqrt[20]{x}$. б) $\sqrt[6]{a^2b}$. в) $\sqrt[24]{x^9}$. **6.** б) $(\sqrt[12]{x^3y^4})^2 = \sqrt[12]{x^6y^8}$. **7.** а) $x = \sqrt[3]{a}$. б) $x^2 = \sqrt[3]{b}$.

VI.6. **1.** а) $\sqrt[3]{4^6}$. **2.** б) $7^{3/5}$. **3.** б) $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$. **5.** в) $(y^{5/8})^{2/5} \cdot y^{1/4} = y^{1/2}$ **6.** а) $(81 \cdot 16)^{-1/4} = \frac{1}{(81 \cdot 16)^{1/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{81 \cdot 16}} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$. **12.** $\left(\frac{1}{81}\right)^{-1/2} = 81^{1/2} = \sqrt{81} = 9$. **13.** Цели рационални изрази се под а), б) и г).

VI.7. **1.** Под а), б) и в). **2.** $x + 1 \geq 0$; $x \geq -1$. **3.** Под а) и в). **5.** а) $3\sqrt{20} = 2\sqrt{4 \cdot 5} = 6\sqrt{5}$ $8\sqrt{80} = 8\sqrt{16 \cdot 5} = 32\sqrt{5}$ **6.** а) $5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2 = \sqrt{3} + 2$. **14.** а) $\sqrt[12]{a^4}$ и $\sqrt[12]{b^9}$.

VI.8. **1.** $15a\sqrt{b}$. **3.** а) $6x - 9\sqrt{xy}$. в) $x - y$. **5.** в) $5a - 3\sqrt{ab}$. **6.** а) $\sqrt{81-17} = \sqrt{64} = 8$. б) $x - 2\sqrt{xy} + y$. **11.** а) 5. б) 22. г) 2.

VI.9. **1.** а) $\frac{36\sqrt{b}}{b}$ в) $(a-b)\sqrt{a+b}$. **2.** б) $\frac{5}{2}(3+\sqrt{5})$. **3.** б) $\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2} = 3+\sqrt{6}$
8. а) $A^2 = x + 1$. б) $B^2 = x - 1$. в) $2AB = 2\sqrt{(x+1)(x-1)}$. **9.** а) $9+6\sqrt{2x-1}+2x-1 = 8+6\sqrt{2x-1}+2x$. **10.** $x+5+2\sqrt{x^2-25}+x-5=2x^2$, $2x+2\sqrt{x^2-25} = 2x^2$.

VI.ЗПУ. **1.** а) $\sqrt[6]{x^7y^7}$. б) $\sqrt[12]{\frac{27b^2}{2a^2}}$ **2.** $\sqrt[4]{a^9b^6}$. **3.** а) $\sqrt[12]{x}$. в) $\sqrt[15]{x^5}$. **4.** $\sqrt[8]{(x-2y)^7}$.
5. 3. **6.** б) и в). **7.** а) Не. б) Не. **8.** а) -8. **9.** $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$.
10. $2(\sqrt{7} + \sqrt{5})$. **11.** а) $\sqrt{a+6} + \sqrt{a-6}$. б) $3a(\sqrt{a+4} + \sqrt{a})$.
в) $5(\sqrt[3]{(x+2)^2} + \sqrt[3]{x(x+2)} + \sqrt[3]{x^2})$. г) $\frac{(x+\sqrt{x})\sqrt{x-\sqrt{x}}}{x-1}$
д) $(x-\sqrt{y})\sqrt{x+\sqrt{y}}$. **12.** а) $\frac{1}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}}$ б) $\frac{1}{\sqrt{3x+x^2}-x}$
13. $\frac{4}{4-x}$ **14.** $\frac{4}{\sqrt{x-y}}$ **15.** $\frac{2}{y}(\sqrt{x-y} + \sqrt{x+y})$.

VII. ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

VII.1. **4.** б), в), ѓ). **7.** б), г). **9.** а) 0, 1, 2. б) -1, 1. **10.** За $x < 0$ дропките немаат смисла (со именител нула); а) 3. б) нерешлива.

