Самоил Малчески
Вера Зенга-Малческа
Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 29

(збирка подготвителни задачи за натпревари за 6 и 7 одделение)

Скопје
23. октомври 2022

Рецензенти
д-р Катерина Аневска
д-р Методи Главче

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

> Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* 29 е наменета за талентираните ученици по математика од шесто и седмо одделение и е комплементарна со книгите Математички талент 3, 4, 15, 16, 20 и 23, т.е. на извесен начин е дополнување на овие книги. Сметаме дека оваа книга ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 220 решени задачи во која во пет одделни дела се обработени алгебарски, аритметички, текстуални, логички, комбинаторни, геометриски и задачи од теорија на броеви, приспособени за учениците на возраст од дванаесет до четиринаесет години.

Како и во останатите книги од серијата *Математички талент*, така и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области.

Рецензентите, д-р Методи Главче и д-р Катерина Аневска, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје   Авторите
23. октомври 2020 г.

I. АЛГЕБРА

1. Определи ја вредноста на изразот:

   а) $a-(b-c)$, б) $a-b+c$,

   ако $a=-5+1$, $b=-6-1$ и $c=|-7|$.

2. Пресметај ја вредноста на изразот $A, B, A:B, A\cdot B$ ако

$$A=840:(200-12\cdot 15) \text{ и } B=12+840:60-20.$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот

$$2022\cdot 35-2022\cdot 34+32\cdot 2022-33\cdot 2022.$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2858-858\cdot(4-(900-(81\cdot 8+8\cdot 19)-100)-2)+879.$$

5. Пресметај

$$698\cdot 134-260:2\cdot 698+(13\cdot 49+7\cdot 9)-456:228.$$

6. Кој број е четири пати поголем од третината на вредноста на изразот:

$$184\cdot 15+15\cdot 16-15\cdot 100+15?$$

7. Во изразот $5\cdot 12+6:3-1$ стави една или повеќе загради така што неговата вредност ќе биде еднаква на:

   а) 21, б) 25, в) 33, г) 63.

8. Пресметај

$$36+64\cdot 17-(502-352:8+511)$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{5}+1\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{7}{11}-\tfrac{3}{11}):((1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}):18\tfrac{1}{3}).$$

   Кој е најголемиот природен број помал од вредноста на дадениот израз?

10. Пресметај

$$(\tfrac{5}{3}-1):\tfrac{1}{6}+(\tfrac{20}{7}-2)\cdot 14-1\tfrac{1}{2}:(1-\tfrac{1}{2}).$$

11. Пресметај ја вредноста на изразот

$$(-40-(-5)^4)\cdot 3+3^5:(-9).$$

12. Определи го најголемиот парен трицифрен број запишан со различни цифри и чиј производ на цифри е еднаков на 24.

13. Дадени се изразите

$A=2x+13+11x-4-5x+6x+12$ и $B=9+3y+14y-4-5y+7-y+5$.

Ако $x=6$, определи го y така што вредностите на изразите A и B ќе бидат еднакви.

14. Определи го збирот на сите четирицифрени броеви запишани само со непарни цифри.

15. Природните броеви се распоредени во табела како што е прикажано

1							
2	3						
4	5	6					
7	8	9	10				
11	12	13	14	15			
16	17	18	19	20	21		
22	23	24	25	26	27	28	
29	30	31	32	33	34	35	36

Табелата се продолжува со запишување на природни броеви така што секој следен ред содржи по еден број повеќе од претходниот ред и започнува со првиот по ред број кој не е запишан. Определи го збирот на сите броеви во редот во кој се наоѓа бројот 1000.

16. Збирот на 86 последователни цели броеви е еднаков на 2021. За колку аритметичката средни на позитивните броеви меѓу нив е поголема од аритметичката средина на негативните броеви меѓу нив?

17. Дадени се множествата:

$A=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,-154<a\leq 145\}$ и $B=\{b\in\mathbb{Z}\,|\,-149\leq a<88\}$.

Што е поголемо и за колку: збирот на сите елементи на множеството A или производот на сите елементи на множеството B?

18. Определи го збирот на сите четирицифрени броеви во кои секои две последователни цифри земени во истиот редослед формираат квадрат на природен број.

19. Што е поголемо и за колку: збирот на сите парни природни броеви a за кои $75 \leq a \leq 214$ или збирот на сите непарни природни броеви b за кои $135 \leq b \leq 242$.

20. Дадена е низата броеви: 5, 9, 13, 17, 21, ...
    а) Определи го стотиот член на оваа низа.
    б) Определи го производот на 20-тиот и 19-тиот член на оваа низа.

21. Првите два члена на низата се $3\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{4}$, а секој следен член е два пати помал од збирот на претходните два члена. Определи го четвртиот член на оваа низа.

22. Определи го природниот број n за кој важи
$$\frac{3}{n+1} < \frac{7}{2020} < \frac{3}{n}.$$

23. Определи рационален број со именител 7 кој е помал од $-\frac{5}{19}$, а е поголем од $-\frac{6}{19}$.

24. Докажи дека
$$\frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 12} + \ldots + \frac{1}{2019 \cdot 2022} < \frac{1}{9}.$$

25. Реши го бројниот ребус
$$\overline{AB} + \overline{ABB} + \overline{CBBC} = \overline{BCDC}$$
во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

26. Горјан во точен пример за собирање ги заменил еднаквите цифри со еднакви букви, а различните букви со различни цифри и го добил

бројниот ребус:

$$M+A+T+E+M+A+T+I+K+A=\overline{EE}.$$

Која најголема цифра може да ја замени буквата E ?

27. Определи ги сите точки со целобројни координати (x,y) за кои важи $x(y-1)=8$. Нацртај ги точките во координатен систем.

28. Точките $A(-3,-1)$ и $B(1,-1)$ се соседни темиња на правоаголник. Определи ги можните парови на другите две темиња така што плоштината на правоаголникот ќе биде 24 квадратни единици.

29. Пополни го магичниот квадрат прикажан на цртежот десно така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков.

18		
	36	
42		

30. Во празните квадратчиња запиши ги соодветните броеви така што ќе добиеш магичен квадрат, т.е. квадрат во кој збирот на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков.

$\frac{1}{6}$		
	$\frac{5}{12}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

II. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Дадена е низата букви

   КОЛИЧНИКОСТАТОККОЛИЧНИКОСТАТОККОЛИЧНИК...

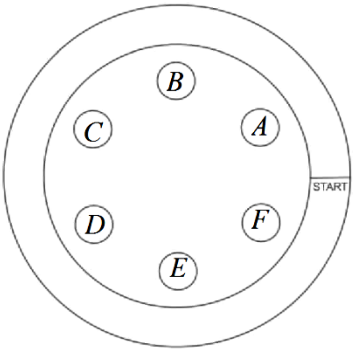
   Определи ја 2022. буква во оваа низа.

2. Андреј замислил четирицифрен број. Пабло на тој број му ја избришал цифрата на единиците и кога трицифрениот број, кој преостанал, го помножил со избришаната цифра добил 2020. Кој број можел да го замисли Андреј?

3. Определи го остатокот при делењето на бројот n со бројот 45, ако е познато дека остатокот од делењето на бројот $n+2020$ со бројот 45 е 43.

4. Пабло ги запишал првите 66 природни броеви, а потоа избришал еден од нив. Кога ги собрал преостанатите 65 броеви добил збир кој е делив со 7. Кој број го избришал Пабло?

5. Три момчиња трчат по кружна патека и тоа така што Анте прв тргнува од стартната линија,трча по патеката и минувајќи покрај столбовите A, B, C, D, E, F брои 1, 2, 3, 4, 5, 6. Потоа следниот круг го трча Бранко кој продолжува да брои 7, 8, 9, 10, 11, 12. По него трча Иван и брои 13, 14, 15, 16, 17, 18, па потоа по ред трчаат Анте, Бранко, Иван итн. Ако продолжат да трчаат кое момче ќе каже 444.



6. Филип ги запишал сите броеви од 2 до 2022 кои се деливи со 2, редоследно еден по друг без запирки. Која цифра се наоѓа на 2021. место?

7. За целиот број велиме дека е *убав* ако е од видот $3k+1, k\in\mathbb{Z}$. Определи го збирот на сите убави броеви меѓу -300 и 300.

8. Дадени се броевите
$$a=33333333\cdot 44444444\cdot 55555555$$
и
$$b=66666666\cdot 77777777\cdot 88888888.$$
Докажи дека $a+b$ е делив со 9.

9. Збирот на двоцифрените броеви $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ е делив со 33. Докажи дека четирицифрениот број $\overline{abcd}$ е делив со 33.

10. Дадени се четири природни броја. Со пресметување на сите можни ненегативни разлики на овие броеви се добиени броевите 0, 2, 3 и 5. Определи ги овие броеви ако се знае дека збирот на двата поголеми броја е три пати поголем од збирот на двата помали броја.

11. Нека броевите $a_1,a_2,...,a_n$ се сите позитивни и меѓусебно различни делители на бројот 2020. Определи ја вредноста на изразот
$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}.$$

12. Определи ги најмалиот и најголемиот четирицифрен природен број чија цифра на десетките е 5 и кој е делив со 6.

13. Определи ги цифрите x и y така што производот на трицифрените броеви $\overline{12x}$ и $\overline{34y}$ е делив со 15.

14. Збирот на цифрите на природниот број n е еднаков на збирот на цифрите на природниот број $5n$. Докажи дека бројот n е делив со 9.

15. Определи го најмалиот седумцифрен број $\overline{17x679y}$ (x и y се цифри) кој е делив со 45.

16. Количниците
$$A=\overline{2a4b}:15 \text{ и } B=\overline{3c8d}:18$$

се природни броеви. Определи го збирот на најмалиот можен број A и најголемиот можен број B.

17. Андреј и Горјан сакаат за своите комјутери да одберат шифри (пасворди) кои ќе бидат четирицифрени броеви деливи со 3 и со 5. Двете шифри мора да ги содржат омилените цифри на Андреј и Горјан, Омилена цифра на Андреј е 3, а на Горјан е 8. Кои пасворди ги одбрале, ако Андреј го одбрал најмалиот, а Горјан најголемиот така добиен четирицифрен број?

18. Определи ја аритметичката средина на сите содржатели на бројот 12 кои се од облик $\overline{3a8b}$. Кој содржател треба да се изостави за да аритметичката средина на преостанатите броеви е за 50 поголема од аритметичката средина на сите содржатели?

19. Ако броевите 293 и 671 ги поделиме со еден ист природен број добиваме остатоци 7 и 8, соодветно. Определи го делителот.

20. Со колку нули завршува производот на првите 2019 природни броеви?

21. Разликата на два прости броја е едноцифрен број $d\,(d>0)$. Дали d може да биде било кој едноцифрен број?

22. Бројот 2022 е запишан како производ на пет различни цели броеви. Определи ја најмалата вредност на збирот на тие пет броеви.

23. Определи ги сите прости броеви помали од 1000 чиј збир на цифри е 4.

24. Во едно училипте има 180 момчиња и 192 девојчиња. Сите одделенија имаат еднаков број ученици и во секое одделение има еднаков број момчиња. Во секое одделение има најмногу 40 ученици. Колку момчиња и колку девојчиња има во секое одделени?

25. Збирот на десет последователни парни природни броеви е еднаков на 5370. Определи ги сите прости делители на најголемиот од овие броеви.

26. Производот на два парни броја е 2020. Определи го нивниот збир.

27. Запиши ги сите петцифрени броеви од видот $\overline{abcda}$ кои се деливи со 18 и кај кои цифрата на стотките е најмалиот прост број. (Различните букви претставуваат различни цифри, а еднаквите букви еднакви цифри.)

28. Определи ги сите природни броеви кои се помали од 1000 чија цифра на единиците е нула и се еднакви на производ на 4 различни прости броеви.

29. Дали постојат прости броеви p и q такви што
$$13p+3q=2022\,?$$

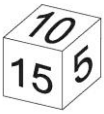
30. Нека n е најмалиот природен број кој е делив со 60 и кој се запишува само со помош на цифрите 0 и 7. Определи го бројот на делителите на n.

31. За сите детски градинки во еден град дневно треба да се обезбедат $120\,kg$ портокали, $260\,kg$ банани и $380\,kg$ јабока.

а) Колку најмногу градинки може да има во овој град ако во секоја се распоредува исто количество од секој од дадените видови овошје?

б) Колку лимони треба да се обезбедат за сите овие градинки ако се троши пет пати помалку лимони отколку портокали и јаболка заедно?

32. На коцката прикажана на цртежот десно на секој ѕид е запишан по еден природен број. Производите на броевите запишани на спротивните ѕидови се еднакви. Определи го најмалиот можен збир на сите шест природни броеви запишани на ѕидовите на коцката.



33. Филип замислил три броја. НЗД на првиот и вториот број е 12, на првиот и третиот број е 8, а на вториот и третиот број е 20. Кои се најмалите природни броеви кои можел да ги замисли Филип?

34. Дедо Марко на пазар продава садници од јаболка, круши и лешници. На неговата тезга истовремено дошле двајца купувачи. Во тој момент дедо Марко имал 227 садници. Првиот купувач купил $\frac{2}{3}$ од сите сад-

ници јаболка, $\frac{3}{10}$ од сите садници круши и $\frac{5}{7}$ од сите садници лешници. Вториот купувач купил $\frac{1}{11}$ од сите садници јаболка, $\frac{1}{4}$ од сите садници круши и $\frac{1}{5}$ од сите садници лешници. Колку садници јаболка, круши и лешници купиле првиот и вториот купувач? По колку садници јаболка, круши и лешници имал дедо Марко на почетокот?

35. Определи ги најмалиот и најголемиот петцифрен број кои истовремено се деливи со 7, 8 и 9.

36. Определи ги сите тројки природни броеви (a,b,c) такви што $a<b$, $\mathrm{NZD}(a,b)=4$, $\mathrm{NZD}(a,b,c)=2$ и $\mathrm{NZS}(a,b,c)=400$

37. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $n=111111$ и $m=111111111$.

38. Филип запишал неколку различни природни броеви чиј збир е еднаков на 100, притоа користејќи само две различни цифри. Колку најмногу броеви може да запише Филип?

39. Определи ги сите прости броеви a,b,c такви што
$$4a+5b+6c=96.$$

40. Марга, Ана и Иван наизменично фрлаат коцка за играње. Прва фрла Марга, потоа Ана, па Иван. Повторно Марга итн. понатаму во круг по истиот редослед. Секој од нив, кога е негов ред, коцката ја фрла еднаш, се додека не добие шестка. Откако ќе ја добие својата прва шестка, играчот во секое следно фрлање, до крајот на играта, коцката ја фрла повеќе пати. Марга ја фрла коцката 4 пати, Ана шест, а Иван осум пати. Играта завршила по 27 кругови. Коцката вкупно е фрлена 152 пати. Колку пати можеле коцката да ја фрлат Марга и Ана ако Иван коцката ја фрлил 48 пати?

41. Андреј работел 6 теста по математика секој од кои се бодува со цел број бодови од 0 до 100. На секој од првите 5 теста имал еднаков број бодови, а на шестиот тест добил повеќе бодови отколку на претходниот тест. Ако на шесте теста во просек освоил по 72 бода, колку бодови можел Андреј да освои на последниот шести тест?

III. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. За нумерирање на страниците на една книга, кое започнува од првата страна со бројот 1, се употребени 2019 цифри. Колку нумерирани страници има оваа книга?

2. Определи ја разликата на најмалиот непарен четирицифрен број чиј збир на цифри е 4 и најголемиот парен трицифрен број чиј производ на цифри е 16.

3. Определи го производот на збирот и разликата на најголемиот трицифрен парен број запишан со различни цифри и најмалиот трицифрен непарен број запишан со различни цифри.

4. Збирот на педесет различни природни броеви е 8625. Вториот број е за 5 поголем од првиот, третиот број е за 5 поголем од вториот, четвртиот е за 5 поголем од третиот, ..., педесеттиот број е за 5 поголем од четириесет и деветтиот број. Определи ги најмалиот и најголемиот собирок во дадениот збир.

5. Пет броја се такви што кога собираме по четири од нив се добиваат збировите 186, 203, 214, 228 и 233. Кои се тие броеви?

6. Павле замислил природен број и го собрал со бројот 2112, при што добиениот збир бил еднаков на збирот на сите природни броеви кои се поголеми од 55 и се помали од 107. Кој број го замислил Павле?

