Регионален натпревар 2012

I година

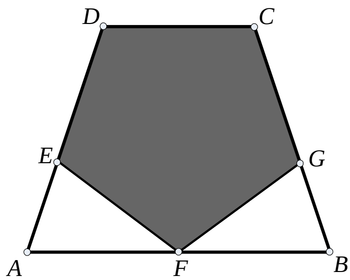
1. Докажи дека:

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}=\frac{1}{xyz}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}&=-\frac{1}{x(x-y)(z-x)}-\frac{1}{y(x-y)(y-z)}-\frac{1}{z(y-z)(z-x)}\\&=-\frac{yz(y-z)+xz(z-x)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}\\&=-\frac{}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}\\&=-\frac{-z(x-y)(x+y)+z^2(x-y)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}\\&=-\frac{(x-y)(-zx-zy+z^2+xy)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}\\&=-\frac{(x-y)(x(y-z)-z(y-z))}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}\\&=\frac{(x-y)(y-z)(z-x)}{xyz(x-y)(y-z)(z-x)}=\frac{1}{xyz}\end{aligned}$$

2. На цртежот е прикажан правилен петаголник $CDEFG$ кој е во внатрешноста на трапезот $ABCD$. Докажи дека $\overline{AB}=2\overline{CD}$.



Решение. Збирот на надворешните агли на правилниот петаголник е 360°. Според тоа, било кој надворешен агол е

$$360^\circ:5=72^\circ,$$

(надворешните агли се еднакви меѓу себе) па затоа било кој внатрешен агол е еднаков на $180^\circ-72^\circ=108^\circ$. Значи, $\measuredangle EDC=108^\circ$ и $\measuredangle EAF=72^\circ$. Бидејќи $\measuredangle AEF=72^\circ$, добиваме дека ΔAFE е рамнокрак со основа AE. Триаголниците ΔAFE и ΔGFB се складни (имаат исти агли е една иста страна), па затоа $\overline{EF}=\overline{FG}=\overline{AF}=\overline{FB}$. Бидејќи петаголникот е правилен, добиваме $\overline{AF}=\overline{FB}=\overline{DC}$, од каде слесува $\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{FB}=\overline{CD}+\overline{CD}=2\overline{CD}$.

3А. Докажи дека

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

Решение. Нека $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}$ и $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}$. Ќе покажеме дека $A<B$. Имено:

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}<\frac{3}{4},\ \ldots,\ \frac{99}{100}<\frac{100}{101},$$

бидејќи $\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$, што е еквивалентно со $(n-1)(n+1)=n^2-1<n^2$ за секој природен број n. Од друга страна

$$AB=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101}=\frac{1}{101},$$

па според тоа

$$A^2<AB=\frac{1}{101},$$

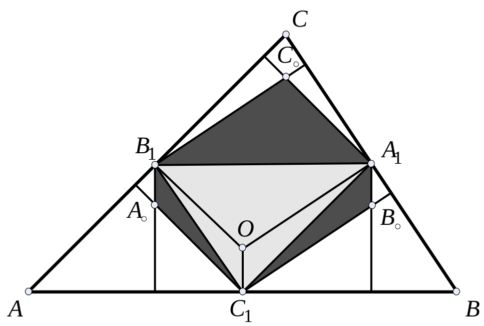
од каде се добива бараното неравенство

$$A<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}.$$

4А. Од средините A_1, B_1 и C_1 на страните на триаголникот ABC, се спуштени нормали кон секоја од останатите две страни. Докажи дека плоштината шестаголникот ограничен со тие нормали е еднаква на половина од плоштината на триаголникот.

Решение. Бидејќи $\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{C_1A_1}$ се средни линии на триаголникот ABC, важи

$$P_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}P_{ABC}.$$



Од точките A_1, B_1 и C_1, повлекуваме нормали на страните $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$. Тие се симетрали на страните и се сечат во центарот на опишаната кружница O. Четириаголникот $A_0C_1OB_1$ е паралелограм и затоа $P_{A_0C_1B_1}=P_{C_1OB_1}$. (види цртеж) Аналогно $P_{C_1B_0A_1}=P_{C_1A_1O}$ и $P_{A_0C_1B_1}=P_{C_0B_1A_1}$. Следува плоштината на шестоаголникот е два пати поголема од плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$, што и требаше да се докаже.