VII.2. **3.** а) За ниедна. б) $m \neq 3$. в) $m = 3$. **4.** Равенката постои за $m \neq 0$; за $m \neq -\frac{3}{2}$ равенката има единствено решение; за $m = -\frac{3}{2}$ и $a = 0$ секој реален број е решение; $m = -\frac{3}{2}$ и $a \neq 0$ – нерешлива. **5.** $a \neq -b$, $b \neq 0$; за $a = -2b$ – нерешлива, за $a \neq -2b$ – единствено решение $x = \frac{b^2}{a+2b}$. **6.** а) Не. б) Да. в) Да. г) Да, во $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. **8.** а) $x = -2$ б) $x = 3$. в) $x = 4$. **9.** а) За $a \neq -1$: $x=-1$; за $a=-1$: секој реален број. б) Нема смисла за $a=0$ или $b=0$; за $a \neq \pm b$ има само едно решение $x = \frac{ab}{a+b}$ за $a=b$ – секој реален број е решение, за $a=-b$ – нерешлива. в) Нема смисла за $n=-1$ или $n=1$; за $n=0$ – нерешлива, за $n \neq 0$ и $n \neq \pm 1$ – само едно решение: $x = \frac{1}{2n}(n^2 - 4n - 1)$. г) За $a \neq 1$ нема решение; за $a = 1$ секој $x \neq 1$ е решение. **10.** а) $x = 5$. б) $x = -2$.

VII.3 **2.** За $a \neq 0$ равенката нема смисла, бидејќи во тој случај таа е „еквивалентна" со $x=2a$, а тогаш, пак, едната дропка во равенката има именител нула; за $a = 0$ – секој реален број е решение на равенката. **4.** а) $x=-5$. б) Нерешлива. в) $x=-4$. г) $x = \frac{3}{2}$. **5.** а) За $a \neq b$ се добива $= b(2-a) \mid (b-a)$, но треба уште и: $a \neq b|(b-1)$, односно $b \neq 2$, зошто равенката нема смисла, бидејќи во тој случај таа е „еквивалентна" со $x - 1\ 0$, односно $x - b = 0$, а тогаш првата односно втората, дропка во равенката има именител нула; за $a = b = 2$ секј реален број е решение; за $a = b \neq 2$ нерешлива.

б) За $a=3$ нерешлива; за $a\neq3$ се добива $x=\frac{7}{3-a}$, но треба уште и $a\neq-4$ зашто се добива $x=1$, а тогаш равенката нема смисла. Значи, за $a\neq3$ и $a\neq-4$: само едно решение. в) За $a=2$: секој реален број $x\neq\pm1$ е решение, за $a\neq2$: нерешлива. г) За $a=\pm b$ равенката нема смисла, за $a\neq\pm b$; $x=0$. **7.** 700 ha.
9. 73,75% **10.** 2 часа.

VII.4. 9. $a=\frac{2}{3}$, $b=2$.

VII.5. **9.** а) $x-3y-3=0$. б) $2x+y=0$.

VII.6. **4.** а) $x\in(-9,+\infty)$. б) $\left(-\infty,-\frac{3}{11}\right]$. **5.** $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. б) $\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right]$.
6. а) нема решенија. б) $[0,+\infty)$.

VII.7. **5.** а) $x\in\left(-3,-\frac{3}{2}\right)$. б) $(2, 10]$. **6.** а) $[-2, 8]$. б) $(-1, 7)$. в) $(0, 3)$. г) $\left[-\frac{38}{7},-5\right)$.

VII.8. **2.** $[1,+\infty)$. **3.** $x_1=-7$, $x_2=7$. **5.** б) $x_1=-2$, $x_2=\frac{2}{3}$. в) $x=0$. **6.** а) нерешлива. в) $x=\frac{6}{11}$ **7.** а) $x_1=-4$, $x_2=2$. **8.** $x_1=-7$, $x_2=-3$, $x_3=5$, $x_4=9$.