7. Сите цифри на петцифрениот број $\overline{abcde}$ $(a \neq 0, e \neq 0)$ се меѓусебно различни. Притоа збирот на цифрите е еднаков на 10. Кога овој број ќе се собере со бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед се добива број кој е запишан со исти цифри. Определи ги овие петцифрени броеви.

8. На некој трицифрен број од десна страна му е допишана цифрата 2.

Добиениот број е поделен со 7, па на добиениот количник од десна страна му е допишана цифрата 3. Така добиениот број е поделен со 43 и е добиен бројот 41. Определи го почетниот трицфрен број.

9. Магдалена вежба математика така што некој број прво го множи со 2, а потоа на добиениот резултат додава 16. Добиениот резултат пак го множи со 2, потоа на производот му додава 16 итн. Од кој едноцифрен природен број почнала да пресметува Магдалена ако во еден момент го добила бројот 68?

10. Рампо замислил пет броја такви што, почнувајќи од најмалиот, секој следен број е три пати поголем од претходниот. Збирот на најмалиот и најголемиот број е за 172 поголем од збирот на преостанатите три броја. Кои броеви ги замислил Рампо?

11. Производот на два броја е 2538. Ако едниот од нив се намали за 6, а другиот остане непроменет, тогаш новиот производ е 2214. Кои се тие броеви?

12. Калина замислила број. Ако Калина формира низа која има 2021 член таква што првиот член на низата е замислениот број, а секој следен нејзин член е за 20,21 поголен од претходниот, тогаш збирот на сите членови на низата ќе биде 11,1 пати поголем од производот $2021\cdot 2021$. Кој број го замислила Калина?

13. Ако на четирицифрен број му се избрише една цифра па добиениот трицифрен број го собереме со почетниот четирицифрен број, добиваме 1254. Определи го почетниот четирицифрен број.

14. Збирот на два броја и нивниот збир е $\frac{40}{21}$. Определи ги овие броеви ако апсолутната вредност на едниот број е четири пати поголема од апсолутната вредност на другиот број.

15. Определи ги броевите a, b и c ако се знае дека нивниот збир е поголем од бројот a за $\frac{5}{2}$, од бројот b за $\frac{59}{6}$ и од бројот c за $\frac{5}{3}$.

16. Горјан има толку денови колку што неговиот татко има седмици и

толку месеци колку што неговиот дедо има години. Сите тројца заедно имаат 100 години. Колку години има секој од нив?

17. Дедото, таткото и синот заедно имаат 84 години, при што бројот на годините на таткото е аритметичка средина на броевите на годините на дедото и синот. Колку години има таткото?

18. Андреј патувал од Скопје до Њујорк. Од Скопје не постои директен лет за Њујорк, па затоа купил авионска карта за лет преку Истанбул. Од Скопје тргнал во сабота во 20:00 часот. Летот од Скопје до Истанбул траел $1\frac{1}{12}$ часа. Во Истанбул чекал 7 часа. Летот од Истанбул до Њујорк траел $11\frac{5}{12}$ часа. Ако се знае дека Истанбул е источно од Скопје со временска разлика од 2 часа, а Њујорк е западно од Истанбул со временска разлика 8 часа, кој ден и колку часот било во Њујорк кога слетал неговиот авион?

19. Збирот на годините на семејство во кое има татко, мајка, две ќерки близначки и син е 81. Таткото е 4 години постар од мајката. По 4 години бројот на годините на таткото ќе биде двојно поголем од збирот на годините на неговите деца. Разликата во годините на сестрите и братот е 3. Колку години има секој член на ова семејство?

20. Горјан на својот брат Андреј му рекол: „Оваа година ќе наполнам онолку години колку што е збирот на цифрите на годината во која сум роден.“ Андреј му одговорил: „Интересно, тоа важи и за мене.“ Колку години наполнил помладиот, а колку постариот брат ако разговорот се водел во 2019 година?

21. Три 3D принтери принтаат зададен модел кој може да се состави од повеќе делови. Ако истовремено принтаат првиот и вториот принтер, потребни се вкупно 30 минути за принтање на целиот модел. Ако истовремено принтаат првиот и третиот принтер потребни се 40 минути за принтање на целиот модел. На вториот и третиот принтер за истовремено принтање на целиот модел им се потребни 24 минути. Колку минути му се потребни на секој од принтерите за самостојно принтање на целиот модел?

22. Два воза тргнале во пресрет еден кон друг. Првиот воз тргнал од местото A возејќи со просечна брзина $58\,km/h$, а вториот воз тргнал од местото B возејќи со просечна брзина $64\,km/h$. Возовите се сретнале по 4 часа. До моментот на средбата првиот воз имал три застанувања, секое по 10 минути, а вториот воз имал две застанувања, секое по 15 минути. Определи ја должината на патот меѓу местата A и B?

23. Во септември 2014 година, кога тргнале во прво одделение, сите ученици од V^a одделение заедно имале 153 години, а во септември 2018 година, на почетокот на петто одделение, тие исти ученици заедно имале 245 години. Колку од нив тргнале на училиште на 6, а колку на седум години?

24. Ана купила книга и пенкало чии цени изразени во денари се природни броеви. Двете цени ги заокружила на десетки и кажала дека за пенкалото платила 240 денари, а за книгата 310 денари.
а) Која е најмалата сума пари кои Ана можела да ја потроши за купување на пенкалото и книгата?
б) Дали Ана може за разликата меѓу најмалата и најголемата сума пари што можела да ги потроши за купување на пенкалото и книгата да купи сок од 16 денари?

25. За опремување на училиштето се набавени комплети од по 2 компјутери и еден печатач. Цената на еден компјутер е 19680 денари, а цената на еден печатач е три пати помала од цената на еден комјутер. Општината на училиштето му уплатило 80360 денари, што е четвртина од вкупната цена. Колку компјутери и колку печатачи биле набавени?

26. Кога од своите парти Ана ќе му даде на Иван 180 денари, а на Маја ќе ѝ даде 430 денари, тогаш Иван ќе има два пати повеќе денари од Ана, а Маја ќе има три пати повеќе денари од Ана. Колку пари има секое од децата, ако сите заедно имаат вкупно 4320 денари?

27. Јован, Марко, Филип и Ласте треба во кафич да платат сметка од 560 денари. Проверувајќи кој колку пари има откриле дека без парите на Јован имаат 850 денари, без парите на Марко имаат 900 денари, без парите на Филип имаат 880 денари и без парите на Ласте имаат 940 денари. Кои двајца пријатели заедно имаат толку пари колку што е

сметката која треба да ја платат?

28. Таткото има три сина на кои им дава џепарлак. Најстариот син добива третина од целата сума и уште 30 денари, средниот син добива третина од остатокот и уште 30 денари, а најмалиот син ги добива преостанатите 430 денари. Колку пари добиваат најстариот и средниот син?

29. На главниот градски плоштад Максим има музички настап 10 последователни вечери. За секој настап тој добива по 3000 денари, а ако организаторот процени дека Максим имал извонреден настап, тој добива 5000 денари. Максим за своите 10 настапи вкупно добил 36000 денари. Колку пати организаторот проценил дека Максим имал извонреден настап?

30. Андреј за една книга потрошил $\frac{4}{15}$ од својата заштеда, за друга $\frac{7}{30}$, а за тетратки $\frac{3}{10}$ од својата заштеда. Му преостанале 720 денари. Колкава била заштедата на Андреј? Колку платил за книгите, а колку за тетратките?

31. Горјан купил 5 еднакви големи тетратки и 3 еднакви мали тетратки. Ако купел уште 2 големи и 2 мали тетратки ќе плател 220 денари повеќе, а ако купел уште 1 голема и 3 мали тетратки ќе плател 190 денати повеќе. Колку пари платил Горјан за купените тетратки?

32. Една компанија заработила $\frac{1}{7}$ повеќе од планираната сума пари, а потоа управата на компанијата одлучила на вработените да им подели $\frac{1}{24}$ од заработените пари. По поделбата на вработените, на компанијата и останале милион евра повеќе од планираната саму пари. Колку била планираната сума пари? Ако сите вработени добиле еднаков износ од 12500 евра, колку вработени има во оваа компанија?

33. Ласте, Рампо и Марко заедно заштедиле 7500 денари. Познато е дека Рампо заштедил три пати повеќе од три четвртини на парите на Ласте, а Марко заштедил 850 денари повеќе од две третини од заштедата на Рампи. Колку пари заштедил секој од нив?

34. На акција се продаваат пакети чоколади. Ана и Билјана купиле по два пакети, а Цанко ги купил последните три пакети, па за Дарко немало чоколади. Затоа Ана, Билјана и Цанко решиле рамноправно со Дарко да ги поделат чоколадите. Дарко за својот дел дал 2450 денари. Како Ана, Билјана и Цанко треба правично да ги поделат овие 2450 денари?

35. Дедо Алекс се договорил со Рампо 12 часа да бере грозје и за тоа да му исплати 3400 денари и $20\,kg$ грозје. Рампо работел 2 часа помалку и за тоа дедо Алекс покрај $20\,kg$ грозје му платил уште 2700 денари. Колку чини еден килограм грозје?

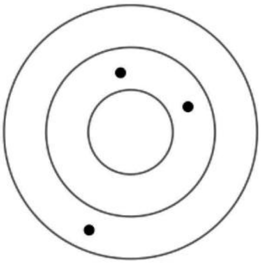
36. Пабло планирал тренинг за трка со велосипед, при што направил две паузи. До првата пауза тој поминал $\frac{2}{7}$ од планираниот пат. Потоа поминал уште $54\,km$ па ја направил втората пауза и до тогаш поминал $\frac{7}{11}$ од планираниот пат. Колку километри бил планираниот пат?

37. Во секој од три еднакви садови собира по 600 литри течност и секој е наполнет до половина. Од првиот сад во вториот се прелеани 18% од течност. Потоа од вториот во третио се прелеани $\frac{2}{3}$ од течноста. Потоа од третиот во првиот сад се прелеани $\frac{3}{8}$ од течноста и уште 5 литри. Колку литри течност треба да се прелее од садот со најмногу во садот со најмалку течност така што во двата сада да има исто количество течност?

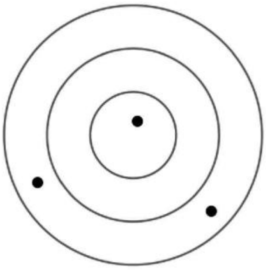
38. Вкупно 24 лица поделиле 48 кроасани. Секое дете добило по 8 кроасани, секоја жена добила по 2, а секој маж добил по 1 кроасан. Колку биле деца, колку жени и колку мажи, ако секој добил барем еден кроасан?

39. Пет мачки за 6 дена ловат 5 глувци. За колку дена 2 мачки можат да уловат 3 глувци?

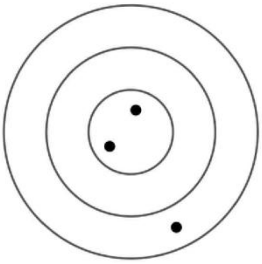
40. На долните цртежи се прикажани метите кои тројца пријателиги погодиле со воздушна пушка и бројот на освоените бодови/
Колку бодови се вреднува секој одделен круг на метата?



22



24



36

41. Од 99 ученици кои биле во зоолошка градина 76 купиле сок, а 59 купиле чоколадо. Една деветина од сите ученици не купиле ништо. Колку ученици купиле само сок а колку само чоколадо?

42. Ана, Билјана, Цветанка и Дара прават хартиени авиончиња. Тие решиле да направат 1000 авиончиња. Ана и Билјана направиле 167 авиончиња, а Билјана и Цветанка направиле 181 авионче. Ана направила 8 авиончиња повеќе од Дара. Моментално до саканиот број им недостасуваат 677 авиончиња. Колку авиончиња направило секое девојче?

43. Анита и Бранко со топче гаѓаат мета, при што секој гаѓа по 50 пати. Едниот дел од метата е обоен жолто, а другиот црвено. За секој погодок во метата се добива определен број поени, а ако метата се промаши не се добиваат поени. Анита 36 пати ја погодила метата во жолтиот дел, а 2 пати ја промашила. Бранко 6 пати ја погодил метата во црвениот дел и двојно повеќе пати од Анита ја промашил метата. Горјан им соопштил дека заедно освоиле 716 поени и дека Бранко освоил 4 поени помалку од Анита. Колку поени вреди погодокот во жолтиот, а колку во црвениот дел на метата?

44. На натпревар по математика 14 ученици ги решиле сите задачи, 32% од учениците решиле некои задачи и 12% од учениците не решиле ниту една задача. Колку ученици учествувале на натпреварот?

45. Горјан добил кутија полна со бомбони. Првиот ден тој изел четвртина од бомбоните, а вториот ден изел четвртина од остатокот. Колку бомбони добил Горјан, ако на крајот на вториот ден му останале 9 бомбони?

46. Во едно училиште учителот подготвил определен број благодарници за учесниците на Денот на математиката. За учество му се пријавиле $\frac{2}{13}$ повеќе ученици од бројот на подготвените благодарници, но на самиот Ден на математиката не дошле $\frac{1}{15}$ од пријавените ученици. Колку ученици учествувале на Денот на математиката ако учителот дополнително морал да отпечати 20 благодарници?

47. Воз тргнал од почетната станица со определен број патници. На следните три станици се симнувале последователно $\frac{1}{8}$ од патниците, па $\frac{1}{7}$ од преостанатите патници, па $\frac{1}{6}$ од преостанатите патници. Потоа во возот останале 105 патнници. На станиците не се качил ниту еден патник. Колку патници тргнале со возот од почетната станица?

48. Во две корпи има јаболка. Кога од првата корпа ќе се извадат $\frac{5}{6}$, а од втората корпа ќе се извадат $\frac{3}{4}$ од јаболката, тогаш во двете корпи ќе останат по 20 јаболка. Колку вкупно јаболка има и колку ќе останат во двете корпи заедно ако од првата корпа извадиме $\frac{2}{3}$ од јаболката, а во втората оставиме $\frac{3}{5}$ од јаболката?

49. Маја имала три бисери со различен број монистра. Од нив направила три нови бисери во секој од кои имало по 80 монистра. Тоа го направила така што од првиот бисер извадила $\frac{3}{7}$ од монистрата и ги ставила на вториот бисер, потоа оид вториот бисер извадила $\frac{3}{7}$ од монистрата и ги ставила на вториот бисер и од така добиениот трет бидер преместила $\frac{3}{7}$ од монистрата на првиот бисер.

50. Бројот на екипите на училишната ракометна лига е поголем од 18 и е помал од 30. Во текот на првенството секоја екипа одиграла со секоја од преостанатите екипи по два натпревари, една како домаќин и друга како готин. Во првенството 35% од вкупниот број натпревари завршиле со победа на гостинската екипа. Определи го најмалиот и најголемиот број натпревари во кои победила гостинската екипа.

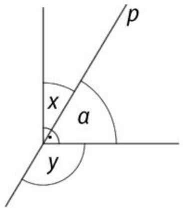
IV. ГЕОМЕТРИЈА

1. Што може да биде пресек на две полуправи? За секој случај скицирај по еден пример.

2. Дадени се точките A, B, C, D, E. Нека точките A, B, C се колинеарни и точките A, D, E се колинеарни, но не постојат 4 точки кои се колинеарни. Колку
а) прави, б) триаголници,
определуваат овие пет точки?

3. Две прави се сечат и формираат четири агли. Збирот на накрсните остри агли е за половина од правиот агол помал од едниот од накрсните тапи агли. Определи ги овие четири агли.

4. Правата p, која минува низ темето на правиот агол, формира агли како на цртежот десно. Ако збирот на аглите x и y е еднаков на $163^\circ 14'$, определи ја големината на напоредниот агол на аголот α.



5. Аголот α е поголем од својот комплементен агол точно онолку колку што е помал од својот суплементен агол. Определи го аголот α.

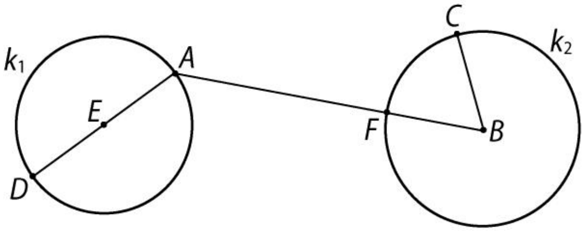
6. Аглите α и β се суплементни, а аглите β и γ се комплементни. Збирот на аглите α и γ е еднаков на 123°. Определи ги аглите α, β и γ.

7. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 20 часот и 21 минута.