3Б. Докажи дека за секој природен број n изразот $n^{19}-n^7$ е делив со 30.

Решение. Да означиме $A=n^{19}-n^7$. Со разложување добиваме

$$\begin{aligned}A&=n^{19}-n^7=n^7(n^{12}-1)=n^7(n^6-1)(n^6+1)\\&=n^7(n-1)(n+1)(n^4+n^2+1)(n^2+1)(n^4-n^2+1)\end{aligned}$$

$$=(n-1)n(n+1)(n^2+1)B, \quad B\in\mathbb{N}.$$

При тоа имаме:

а) Бидејќи n и $n+1$ се последователни природни броеви, еден од нив е парен, па $n^{19}-n^7$ е делив со 2 за секој $n\in\mathbb{N}$.

б) Еден од трите последователни броја $n-1, n$ и $n+1$ е делив со 3, па $n^{19}-n^7$ е делив со 3 за секој $n\in\mathbb{N}$.

в) ако $n=5k, k\in\mathbb{N}$, $\quad n$ е делив со 5,

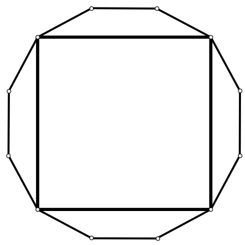
ако $n=5k\pm1, k\in\mathbb{N}$, $\quad n^2-1$ е делив со 5,

ако $n=5k\pm2, k\in\mathbb{N}$, $\quad n^2+1$ е делив со 5.

Според тоа $n^{19}-n^7$ е делив со 5 за секој $n\in\mathbb{N}$.

Бидејќи 2, 3 и 5 се попарно заемно прости, добиваме дека $30\,|\,n^{19}-n^7$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

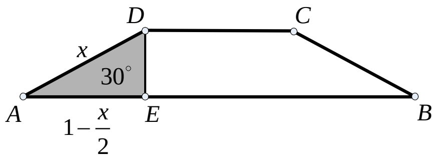
4Б. На страните на квадрат со должина 2, конструирани се од надворешната страна, рамнокраки трапези, така што темињата на сите трапези се истовремено темиња на правилен дванаестоаголник.



Колку е периметарот на дванаестоаголникот?

Решение. Да разгледаме еден трапез од дванаестаголникот. Внатрешниот агол на дванестоаголникот е

$$\frac{12-2}{12}\cdot180^\circ=150^\circ.$$



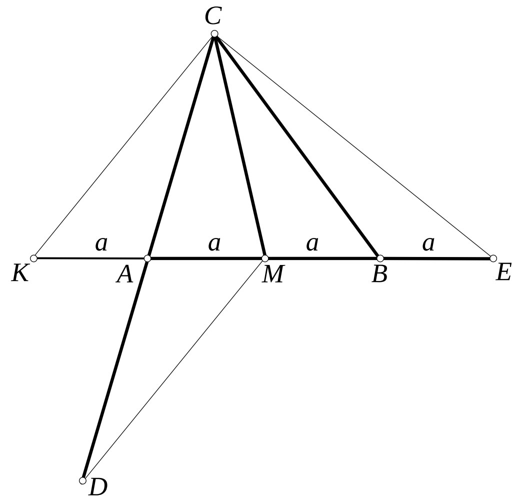
Следува $\alpha=30^\circ$. Од $|BC|=|CD|=|DA|=x$ и $|AB|=2$, следува $|AE|=1-\frac{x}{2}$. Од друга страна за правоаголниот триаголник AED, со агли 30° и 60°, важи $|AE|=x\frac{\sqrt3}{2}$. Значи $x\frac{\sqrt3}{2}=1-\frac{x}{2}$, односно $x=\frac{2}{1+\sqrt3}=\sqrt3-1$. Затоа периметарот на дванестоаголникот

$$L=12x=12(\sqrt3-1).$$

II година

1А. Во триаголникот ABC должината на тежишната линија CM е еднаква на должината на страната AB. На продолженијата на страните AC и AB се избрани точки D и E соодветно, така што $\overline{AD}=\overline{AC}$ и $\overline{BE}=\overline{BM}$.