VII.ЗПУ. **1.** $x=\frac{9}{13}$. **2.** $x=-\frac{3}{11}$. **3.** $x=-1$. **4.** $x=-4$. **6.** 3 год. и 29 год. **7.** 400 km.
8. 915, 1525, 2135. **9.** За $a=-b$ нема решение, за $a\neq-b$, $x=-\frac{2ab}{a+b}$.
11. Равенката се сведува на $(5a-6)x=23a$; за $a=-8$, односно $a=52/5$ равенката нема смисла, бидејќи се сведува на $x-4=0$, односно $a-2x=0$, па дропките во равенката имаат именител нула. Значи, за $a=6/5$ равенката е нерешлива, за $a\neq6/5$, 52/5, −8 равенката има единствено решение. **12.** Равенката се сведува на $(2-a)x=a(6-b)$; за $b=3a$ и $a\neq6$ нерешлива; за $a=2$, $b=6$ секој реален број е решение.
14. $\left(-\infty,-\frac{15}{11}\right)$.
15. $\left(\frac{4}{19},+\infty\right)$. **16.** $\left(-\infty,-\frac{3}{11}\right]$ **17.** $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ **18.** $(-\infty, 39]$ **19.** Нема решенија
20. $(-\infty,-4)$ $(-1,+\infty)$. **21.** $(-\infty,+\infty)$. **22.** $(-2, 1)$. **23.** $(-\infty, 4)$. **24.** $(5,+\infty)$.
25. $(-\infty,-1]$. **26.** б) $x=\frac{3}{2}$. **27.** б) $x=-2$, $x=\frac{4}{3}$, $x\in(2,+\infty)$
в) $x_1=-\frac{8}{7}$, $x_2=\frac{8}{5}$. **28.** а) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$. в) $(-\infty,-2]\cup[3,+\infty)$.

VIII. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ОСТАР АГОЛ

VIII.1. **1.** 6 m. **2.** ≈ 5,2 m.

VIII.2. **1.** $\frac{3}{5}$; $\frac{y}{z}$; $\frac{a}{d}$. **5.** $c=15$; $\sin\alpha=\frac{9}{15}=0{,}6$; $\sin\beta=\frac{12}{15}=0{,}8$.

VIII.3. **1.** $\frac{4}{5}$; $\frac{y}{z}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** $a=20$; $\sin\alpha\approx0{,}6896$; $\cos\alpha=0{,}724$. **9.** 6,6 m.

VIII.4. **1.** $\frac{3}{y}$; $\frac{8}{q}$; $\frac{2h}{a}$. **2.** $\mathrm{tg}60^\circ=\sqrt{3}\approx1{,}732$; $\mathrm{ctg}60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\approx0{,}577$. **5.** а) 0,225.

б) 4,44. в) 0,9756. г) 0,22. **6.** $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; $\cos\alpha = \frac{3}{5}$; $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$; $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$.
9. а) 3. б) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

VIII.5. **1.** б) 50°. в) 35°. **3.** б) 62°. **4.** а) 1. б) $\frac{3}{7}$. **5.** 40°. **6.** в) 75°. г) 84°15′. **7.** а) 60°. **8.** б) 40°. **9.** а) 2. б) $\frac{1}{2}$. **10.** а) $2\sin\alpha$ или $2\cos\beta$. б) 0. в) $2\sin^2\alpha$ или $2\cos^2\beta$. **11.** 45°.

VIII.6. **2.** а) 0,6. **3.** а) $\cos^2\alpha$. б) $\frac{2}{\sin^2\alpha}$ **4.** б) 0,8. **5.** $\frac{7}{25}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{24}{7}$. **6.** $\frac{8}{17}$ $\frac{15}{17}$ $\frac{15}{8}$
10. а) $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{24}$ $\frac{24}{7}$ **11.** б) 0,6; 0,75; 1,33. **12.** а) $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$. **13.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1.
14. б) 0,6; 0,75; 1,33.

VIII.7. **1.** б) sin40°, sin48°, sin49°. **2.** а) cos22°. **3.** б) sin19°. в) cos55°. **4.** а) tg88°. б) tg5°. **5.** а) Не б) Да. в) Да. **6.** а) ctg48°. б) ctg39°. **7.** а) ctg57°. б) ctg10°. в) ctg35° = tg55° **8.** в) cos28°. г) sin62°. **9.** г) cos15° > sin15°. **10.** а) Да. б) Не. в) Да. г) Да. **11.** в) ctg15° г) ctg23°. **12.** а) Ненегативна. в) Негативна. г) Позитивна. **13.** а) Не. б) Да. в) Да. **14.** а) Да. б) Да. в) Да. г) Не.