8. На отсечката AB со должина $80\,cm$ редоследно се земени точки C, D, E така што точката C е најблиска до точката A. Растојанието

меѓу средините на отсечките CD и DE е еднакво на $23cm$. Определи го растојанието меѓу средините на отсечките AC и EB.

9. На дадениот цртеж точката E е центар на кружницата k_1, а точката B е центар на кружницата k_2. Ако радиусот на k_1 е еднаков на $13cm$, отсечката AB има должина $53cm$ и искршената линија $DABC$ има должина $1m$, определи ја должината на отсечката AF.



10. Петтина на остриот агол α на правоаголниот триаголник ABC е еднаква на третина на остриот агол β на тој триаголник. Спореди ги должините на страните на триаголникот ABC.

11. Во правоаголен триаголник ABC точката P е средина на страната AB, а точката N е подножје на висината повлечена од темето на правиот агол C. Докажи дека симетралата на $\measuredangle ACB$ го дели $\measuredangle NCP$ на два еднакви дела.

12. Во еден триаголник еден внатрешен агол е еднаков на еден надворешен агол. Еден од преостанатите два надворешни агли е пет пати поголем од некој од преостанатите два внатрешни агли. Определи ги надворешните и внатрешните агли на овој триаголник.

13. Симетралата на внатрешниот агол во темето A на триаголникот ABC ја сече страната BC во точката D. Нека E е внатрешна точка на страната AB и нека важи $\measuredangle ADB = 94^\circ$, $\measuredangle ACE = 38^\circ$ и $\measuredangle CEB = 84^\circ$. Определи ги најкратката и најдолгата страна на триаголникот ABC.

14. Нека D е точка на основата BC на рамнокракиот триаголник ABC таква што $\measuredangle BAD$ е еднаков на $2020'$ и E е точка на кракот AC таква што $\overline{AE} = \overline{AD}$. Определи го $\measuredangle CDE$.

15. Даден е триаголник ABC. Аголот формиран од симетралите на надворешните агли во темињата B и C е еднаков на внатрешниот агол во темето A и е за 7° поголем од внатрешниот агол во темето C. Спореди ги должините на страните на триаголникот ABC.

16. Даден е триаголник ABC со $\measuredangle ACB = 112^\circ$. На страната AB избрани се точки P и R такви што $\overline{AC} = \overline{AP}$ и $\overline{BC} = \overline{BR}$. Определи го $\measuredangle RCP$.

17. Аголот под кој се сечат симетралите на два внатрешни агли на некој триаголник е еднаков на 111°. Едната од нив се сече со третата симетрала на аголот под агол од 122°. Определи ги аглите на овој триаголник.

18. Во рамнокрак триаголник ABC на основата AB земена е точка D таква што $\overline{AD} = \overline{AC}$ и $\overline{BD} = \overline{CD}$. Определи ги аглите на триаголниците ABC, ADC и DBC.

19. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle ACB$ е два пати помал од $\measuredangle CBA$, а за 20° е поголем од $\measuredangle BAC$. Нека D е пресекот на симетралата на $\measuredangle CBA$ со страната AC. Која отсечка е подолга, AD или DC?

20. Во триаголникот ABC е $\measuredangle B = 80^\circ$. Нека D е точка на страната BC таква што $\measuredangle BDA = 70^\circ$ и $\overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC}$. Определи го $\measuredangle ACB$.

21. Даден е триаголник ABC, $\measuredangle BAC = 45^\circ$. Нека M е точка на страната AC таква што $\overline{MC} = 2\overline{AM}$ и $\measuredangle ABM = 15^\circ$. Определи го $\measuredangle ACB$.

22. На страната AB на триаголникот ABC, кој не е правоаголен, се дадени точки M, N, P и Q, во овој редослед од A кон B, такви што правите CM, CN, CP и CQ го делат $\measuredangle ACB$ на пет еднакви делови. Ако внатрешните агли на триаголникот CMN се еднакви на внатрешните агли на триаголникот ABC, определи ги аглите на триаголникот ABC.

23. Должините на две страни на триаголникот ABC се $a=5{,}6\,cm$ и $b=12{,}8\,cm$. Определи ја:

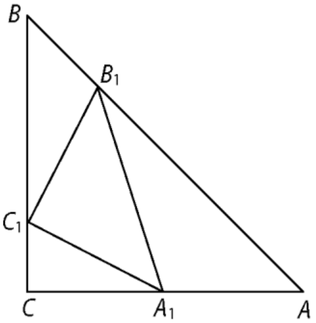
    а) најмалата, б) најголемата,

    можна вредност на периметарот на триаголникот ABC ако должината на третата негова страна е цел број сантиметри.

24. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AC}=\overline{BC}$. Точката D е средина на основата AB. Периметарот на триаголникот ABC е еднаков на $50\,cm$, а периметарот на триаголникот ADC е еднаков на $40\,cm$. Определи ја должината на отсечката CD.

25. Основата AB на рамнокрак триаголник ABC е $10\,cm$, а аголот при основата е 72°. Ако симетралата на $\measuredangle BAC$ го сече кракот BC во точката D, определи ја должината на искршената линија $BADC$.

26. Триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се рамнокраки правоаголни со хипотенузи AB и A_1B_1, соодветно, при што точката A_1 припаѓа на отсечката AC, точката B_1 припаѓа на отсечката AB и точката C_1 припаѓа на отсечката BC. Докажи дека
$$\overline{AA_1}=2\overline{CC_1}.$$



27. Во разностран триаголник ABC впишана е кружница k со центар O. Низ точката O се повлечени прави p и q такви што $p \parallel AC$ и $q \parallel BC$. Правата p ја сече страната AB во точка M, а правата q ја сече AB во точка N. Докажи дека периметарот на триаголникот OMN е еднаков на должината на страната AB.

28. Во триаголникот ABC важи $\overline{BC}=2\overline{AC}$. Нека D е точка на страната BC таква што $\measuredangle CAD=\measuredangle ABC$. Симетралата на надворешниот агол во темето C ја сече полуправата AD во точката E. Докажи дека $\overline{AE}=\overline{AB}$.

29. Триаголник со периметар $55\,mm$ е поделен со некоја отсечка на два

триаголника. Определи ја должината на отсечката со која е поделен почетниот триаголник ако периметрите на добиените триаголници се $41\,mm$ и $25\,mm$.

30. За $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC = 40^\circ, \measuredangle ABC = 20^\circ$ и $\overline{AB} - \overline{BC} = 10\,cm$. Ако симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече правата AB во точката M, определи ја должината на отсечката CM.

31. Даден е триаголник ABC таков што $\measuredangle BAC + \measuredangle CBA = 135^\circ$. Точката N е подножјето на висината повлечена од темето A. Ако $\overline{NC} = 6\overline{NB}$, а плоштината на триаголникот ABC е $3024\,mm^2$, определи ја должината на страната BC.

32. Пабло нацртал триаголник $A_1B_1C_1$, а потоа до него нацртал нов триаголник $A_2B_2C_2$ со една страна B_2C_2 еднаква на половина од страната B_1C_1 на првиот триаголник и половина од соодветната висина на првиот триаголник. Потоа покрај вториот триаголник нацртал трет триаголник $A_3B_3C_3$ со страна B_3C_3 еднаква на половина од страната B_2C_2 на вториот триаголник и висина на таа страна еднаква на половина од соодветната висина на вториот триаголник. На ист начин Пабло продолжил да црта триаголници, при што откако го нацртал шестиот триаголник збирот на плоштините на сите нацртани триагилници бил еднаков на $4095\,cm^2$. Определи ги плоштините на најголемиот и најмалиот триаголник.

33. Должината на страната AC на правоаголниот $\triangle ABC$ со прав агол во темето C е еднаква на $\frac{3}{4}$ од должината на страната BC, а должината на страната AB е 25% поголема од должината на страната BC. Со слепување на $\triangle ABC$ и неговата симетрична слика во однос на правата AB се добива четитиаголник со периметар $16{,}8\,cm$. Определи го периметарот на $\triangle ABC$.

34. Нацртај кружница k со центар S и радиус $3\,cm$. Нацртај точки K и L за кои важи $\overline{SK} = 6\,cm, \overline{SL} = 4\,cm, \overline{KL} = 5\,cm$. Конструирај ги сите

рамнокраки триаголници со основа KL, а темето наспроти основата припаѓа на кружницата k.

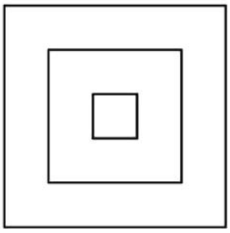
35. Даден е правоаголник $ABCD$. Нека E е точка во внатрешноста на правоаголникот таква што триаголникот BCE е рамностран и нека F е точка таква што триаголникот CDF исто така е рамностран. Точката F се наоѓа на другата страна на правата AB во однос на темињата на правоаголникот C и D. Докажи дека триаголникот AEF е рамностран.

36. Во четириаголникот $ABCD$ аголот β е три пати поголем од аголот α, аголот γ е два пати поголем од аголот β, а аголот δ е содржател на аголот од 60°. Определи ги аглите на овој четириаголник.

37. Основата на пластеник има форма на правоаголник со страни со должини $4m$ и $2m$. Во него треба да се сместат саксии во форма на коцка во кои се засадени трендафили и каранфили. Каранфилите се во вазни со должина на раб $10cm$, а трендафилите се во вазни со должина на раб $20cm$. Вазни со каранфили треба да има три пати повеќе од вазни со трендафили. Колку вазни со каранфили, а колку со трендафили ќе има во пластеникот?

38. Плоштината на правоаголникот е еднаква на $72cm^2$, а должините на неговите страни изразени во сантиметри се природни броеви. Испиши ги сите различни правоаголници кои ја имаат наведената плоштина. Над секоја страна надвор од правоаголникот кој има најмал периметар е конструиран рамностран триаголник. Определи го периметарот на добиената фигура.

39. Пабло на училишното игралиште со кредна нацртал три квадрати со плоштини $25m^2, 9m^2$ и $1m^2$ (цртеж десно). Определи ја вкупната должина на сите линии кои ги нацртал Пабло.



40. Квадрат со плоштина $400cm^2$ помош на две прави е поделен на два

квадрата и два правоаголника. Определи ги периметрите на секој од делбените квадрати и правоаголници, ако должините на соседните страни на двата правоаголника се разликуваат за $60\,mm$.

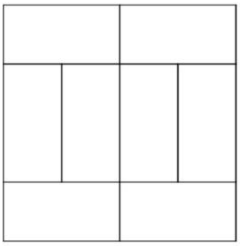
41. Во првиот квадрат е впишан втор квадрат чии темиња се средините на страните на првиот квадрат. Во внатрешноста на вториот квадрат се наоѓа трет квадрат чии страни од страните на вториот квадрат се оддалечени по $2\,cm$. Во внатрешноста на третиот квадрат се наоѓа четврт квадрат чии страни се од страните на третиот квадрат оддалечени по $3\,cm$. Определи ја плоштината на првиот квадрат, ако плоштината на четвртиот квадрат е $9\,cm^2$.

42. Дедо Ванчо за оградување на својата градина со правоаголен облик потрошил $154\,m$ жица. Ширината на градината е еднаква на $\frac{5}{6}$ од нејзината должина. Колкава е плоштината на градината на дедо Ванчо?

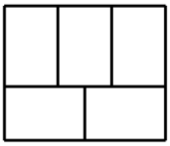
43. Даден е правоаголник $ABCD$ чии должини на страни се разликуваат за $4\,cm$, има периметар $16\,dm$ и $\overline{AB} > \overline{BC}$. Точката M е средина на страната BC. Точката N лежи на страната CD и важи $\overline{NC} = 3\overline{DN}$. Отсечките AM и BN се сечат во точката P. Кој има поголема плоштина, триаголникот ABP или четириаголникот $PMCN$ и за колку?

44. Родителите на Андреј сакаат да уредат и заградат цветна градина со правоаголен облик. Должините на страните треба да бидат природни броеви изразени во метри, а плоштината да е $24\,m^2$. Колку ќе чини оградата, ако $1\,m$ ограда чини 750 денари?

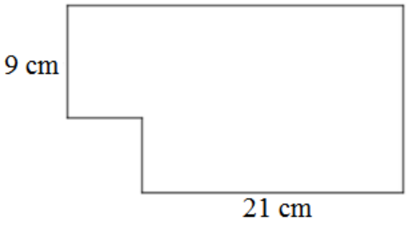
45. Од осум еднакви плочки во форма на правоаголник е составен квадратот прикажан на цртежот десно. Десет такви квадрати се наредени еден до друг во низа, со што е добиена правоаголна патека во дворот на Горјан. Определи ги периметарот и плоштината на патеката ако периметарот на една плочка е $144\,cm$.



46. Правоаголник со периметар $176cm$ е поделен на пет складни помали правоаголницикако што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на големиот правоаголник.

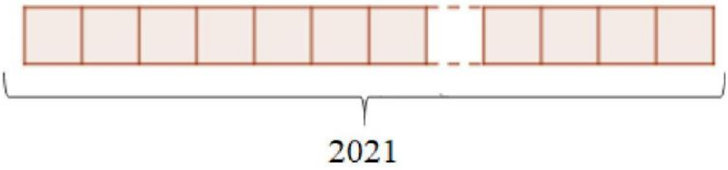


47. На цртежот десно е прикажан правоаголник од кој е отсечен квадрат. Плоштината на добиената фигура е $369cm^2$, а должините на скратените страни се $21cm$ и $9cm$. Определи ја плоштината на отсечениот квадрат.



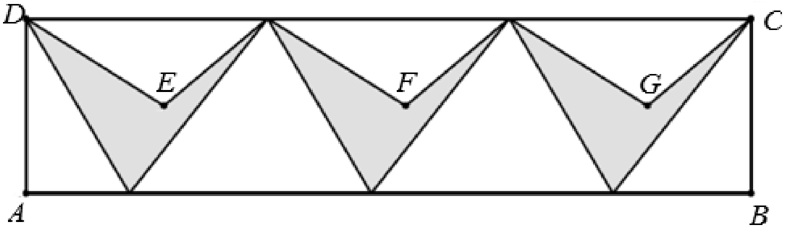
48. Плоштината на правоаголникот чии страни се изразени со природни броеви во сантиметри е еднаква на $48cm^2$. Колкава може да биде плоштината на квадратот кој има еднаков периметар како и правоаголникот ако должината на страната на квадратот изразена во сантиметри е природен број?

49. Правоаголник е составен од 2021 складни квадрати (види цртеж).



Определи го периметарот на овој правоаголник, ако неговата плоштина е еднаква на $18189cm^2$.

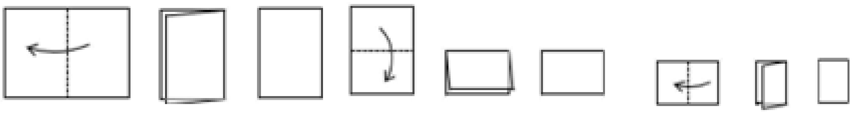
50. Определи ја плоштината на осенчениот дел на правоаголникот $ABCD$ чија плоштина е $144cm^2$, а ширината му е $\frac{1}{4}$ од должината. Осенче-



ниот дел се состои од три складни четириаголници, а точките E, F, G припаѓаат на симетралата на страната BC.

51. Кројачка Ана има платно во форма на правоаголник чија должина на едната страна е 70% од должината на другата страна. Таа платното го пресекла по отсечка чии крајни точки се средините на две соседни страни на правоаголникот и добила два дела во форма на правоаголен триаголник и петаголник. Периметарот на петаголникот е за $68\,dm$ поголем од периметарот на триаголникот. Определи ја плоштината на платното.

52. Хартија има форма на правоаголник чии страни се долги $480\,mm$ и $360\,mm$. Хартијата е превиткана така што двете страни со помала должина се преклошуваат една со друга (види ги цртежите).

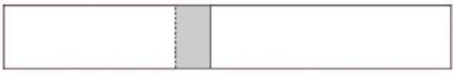


Прво превиткување   Второ превиткување   Трето превиткување

Определи ја плоштината на правоаголникот кој е добиен по петтото превиткување.

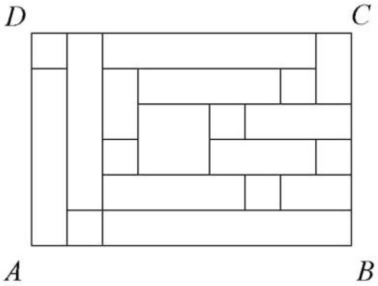
53. Филип од хартија пресекол два правоаголника со различни должини и со еднакви ширини.

