

ГЕОМЕТРИЈА ОКА И МОЗГА

*Prof. dr Leopold Verstraelen**

0. КРАТАК ПРИКАЗ САДРЖАЈА, ПОРЕКЛО И ЗНАЧЕЊЕ

Постоји велика интеракција између функционисања природног света и закона и деликатности мишљења (вид. [1]). Најважнији и чврсто прихваћени делови наше опште спознаје света укључују математичке моделе. И као што Chern започиње свој увод за [3]: „Док алгебра и анализа обезбеђују темеље математике, геометрија јој је у срцу.“ Геометрија је област математике чији главни извор интуиције представља људска визуелна перцепција. Према томе, чини се прикладним да би геометрија унеколико требало да допринесе бољем разумевању визуелне перцепције. У овом чланку, дат је један природан геометријски модел за основну визуелну перцепцију човека. Његов смисао је у томе, да у суштини, гледајући дистрибуцију светлости значи да гледамо у екстремне њених фундаменталних карактеристика облика. Основна људска визуелна перцепција овде се схвата и као резултат и основа еволуције и функционисања људског опажања као таквог. Људску визуелну перцепцију која се односи на активности ока и мозга разматрао је Gregory у [4]. Овај модел је настао, а даље је такође приказан у смислу оптичких илузија. У овом чланку, у вези тога биће дато и неколико коментара генералне природе. Заиста се надам да ће неки читаоци уживати да разматрају овај модел у целом контексту фасцинантне науке о виду.

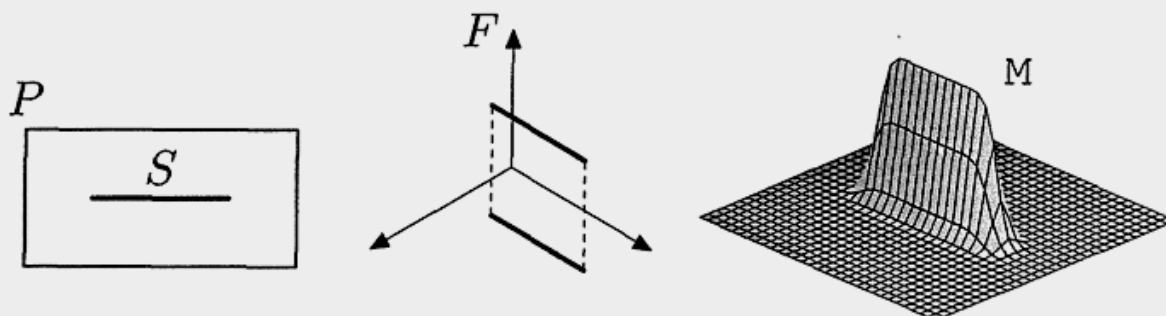
1. УВОД

Важи принцип визуелне перцепције да „можемо видети више него што око досегне“. Један инспиративни општи поглед на то шта виђење значи, дат је књизи Gregory-ја „Око и мозак“ [4]. У овом чланку, дао сам један модел (вид. [5]) за то како се региструје оно што „око досегне“, или другим речима, за основни вид на начин на који се он развија кроз активности ока и мозга код биолошких врста и јединки обдарених чулом вида (3). Његова основа је стварни научни опис тога шта су уствари визуелна опажања, што је посебно добро формулисано од стране Koenderinck-а и van Doorn-а [6] (2). Парафразирајући Feunman-ово казивање да нам се „Природа обраћа језиком математике“, то можемо илустровати тиме да „Природа воли да буде гледана очима и мозговима геометара“ у циљу објашњења оптичких илузија. Помоћу овог модела, начинићу неколико првих коментара о значењу појма основног вида, између осталог у вези са вештачким видом и визуелним уметностима (4). Схватајући озбиљно овај геометријски модел, а следећи Gregory-јев приступ [4, 5], мислим о визуелној перцепцији као о хипотезама које се могу сагледати у складу са информацијом добијеном помоћу основног вида (5).