Докажи дека DM и CE се заемно нормални.



Решение. Воведуваме ознака $\overline{BM} = a$. Нека K е точка симетрична на точката M во однос на точката A. Тогаш

$$\overline{KM} = \overline{MC} = \overline{ME} = 2a.$$

Во триаголникот KCE должината на тежишната линија CM е половина од страната кон која е повлечена. Значи, триаголникот KCE е правоаголен, па важи $KC \perp CE$.

Четириаголникот $DMCK$ е паралелограм, бидејќи неговите дијагонали се половат. Според тоа $KC \parallel DM$, од каде добиваме $DM \perp CE$, што и требаше да се докаже.

2. Определи ги сите цели броеви a и b за кои што

$$7a + 14b = 5a^2 + 5ab + 5b^2.$$

Решение. Равенката можеме да ја запишеме како квадратна равенка по b, при што

$$5b^2 + (5a - 14)b + 5a^2 - 7a = 0.$$

Нејзини решенија се

$$b_{1/2} = \frac{14-5a \pm \sqrt{(5a-14)^2 - 20(5a^2-7a)}}{10} = \frac{14-5a \pm \sqrt{196-75a^2}}{10}.$$

За да решенијата се реални, доволно е $196 - 75a^2 \geq 0$, т.е. $a^2 \leq \frac{196}{75}$. Значи,

$$-\frac{14}{5\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{14}{5\sqrt{3}}.$$

Но, a е цел број, па можни вредности за a се $a \in \{-1, 0, 1\}$. Со замена на a во $b_{1/2}$, добиваме

1° $a = -1$ $\Rightarrow$ $b_1 = 3$, $b_2 \notin \mathbb{Z}$

2° $a = 0$ $\Rightarrow$ $b_1 \notin \mathbb{Z}$, $b_2 = 0$

3° $a = 0$ $\Rightarrow$ $b_1 = 2$, $b_2 \notin \mathbb{Z}$.

Значи, бараните решенија се $(a,b) \in \{(-1,-3), (0,0), (1,2)\}$.

3. Ако a, b и c се комплексни броеви такви што $|a| = |b| = 1$ и $\bar{a} \neq b$, тогаш $\frac{\bar{a}+b+\bar{c}+\bar{a}bc}{\bar{a}-b}$ е имагинарен број. Докажи!

Решение. Нека $w=\frac{\overline{a}+b+\overline{c}+\overline{a}bc}{\overline{a}-b}$. Тогаш $\overline{w}=\frac{a+\overline{b}+c+a\overline{b}\,\overline{c}}{a-\overline{b}}$. Од $|a|=|b|=1$ следува дека $a\overline{a}=b\overline{b}=1$. Имаме:

$$\begin{aligned}\overline{w}&=\frac{a+\overline{b}+c+a\overline{b}\,\overline{c}}{a-\overline{b}}=\frac{a+\overline{b}+c+a\overline{b}\,\overline{c}}{a-\overline{b}}\cdot\frac{\overline{a}b}{\overline{a}b}\\&=\frac{a\overline{a}b+\overline{a}b\overline{b}+\overline{a}bc+a\overline{a}b\overline{b}\,\overline{c}}{a\overline{a}b-\overline{a}b\overline{b}}=\frac{b+\overline{a}+\overline{a}bc+\overline{c}}{b-\overline{a}}=-w\end{aligned}$$

и оттука $\operatorname{Re} w=0$.

4А. Нека $f(n)=\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$, каде што $n\in\mathbb{N}$. Пресметај ја вредноста на изразот $f(1)+f(2)+\ldots+f(40)$.