VIII.9. **1.** a = 59,7; b = 36,6. **2.** c = 273,8; a = 169,2. **3.** а) c = 10; α = 36°52′; б) a = 15; α = 61°55′. **4.** 209,8. **5.** 57 cm. **6.** b = 4; h = 56,6. **7.** б) a = 83,88; b = 74,2. **8.** б) b = 642 6; c = 677,6. **9.** а) c = 26; α = 67°22′. **10.** а) b = 18; α = 53°8′. **11.** 55,25. **12.** 27,57. **13.** 41,9. **14.** 41°22′.

VIII.10. **1.** 1494 m. **2.** 36,4 m. **3.** 8°41′. **5.** 40,4 m. **6.** 21,2 m. **7.** 6,4 cm.

VIII.ЗПУ. **6.** а) $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{5}$. б) $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$. **9.** а) 15. б) $2\frac{1}{2}$. в) $\frac{1}{4}$. **11.** а) 53°24′. б) 34°15′. в) 36°. г) 72°25′. **12.** а) 83°15′ в) 35°6′. **13.** а) 2. б) 0. **14.** а) 0,6. б) 0,95. **15.** а) $\frac{21}{29}$. б) 0,6. **16.** а) $2\cos\alpha$. б) $\frac{2}{\sin^2\alpha}$. **17.** а) $\frac{35}{39}$; $\frac{12}{35}$; $\frac{35}{12}$. **18.** а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$ б) 1. **20.** а) 21; 20. б) 80; 89. в) 73; α = 41°7′. **21.** 53; 50°12′. **22.** 97.

IX. ПЛОШТИНА НА МНОГУАГОЛНИК И КРУГ

IX.1. **1.** 4. **2.** 94,68 cm^2. **3.** 6,4 cm. **4.** 42,95 dm^2. **9.** а) Ќе се зголеми пет пати б) 0,75 од неговата плоштина. **10.** 4, 9, 16, . . . пати. **11.** 580,3 cm^2. **12.** 17,2 dm^2. **13.** 48 cm^2. **14.** 96 dm^2. **15.** 126,3 dm^2, h = 10,5 dm.

IX.2. **2.** 108. **3.** 49,3 cm^2. **4.** 2,56 cm^2. **5.** а) 0,75. б) 0,1. **6.** 5%. **7.** в) 112,5. **8.** а) 63 cm^2. б) 26,2 dm^2. в) 305,85 cm^2. **9.** г) $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 39°20'$; од $P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ се добива $c = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = 8{,}24$, па од $P = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = 20{,}89$.

IX.3. **1.** 20,5; 16,6; 14,525. **2.** 2. **3.** 2,1; 4,57. **7.** 6,42. **8.** P = 1320 cm^2; r = 20,6 cm, R = 36,5 cm. **9.** 15,6.

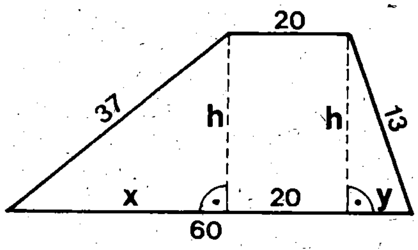
IX.4. **2.** 195. **3.** $h = 5 \cdot \text{tg}48°40' = 5{,}68$; $P = 53{,}96$. **4.** Упат. $P = \frac{1}{2} L \cdot r$, L – периметар (зошто?); $P = 48$. **6.** 140 cm^2. **7.** 142,8 cm^2; 52,1 cm. **8.** 420 cm^2; 83 cm. **10.** Упат. Низ едно теме (на помалата основа) повлечи отсечка, паралелна со еден крак, што го дели трапезот на триаголник и паралелограм; од триаголникот одреди ја висината на трапезот. $h = 1{,}2$ m, $P = 4{,}8$ m^2. **11.** $h = 12 \cdot \sin 48°50' = 9$ m; $18 - b = 2 \cdot 12 \cdot \cos 48°50' = 15{,}8$; $b = 2{,}2$ m; $P \approx 91$ m^2.

IX.5. **7.** 300 cm^2. **10.** 56 cm^2. **12.** ≈ 3 m.

IX.6. **1.** 2, 3, . . ., n пати. **2.** $2 \cdot \pi$cm $\approx 6{,}28$ cm. **4.** 19,5 cm. **5.** Ќе имаат еднакви плоштини. **6.** 2. **7.** ≈ 50 cm^2. **8.** 512 cm^2. **10.** $P = \frac{1}{2} r \cdot L$.