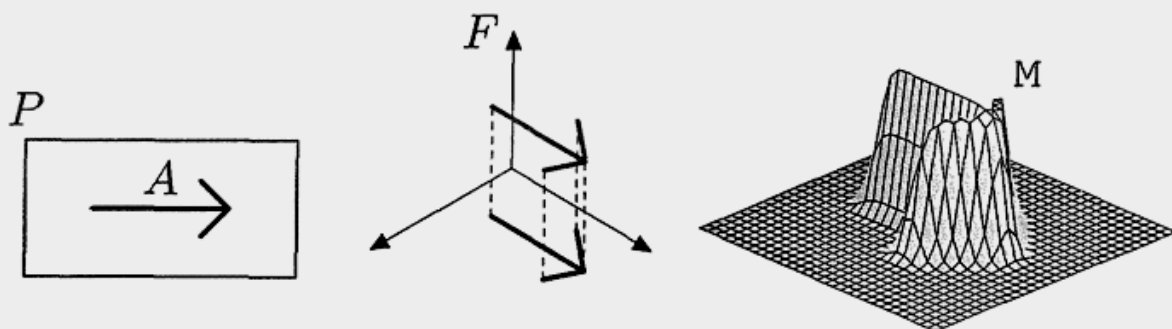
* K.U. Leuven - K.U. Brussel Center PADGE, (Pure and Applied Differential Geometry), Departement Wiskunde, Celestijnenlaan 200B, B 2001, Leuven, Belgium

2. О ПРИРОДИ ВИЗУЕЛНОГ ОПАЖАЊА

Уочимо статичку раванску слику I која је у математичкој реалности дата помоћу „светлосне“ функције F , (тј. ако су x и y Декартове координате у слика-равни P , тада је $F(x, y)$ светлосна енергија у тачкама (x, y) у P), или, еквивалентно, помоћу површи $N : z = F(x, y)$, графа функције F у 3-димензионалном Еуклидском простору E (где су x, y, z Декартове координате). Таква слика I је уствари посматрана у физичкој реалности као „светлосна“ функција L , или, еквивалентно, као површ $M : z = L(x, y)$ у E , које су повезане респективно са F и N поступком повећања глаткости (рецимо, неком врстом дифузије). И, како год гледали на вид, свакој слици I у P одговара „визуелно стимулисана површ“ M у E која описује шта се уствари може видети у слика-равни P . На сликама 1 и 2 ово је преточено у примере за (1): линијски сегмент S дужине l и за (2): „стрелицу“ A са S као дршком и према томе дужине $a = l$.



Слика 1.



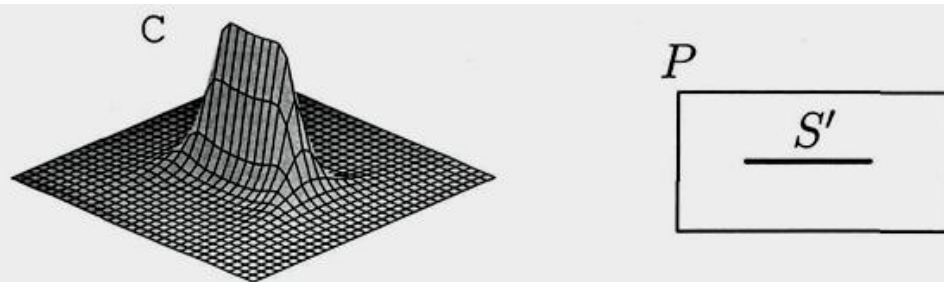
Слика 2.

И као што су Koenderink и van Doorn [6] формулисали у својим коментарима о природи опажања: претпоставка о егзистенцији „реалне“ слике I или F или N је бесмислица, или пак: ми не знамо ништа о „реалној“ слици I у P осим опажања од L или M . И с обзиром на моје разумевање литературе о виду, многи људи заокупљени са неартистичким студијама о виду, од самог почетка њихових спекулација које се односе на спознају прете да унесу конфузију у ове физичке и математичке реалности опажања. Прецизније, мислим да су