Решение. Нека $2n-1=a$ и $2n+1=b$. Тогаш $4n=a+b$ и $4n^2-1=ab$.

$$\frac{4n+\sqrt{4n^2-1}}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}=\frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a+b+\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3}{a-b}.$$

Оттука,

$$\frac{(\sqrt{a})^3-(\sqrt{b})^3}{a-b}=\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{a-b}=\frac{(2n+1)\sqrt{2n+1}-(2n-1)\sqrt{2n-1}}{2}.$$

Тогаш:

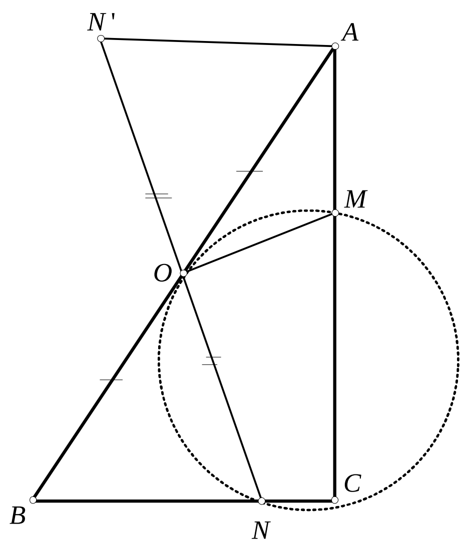
$$\begin{aligned}f(1)+f(2)+\ldots+f(40)&=\tfrac{1}{2}((3\sqrt{3}-1)+(5\sqrt{5}-3\sqrt{3})+\ldots+(81\sqrt{81}-79\sqrt{79}))\\&=\tfrac{1}{2}(81\sqrt{81}-1)=364.\end{aligned}$$

1Б. Во правоаголниот триаголник ABC, точката O е средина на хипотенузата AB. На страната AC е земена точка M, а на страната BC точка N, така што $\angle MON$ е прав агол.

Докажи дека

$$\overline{AM}^2+\overline{BN}^2=\overline{MN}^2. \qquad (1)$$

Решение. Нека N' е симетрична точка на точката N во однос на точката O.



Триаголниците OAN' и OBN се складни, според признакот САС. Од друга страна

$$\begin{aligned}\angle N'AM&=\angle N'AO+\angle MAO\\&=\angle ABC+\angle CAB=90^\circ,\end{aligned}$$

односно $\angle N'AO$ е прав.

Според Питагорина теорема,

$$\overline{AM}^2 + \overline{BN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN'}^2 = \overline{MN'}^2 \qquad (2)$$

Точката O е средина на NN' и $OM \perp NN'$. Значи, $\triangle OMN \cong \triangle OMN'$, од каде добиваме $\overline{MN} = \overline{MN'}$.

Сега, ако замениме во равенството (2) го добиваме равенството (1).

4Б. Определи го множеството вредности на изразот $(x-y)(y-z)(z-x)$ ако x, y и z се реални броеви за кои

$$\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}\ .$$

Решение. Даденото равенство можеме да го запишеме во облик

$$\sqrt{x-y+z} + \sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{z}\ .$$

Ако квадрираме, добиваме

$$(\sqrt{x-y+z} + \sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{z})^2$$

$$2\sqrt{y}\sqrt{x-y+z} = 2\sqrt{x}\sqrt{z}\ .$$

Ако повторно квадрираме добиваме

$$y(x-y+z) = xz$$

$$xy - y^2 - (xz - yz) = 0$$

$$y(x-y) - z(x-y) = 0$$

$$(x-y)(y-z) = 0\ .$$

Сега е јасно дека вредноста на изразот е еднаков на

$$(x-y)(y-z)(z-x) = 0(z-x) = 0\ .$$

III година

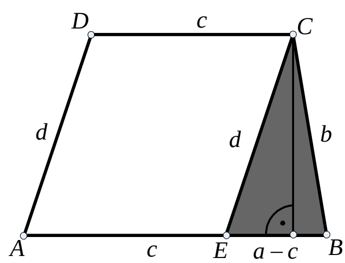
1. Определи ја плоштината на трапез на кој должините на страните му се a, b, c и d.