Ги залепил така што деловите ќе се преклопуваат и добил нов правоаголник (види го долниот цртеж).

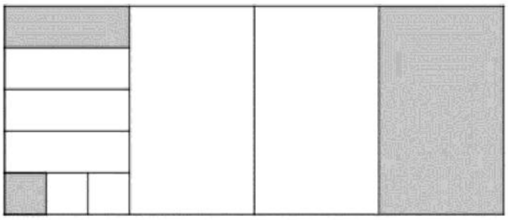


Преклопениот (осенчениот) дел има плоштина $18\,cm^2$, а ширината му е еднаква на ширината на почетните правоаголници. Должината на преклопениот дел е еднаква на шестина од должината на помалиот правоаголник и осмина од должината на поголемиот правоаголник. Колкав е периметарот на новодобиониот правоаголник ако ширината на поголемиот правоаголник е четири пати помала од неговата должина?

54. Прваоаголникот $ABCD$ на цртежот десно е поделен на правоаголници, и сите најмали квадрати се складни. Плоштината на правоаголникот $ABCD$ е еднаква на $3456\,cm^2$. Определи го збирот на периметрите на сите правоаголници нацртани внатре во правоаголникот $ABCD$, а кои внатре во себе не содржат помали правоаголници.

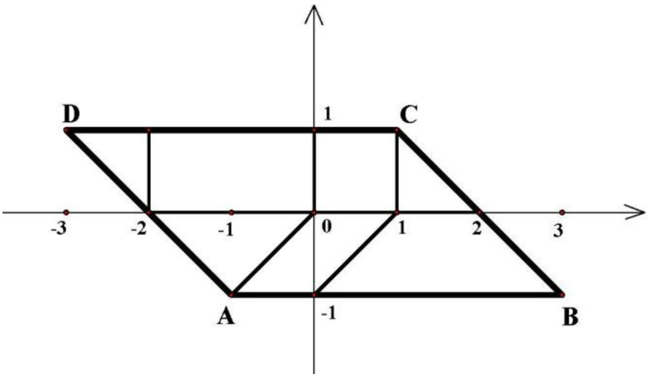


55. Големиот правоаголник на цртежот е поделен на четири складни правоаголници, од кои едниот е обоен. Потоа еден од необоените правоаголници е поделен на пет складни правоаголници, од кои едниот е обоен и на крајот еден од овие пет правоаголници е поделен на три складни правоаголници, од кои едниот е обоен.



Определи ја плоштината на необоениот дел од почетниот правоаголник, ако најмалиот негов обоен дел е квадрат, а збирот на периметрите на трите обоени делови е $19,6\,cm$.

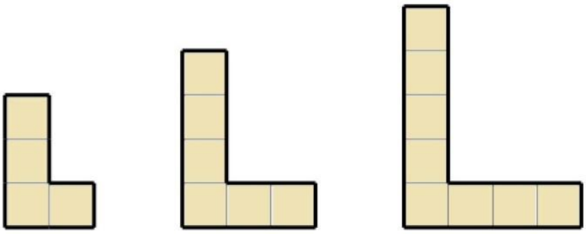
56. Во координатен систем е нацртан паралелограм $ABCD$, кој е поделен на седум делови: три триаголници, правоаголник, квадрат, паралелограм и трапез (види цртеж).



Определи кои делови треба да се обојат за да се обоени 62,5% од паралелограмот $ABCD$, при што се обоени:
а) најмалиот можен број негови делови,
б) најголемиот можен број негови делови.

57. На страните на правоаголникот $ABCD$ се означени средините A_1 на AB, B_1 на BC, C_1 на CD и D_1 на DA. Потоа на страните на четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ на истиот начин се означен средините на страните A_2, B_2, C_2, D_2 кои се темиња на четириаголникот $A_2B_2C_2D_2$. Постапката продолжува така што на секој така добиен четириаголник се означуваат средините на страните и тие точки се темиња на нов четириаголник. Докажи дека четириаголникот $A_7B_7C_7D_7$ е ромб. Определи ја плоштината на четириаголникот $A_7B_7C_7D_7$, ако збирот на плоштините на четириаголниците $A_4B_4C_4D_4$, $A_5B_5C_5D_5$ и A_6B_6 C_6D_6 е еднаков на 189.

58. Дадена е низа фигури во вид на буквата L кои се составени од складни квадрати. Првите три члена на низата се дадени на долните цртежи.



Определи ја плоштината на 2021-та фигура во низата ако нејзиниот периметар е еднаков на $40450\,cm$.

59. Колку коцки со раб $4\,cm$ треба да се ставаат една над друга за да се добие квадар со плоштина $352\,cm^2$?

60. Со спојување на два еднакви квадари е добиена коцка со плоштина $384\,cm^2$. Определи ја плоштината на квадарот.

61. Филип има седум коцки од пластелин. Волуменот на најголемата

коцка е $64cm^3$. Две коцки имаат должини на рабови $1cm$ пократки од работ на најголемата коцка, а преостанатите коцки имаат должини на рабови $2cm$ пократки од должината на работ на најголемата коцка. Филип го згмечил пластелинот од сите 7 коцки и формирал квадар. На колку различни начиниможе Филип да формира квадат чии должини на страни изразени во сантиметри се природни броеви?

62. Должините на страните на картон со правоаголен облик, изразени во дециметри, се природни броеви. Од секое негово теме е исечен квадрат со должина на страна $25cm$. Преостанатиот дел од картонот е употребен за правење кутија без капак чиј волумен е $112{,}5\,dm^3$. Определи ги должините на страните на почетниот правоаголник.

V. МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Дадени се множествата

$$A=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n<2021 \text{ и } 7\,|\,n\},\ B=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n<2021 \text{ и } 21\,|\,n\},$$
$$C=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n<2021 \text{ и } 84\,|\,n\}.$$

Определи го бројот на елементите на множеството $A\setminus(B\setminus C)$.

2. Дадени се множествата $A=\{-3,-2,1,3,5\}$ и $B=\{-1,0,1,2\}$. Спореди ги броевите на елементите на множествата

$$C=\{c\,|\,c=|a|+|b|,a\in A,b\in B\} \text{ и } D=\{d\,|\,d=|a+b|,a\in A,b\in B\}.$$

3. Определи ги елементите на множествата A,B и C ако:

$$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ A\cap B=\{5,6,7\},$$
$$A\setminus C=\{1,2,6,7\},\ B\setminus(A\cup C)=\{8,9\},\ B\cap C=\{3,5\}.$$

4. Дадени се множествата A,B и C такви што $A\cap B\cap C=\varnothing$. Ако множеството $A\setminus B$ има 7 елементи, множеството $C\setminus B$ има 8 елементи, множеството $A\cap C$ има 2 елементи и множеството $A\cup B\cup C$ има 20 елементи, колку елементи има множеството B?

5. Маја, Ана и Дорка заедно тренираат ракомет и одлучиле заедно да организираат забава. Се договориле дека вкупниот број гости ќе биде 40. Маја поканила 17 пријатели, а бројот на гостите кои ги поканила само Ана е за 3 поголем од бројот на гостите кои ги поканила само Дорка. Бидејќи тие имаат и заеднички пријатели се случило сите три да поканат 4 заеднички пријатели, Маја и Ана поканиле 5 заеднички пријатели, Ана и Дорка поканиле 6, а Маја и Дорка поканиле 7 заеднички пријатели. Колку гости поканила Ана, а колку Дорка?

6. Во едно училиште има 97 ученици во петто одделение. Направиле анкета за тоа кој вкус сладолед најмногу сакаат и ги добиле следниве одговори:
   - 25 ученици сакаат сладолед од чоколадо и ванила,

- 26 ученици сакаат сладолед од ванила и јагода,
- 17 ученици сакаат сладолед од чоколадо и јагода,
- 9 ученици ги сакаат сите три вкусови сладолед,
- 5 ученици не сакаат сладолед.

Колку ученици сакаат само сладолед од ванила, ако нивниот број е еднаков на бројот на учениците кои сакаат само сладолед од јагода и е двојно помал од бројот на учениците кои сакаат само сладолед од чоколадо?

7. На учениците во VI^a им е поставено прашање кој спорт го сакаат. Добиени се следниве одговори: 18 ученици сакаат кошарка, 14 ученици фудбал, 10 ученици ракомет, 5 ученици фудбал и ракомет, 7 ученици кошарка и ракомет, 10 ученици фудбал и кошарка и 4 ученици ги сакаат сите три спорта. Колку ученици има во ова одделение ако секоја ученик сака барем еден спорт.

8. Колку има природни броеви кои се помали или еднакви на 2019, а кои не се деливи со ниту еден од броевите 6, 9 и 15?

9. Колку има цели броеви кои по апсолутна вредност се помали од 2022 и не се деливи со 3, 5 или 7?

10. Три пријателки Ана, Калина и Темјана цртале знамиња на држави кои сакаат да ги посетат. Ана нацртала 20, Калина 25, а Темјана 28 знамиња. Бројот на знамињата кои ги нацртале и Калина и Ана е еднаков на три петтини од бројот на знамињата кои ги нацртала Ана. Бројот на знамињата кои ги нацртале и Темјана и Ана е еднаков на четвртина од бројот на знамињата кои ги нацртала Ана. Бројот на знамињата кои ги нацртале и Калина и Темјана е еднаков на две седмини од бројот на знамињата кои ги нацртала Темјана. Бројот на знамињата кои ги нацртале сите три е седумнаесет пати помал од вкупниот број нацртани знамиња. Колку вкупно разлини знамиња нацртале Ана, Калина и Темјана?

11. Колку има триелементни подмножества на множеството

$$A=\{\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{3}{11},\frac{4}{11},\frac{5}{11},\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{8}{11},\frac{9}{11},\frac{10}{11}\}$$

во кои збирот на најмалиот и најголемиот елемент е 1.

12. Еден песочен часовник мери 10 минути (претурање на песокот од еден во друг дел трае 10 минути), а друг песочен часовник мери 7 минути. Како со користење на овие два часовника ќе се измерат 23 минути?

13. а) Дали постојат четири различни природни броеви такви што збирот на секои три од нив е прост број?
    б) Дали постојат пет различни природни броеви такви што збирот на секои три од нив е прост број?

14. Во одделението на Горјан има n ученици. Сите ученици собираат албуми со сликички. Секој ученик собрал најмалку еден албум, а најмногу од сите, 8 албуми, собрал Горјан. Определи ја најмалата вредност на n така што со сигурност можеме да тврдиме дека постојат најмалку 5 ученици кои собрале еднаков број албуми.

15. Во две исти кутии се наоѓаат вкупно 61 топче. Сите топчиња се обоени во една од пет различни бои и не се сите со иста маса. Постојат топчиња со две различни маси – полесни и потешки. Докажи дека постојат најмалку 4 топчиња обоени со иста боја и со еднаква маса кои се во иста кутија.

16. Колку има трицифрен броеви кои се помали од 200 и кои можат да се запишат како производ a^2b, каде a и b се прости броеви?

17. Колку има седумцифрени палиндроми чиј производ на цифри е парен број? За еден број велиме дека е палиндром ако се чита исто и од левата и од десната страна. На пример, бројот 2017102 е палиндром.

18. Збирот на првата и последната цифра на петцифрениот природен број запишан со различни цифри е еднаков на производот на преостанатите три цифри. Колку такви броеви постојат?

19. Колку различни решенија има бројниот ребус (на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри):

$$\begin{array}{r} ABBCB \\ +BCADA \\ \hline DBDDD \end{array}$$

20. Определи го бројот на петцифрените броеви чии цифри се различни и:
а) се деливи со 10,
б) збирот на првата и последната цифра е 8?

21. Колку има четирицифрени броеви кај кои и збирот на цифрите и производот на цифрите еднаков на 8? Испиши ги овие броеви! Определи ја разликата на најголемиот и најмалиот од овие броеви!

22. Во една кутија има сини, зелени и црвени топчиња. Познато е дека без гледање треба да се извлечат најмалку 11 топчиња за да сме сигурни дека меѓу нив има топчиња од сите три бои. Понатаму, потребно е да се извлечат најмалку 10 топчиња за да сме сигурни дека меѓу нив има барем едно зелено топче и дека треба да се извлечат најмалку 8 топчиња за да сме сигурни дека меѓу нив има барем едно црвено топче. По колку топчиња од секоја боја има во кутијата?

23. На фудбалски турнир се натпреварувале 7 екипи. Секои две екипи меѓусебно одиграле по еден натревар. Во случај на победа на една од екипите, таа добива 5 бода, а поразената екипа не добива бодови, додека во случај на нерешен резултат секоја од екипите добива по 2 бода. Познато е дека бројот на бодовите кои вкупно ги освоиле сите екипи на турнирот е еднаков на 90 и дека екипата која освоила најмногу бодови, т.е екипата која победила на турнирот освоила 24 бода. Определи го најголемиот број бодови кои можела да ги освои екипата која била второпласирана на турнирот.

24. На училишното игралиште во ред, еден до друг, застанале ученици од шесто одделение. Потоа меѓу секои два ученика во редот застанал по еден ученик од седмо одделение. Потоа, меѓу секои два ученика во редот застанал по еден ученик од осмо оддление и на крајот меѓу секои два ученика во редот застанал по еден ученик од деветто одделение. Во тој момент на игралиштето имало 193 ученици. Колку ученици биле од седмо одделение?

25. За балканската средба на млади математичари се пријавиле 8 ученици од Скопје, 7 од Битола, 2 од Прилеп и 3 ученици од Охрид. Треба да се состави петчлена делегација во која ќе има барем по еден ученик од секој од четирите града. На колку начини може да се состави деле-

гацијата.

26. Во магацинот на една книжарница останал поголем број тетратки од 12 различни видови. Одделните цени на една тетратка од секој вид се редоследно: 11, 12, 15, 16, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 29 и 30 денари. На колку различни начини може да се направи комплет од три тетратки чија вкупна вредност во денари е делива со 5?

27. Ангел, Бранко, Цветан, Дамјан, Елена и Фросина треба да се наредат во редица.
а) На колку различни начини децата може да се наредат ако Бранко е лево од Елена?
б) На колку различни начини може да се наредат ако меѓу Цветан и Дамјан не стои ниту едно друго дете?

28. На колку начини Ивана, Ана и Теодора можат да поделат 6 моливи така што секое од нив добива барем еден молив?

29. Колку има триаголници со целобројни должини на страни изразен во сантиметри, меѓу кои не постојат два складни триаголници и чиј периметар е еднаков на $20cm$? Запиши ги должините на страните на овие триаголници.

30. На правата p се дадени три точки и дадени се уште три неколинерани точки кои не припаѓаат на правата p. Колку отсечки и колку најмногу прави се определени со овие точки?

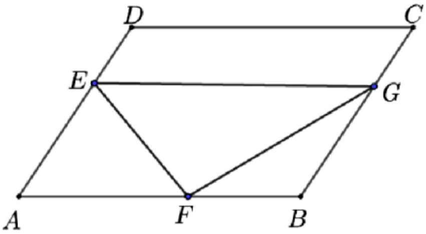
31. Колку точки треба да се означат на права за да бројот на отсечките кои тие точки ги определуваат е десет пати поголем од бројот на полуправите (на таа права) определен со истите тие точки? Најди го бројот на отсечките определени со овие точки.

32. Дадени се 6 точки меѓу кои нема три колинеарни точки.
а) Колку отсечки се определени со овие точки?
б) Колку триаголници се определени со овие точки?

33. Должините на на страните на триаголникот се природни броеви. Должината на едната страна е 100, а другите две страни се пократки

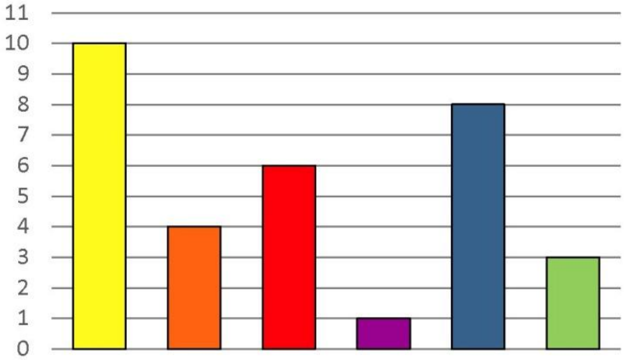
од неа. Колку такви нескладни триаголници постојат?

34. На колку различни начини Андреј кој се наоѓа во точката A може по нацртаните отсечки да дојде до пријателоs Бранко кој се наоѓа во точката B? Притоа Андреј смее да се движи само по нацртаните отсечки чии крјни точки си A, B, C, D, E, F, G и низ секоја од овие точки може да помине најмногу еднаш.