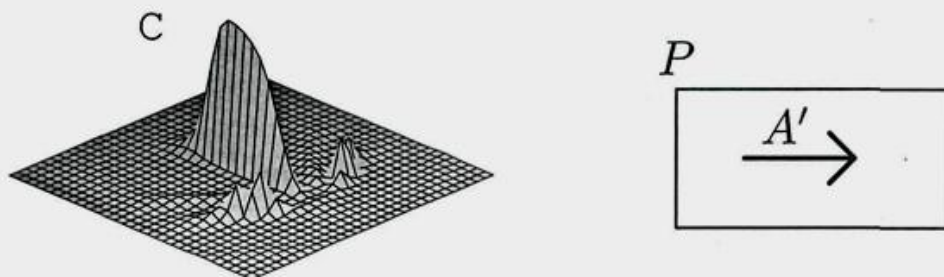
то такве конфузије које су у основи извесног броја „мистериозних појава“ у свету визије и посебно у свету многих такозваних оптичких илузија, које ћу у наставку покушати да објасним.

3. ГЕОМЕТРИЈСКИ МОДЕЛ ЗА ОСНОВНИ ВИД

У било ком случају, гледајући „реалну“ слику I у равни P , све што ми уствари физички опажамо је оно што је формално добро описано помоћу визуелно стимулиране површи M у Еуклидском 3-димензионалном простору E (најмање у квалитативном смислу; каснији коментари показује како се може добити добра квантитативна верзија тога у циљу да се бавимо овим на мање очигледан начин, између осталог у не-Еуклидској поставци). Фундаментално питање у природној филозофији је следеће: „Шта заправо региструје наш визуелни систем при посматрању визуелно стимулисане површи M у E ?“ То нас доводи до питања како наш визуелни систем региструје слике I и да би притом требало обратити пажњу на важне карактеристике облика одговарајућих површи M у E . Диференцијална геометрија је област математике чији је главни циљ од самог почетка увек био да опише и објасни облик таквих површи у Еуклидским просторима и њихових разноврсних уопштења. Најважније скаларне карактеристике облика проучаване у диференцијалној геометрији су разни „појмови кривина“: од главних кривина Euler-Meusnier-а, њиховог производа K (Gauss-ова кривина), њихове средње вредности H (средња кривина Germain-а), средње вредности њихових квадрата C (Casorati-јева кривина), итд., за површи M у E , преко њихових афиних, пројективних, изотропних, . . . , аналогона, до кривина Riemann-а и В.У. Chen-а за „површи“ произвољне димензије [1, 3, 8]. И, у математици као и њеним применама, генерално, од интереса је посматрати екстремне вредности скаларних величина које су релевантне за проблеме који се проучавају. У овом општем контексту, заиста, најзначајнији аспекти за облик визуелно стимулисане површи дати су помоћу екстрема њихових кривина. Извесно геометријско познавање Еуклидских кривина површи у комбинацији са посматраним проблемом, води ка Casorati-јевој кривини C [9, 10] као прилично погодном избору између осталих фундаменталних карактеристика облика визуелно стимулисане површи M , која ће се надаље разматрати. На овом месту довољно је нагласити да је Casorati-јева кривина C површи M у E најједноставнија врста кривине површи која, у сагласности са основном интуицијом, у свакој тачки мери одступање површи M од тога да буде равна, тј. коректно мери проширење до кога је M закривљена што је у супротности са тим да је M слична равни. У свакој тачки (x, y) из P , визуелно стимулисана површ M у E која одговара некој слици I има Casorati-јеву кривину $C(x, y)$. Дакле, свака равна слика I поседује визуелно стимулисану површ $M : z = L(x, y)$ у Еуклидском 3-димензионалном простору E чији је облик добро представљен помоћу њој придружене Casorati-јеве поври $z = C(x, y)$ у E . Сlike 3 и 4 показују Casorati-јеве површи за примере 1 и 2, исто као што сегменти формиранни помоћу њихових главних релативних екстрема, постају у P линијски сегмент S' и стрелица A' , респективно, чије су дужине l' и a' , где је у ствари $a' < l'$.



Слика 3.



Слика 4.