Решение. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD при што $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ и $\overline{DA} = d$. Нека $E \in AB$ е таква што $AD \parallel CE$. Тогаш

$$P_{\triangle EBC} = \frac{(a-c)h}{2},$$

каде h е висината на трапезот. Ако s' е полупериметарот на триаголникот EBC, тогаш

$$s' = \frac{a-c+b+d}{2}\ .$$



Според Хероновата формула имаме

$$P_{\Delta EBC} = \sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}$$

од каде добиваме

$$\frac{(a-c)h}{2}=\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}\,,\quad h=\frac{2}{a-c}\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}\,.$$

Сега, плоштината на трапезот е

$$P=\frac{a+c}{2}h=\frac{a+c}{2}\frac{2}{a-c}\sqrt{s'(s'-b)(s'-d)(s'-a+c)}=$$
$$=\frac{1}{4}\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(a-c+b+d)(a-b-c+d)(a-c+b-d)(-a+b+c+d)}\,.$$

Ако воведеме ознака $s=\frac{a+b+c+d}{2}$, добиваме

$$P=\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(s-a)(s-c)(s-b-c)(s-d-c)}\,.$$

2A. Дадени се броевите $a,b,c\in(0,1)$. Докажи дека

$$\log_a^4 b+\log_b^4 c+\log_c^4 a\ge\log_a b+\log_b c+\log_c a\,.$$

Решение. За било кои реални броеви x,y и z е исполнето неравенството

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx\,. \qquad (1)$$

Навистина, даденото неравенство е еквивалентно со неравенствата

$$x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2\ge 0$$
$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0\,.$$

Од точноста на последното неравенство се добива точоста на неравенството (1).

Ако ставиме $x=\log_a^2 b$, $y=\log_b^2 c$ и $z=\log_c^2 a$, добиваме

$$\begin{aligned}\log_a^4 b+\log_b^4 c+\log_c^4 a&\ge\log_a^2 b\log_b^2 c+\log_b^2 c\log_c^2 a+\log_c^2 a\log_a^2 b\\&=(\log_a b\cdot\log_b c)^2+(\log_b c\cdot\log_c a)^2+(\log_c a\cdot\log_a b)^2\\&=\log_a^2 c+\log_b^2 a+\log_c^2 b\\&\overset{(1)}{\ge}\log_a c\cdot\log_b a+\log_b a\cdot\log_c b+\log_c b\cdot\log_a c\\&=\log_b c+\log_c a+\log_a b\end{aligned}$$

3. Пресметај го аголот γ во триаголникот ABC, ако

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}\,,$$

каде a,b,c се должини на страните на триаголникот ABC наспроти темињата A,B,C соодветно и γ е аголот кај темето C.

Решение. Го множиме равенството $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ со $a+b+c>0$ и добиваме еквиваалентна равенка

$$\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$$

или

$$\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}=1\,.$$

Последното равенство го множиме со $(a+c)(b+c)>0$ и го добиваме еквивалентното равенство

$$b^2+bc+a^2+ac=ab+ac+cb+c^2$$

или

$$c^2=b^2+a^2-ab. \qquad (*)$$

Од друга страна според косинусна теорема имаме

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma,$$

а заради (*) добиваме $\cos\gamma=\frac{1}{2}$, од каде добиваме дека $\gamma=60^\circ$.

4А. Да се најдат тангенсите од аглите во еден триаголник, ако тие се цели броеви.

Решение. Нека α, β и γ се аглите во триаголникот, за кои без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\alpha<\beta<\gamma$. Но тогаш $\alpha\in(0,\frac{\pi}{3}]$, па според тоа $\operatorname{tg}\alpha\in(0,\sqrt{3}]$.

Бидејќи $\operatorname{tg}\alpha$ е цел број, добиваме дека $\operatorname{tg}\alpha=1$. Тогаш

$$-1=-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}.$$

Од последното равенство имаме

$$\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

кое може да се запише во облик

$$(\operatorname{tg}\beta-1)(\operatorname{tg}\gamma-1)=2.$$

Сега е очигледно дека $\operatorname{tg}\beta-1=1$ и $\operatorname{tg}\gamma-1=2$. Значи, бараните тангенси се

$$\operatorname{tg}\alpha=1,\ \operatorname{tg}\beta=2 \text{ и } \operatorname{tg}\gamma=3.$$

2Б. Нека a и b се рационални броеви такви што $a>1$, $b>0$ и $ab=a^b$ и $\frac{a}{b}=a^{3b}$. Определи ги вредностите за a?