IX.7. **2.** π. **3.** $\alpha = 35°20' = 2120'$; $P_\triangle = \frac{1}{2} r^2 \sin 35°20'$; $P = \frac{100 \cdot 3{,}4 \cdot 2120}{360 \cdot 60} - \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 0{,}57833 \approx 1{,}9$ cm^2. **5.** 254,3 m^2. **6.** $\approx 45°48'$. **7.** 0,2 m^2.

IX.ЗПУ. **1.** $a = 9$ m, $b = 4$ m, $d = 9{,}85$ m. **2.** а) 100 пати. б) 4 пати. **3.** б) 62,35. **5.** $L = 70{,}8$; $P = 312$. **6.** 13,25. **8.** 20 cm. **9.** 24 cm. **12.** Упат. Отсечката е средна линија на триаголникот што е паралелна со основата $\overline{AB} = c$. **14.** $P = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta = 43{,}4$ cm^2. **15.** б) 717,8 cm^2. **16.** а) $h = \frac{a}{2} \cdot \text{tg}\alpha$, $P = \frac{a^2}{4} \text{tg}\alpha = 3607$. г) $P = \frac{1}{2} \cdot b^2 \cdot \sin\gamma = 16$. **18.** $5\sqrt{3}$. **19.** б) 140,4. **20.** б) $r = 5{,}5$; $R = 23{,}125$. **21.** 120. **22.** 11; 17,1. **24.** 32,5. **25.** 34. **26.** 6 и 8. **27.** Упат. Ако α и β се прилегнати агли на основата и h – висина на трапезот, тогаш $a = b + h\,(\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta)$; направи цртеж и спушти ги висините од горните темиња, $P \approx 214$. **28.** Упат. Од цртежот се гледа дека $x + y = 40$, $h^2 = 37^2 - x^2$, $h^2 = 13^2 - y^2$, односно $13^2 - y^2 = 37^2 - x^2$, т.е. $x^2 - y^2 = 1200$. Потоа, $(x+y)\,(x-y) = 1200$, $40(x-y) = 1\,200$; сега од $x+y = 40$ и $x-y = 30$, се добива $x = 35$, $y = 5$, па и $h = 12$. $P = 480$.



29. Упат. Зададената дијагонала е оска на симетрија на делтоидот (зошто?). $P \approx 118{,}7$. **31.** а) 67,7 dm^2. б) $P = n \cdot r^2 \cdot \text{tg}\frac{180°}{n} = 300$ cm^2. **32.** а) $\cos\frac{180°}{n}$ б) $\cos^2\frac{180°}{n}$. **34.** 24%. **35.** Упат. Центарот на опишаната кружница лежи на симетралата на основите. **36.** а) 9π. б) 64π. г) π. **37.** π. **38.** 57°36'. **39.** 380 cm^2.

СОДРЖИНА

РО за издавање на учебници и наставни средства „Просветно дело" – Скопје, ул. Вељко Влаховиќ бр. 15 Градски ѕид блок 4.

За издавачот:
д-р Крсте Ангеловски

*

д-р Наум Целакоски * д-р Живко Мадевски
МАТЕМАТИКА
за природно-математичка струка

*

Лектура
Надежда Манојловиќ

*

Технички уредник
Новко Груевски

*

Илустрации
дипл.инж.арх. Зоран Таниќ

*

Корицата ја илустрирал
Илија Богоевски

*

Коректор
Благоја Гагалевски

*

Ракописот е предаден во печат во ноември 1989 година. печатењето е завршено во февруари 1990 година. Обем: 148 стр. Формат: 17 x 24 cm. Тираж: 10.000 примероци. Книгата е отпечатена во ГИП „Гоце Делчев" – Скопје. (6915/2379).

Цената е одобрена со решение на Републичкиот секретаријат за општостопански работи и пазар.

CIP – Каталогизација во публикација Народна и универзитетска библиотека „Климент Охридски" – Скопје

51(075.3)

ЦЕЛАКОСКИ, Наум
Математика : за природно-математичка струка / Наум Целакоски, Живко Мадевски ; [илустрации Зоран Таниќ]. – Скопје Просветно дело, 1990. – 147 стр. : илустр. ; 24 см

1. МАДЕВСКИ, Живко