35. Волуменот на дрвен квадар е $840\,cm^3$. Должините на неговите рабови изразени во сантиметри се парни природни броеви. Секој раб е подолг од $2\,cm$. Квадарот е обоен и потоа е расечен на коцки со раб $1\,cm$. Некои од добиените коцки имаат обоени ѕидови, а некои не. Колку коцки имаат непарен број обоени ѕидови?

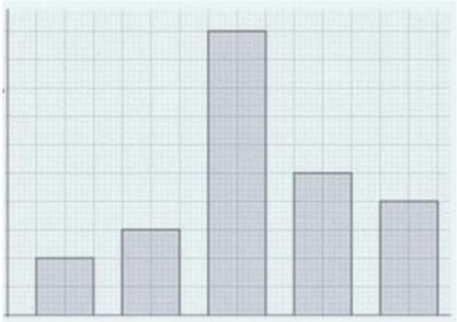
36. Ласте, Марко, Ангел, Филип, Иван и Борис во минатат година биле стрелци за фудбалската екипа на своето училипте. Дијаграмот прикажува колку вкупно голови постигнал секој од нив, но имињата недостасуваат.



Определи кој колку голови постигнал, ако се знае дека:

1) Марко постигнал два гола помалку од Ласте,
2) Иван постигнал најмалку голови,
3) Бројот на головите на Ласте е еднаков на бројот на головите кои заедно ги постигнале Филип и Ангел,
4) Филип постигнал два пати повеќе голови од Борис.

37. По анкетата која ја реализирал со 96 ученици од шесто одделение од своето училиште Горјан нацртал столбест дијаграм но на вертикалната оска на која го прикажувал бројот на учениците не ги запишал броевите, а не ги запишал ниту спортовите на хоризонталната оска. Запамтил дека со пливање се занимава пет пати ученици отколку со тенис, а двојно повеќе ученици отколку со ракомет. Кошаркари има помалку отколку фудбалери. Колку ученици се занимаваат со кошарка?



РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I. АЛГЕБРА

1. Определи ја вредноста на изразот:

а) $a-(b-c)$, б) $a-b+c$,

ако $a=-5+1$, $b=-6-1$ и $c=|-7|$.

Решение. Имаме: $a=-4$, $b=-7$ и $c=7$. Според тоа:

$$a-(b-c)=a-b+c=-4-(-7)+7=10.$$

2. Пресметај ја вредноста на изразот $A, B, A:B, A\cdot B$ ако

$$A=840:(200-12\cdot 15) \text{ и } B=12+840:60-20.$$

Решение. Имаме:

$$A=840:(200-12\cdot 15)=840:(200-180)=840:20=42,$$

$$B=12+840:60-20=12+14-20=6,$$

$$A:B=42:6=7,\ A\cdot B=42\cdot 6=252.$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот

$$2022\cdot 35-2022\cdot 34+32\cdot 2022-33\cdot 2022.$$

Решение. *Прв начин*. Имаме:

$$\begin{aligned}2022\cdot 35-2022\cdot 34+32\cdot 2022-33\cdot 2022&=2022\cdot(35-34+32-33)\\&=2022\cdot 0=0.\end{aligned}$$

Втор начин. Имаме:

$$\begin{aligned}2022\cdot 35-2022\cdot 34+32\cdot 2022-33\cdot 2022&=\\&=70770-68748+64704-66726\\&=2022+64704-66726\\&=66726-66726=0.\end{aligned}$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2858-858\cdot(4-(900-(81\cdot 8+8\cdot 19)-100)-2)+879.$$

Решение. *Прв начин*. Имаме

$$\begin{aligned}&2858-858\cdot(4-(900-(81\cdot 8+8\cdot 19)-100)-2)+879=\\&=2858-858\cdot(4-(900-8\cdot(81+19)-100)-2)+879\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2858-858\cdot(4-(900-8\cdot 100-100)-2)+879\\
&= 2858-858\cdot(4-(900-800-100)-2)+879\\
&= 2858-858\cdot(4-0-2)+879\\
&= 2858-858\cdot 2+879\\
&= 2858-1716+879\\
&= 2021.
\end{aligned}
$$

Втор начин. Имаме

$$
\begin{aligned}
2858-858\cdot(4-(900-(81\cdot 8+8\cdot 19)-100)-2)+879 &=\\
&= 2858-858\cdot(4-(900-(648+152)-100)-2)+879\\
&= 2858-858\cdot(4-(900-800-100)-2)+879\\
&= 2858-858\cdot(4-0-2)+879\\
&= 2858-858\cdot 2+879\\
&= 2858-1716+879\\
&- 2021.
\end{aligned}
$$

5. Пресметај

$$698\cdot 134-260:2\cdot 698+(13\cdot 49+7\cdot 9)-456:228.$$

Решение. *Прв начин*. Имаме:

$$
\begin{aligned}
698\cdot 134-260:2\cdot 698+(13\cdot 49+7\cdot 9)-456:228 &=\\
&= 698\cdot 134-130\cdot 698+(637+63)-456:228\\
&= 698\cdot(134-130)+700-2\\
&= 698\cdot 4+698\\
&= 698\cdot(4+1)\\
&= 698\cdot 5\\
&= 3490.
\end{aligned}
$$

Втор начин. Имаме:

$$
\begin{aligned}
698\cdot 134-260:2\cdot 698+(13\cdot 49+7\cdot 9)-456:228 &=\\
&= 698\cdot 134-130\cdot 698+(637+63)-2\\
&= 93532-90740+700-2\\
&= 2792+700-2\\
&= 3492-2\\
&= 3490.
\end{aligned}
$$

6. Кој број е четири пати поголем од третината на вредноста на изразот:

$$184\cdot 15+15\cdot 16-15\cdot 100+15?$$

Решение. *Прв начин*. Вредноста на изразот е:

$$\begin{aligned}184\cdot 15+15\cdot 16-15\cdot 100+15&=15\cdot(184+16-100+1)\\&=15\cdot 101=1515.\end{aligned}$$

Третина од добиениот број е $1515:3=505$. Бројот кој е четири пати поголем од добиената третина е $505\cdot 4=2020$.

Втор начин. Вредноста на изразот е:

$$\begin{aligned}184\cdot 15+15\cdot 16-15\cdot 100+15&=2760+240-1500+15\\&=3000-1500+15=1515.\end{aligned}$$

Третина од добиениот број е $1515:3=505$. Бројот кој е четири пати поголем од добиената третина е $505\cdot 4=2020$.

7. Во изразот $5\cdot 12+6:3-1$ стави една или повеќе загради така што неговата вредност ќе биде еднаква на:

а) 21, б) 25, в) 33, г) 63.

Решение. Имаме:

$(5\cdot 12+6):3-1=(60+6):3-1=66:3-1=22-1=21$,

$5\cdot((12+6):3-1)=5\cdot(18:3-1)=5\cdot(6-1)=5\cdot 5=25$,

$(5\cdot 12+6):(3-1)=(60+6):2=66:2=33$,

$5\cdot 12+6:(3-1)=60+6:2=60+3=63$.

8. Пресметај

$$36+64\cdot 17-(502-352:8+511)$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}36+64\cdot 17-(502-352:8+511)&=36+1088-(502-352:8+511)\\&=36+1088-(502-44+511)\\&=36+1088-(458+511)\\&=36+1088-969\\&=155.\end{aligned}$$

9. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{5}+1\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{7}{11}-\tfrac{3}{11}\right):\left(\left(1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\right):18\tfrac{1}{3}\right).$$

Кој е најголемиот природен број помал од вредноста на дадениот израз?

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{5}+1\tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{7}{11}-\tfrac{3}{11}):((1\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}):18\tfrac{1}{3}) &= (\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{5}+\tfrac{7}{5}\cdot\tfrac{7}{11}-\tfrac{3}{11}):((\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{4}):\tfrac{55}{3})\\ &= (\tfrac{2}{5}+\tfrac{49}{55}-\tfrac{3}{11}):(\tfrac{7}{4}\cdot\tfrac{3}{55})\\ &= \tfrac{56}{55}:\tfrac{21}{220}\\ &= \tfrac{56}{55}\cdot\tfrac{220}{21}\\ &= \tfrac{32}{3}\\ &= 10\tfrac{2}{3}.\end{aligned}$$

Бараниот најголем природен број е 10.

10. Пресметај

$$(\tfrac{5}{3}-1):\tfrac{1}{6}+(\tfrac{20}{7}-2)\cdot 14-1\tfrac{1}{2}:(1-\tfrac{1}{2})\,.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(\tfrac{5}{3}-1):\tfrac{1}{6}+(\tfrac{20}{7}-2)\cdot 14-1\tfrac{1}{2}:(1-\tfrac{1}{2}) &= \tfrac{2}{3}:\tfrac{1}{6}+\tfrac{6}{7}\cdot 14-\tfrac{3}{2}:\tfrac{1}{2}\\ &= \tfrac{2}{3}\cdot 6+\tfrac{6}{7}\cdot 14-\tfrac{3}{2}\cdot 2\\ &= 4+12-3\\ &= 16-3\\ &= 13.\end{aligned}$$

11. Пресематј ја вредноста на изразот

$$(-40-(-5)^4)\cdot 3+3^5:(-9)\,.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}(-40-(-5)^4)\cdot 3+3^5:(-9) &= (-40-625)\cdot 3+243:(-9)\\ &= -665:3-27\\ &= -1885-27\\ &= -2022.\end{aligned}$$

12. Определи го најголемиот парен трицифрен број запишан со различни цифри и чиј производ на цифри е еднаков на 24.

Решение. Имаме:

$$24=2\cdot 3\cdot 4=1\cdot 4\cdot 6=1\cdot 3\cdot 8\,.$$

Затоа со помош на цифрите кои учествуваат во горните производи може да се запишат следниве трицифрени парни броеви:

234, 324, 342, 432, 146, 164, 416, 614, 138, 318.

Најголем од овие броеви е 614.

13. Дадени се изразите $A=2x+13+11x-4-5x+6x+12$ и $B=9+3y+14y-4-5y+7-y+5$. Ако $x=6$, определи го y така што вредностите на изразите A и B ќе бидат еднакви.

Решение. *Прв начин*. Имаме

$$A=2x+13+11x-4-5x+6x+12=14x+21$$

и

$$B=9+3y+14y-4-5y+7-y+5=11y+17.$$

За $x=6$, добиваме $A=14\cdot 6+21=84+21=105$. Го бараме y така што вредностите на изразите A и B ќе бидат еднакви. Имаме

$$\begin{aligned}&11y+17=105,\\&11y=105-17,\\&11y=88,\\&y=88:11,\\&y=8.\end{aligned}$$

Втор начин. За $x=6$ имаме

$$\begin{aligned}A&=2\cdot 6+13+11\cdot 6-4-5\cdot 6+6\cdot 6+12\\&=12+13+66-4-30+36+12\\&=105.\end{aligned}$$

Го бараме y така што вредностите на изразите A и B ќе бидат еднакви. Имаме

$$\begin{aligned}&9+3y+14y-4-5y+7-y+5=105,\\&11y+17=105,\\&11y=88,\\&y=88:11,\\&y=8.\end{aligned}$$

14. Определи го збирот на сите четирицифрени броеви запишани само со непарни цифри.

Решение. На секое декадно место (од единиците до илјадитите) се наоѓаат сите непарни цифри: 1, 3, 5, 7 и 9. Ако на местото на цифрата на илјадитите ја ставиме цифрата 1, тогаш на преостанатите три места можеме да ја ставиме било која од петте непарни цифри, па имаме $5\cdot 5\cdot 5=125$ броеви кои почнуваат со цифрата 1. Исто така имаме по

125 броеви кои почнуваат со цифрите 3, 5, 7 или 9. Според тоа, секоја од петте непарни цифри се појавува по 125 пати на декадното место на иљадитите, па затоа збирот на иљадитите е еднаков на

$$125\cdot(1+2+3+5+7+9)\cdot1000=125\cdot25\cdot1000.$$

Аналогно се добива дека збирот на стотките е еднаков на

$$125\cdot(1+2+3+5+7+9)\cdot100=125\cdot25\cdot100,$$

Збирот на десетките е еднаков на

$$125\cdot(1+2+3+5+7+9)\cdot10=125\cdot25\cdot10$$

и збирот на единиците е еднаков на

$$125\cdot(1+2+3+5+7+9)\cdot1=125\cdot25\cdot1.$$

Конечно, бараниот збир е еднаков на

$$125\cdot25\cdot(1000+100+10+1)=3125\cdot1111=3471875.$$

15. Природните броеви се распоредени во табела како што е прикажано

1							
2	3						
4	5	6					
7	8	9	10				
11	12	13	14	15			
16	17	18	19	20	21		
22	23	24	25	26	27	28	
29	30	31	32	33	34	35	36

Табелата се продолжува со запишување на природни броеви така што секој следен ред содржи по еден број повеќе од претходниот ред и започнува со првиот по ред број кој не е запишан. Определи го збирот на сите броеви во редот во кој се наоѓа бројот 1000.

Решение. Последните броеви во секој ред се членови на низата: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, ... во која вториот член е за 2 поголем од првиот, третиот е за 3 поголем од вториот, четвртиот е за 4 поголем од третиот, петтиот е за 5 поголем од четвртиот итн. Значи, важи

- првиот ред завршува со бројот 1,
- вториот ред завршува со бројот $1+2=3$,
- третиот ред завршува со бројот $1+2+3=6$,
- четвртиот ред завршува со бројот $1+2+3+4=10$,
- петтиот ред завршува со бројот $1+2+3+4+5=15$ ...

Забележуваме дека $n-$тиот ред завршува со бројот

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

За $n=44$ имаме

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{44\cdot 45}{2}=990.$$

За $n=45$ имаме

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{45\cdot 46}{2}=1035.$$

Според тоа, бројот 1000 се наоѓа во 45-тиот ред кој започнува со бројот 991, а завршува со бројот 1035. Значи, бараниот збир е:

$$\begin{aligned}991+992+...+1034+1035&=1+2+...+1035-(1+2+...+990)\\&=\frac{1035\cdot 1036}{2}-\frac{990\cdot 991}{2}\\&=1035\cdot 518-495\cdot 991 \qquad .\\&=536130-490545\\&=45585.\end{aligned}$$

16. Збирот на 86 последователни цели броеви е еднаков на 2021. За колку е аритметичката средни на позитивните броеви меѓу нив е поголема од аритметичката средина на негативните броеви меѓу нив?

Решение. Нека x е најмалиот од броевите. Тогаш другите броеви се $x+1, x+2, ..., x+85$, па затоа

$$\begin{aligned}&x+x+1+x+2+...+x+85=2021,\\&86x+1+2+...+85=2021,\\&86x+\frac{85\cdot 86}{2}=2021,\\&86x+3655=2021,\\&86x=-1634,\\&x=-19.\end{aligned}$$

Значи, бараните броеви се: $-19,-18,...,-1,0,1,...,66$. Збирот на позитивните броеви е

$$1+2+...+66=\frac{66\cdot 67}{2}=2211,$$

а нивната аритметичка средина е $2211:66=33,5$. Збирот на негативните броеви е еднаков на $2021-2211=-190$, а нивната аритемтичка средина е $-190:19=-10$. Бараната разлика е $33,5-(-10)=43,5$.

17. Дадени се множествата:

$$A=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,-154<a\leq 145\} \text{ и } B=\{b\in\mathbb{Z}\,|\,-149\leq a<88\}.$$

Што е поголемо и за колку: збирот на сите елементи на множеството A или производот на сите елементи на множеството B?

Решение. Имаме,

$$A=\{-153,-152,-151,...,-146,-145,-144,...,144,145\}$$

и

$$B=\{-149,-148,-147,...,-88,-87,-86,...,86,87\}.$$

Збирот на елементите на множеството A е

$$\begin{aligned}S_A&=-153+(-152)+...+(-146)+(-145)+...+(-1)+0+1+...+145\\&=-153-152-...-146+(-145+145)+(-144+144)+...+(-1+1)+0\\&=-153-152-151-150-149-148-147-146\\&=-1196.\end{aligned}$$

Производот на елементите на множеството B е 0, бидејќи 0 е елемент на B. Значи, производот на елементите на B е поголем од збирот на елементите на A и тоа за $0-(-1196)=1196$.

18. Определи го збирот на сите четирицифрени броеви во кои секои две последователни цифри земени во истиот редослед формираат квадрат на природен број.