Решение. *Прв начин.* Со логартимирање на дадените равенки со основа a добиваме

$$\log_a ab=\log_a a^b \qquad \log_a\frac{a}{b}=\log_a a^{3b}$$

$$1+\log_a b=b \qquad 1-\log_a b=3b$$

$$\log_a b=b-1 \qquad \log_a b=1-3b$$

Сега од последните две равенки имаме $b-1=1-3b$, т.е. $b=\frac{1}{2}$. Со замена во равенката $ab=a^b$ добиваме $a\cdot\frac{1}{2}=a^{\frac{1}{2}}$, т.е. $a^2=4a$. Бидејќи $a>1$ добиваме $a=4$.

Втор начин. Од $\frac{a}{b}=a^{3b}$ следува дека $b=a^{1-3b}$. Ако замениме во $ab=a^b$ ќе добиеме $a^{2-3b}=a^b$. Од условот $a>1$ добиваме $2-3b=b$, $b=\frac{1}{2}$. Сега ако замениме во $ab=a^b$ имаме $\frac{a}{2}=\sqrt{a}$, од каде добиваме дека решение е $a=4$.

Значи, $a=4$ е единствениот број за кој се исполнети равенствата.

4Б. Во множеството реални броеви реши ја равенката $x^2+6x\cos(xy)+9=0$.

Решение. *Прв начин.* Равенката ја трансформираме во облик

$$(x+3\cos(xy))^2+(3\sin(xy))^2=0,$$

од каде следува $x+3\cos(xy)=0,\ \ \sin(xy)=0$. Од основното тригонометриско равенство, $\sin^2(xy)+\cos^2(xy)=1$, последните две равенства се еквивалентни со системот

$$\begin{cases} x+3\cos(xy)=0 \\ \cos(xy)=\pm 1 \end{cases}.$$

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $\cos(xy)=1$. Тогаш од првата равенка добиваме $x+3=0$, односно $x=-3$. Според тоа, $\cos(-3y)=1$, т.е. $\cos(3y)=1$. Решенија на последната равенка се $3y=2k\pi$, од каде добиваме $y=\frac{2k\pi}{3}$. Значи, решенија се $\{(-3,\frac{2k\pi}{3})\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Случај 2. $\cos(xy)=-1$. Тогаш од првата равенка добиваме $x-3=0$, односно $x=3$. Според тоа, $\cos(3y)=-1$. Решенија на последната равенка се $3y=(2k+1)\pi$ од каде добиваме $y=\frac{(2k+1)\pi}{3}$. Значи, решенија се $\{(3,\frac{(2k+1)\pi}{3}\pi)\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Конечно, решенија на равенката се $\{(3,\frac{(2k+1)\pi}{3}\pi)\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{(-3,\frac{2k\pi}{3})\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме $x^2+9\geq 2\sqrt{9x^2}=6\,|\,x\,|$. Јасно е дека $x=0$ не е решение на дадената равенка . Според тоа равенката мо`еме да ја запишеме во облик

$$\cos(xy)=-\frac{x^2+9}{6x}.$$

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. $x>0$. Тогаш, $\frac{x^2+9}{6x}\geq\frac{6|x|}{6x}=\frac{6x}{6x}=1$ и $\cos(xy)=-\frac{x^2+9}{6x}\leq -1$. Равенство се достигнува ако и само ако $x^2=9$, т.е. $x=3$. Но тогаш, равенката го добива обликот $\cos(3y)=-1$, а нејзини решенија се $3y=\pi+2k\pi=(2k+1)\pi$, т.е. $y=\frac{(2k+1)\pi}{3}$.

Случај 2. $x<0$. Тогаш $\frac{x^2+9}{6x} \le \frac{6|x|}{6x} = -\frac{6x}{6x} = -1$ и $\cos(xy) = -\frac{x^2+9}{6x} \ge 1$. Равенство се добива ако и само ако $x^2 = 9$, односно $x=-3$. Но тогаш $\cos(-3y)=1$, односно $\cos(3y)=1$. Решенија на последната равенка се $3y = 2k\pi$ т.е. $y = \frac{2k\pi}{3}$.