Најављени модел за основни вид је следећи. Наш видни систем „трансформише“ визуелне податке, које замишљамо математички, као у датим примерима, у облику линијског сегмента S и стрелице A , и које ми уствари опажамо као визуелно стимулисане површи M у E , у слике које се састоје од екстрема Casorati-јевих кривина површи M које у математичким терминима, у случају датих примера, представљају линијски сегмент S' и стрелицу A' . Уопште и укратко: гледајући неку слику I у равни P , наш видни систем опажа визуелно стимулисану површ M у E , на основу које постајемо свесни одговарајује слике I' у P која је наше стварно регистровање тог визуелног опажања. Чини се да све оно што се дешава са многим оптичким илузијама, а посебно са врстом оптичких илузија које се могу описати упоређивањем онога што је визуелно доживљено са оним што се може материјално оценити (као што су илузије Muller-Lyer-a, Hering-a, Oppell-Knudt-a, Zollner-a, Poggendorf-a, Judd-a, Ponzo-a, Ebbinghaus-a, Ehrenstein-a, Orbison-a, Kanosz-a, Schumann-a, Bristol-safe зида (видети крај чланка), ходника, ... [4, 11, 12]), је супротстављање математичкој идеализацији реалних слика I са математичком идеализацијом њихових основних перцепција I' . Или, другачије, чини ми се да такве илузије настају помоћу прећутног и догматског претпостављања да, када гледамо неку слику I у равни P , помоћу основног вида требало би да региструјемо прецизно баш ту слику I . Међутим, када гледамо слику I у P , опажање које чини наш визуелни систем је одговарајућа визуелно стимулисана површ M у E , и одатле, помоћу основног вида, ми уствари региструјемо слику I' , која је одређена најважнијим карактеристикама површи M у E . За стрелицу, према примеру, упоређивање $A(-)$ и $A'(\dots)$ је према томе квалитативно дато са:



Такође, на пример, имамо ($I = -$, $I' = \dots$):



и као што је горе илустровано за Muller-Lyer-ову илузију, где видимо стрелицу као краћу него што уствари јесте, слично и остале такве илузије губе своју мистерију.

4. НЕКИ КОМЕНТАРИ И НАПОМЕНЕ

Основни вид је основа активност ока и мозга која визуелно региструје оно што уствари видимо. У квалитативном смислу, за статичке равне слике, ово се може добро моделирати захваљујући геометријским карактеристикама визуелно стимулираних површи које представљају природни формални опис визуелних опажања. Свакако, претворити дати модел у одговарајући квантитативни модел за основни вид, потребно је пажљиво урадити читав низ тестова, на пример, димензионирање и изглађивање L и M , процена C помоћу осталих погодних кривина и модификација Еуклидске метрике у P и узимајући у 3-простору површ M у смислу анизотропије визуелног поља с обзиром на специјални карактер z -правца. Погодна експериментална експертиза и подаци сакупљани годинама, посебно они који се односе на оптичке илузије, су евидентно и веома корисни у овом смислу. Код свих бића обдарених видом, наслеђем и кроз индивидуално искуство, од којих код оба у најширем смислу културни фактори који одређују значење вида могу имати велики утицај, развој основног вида води до индивидуалног видног система за регистровање. Међусобно упоређени, ови индивидуални визуелни системи могу бити више или мање слични према горе наведеним факторима, што се може одразити на моделу са мање или више јасним резликама у вредностима једне или више геометријских карактеристика које су ту присутне. Muller-Lyer-ова илузија се доживљава мање или више драматично код особа са прилично различитим културним пореклом (Deregowski [13]), што би на моделу одговарало визуелно стимулираним површима које резултирају од веће или мање глаткости. На основу изведених експеримената, распон визуелних искустава у односу на постојаност која се односи на сличне посматраче и такође у односу на остале међу-културалне разлике основног вида чини се веома значајним. Посебно то може помоћи да се разјасне процеси ока и мозга који су укључени у формирање и развој система основног вида. Због горе наведених разлога, Casorati-јева кривина површи M у E се у овом моделу користи радије него на пример Gauss-ова кривина K или средња кривина H које с правом заслужују највише пажње у традиционалним проучавањима површи у 3-димензионалном Еуклидском простору до сада (K у смислу унутрашње диференцијалне геометрије и H у смислу спољашње диференцијалне геометрије која се односи на варијационе проблеме физичке површи-тензије). Поред тога, можемо се на кратко осврнути на следећи коментар који се тиче K , због чега се ово може боље објаснити него за H . За оптичку илузију Mach-а [12], одговарајућа визуелно стимулирана површ M у E је цилиндар чије су изводнице хоризонталне праве линије, одакле следи да је једна од његових главних кривина свуда једнака нули. Према томе Gauss-ова кривина K од M је такође идентички једнака нули, мада