Решение. Двоцифрени броеви кои се квадрати на природни броеви се 16, 25, 36, 49, 64 и 81.

Ако почнеме од 16 ја добиваме низата 16, 64, 49 и четирицифрениот број 1649.

Ако почнеме од 36 ја добиваме низата 36, 64, 49 и четирицифрениот број 3649.

Ако почнеме од 81 ја добиваме низата 81, 16, 64 и четирицифрениот број 8164.

Ако почнеме од 25, немаме двоцифрен квадрат кој почнува со 5, па низата се прекинува.

Ако почнеме со 49, немаме двоцифрен квадрат кој почнува со 9, па низата се прекинува.

Ако почнеме со 64 ја добиваме низата 64, 49 и трицифрениот број 649 и низата се прекинува бидејќи немаме двоцифрен квадрат кој почнува со 9.

Значи, бараните броеви се 1649, 3649 и 8164. Нивниот збир е

$$1649+3649+8164=13462.$$

19. Што е поголемо из а колку: збирот на сите парни природни броеви a

за кои $75 \le a \le 214$ или збирот на сите непарни природни броеви b за кои $135 \le b \le 242$.

Решение. За парните броеви кои го задоволуваат условот $75 \le a \le 214$ имаме

$$\begin{aligned} 76+78+...+214 &= 2+4+...+214-(2+4+...+74) \\ &= 2\cdot(1+2+...+107)-2\cdot(1+2+...+37) \\ &= 2\cdot\tfrac{107\cdot108}{2}-2\cdot\tfrac{37\cdot38}{2} \\ &= 107\cdot108-37\cdot38 \\ &= 11556-1406 \\ &= 10150. \end{aligned}$$

За непарните броеви кои го задоволуваат условот $135 \le b \le 242$ имаме

$$\begin{aligned} 135+137+...+239+241 &= 1+3+5+...+241-(1+3+...+133) \\ &= (0+1)+(2+1)+...+(240+1)-[(0+1)+(2+1)+...+(132+1)] \\ &= 121+(0+2+4+...+240)-[67+(0+2+4+...+132)] \\ &= 121+2(1+2+...+120)-[67+2(1+2+...+66)] \\ &= 121+2\cdot\tfrac{120\cdot121}{2}-[67+2\cdot\tfrac{66\cdot67}{2}] \\ &= 121+120\cdot121-(67+\cdot66\cdot67) \\ &= 121\cdot(1+120)-67\cdot(1+66) \\ &= 121\cdot121-67\cdot67 \\ &= 14641-4489 \\ &= 10152. \end{aligned}$$

Бидејќи $10152-10150=2$ заклучуваме дека поголем е збирот на непарните броеви за кои важи $135 \le b \le 242$ и тоа за 2.

20. Дадена е низата броеви: 5, 9, 13, 17, 21, ...

а) Определи го стотиот член на оваа низа.

б) Определи го производот на 20-тиот и 19-тиот член на оваа низа.

Решение. а) Секој следен член е за 4 поголем од претходниот. Тоа значи дека стотиот член на изата се добива кога на првиот член на низата 99 пати ќе се додаде бројот 4. Значи, стотиот член на низата е $5+99\cdot4=5+396=401$.

б) Според а) деветнаесеттиот член на низата е $5+18\cdot4=5+72=77$, а дваесеттиот член на низата е $5+19\cdot4=5+76=81$. Нивниот производ е $77\cdot81=6237$.

21. Првите два члена на низата се $3\frac{1}{2}$ и $1\frac{1}{4}$, а секој следен член е два пати помал од збирот на претходните два члена. Определи го четвртиот член на оваа низа.

Решение. Третиот член на низата е $\frac{1}{2}(3\frac{1}{2}+1\frac{1}{4})=\frac{19}{8}$, а нејзиниот четврт член е $\frac{1}{2}(1\frac{1}{4}+\frac{19}{8})=\frac{29}{16}$.

22. Определи го природниот број n за кој важи

$$\frac{3}{n+1}<\frac{7}{2020}<\frac{3}{n}.$$

Решение. Од дадената релација добиваме $\frac{n+1}{3}>\frac{2020}{7}>\frac{n}{3}$, односно $n+1>\frac{6060}{7}>n$. Но, $\frac{6060}{7}=865\frac{5}{7}$, па затоа $n=865$.

23. Определи рационален број со именител 7 кој е помал од $-\frac{5}{19}$, а е поголем од $-\frac{6}{19}$.

Решение. Последователно добиваме

$$-\frac{5}{19}>\frac{x}{7}>-\frac{6}{19},$$
$$-\frac{35}{19}>x>-\frac{42}{19},$$
$$-1\frac{16}{19}>x>-2\frac{4}{19}.$$

Но, x е цел број, па од последните неравенства следува $x=-2$. Значи, бараниот број е $-\frac{2}{7}$.

24. Докажи дека

$$\frac{1}{3\cdot6}+\frac{1}{6\cdot9}+\frac{1}{9\cdot12}+...+\frac{1}{2019\cdot2022}<\frac{1}{9}.$$

Решение. Ако искористиме дека за секој природен број k важи $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{1}{3\cdot6}+\frac{1}{6\cdot9}+\frac{1}{9\cdot12}+...+\frac{1}{2019\cdot2022}&=\frac{1}{9}(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{9\cdot12}+...+\frac{1}{673\cdot674})\\&=\frac{1}{9}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{673}-\frac{1}{674})\\&=\frac{1}{9}(1-\frac{1}{674})=\frac{1}{9}-\frac{1}{9\cdot674}<\frac{1}{9},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

25. Реши го бројниот ребус

$$\overline{AB}+\overline{ABB}+\overline{CBBC}=\overline{BCDC}$$

во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Цифрите A,B,C не може да се 0, бидејќи секоја од нив барем еднаш е на место на цифра со најголема местна вредност. Од збирот на цифрите не единиците следува $B+B+C=10+C$, па затоа $B=5$. Според тоа, $\overline{A5}+\overline{A55}+\overline{C55C}=\overline{5CDC}$. Од собирањето на илјадитите следува $C=4$, па затоа $\overline{A5}+\overline{A55}+\overline{4554}=\overline{54D4}$. Сега од собирањето на десетките, бидејќи имаме пренос 1 при собирањето на единиците добиваме $D=A+1$ и имаме пренос 1 на мествната вредност на стотките. Затоа од собирањето на стотките $A+6=10+4$, т.е. $A=8$. Според тоа, $D=9$ и собирањето е

$$85+855+4554=5494.$$

26. Горјан во точен пример за собирање ги заменил еднаквите цифри со еднакви букви, а различните букви со различни цифри и го добил бројниот ребус:

$$M+A+T+E+M+A+T+I+K+A=\overline{EE}.$$

Која најголема цифра може да ја замени буквата E ?

Решение. Даденото равенство може да се запише во видот

$$2M+3A+2T+I+K=10E.$$

Цифрата E ќе биде најголема ако $A=9, M=8$ (или 7) и $T=7$ (или 8). Тогаш $I+K$ е најмногу 11, па збирот би бил најмногу 68, од што следува дека $E\leq 6$. Ако $I=1, K=2$, тогаш збирот е 66, па најголемата цифра која E може да ја замени е 6.

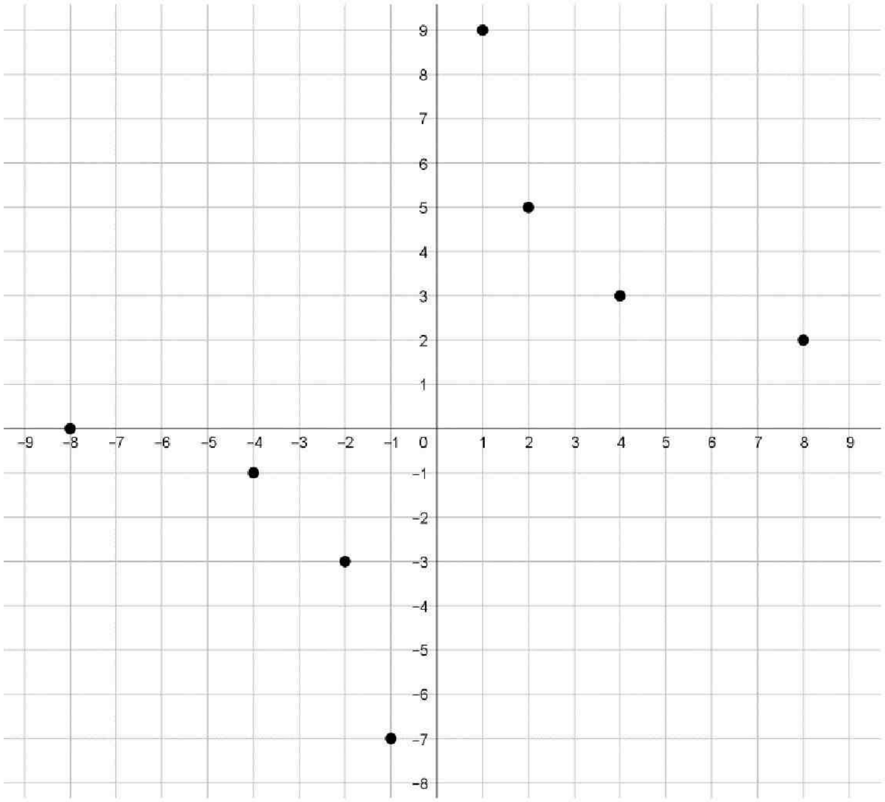
27. Определи ги сите точки со целобројни координати (x,y) за кои важи $x(y-1)=8$. Нацртај ги точките во координатен систем.

Решение. Имаме $x(y-1)=1\cdot 8=(-1)\cdot(-8)=2\cdot 4=(-2)\cdot(-4)$, од каде добиваме

- $x=1, y-1=8$, односно $(x,y)=(1,9)$,
- $x=8, y-1=1$, односно $(x,y)=(8,2)$,
- $x=-1, y-1=-8$, односно $(x,y)=(-1,-7)$,
- $x=-8, y-1=-1$, односно $(x,y)=(-8,0)$,
- $x=2, y-1=4$, односно $(x,y)=(2,5)$,

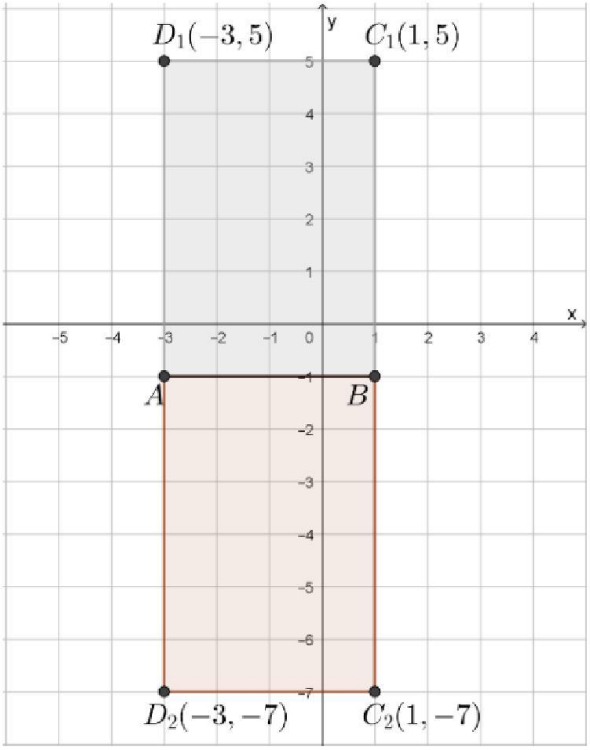
- $x=4, y-1=2$, односно $(x,y)=(4,3)$,
- $x=-2, y-1=-4$, односно $(x,y)=(-2,-3)$,
- $x=-4, y-1=-2$, односно $(x,y)=(-4,-1)$.

Најдените точки се прикажани во координатниот систем на долниот цртеж.



28. Точките $A(-3,-1)$ и $B(1,-1)$ се соседни темиња на правоаголник. Определи ги можните парови на другите две темиња така што плоштината на правоаголникот ќе биде 24 квадратни единици.

Решение. Точките A и B определуваат страна на правоаголникот со должина $1-(-3)=4$ единици. Ако плоштината на правоаголникот е 24 квадратни единици, тогаш страната соседна на AB мора да е долга $24:4=6$ единици. Последното значи дека $x-$ координатата на темето C е $x=1$, а за разликата на $y-$координатата и -1 треба да е 6 или -6. Според тоа, имаме две можности $C_1(1,5)$ и $C_2(1,-7)$. За $C_1(1,5)$ четвртото теме е $D_1(-3,5)$, а за $C_2(1,-7)$ четвртото теме е $D_2(-3,-7)$, види цртеж.



29. Пополни го магичниот квадрат прикажан на цртежот десно така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков.

18		
	36	
42		

Решение. Непознатите броеви во првиот ред да ги означиме со a и b (види цртеж десно).

18	a	b
	36	
42		

Збирот на броевите во првиот ред и на дијагоналата е еднаков, па затоа $18+a+b=42+36+b$. Бројот b се јавува на двете страни во равенството, па затоа мора да важи $18+a=78$, од каде добиваме $a=60$.

Со c и d да ги означиме непознатите броеви во вториот ред на магичниот квадрат. Збирот на броевите во првата колона и вториот ред е еднаков, па затоа важи $c+36+d=18+c+42$. Бројот c се појавува на двете страни на равенството, па затоа важи $36+d=60$, од каде добиваме $d=24$.

18		
c	36	d
42		

18		
	36	
42	e	f

Со e и f да ги означиме непознатите броеви во третиот ред на магичниот квадрат. Збирот на броевите во третиот ред и дијагоналата е еднаков, па затоа $42+e+f=18+36+f$. Бројот f се појавува на двете страни на последното равенство, па затоа мора да важи $42+e=54$, од каде следува $e=12$.

18	60	b
c	36	24
42	12	f

Да го пополниме магичниот квадрат со најдените и означените броеви (цртеж десно). Од втората колона добиваме дека збирот на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала на магичниот квадрат е еднаков на $60+36+12=108$. Сега, ги пресметуваме и преостанатите непознати броеви:

$$b=108-78=30,$$

$$c=108-60=48,$$

$$f=108-54=54.$$

Пополнетиот магичен квадрат е прикажан на цртежот десно.

18	60	30
48	36	24
42	12	54

30. Во празните квадратчиња запиши ги соодветните броеви така што ќе добиеш магичен кцвадрат, т.е. квадрат во кој збирот на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков.

$\frac{1}{6}$		
	$\frac{5}{12}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

Решение. Збирот на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{2+5+8}{12}=\frac{15}{12}.$$

Сега, лесно се добива дека во првиот квадрат на втората колона е бројот

$$\frac{15}{12}-(\frac{5}{12}+\frac{1}{4})=\frac{7}{12},$$

во првиот квадрат на третиот ред е бројот

$$\frac{15}{12}-(\frac{1}{4}+\frac{1}{3})=\frac{1}{3}$$

итн. Пополнетиот магичен квадрат е прикажан на цртежот десно.

$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

II. ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. Дадена е низата букви

   КОЛИЧНИКОСТАТОККОЛИЧНИКОСТАТОККОЛИЧНИК...

   Определи ја 2022. буква во оваа низа.

   Решение. Низата букви КОЛИЧНИКОСТАТОК која се повторува има 15 букви. Сега, од $2022=15\cdot134+12$ следува дека на 2022. место во дадената низа е дванаесеттата буква во КОЛИЧНИКОСТАТОК, а тоа е буквата А.

2. Андреј замислил четирицифрен број. Пабло на тој број му ја избришал цифрата на единиците и кога трицифрениот број, кој преостанал, го помножил со избришаната цифра добил 2020. Кој број можел да го замисли Андреј?

   Решение. Едноцифрени делители на бројот 2020 се 1, 2, 4 и 5. Производите $2020\cdot1$ и $1010\cdot2$ не ги земаме во предвид, бидејќи 2020 и 1010 не се трицифрени броеви. Затоа имаме две можности и тоа: $404\cdot5=2020$ и $505\cdot4=2020$. Значи, Андреј можел да го замисли бројот 4045 или бројот 5054.

3. Определи го остатокот при делењето на бројот n со бројот 45, ако е познато дека остатокот од делењето на бројот $n+2020$ со бројот 45 е 43.

   Решение. Со x да го означиме остатокот при делењето на бројот n со бројот 45. Остатокот при делењето на бројот 2020 со бројот 45 е еднаков на 40. Бидејќи $40<43$, заклучуваме дека остатокот при делењето на бројот $n+2020$ со бројот 45 е еднаков на $x+40$. Според тоа, $x+40=43$, од каде добиваме $x=3$.