Конечно, решенија на равенката се $\{(3, \frac{(2k+1)\pi}{3}\pi) \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-3, \frac{2k\pi}{3}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

IV година

1А. Нека n е природен и нека $x_0 = \frac{1}{n}$, $x_k = \frac{1}{n-k}(x_0 + x_1 + \dots + x_{k-1})$. Пресметај го збирот $x_\circ + x_1 + \dots + x_{n-1}$.

Решение. Со примена на горната формула за x_k се добива дека $x_1 = \frac{1}{n(n-1)}$, $x_2 = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$. Со математичка индукција ќе докажеме дека

$$x_k = \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}.$$

Нека тврдењето важи за $i<k$. Тогаш

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{1}{n-k}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \dots + \frac{1}{(n-k+2)(n-k+1)}\right) \\ &= \frac{1}{n-k}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{n-k+1} - \frac{1}{n-k+2}\right) \\ &= \frac{1}{n-k} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{(n-k)(n-k+1)}. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2} = 1.$$

2. Во еден триаголник должините на страните a, b, c во дадениот редослед се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи дека

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{3}$$

(α е агол спроти страната a; γ е агол спроти страната c).

Решение. Од синусната теорема имаме $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Ако замениме во равенството $a+c=2b$ добиваме $\sin\alpha + \sin\gamma = 2\sin\beta$. Ако ги искористиме идентитетите

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \text{ и } \sin 2x = 2\sin x\cos x,$$

добиваме

$$2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Од друга страна, заради равенството

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}=\sin(90^\circ-\frac{\beta}{2})=\cos\frac{\beta}{2},$$

со алгебарски транформации добиваме

$$\cos\frac{\beta}{2}(\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}-2\sin\frac{\beta}{2})=0.$$

Бидејќи $\cos\frac{\beta}{2}\neq 0$ и $\sin\frac{\beta}{2}=\cos(90^\circ-\frac{\beta}{2})=\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$, добиваме

$$\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}-2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=0.$$

Сега заради формулате $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$ имаме

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=0$$

$$3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

од каде се добива бараното равенство.

3. Докажи го неравенството

$$\sqrt{\binom{n}{0}\binom{n}{1}}+\sqrt{\binom{n}{1}\binom{n}{2}}+\ldots+\sqrt{\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}}<2^n-1.$$

Решение. Ако искористиме дека

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k} \text{ и } \left(\sqrt{\binom{n}{k}}-\sqrt{\binom{n}{k+1}}\right)^2\geq 0$$

добиваме

$$\binom{n+1}{k+1}\geq 2\sqrt{\binom{n}{k}\binom{n}{k+1}}.$$

Ако во последното неравенство ставеме $k=0,1,\ldots n-1$ и ги собереме добиените неравенства ќе добиеме

$$\sqrt{\binom{n}{0}\binom{n}{1}}+\sqrt{\binom{n}{1}\binom{n}{2}}+\ldots+\sqrt{\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}}\leq\frac{1}{2}(\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{n+1}{n})$$

$$=\frac{1}{2}(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}-2)=\frac{1}{2}(2^{n+1}-2)=2^n-1$$

Притоа ја користевме познатата формула $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

4А. Да се најдат сите полиноми

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_\circ,\ n\geq 2,$$

со реални и ненулти коефициенти така што $P(x)-P_1(x)P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_{n-1}(x)$ е константен полином, каде

$$P_1(x)=a_1x+a_\circ,\ P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_\circ,\ \ldots,\ P_{n-1}(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_\circ.$$

Решение. Бидејќи полиномот $P(x)-P_1(x)P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_{n-1}(x)$ е константен и $a_k\neq 0$, $k=\overline{1,n-1}$, имаме дека

$$\deg P = \deg(P_1 P_2 \cdot \ldots \cdot P_{n-1}) = \deg P_1 + \deg P_2 + \ldots + \deg P_{n-1}$$
$$= 1 + 2 + \ldots + (n-1) = \tfrac{n(n-1)}{2}.$$