је површ M закривљена у уобичајеном значењу те речи у складу са променом боје која се јавља у Mach-овој илузији. Дакле, како је K константна функција у овом случају, или, еквивалентно њен граф је хоризонтална раван у E , нема смисла тржити њене екстреме. С друге стране, на пример, екстремни Casorati-јеве кривине ове површи M управо дају критичне линије у илузији Mach-а. Што се тиче људског вида и уметности, може се на пример нагласити да евентуална присутност слабих кривинских екстрема од M објашњава појаву осетљивости вида као што је познато на пример код уметничких слика, (вид. [14, 15, 16]). Што се тиче људског вида и вештачког вида треба нагласити да је за дату слику I веома изводљиво омогућити машинама да на одговарајући начин виде слику I' коју виде људи када гледају у I . Овоме би се могла посветити даља пажња, на пример у неурологији. Горње дискусије су ограничене на основни вид статичких $2D$ -слика. За статичке $3D$ -слике и за покретне $2D$ - и $3D$ -слике на сличан начин се могу направити геометријски модели, овом приликом помоћу кривина „генералисаних“ површи.

5. ЈЕДНА АНАЛОГИЈА И МИШЉЕЊЕ

Размотримо следећу врсту аналогије. Посматрајући фотографије Едингтонове експедиције из 1919. године, можемо видети на сунчевом тамном диску бљештаву тачку светлости емитовану од звезде која је смештена иза Сунца када се посматра са наше позиције на Земљи. Ово није илузија нити погрешан опажај: ми видимо светлост ове звезде на сунчевом диску једино зато што је она тамо. Ово је истински опажај физичке реалности која је тако добро моделирана помоћу Ајнштајнове теорије релативности. Али ако исту фотографију интерпретирамо помоћу модела Њутнове физике ваљало би је схватити као неку илузију. Од суштинске је важности да адаптацијом наше интуиције са ситуација у физици на геометријску реалност закривљеног релативистичког простор-времена, опажања појава каква је на пример показана на Едингтоновим фотографијама постају заиста разумљива. Схватање оптичких илузија помоћу горњег модела за основну визуелну перцепцију у крајњем случају може послужити да, исто тако, адаптирамо нашу интуицију према визиелним ситуацијама. У том циљу, можда би следеће било од помоћи. За дату слику I у равни P , свакако у случају када I није превише компликована, лако можемо ментално замислити или грубо нацртати одговарајућу визуелно стимулисану површ M у E мислећи о „глаткости“ или „филтрирању“. За оне који нису блиски са овим процесима, један користан начин да сагледају визуелно стимулисану површ M која одговара слици I био би да замисле водопаде који настају од воде која тече са нивоа веће светлосне енергије на нивое мање светлосне енергије, при чему се ти нивои могу грубо придружити слици I (ови нивои су одређени функцијом F , или пак, ови водопади потичу од водених токова на површи N у E). На оба начина може се добити добра импресија површи M у E која описује физичко опажање које чинимо када гледамо неку слику I у равни P . Тада се може помало увежбавати лоцирање тачака и линија и кривих које су формиране доследно помоћу тачака где су ове површи максимално закривљене у поређењу са тим како су оне закривљене у околним тачкама. Према томе, може се добити идеја слике I' у P као што је она дата помоћу основног вида када гледамо у I . Покушао сам горе да објасним моје убеђење како су у принципу људска основна визуелна опажања повезана са физичком реалношћу и тврдио да се формирање система основног вида развијало кроз активности ока и мозга. Сада подсећамо да је Gregory-ев приступ проучавању

перцепције заснован на схватању перцепције као „конструисања хипотеза које се могу остварити произвођењем симболичких структура које одговарају физичкој реалности“ [7]. На основу горе реченог, овај приступ може се унеколико слободније преформулисати као: визелна перцепција је конструкција, инспирисана сликама регистрованих помоћу основног вида, хипотеза које стварају визуелне слике које одговарају физичкој реалности у сагласности са нашим претходно стеченим искуствима те исте реалности. Чини се да није губљење времена посматрати на овај начин оно шта се дешава у универзуму студија о визуелној перцепцији која је, примера ради, недавно прегледно дата у [17].