   Значи, остатокот при делењето на бројот n со бројот 45 е 3.

4. Пабло ги запишал првите 66 природни броеви, а потоа избришал еден од нив. Кога ги собрал преостанатите 65 броеви добил збир кој е делив со 7. Кој број го избришал Пабло?

   Решение. *Прв начин.* Збирот на првите 66 природни броеви е еднаков на

$$\frac{66\cdot(66+1)}{2}=33\cdot 67=2211.$$

Бидејќи $2211=315\cdot 7+6$, за да по бришењето на еден од запишаните броеви збирот е делив со 7, Пабло треба да избрише број кој при делење со 7 дава остаток 6. Тоа значи дека Пабло избришал еден од броевите: 6, 13, 20, 27, 34, 41, 48, 55 или 62.

Втор начин. Збирот на првите 66 природни броеви е еднаков на

$$\frac{66\cdot(66+1)}{2}=33\cdot 67=2211.$$

$2211-66=2145$ и овој број не е делив со 7.

$2211-65=2144$ и овој број не е делив со 7.

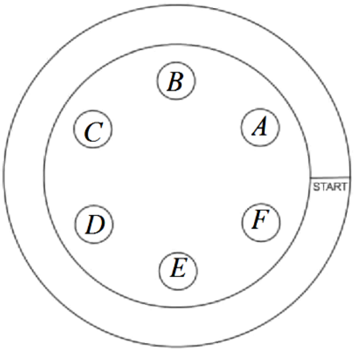
$2211-64=2147$ и овој број не е делив со 7.

$2211-63=2148$ и овој број не е делив со 7.

$2211-62=2149$ и овој број е делив со 7, т.е. $2149:7=307$.

Секој следен седми број ќе биде делив со 7, што значи дека секој следен број кој се одзема треба да се намали за 7. Според тоа, бараните броеви се: 62, 55, 48, 41, 34, 27, 20, 13 и 6.

5. Три момчиња трчат по кружна патека и тоа така што Анте прв тргнува од стартната линија,трча по патеката и минувајќи покрај столбовите A, B, C, D, E, F брои 1, 2, 3, 4, 5, 6. Потоа следниот круг го трча Бранко кој продолжува да брои 7, 8, 9, 10, 11, 12. По него трча Иван и брои 13, 14, 15, 16, 17, 18, па потоа по ред трчаат Анте, Бранко, Иван итн. Ако продолжат да трчаат кое момче ќе каже 444.



Решение. *Прв начин*. Во секој циклус на трчање на трите момчиња се бројат 18 столбови. Бидејќи $444=18\cdot 24+12$ момчињата треба да истрчаат 24 циклуси и потоа да изборјат уште 12 столбови. Првите 6 од овие 12 столбови ги брои Анре, а вторите 6 ги брои Бранко. Значи, Бранко ќе каже 444.

Втор начин. Секое момче кажува по 6 броја. Бидејќи $444=74\cdot 6$ бројот 444 ќе го каже момчето кое го трча 74-тиот круг. Понатаму, бидејќи $74=3\cdot 24+2$ заклучуваме дека 74-тиот круг ќе го трча момчето кое на почетокот второ почнало да трча, а тоа е Бранко. Конечно, Бранко ќе каже 444.

6. Филип ги запишал сите броеви од 2 до 2022 кои се деливи со 2, редоследно еден по друг без запирки. Која цифра се наоѓа на 2021. место?

   Решение. Едноцифрените парни броеви во низата зазеле 4 места, двоцифрените парни броеви завзеле $45\cdot 2=90$ места,а трицифрените парни броеви завзеле $450\cdot 3=1350$ места. Значи, овие броеви вкупно завзеле $4+90+1350=1444$ места. До 2021. Место треба да се запишат уште $2021-1444=577$ цифри. Бидејќи $577=4\cdot 144+1$, со помош на овие цифри може да се запишат 144 парни четирицифрени броеви, а на 2021. место ќе биде првата цифра од 145. парен четирицифрен број. Бидејќи 145. парен четирицифрен е 1288, добиваме дека бараната цифра е 1.

7. За целиот број велиме дека е *убав* ако е од видот $3k+1, k\in\mathbb{Z}$. Определи го збирот на сите убави броеви меѓу -300 и 300.

   Решение. Сите убави броеви меѓу -300 и 300 се
   $$-299,-296,-293,...,-2,1,4,...,298.$$
   Значи, имаме 200 броеви и треба да го пресметаме збирот
   $$-299+(-296)+(-293)+...+(-2)+1+4+...+298.$$
   Ако ги групираме првиот и последниот собирок, вториот и претпоследниот, ...,$n-$тиот член од лево со $n-$тиот член од десно, добиваме 100 групи од по два собирока чиј збир е еднаков на -1. Според тоа, бараниот збир е еднаков на -100.

8. Дадени се броевите
   $$a=33333333\cdot 44444444\cdot 55555555$$
   и
   $$b=66666666\cdot 77777777\cdot 88888888.$$
   Докажи дека $a+b$ е делив со 9.

   Решение. Имаме
   $$\begin{aligned}a&=33333333\cdot 44444444\cdot 55555555\\&=3\cdot 11111111\cdot 4\cdot 11111111\cdot 5\cdot 11111111\\&=60\cdot 11111111\cdot 11111111\cdot 11111111\end{aligned}$$
   и

$$\begin{aligned} b &= 66666666 \cdot 77777777 \cdot 88888888 \\ &= 6 \cdot 11111111 \cdot 7 \cdot 11111111 \cdot 8 \cdot 11111111 \\ &= 336 \cdot 11111111 \cdot 11111111 \cdot 11111111 \end{aligned}$$

па затоа

$$\begin{aligned} a+b &= (60+336) \cdot 11111111 \cdot 11111111 \cdot 11111111 \\ &= 396 \cdot 11111111 \cdot 11111111 \cdot 11111111 \\ &= 9 \cdot 44 \cdot 11111111 \cdot 11111111 \cdot 11111111 \end{aligned}$$

што значи дека $a+b$ е делив со 9.

9. Збирот на двоцифрените броеви $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ е делив со 33. Докажи дека четирицифрениот број $\overline{abcd}$ е делив со 33.

Решение. Имаме

$$\overline{abcd} = 100\overline{ab} + \overline{cd} = 99\overline{ab} + (\overline{ab} + \overline{cd}).$$

Бидејќи $33|99$ и $33|\overline{ab}+\overline{cd}$, од последното равенство следува дека $33|\overline{abcd}$.

10. Дадени се четири природни броја. Со пресметување на сите можни ненегативни разлики на овие броеви се добиени броевите 0, 2, 3 и 5. Определи ги овие броеви ако се знае дека збирот на двата поголеми броја е три пати поголем од збирот на двата помали броја.

Решение. Нека бараните броеви се $a \le b \le c \le d$. Сите нивни ненегативни разлики се $b-a, c-a, d-a, c-b, d-b, d-c$ и тие примаат вредности од множеството $\{0,2,3,5\}$. Јасно, некои од овие разлики се еднакви и важи $d-a=5$. Можни се три случаи.

а) $a=b<c<d$. Тогаш $b-a=0, d-a=d-b, 3(a+b)=c+d$, па затоа $6a=c+a+5$, т.е. $4a=c-a+5$. Значи, $c-a+5$ мора да е делив со 4, од што следува дека $c-a=3$, од каде добиваме $a=b=2$, $c=3$ и $d=7$.

б) $a<b=c<d$. Тогаш $b-c=0, d-a=5, c-a=b-a$. Понатаму, од $3(a+b)=c+d$ следува $3(a+b)=a+b+5$, односно $2(a+b)=5$, што не е можно.

в) $a<b<c=d$. Тогаш

$$d-c=0, d-a=c-a=5, 3(a+b)=c+d=2(a+5).$$

Значи, $4b=b-a+10$, па затоа $b-a+10$ е делив со 4, од каде следува дека $b-a=2$. Конечно, $a=1, b=3, c=d=6$.

11. Нека броевите $a_1, a_2, ..., a_n$ се сите позитивни и меѓусебно различни делители на бројот 2020. Определи ја вредноста на изразот
$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}.$$
Решение. Ако a_i е делител на бројот 2020, тогаш $a_i=\frac{2020}{a_k}$, каде a_k исто така е делител на бројот 2020. Затоа секој од броевите a_1, a_2, $..., a_n$ можеме да го замениме со една од дропките $\frac{2020}{a_1}, \frac{2020}{a_2}, ..., \frac{2020}{a_n}$.
Според тоа, важи
$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}=\frac{\frac{2020}{a_1}+\frac{2020}{a_2}+...+\frac{2020}{a_n}}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}=2020\cdot\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}=2020.$$

12. Определи ги најмалиот и најголемиот четирицифрен природен број чија цифра на десетките е 5 и кој е делив со 6.
Решение. Најмалиот четирицифрен број се добива ако цифрите на илјадитите и стотките се најмали можни, па затоа треба да го побараме меѓу броевите од видот $\overline{105a}$. Сега, од деливоста со 6 следува дека тој е делив со 2 и со 3, па затоа бројот треба да е парен и збирот $1+0+5+a=6+a$ треба да е делив со 3. Јасно, најмалиот број од видот $\overline{105a}$ се добива за $a=0$, т.е. најмалиот број е 1050.
Најголемиот четирицифрен број се добива ако цифрите на илјадитите и стотките се најголеми можни, па затоа бројот прво ќе го побараме да е од видот $\overline{995a}$. Сега од деливост со 2 следува дека цифрата a треба да е парна, а од деливоста со 3 следува дека збирот $9+9+5+a=23+a$ треба да е делив со 3. Според тоа, $a\in\{0,2,4,6,8\}$ и $3|23+a$. Единствена вредност за a за која $3|23+a$ е $a=4$, па затоа бараниот број е 9954.

13. Определи ги цифрите x и y така што производот на трицифрените броеви $\overline{12x}$ и $\overline{34y}$ е делив со 15.
Решение. Од $15|\overline{12x}\cdot\overline{34y}$ следува дека барем еден од броевите $\overline{12x}$ и $\overline{34y}$ е делив со 3 и барем еден е делив со 5.

1) Нека $5|\overline{12x}$. Ако $x=0$, тогаш $15|120$, па затоа $y\in\{0,1,2,...,9\}$. Ако $x=5$, тогаш мора $3|\overline{34y}$, па затоа $y\in\{2,5,8\}$.

2) Нека $5|\overline{34y}$. Ако $y=0$, тогаш мора да е $3|\overline{12x}$, па затоа $x\in\{0,3,6,9\}$. Ако $y=5$, тогаш $15|345$, па затоа $x\in\{0,1,2,...,9\}$.

Значи, задачата има 24 различни решенија, бидејќи производите $120\cdot 340$, $120\cdot 345$ и $125\cdot 345$ се јавуваат во по два случаја.

14. Збирот на цифрите на природниот број n е еднаков на збирот на цифрите на природниот број $5n$. Докажи дека бројот n е делив со 9.

Решение. Нека претпоставиме дека бројот n не е делив со 9, и нека при делење со 9 неговиот остаток е $r\,(0<r<9)$. Тогаш остатокот при делењето на бројот $5n$ ќе биде:

Остаток при делење на n со 9	1	2	3	4	5	6	7	8
Остаток при делење на $5n$ со 9	5	1	6	2	7	3	8	4

Бидејќи секој број при делење со 9 дава еднаков остаток како и збирот на неговите цифри, а остатоците на n и $5n$ при делење со 9 се различни, заклучуваме дека и збировите на цифрите на n и $5n$ се различни. Последното противречи на условот на задачата, па од добиената противречност следува дека бројот n е делив со 9.

15. Определи го најмалиот седумцифрен број $\overline{17x679y}$ (x и y се цифри) кој е делив со 45.

Решение. Еден број е делив со 45 ако и само ако е делив со 5 и со 9. Според тоа, мора да е $y=0$ или $y=5$, а $9|1+7+x+6+7+9+y$, односно $9|30+x+y$. Ако $y=0$, тогаш $x=6$, а ако $y=5$, тогаш $x=1$. Од добиените броеви помал е бројот 1716795.

16. Количниците $A=\overline{2a4b}:15$ е $B=\overline{3c8d}:18$ се природни броеви. Определи го збирот на најмалиот можен број A и најголемиот можен број B.

Решение. Бидејќи A е природен број, бројот $\overline{2a4b}$ е делив со 15.Од $15=3\cdot 5$ следува дека $\overline{2a4b}$ е делив со 3 и со 5. Заради деливоста со 5 имаме $b=0$ или $b=5$. Ако $b=0$, тогаш од деливоста со 3 следува дека a може да биде 0, 3, 6 или 9. Значи, во овој случај ги добиваме броевите 2040, 2340, 2640 и 2940. Ако $b=5$, тогаш од деловоста со 3 следува дека следува дека a може да биде 1, 4 или 7. Значи во овој случај ги добиваме броевите: 2145, 3445 и 2745. Најмал од најдените броеви е 2040.

Бидејќи B е природен број, бројот $\overline{3c8d}$ е делив со 18. Од $18=2\cdot 9$ следува дека $\overline{3c8d}$ е делив со 2 и со 9. Заради деливоста со 2 цифрата d може да биде 0, 2, 4, 6, 8, а потоа заради деливоста со 9 цифрата c може да биде соодветно 7, 5, 3, 1, 8. Значи во овој случај ги добиваме броевите 3780, 3582, 3384, 3186 и 3888. Нјаголем од овие броеви е 3888.

Најмалиот можен број A се добива кога најмалиот број 2040 се подели со 15 и тоа е бројот $A=2040:15=136$. Најголемиот можен број B се добива кога најголемиот број 3888 се подели со 18 и тоа е бројот $B=3888:18=216$. Бараниот збир е $A+B=136+216=352$.

17. Андреј и Горјан сакаат за своите комјутери да одберат шифри (пасворди) кои ќе бидат четирицифрени броеви деливи со 3 и со 5. Двете шифри мора да ги содржат омилените цифри на Андреј и Горјан, Омилена цифра на Андреј е 3, а на Горјан е 8. Кои пасворди ги одбрале, ако Андреј го одбрал најмалиот, а Горјан најголемиот така добиен четирицифрен број?

Решение. Од деливоста со бројот 5 следува дека цифрата на единиците на четирицифрениот број мора да е 0 или 5. Од деливоста со 3 следува дека збирот на цифрите на бројот мора да е делив со 3.

Ако цифрата на единиците е 0, тогаш збирот на трите цифри е $0+3+8=11$, па заради деливоста со 3 заклучуваме дека четвртата цифра може да биде 1, 4 или 7.

Ако цифрата на единиците е 5, тогаш збирот на трите цифри е $5+3+8=16$, па заради деливоста со 3 заклучуваме дека четвртата цифра мора да биде 1, 5 или 8.

Најмалиот четирицифрен број кој ги задоволува условите на задачата е 1380 и овој број го одбрал Андре, а најголемиот четирицифрен број кој ги здоволува условите на задачата е 8835 и овој број го одбрал Горјан.

18. Определи ја аритметичката средина на сите содржатели на бројот 12

кои се од облик $\overline{3a8b}$. Кој содржател треба да се изостави за да аритметичката средина на преостанатите броеви е за 50 поголема од аритметичката средина на сите содржатели?

Решение. Едена број е делив со 12 ако и само ако е делив со 3 и со 4. Бројот е делив со 4 ако неговиот двоцифрен завршеток е делив со 4, па затоа $b\in\{0,4,8\}$.

Ако $b=0$, тогаш од деливоста со 3 на бројот $\overline{3a80}$ добиваме дека збирот $3+a+8+0=11+a$ е делив со 3, па затоа $a=1,4,7$, а броевите се 3180, 3480 и 3780.

Ако $b=4$, тогаш од деливоста со 3 на бројот $\overline{3a84}$ добиваме дека збирот $3+a+8+4=15+a$ е делив со 3, па затоа $a=0,3,6,9$, а броевите се 3084, 3384, 3684 и 3984 .

Ако $b=8$, тогаш од деливоста со 3 на бројот $\overline{3a88}$ добиваме дека збирот $3+a+8+8=19+a$ е делив со 3, па затоа $a=2,5,8$, а броевите се 3288, 3588 и 3888 .

Артиметичката средина на содржателите е:

$$\frac{3180+3480+3780+3084+3384+3684+3984+3288+3588+3888}{10}=\frac{35340}{10}=3534.$$

Ако x е бројот кој треба да се изостави, тогаш треба да важи

$$\frac{35340-x}{9}=3534+50,$$

од каде добиваме $x=3084$. Значи, треба да се изостави содржателот 3084.