Добиваме дека $n = \frac{n(n-1)}{2}$, па $n \in \{0,3\}$. Бидејќи $n \geq 2$, заклучуваме $n = 3$. Според тоа $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, и $P(x) - P_1(x)P_2(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ ако и само ако:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_1a_2 \\ a_2 &= a_1^2 + a_0a_2 \\ a_1 &= 2a_0a_1 \\ a_0 &= a_0^2 + k \end{aligned} \qquad (1)$$

Од (1) имаме $a_1(1 - 2a_0) = 0$, бидејќи $a_1 \neq 0$ следува $a_0 = \frac{1}{2}$ и $k = \frac{1}{4}$. Нека $a_1 = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогаш $a_2 = 2a^2$ и $a_3 = 2a^3$.

Значи, бараните полиноми се од облик

$$P(x) = 2a^3x^3 + 2a^2x^2 + ax + \tfrac{1}{2}, \text{ каде } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1Б. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со рекурзивната формула

$$a_\circ = -1,\ a_n = \frac{2a_{n-1}-3}{3a_{n-1}-4},\ n \in \mathbb{N}.$$

Определи го општиот член a_n на низата.

Решение. Ако замениме во рекурзивната формула се добива дека

$$a_1 = \tfrac{5}{7},\ a_2 = \tfrac{11}{13},\ a_3 = \tfrac{17}{19},\ a_4 = \tfrac{23}{25},\ a_5 = \tfrac{29}{31},$$

односно

$$a_1 = \tfrac{6\cdot1-1}{6\cdot1+1},\ a_2 = \tfrac{6\cdot2-1}{6\cdot2+1},\ a_3 = \tfrac{6\cdot3-1}{6\cdot3+1},\ a_4 = \tfrac{6\cdot4-1}{6\cdot4+1},\ a_5 = \tfrac{6\cdot5-1}{6\cdot5+1}.$$

Со математичка индукција ќе покажеме дека $a_n = \frac{6n-1}{6n+1}$.

Претпоставуваме дека тврдењето важи за $n = k$, односно $a_k = \frac{6k-1}{6k+1}$. Тогаш за $n = k+1$ имаме дека

$$a_{k+1} = \frac{2a_k-3}{3a_k-4} = \frac{2\frac{6k-1}{6k+1}-3}{3\frac{6k-1}{6k+1}-4} = \frac{-6k-5}{-6k-7} = \frac{6(k+1)-1}{6(k+1)+1}$$

Согласно принципот на математичка индукција имаме дека $a_n = \frac{6n-1}{6n+1}$ за секој природен број.

4Б. Во множеството реални броеви, реши ја равенката:

$$|x^4 - x^2 - 6| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|.$$

Решение. Левата страна на равенката можеме да ја запишеме во облик

$$|x^4-x^2-6|=|x^4-4-(x^2+2)|=|(x^2+2)(x^2-2)-(x^2+2)|$$
$$=(x^2+2)|x^2-2-1|=(x^2+2)|x^2-3| \qquad (*)$$

а десната можеме да ја запишеме во облик

$$|x^4-4|-|x^2+2|=|(x^2+2)(x^2-2)|-|x^2+2|=(x^2+2)(|x^2-2|-1) \qquad (**)$$

Во (*) и (**) ја искористивме точноста на неравенството $x^2+2>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Почетната равенка ја запишуваме во облик

$$(x^2+2)|x^2-3|=(x^2+2)(|x^2-2|-1),$$

и ако поделиме со x^2+2 истата го добива обликот

$$|x^2-3|=(|x^2-2|-1). \qquad (1)$$

Сега ќе разгледаме три случаи.

а)Ако $|x|\geq\sqrt{3}$ равенката преминува во идентитетот $x^2-3=x^2-2-1=x^2-3$.

б)Ако $\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$ равенката преминува во равенката $3-x^2=x^2-2-1$ чие решение е $x=\sqrt{3}$ кое не припаѓа во интервалот $\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$.

в)Ако $|x|<\sqrt{2}$ равенката преминува во $3-x^2=2-x^2-1$ што не е можно.

Значи, решение на равенката е секој x, $|x|\geq\sqrt{3}$.