Захвалност. Веома сам захвалан колегама психолозима из Leuven-a, G.d'Ydewalle-у и J. Wagemans-у, који су ме, тим редом, упознали са оптичким илузијама и за многе дискусије о људској перцепцији и виду; члановима PADGE-a, P. Dhooghe, F. Dillen-у, B. Dubrov-у (из Leuven-a) и Theo Moons-у (из Брисела) за дискусије о људском и вештачком виду, и још B. Dubrov-у за рад на компјутеру у вези предложеног модела; сликару антверпенске Академије лепих уметности, S. Servellon-у за разне дискусије о перцепцији и визуелним уметностима; професору R. Gregory-ју за дискусије о визуелној перцепцији у Бристолу.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] R. Penrose : *The Geometry of the Universe*, in *Mathematics Today* (ed. L.A. Steen), Vintage Books, New York, 1980.
- [2] F.E. Browder and S. Mac Lane : *The Relevance of Mathematics*, in *Mathematics Today* (ed. L.A. Steen), Vintage Books, New York, 1980.
- [3] S.S. Chern : *Introduction to the Handbook of Differential Geometry*, Vol. 1 (eds. F. Dillen and L. Verstraelen), North Holland, Amsterdam, 2000.
- [4] R.L. Gregory : *Eye and Brain, The Psychology of Seeing*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
- [5] L. Verstraelen : *A remark on visual illusions and neuroscience : "basically, we only see what there is to be seen"*, Psychological Reports 297, Lab. of Experimental Psychology, K.U.Leuven, 2003.
- [6] J.J. Koenderink and A.J. van Doorn : *The Structure of Relief*, Adv. Imag. Electr. Physics 103, 65-150 (1998).
- [7] R.L. Gregory : *Perceptions as hypotheses*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. B 290, 181-197 (1980).
- [8] J.J. Koenderink : *Solid Shape*, The MIT Press, Cambridge MA, 1990.
- [9] Casorati, *Nuova definizione dello curvature delle superficie e suo confronto con quella di Gauss*, Rend. Inst. Matem. Accad. Lomb. 2, 22 (1867-68).
- [10] J.J. Koenderink and A.J. van Doorn : *Surface shape and curvature scales*, Image Vision Computing 10, 557-564 (1992).

- [11] B. Gillam : *Illusions at Century's End*, in *Perception and Cognition at Century's End* (ed. J. Hochberg), Acad. Press, San Diego, 1998.
- [12] D.M. Eagleman : *Visual illusions and neurobiology*, *Nature Neuroscience Reviews* 2, 920–926 (2001).
- [13] J.B. Derogowski : *Illusion and Culture*, in *Illusion in Nature and Art* (eds. R.L. Gregory and E.H. Gombrich), Duckworth, London, 1973.
- [14] A.P. Ginsburg : *Spatial filtering and visual form perception*, in *Handbook of Perception and Human Performance*, Vol. 2 (eds. K.R. Boff, L. Kaufman, J.P. Thomas), Wiley, New York, 1986.
- [15] I. Kovacs and B. Julesz : *Perceptual sensitivity maps within globally defined visual shapes*, *Nature* 370, 644–646 (1994).
- [16] S. Servellon : *De sensibele schijn en haar meting*, CAS Cultuur Communicatie, K.U.Brussel, 2001.
- [17] J. Wagemans, F.A. Wichmann and H. Op de Beeck : *Visual Perception I : Basic Principles*, in *Handbook of Cognitive Psychology* (eds. K. Lamberts and R. Goldstone), Sage Publications, London, 2003.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2004/05 година