19. Ако броевите 293 и 671 ги поделиме со еден ист природен број добиваме остатоци 7 и 8, соодветно. Определи го делителот.

Решение. Бараниот делител е заеднички делител на броевите

$$293-7=286=2\cdot11\cdot13 \text{ и } 671-8=663=3\cdot13\cdot17.$$

Според тоа, бараниот делител е бројот 13.

20. Со колку нули завршува производот на првите 2019 природни броеви?

Решение. Треба да пресметаме со колку нули завршува производот $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot...\cdot2018\cdot2019$. Бројот завршува со онолку нули колку што во разложувањето на прости множители се појавува производот $2\cdot5=10$. Бидејќи меѓу броевите помали од 2020 има повеќе содржатели на бројот 2 отколку на бројот 5, во разложувањето бројот 2 се појавува повеќе пати од бројот 5. Значи, треба да преброиме колку пати бројот 5 се појавува како множител во разложувањето на производот на прости множители.

Множителот 5 се појавува во сите содржатели на бројот 5 барем еднаш. Притоа кај содржателите на бројот $5\cdot 5=25$ се појавува барем два пати, кај содржателите на бројот $5\cdot 5\cdot 5=125$ се појавува барем три пати, а кај содржателите на бројот $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5=625$ се појавува барем четири пати. Пет пати не се појавува ниту еднаш бидејќи $5\cdot 5\cdot 5\cdot 5\cdot 5=3125>2019$.

Од $2019=5\cdot 403+4$ следува дека имаме 403 содржатели на бројот 5 помали од 2020.

Од $2019=25\cdot 80+19$ следува дека имаме 80 содржатели на бројот 25 помали од 2020.

Од $2019=125\cdot 16+19$ следува дека имаме 16 содржатели на бројот 125 помали од 2020.

Од $2019=625\cdot 3+144$ следува дека имаме 3 содржатели на бројот 625 помали од 2020.

Значи, бројот 5 во разложувањето на производот

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot ...\cdot 2018\cdot 2019$$

на прости множители се јавува $403+80+16+3=502$. Според тоа, разгледуваниот производ завршува на 502 нули.

21. Разликата на два прости броја е едноцифрен број $d\,(d>0)$. Дали d може да биде било кој едноцифрен број?

Решение. Бројот d може да ги има вредностите 1, 2, 3,4, 5, 6, 8 и 9, бидејќи

$$1=3-2, 2=5-3, 3=5-2, 4=11-7, 5=7-2, 8=11-3 \text{ и } 9=11-2.$$

Бројот d не може да е 7, бидејќи 7 е непарен број и може да се запише само како разлика на непрен и парен број. Единствен парен прост број е 2, па затоа намаленикот мора да е 9, но 9 не е прост број.

22. Бројот 2022 е запишан како производ на пет различни цели броеви. Определи ја најмалата вредност на збирот на тие пет броеви.

Решение. Имаме $2022=2\cdot 3\cdot 337$ и 2, 3 и 337 се прости броеви. Значи, ако 2022 е производ на пет различни броеви, тогаш два од нив мора да се по апсолутна вредност еднакви на 1, а преостанатите по апсолутна вредност мора да се 2, 3 и 337. Бидејќи се во прашање различни броеви, двата броја се 1 и -1, па производот на преостанатите три ќе биде -2022. Најмал збир на множителите се добива ако другите три броја се $-2,-3,-337$ и тогаш тој збир е еднаков на -342.

23. Определи ги сите прости броеви помали од 1000 чиј збир на цифри е 4.

    Решение. Бидејќи броевите се прости, нивната цифра на единиците мора да е непарна. Постојат два двоцифрени броја со ова својство: 13 и 31, кои се прости броеви. Постојат четири трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4, а последната цифра е непарна: 103, 121, 211 и 301. Имаме, $121=11\cdot 11$ и $301=7\cdot 43$, што значи дека овие броеви се сложени, а броевите 103 и 211 се прости.

    Конечно, постојат четири прости броеви помали од 1000 чиј збир на цифри е 4 и тоа: 13, 31, 103 и 211.

24. Во едно училипте има 180 момчиња и 192 девојчиња. Сите одделенија имаат еднаков број ученици и во секое одделение има еднаков број момчиња. Во секое одделение има најмногу 40 ученици. Колку момчиња и колку девојчиња има во секое одделени?

    Решение. Во училиштето вкупно има $180+192=372$ ученици. Имаме $372=2\cdot 2\cdot 3\cdot 31$ и $180=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5$. Бидејќи во секое одделение има најмногу 40 ученици, а бројот на одделенијата мора да е делител на 180, бидејќи 31 не е делител на 180 заклучуваме дека во секое одделение има по 31 ученик и во училиптето има $372:31=12$ одделенија. Понатаму, во секое одделение има $180:12=15$ момчиња и $31-15=16$ девојчиња.

25. Збирот на десет последователни парни природни броеви е еднаков на 5370. Определи ги сите прости делители на најголемиот од овие броеви.

    Решение. Нека x е најмалиот од шесте броја. Тогаш преостанатите парни броеви се $x+2, x+4, x+6, x+8, ..., x+18$. Затоа

$$x+x+2+x+4+x+6+x+8+x+...+x+18=5370,$$

$$10x+90=5370,$$

$$10x=5280,$$

$$x=528.$$

Значи, најголемиот од десетте броеви е $x+18=546$. Сега, од

$$546=2\cdot 273=2\cdot 3\cdot 91=2\cdot 3\cdot 7\cdot 13$$

добиваме дека бараните прости делители се 2, 3, 7 и 13.

26. Производот на два парни броја е 2020. Определи го нивниот збир.

Решение. Имаме: $2020=2\cdot 2\cdot 5\cdot 101$. Секој парен број во своето разложување на прости множители мора да има множител 2, па затоа можни се следниве случаи:

- едниот од двата броја е 2, а другиот е $2\cdot 5\cdot 101=1010$ и тогаш збирот е 1012,
- едниот од двата броја е $2\cdot 5=10$, а другиот е $2\cdot 101=202$ и тогаш збирот е 212.

27. Запиши ги сите петцифрени броеви од видот $\overline{abcda}$ кои се деливи со 18 и кај кои цифрата на стотките е најмалиот прост број. (Различните букви претставуваат различни цифри, а еднаквите букви еднакви цифри.)

Решение. Еден број е делив со 18 ако и само ако е делив со 2 и со 9. Бројот е делив со 2 ако и само ако цифрата на единиците е 2. Понатаму, според условот на задачата $c=2$. Бидејќи бројот почнува и завршува со a и различните букви претставуваат различни цифри мора да е $a=4,6,8$. Понатаму, еден број е делив со 9 ако збирот на неговите цифри е делив со 9.

Прв случај. $a=4$. Збирот $4+b+2+d+4=10+b+d$ мора да е делив со 9, па мора да важи $b+d=8$ или $b+d=17$. Ако $b+d=8$, тогаш

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Три можности отпаѓаат заради повторување на цифрите, па се добиваат броевите 40284, 41274, 43254, 45234, 47214 и 48204.

Ако $b+d=17$, тогаш

b	9	8
d	8	9

и се добиваат броевите 48294 и 49284.

Втор случај. $a=6$. Збирот $6+b+2+d+6=14+b+d$ мора да е делив со 9, па мора да важи $b+d=4$ или $b+d=13$. Ако $b+d=4$, тогаш

b	0	1	2	3	4
d	4	3	2	1	0

Една можност отпаѓа заради повторување на цифрите, па се добиваат броевите 60246, 61236, 63216 и 64206.

Ако $b+d=13$, тогаш

b	4	5	6	7	8	9
d	9	8	7	6	5	4

Две можности отпаѓаат заради повторување на цифрите, па се добиваат броевите 64296, 65286, 68256 и 69246.

Трет случај. $a=8$. Збирот $8+b+2+d+8=18+b+d$ мора да е делив со 9, па мора да важи $b+d=0$ или $b+d=9$ или $b+d=18$. Ако $b+d=0$, тогаш $b=d=0$, а ако $b+d=18$, тогаш $b=d=9$. Двата случаи отпаѓаат заради повторување на цифрите. Ако $b+d=9$, тогаш

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Три можности отпаѓаат заради повторување на цифрите, па се добиваат броевите 80298, 83268, 84258, 85248, 86238 и 89208.

Значи, вкупно имаме 22 броја кои ги задоволуваат условите на задачата и тоа: 40284, 41274, 43254, 45234, 47214, 48204, 48294, 49284, 60246, 61236, 63216, 64206, 64296, 65286, 68256, 69246, 80298, 83268, 84258, 85248, 86238 і 89208

28. Определи ги сите природни броеви кои се помали од 1000 чија цифра на единиците е нула и се еднакви на производ на 4 различни прости броеви.

Решение. За да производот на 4 прости броеви завршува на 0, потребно и доволно е меѓу нив да се броевите 2 и 5. Производот на другите два броја мора да е помал од 100, па можностите за другите два прости броја се: 3 и 7, 2 и 11, 2 и 13, 3 и 17, 3 и 19, 2 и 23, 3 и 29, 3 и 31, 7 и 11, 7 и 13. Значи, бараните броеви се: 210, 330, 390, 510, 570,690, 870, 930, 770 и 910.

29. Дали постојат прости броеви p и q такви што

$$13p+3q=2022\,?$$

Решение. Бидејќи $3|2022$ и $3|3q$, мора да е $3|13p$. Но, броевите 3 и 13 се заемно прости, па затоа мора да е $3|p$, од каде следува дека $p=3$. Според тоа, $3\cdot 13+3q=2022$, од каде добиваме $q=661$. Лесно се проверува дека 661 не е делив со 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и 23, па како $29\cdot 29>661$, заклучуваме дека 661 е прост број. Значи, единствено решение на задачата е $p=3, q=661$.

30. Нека n е најмалиот природен број кој е делив со 60 и кој се запишува

само со помош на цифрите 0 и 7. Определи го бројот на делителите на n.

Решение. За да бројот n биде делив со 60, треба да е делив со 3, 4 и 5. За да парен број е делив со 5 цифрата на единиците мора да е 0. За да бројот е делив со 4, двоцифрениот завршеток мора да е делив со 4. Бидејќи бројот 70 не е делив со 4, заклучуваме дека двоцифрениот завршеток е 00. Конечно, за да бројот е делив со 3, мора збирот на цифрите да е делив со 3. Најмал можен збир на цифри во кој само 7 е ненулта цифра и кој е делив со 3 е 21, па затоа најмалиот баран број е 77700. Бидејќи $77700 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 37$, добиваме дека бројот на делители на бројот 77700 е еднаков на $(2+1)(1+1)(2+1)(1+1)(1+1) = 72$.

31. За сите детски градинки во еден град дневно треба да се обезбедат $120\,kg$ портокали, $260\,kg$ банани и $380\,kg$ јабока.

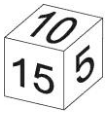
а) Колку најмногу градинки може да има во овој град ако во секоја се распоредува исто количество од секој од дадените видови овошје?

б) Колку лимони треба да се обезбедат за сите овие градинки ако се троши пет пати помалку лимони отколку портокали и јаболка заедно?

Решение. а) Бидејќи $NZD(120, 260, 380) = 20$, во градот може да има најмногу 20 градинки.

б) Во градинките вкупно се трошат $120 + 380 = 500\,kg$ портокали и јаболка, па затоа треба да се обезбедат $500 : 5 = 100\,kg$ лимони дневно.

32. На коцката прикажана на цртежот десно на секој ѕид е запишан по еден природен број. Производите на броевите запишани на спротивните ѕидови се еднакви. Определи го најмалиот можен збир на сите шест природни броеви запишани на ѕидовите на коцката.



Решение. Бидејќи $NZS(5,10,15) = 30$, збирот ќе биде најмал кога наспроти бројот 15 се наоѓа бројот 2, наспроти бројот 10 се наоѓа бројот 3 и наспроти бројот 5 се наоѓа бројот 6. Бараниот збир е еднаков на $10+3+5+6+15+2 = 41$.

33. Филип замислил три броја. НЗД на првиот и вториот број е 12, на првиот и третиот број е 8, а на вториот и третиот број е 20. Кои се најмалите природни броеви кои можел да ги замисли Филип?

Решение. Нека бараните броеви се a, b и c. Тогаш

$$\mathrm{NZD}(a,b)=12,\ \mathrm{NZD}(a,c)=8,\ \mathrm{NZD}(b,c)=20.$$

Затоа мора да важи $12|a$ и $8|a$, $12|b$ и $20|b$, $8|c$ и $20|c$. Бидејќи ги бараме најмалите можни броеви за кои важат горните услови, добиваме

$$a=\mathrm{NZS}(12,8)=24,\ b=\mathrm{NZS}(12,20)=60 \text{ и } c=\mathrm{NZS}(8,20)=40.$$

34. Дедо Марко на пазар продава садници од јаболка, круши и лешници. На неговата тезга истовремено дошле двајца купувачи. Во тој момент дедо Марко имал 227 садници. Првиот купувач купил $\frac{2}{3}$ од сите садници јаболка, $\frac{3}{10}$ од сите садници круши и $\frac{5}{7}$ од сите садници лешници. Вториот купувач купил $\frac{1}{11}$ од сите садници јаболка, $\frac{1}{4}$ од сите садници круши и $\frac{1}{5}$ од сите садници лешници. Колку садници јаболка, круши и лешници купиле првиот и вториот купувач? По колку садници јаболка, круши и лешници имал дедо Марко на почетокот?

Решение. Со x,y и z да ги означиме броевите садници јаболка, круши и лешници. Бидејќи $\frac{2}{3}x, \frac{3}{10}y$ и $\frac{5}{7}z$ се природни броеви, важи $3|x, 10|y$ и $7|z$. Слично, бидејќи $\frac{1}{11}x, \frac{1}{4}y$ и $\frac{1}{5}z$ се природни броеви важи $11|x, 4|y$ и $5|z$. Според тоа, $\mathrm{NZS}(3,11)|x$, $\mathrm{NZS}(10,4)|y$ и $\mathrm{NZS}(7,5)|z$, т.е. $33|x, 20|y$ и $35|z$. Нека $x=33a, y=20b$ и $z=35c$. Со замена во $x+y+z=227$ добиваме $33a+20b+35c=227$. Понатаму, $20b$ има цифра на единици 0, а $35c$ има цифра на единици 0 или 5. Затоа ќе разгледаме два случаја.

а) Ако $35c$ има цифра на единици 0, тогаш $33a$ има цифра на единици 7, па затоа a има цифра на единици 9, што не е можно бидејќи $33\cdot 9=297>227$.

б) Ако $35c$ има цифра на единици 5, тогаш $33a$ има цифра на единици 2, па затоа a има цифра на единици 4. Единствена можност е $a=4$ и тогаш $20b+35c=95$, односно $4b+7c=19$. Во множеството природни броеви единствено решение на последната равенка е $b=3$, $c=1$.

Значи, $x=33\cdot 4=132$, $y=20\cdot 3=60$ и $z=35\cdot 1=35$. Значи, дедо Марко на почетокот имал 132 садници јаболка, 60 садници круши и 35 садници лешници. Првиот купувач купил 88 садници јаболка, 18 садници круши и 25 садници лешници, а вториот купувач купил 12 садници јаболка, 15 садници круши и 7 садници лешници.

35. Определи ги најмалиот и најголемиот петцифрен број кои истовремено се деливи со 7, 8 и 9.

Решение. Бидејќи $NZD(7,8)=NZD(8,9)=NZD(7,9)=1$, заклучуваме дека некој број е делив истовремено со 7, 8 и 9 ако и само ако е делив со нивниот производ $7\cdot 8\cdot 9=504$. Понатаму, бидејќи

$$9999=19\cdot 504+423,$$

заклучуваме дека најмалиот петцифрен број кој истовремено е делив со 7, 8 и 9 е

$$20\cdot 504=10080.$$

Од друга страна,

$$99999=504\cdot 198+207,$$

па затоа најголемиот петцифрен број кој истовремено е делив со 7, 8 и 9 е бројот

$$99999-207=99792=504\cdot 198.$$

36. Определи ги сите тројки природни броеви (a,b,c) такви што $a<b$, $NZD(a,b)=4$, $NZD(a,b,c)=2$ и $NZS(a,b,c)=400$

Решение. Имаме $NZS(a,b,c)=400=2^4\cdot 5^2$. Од $NZD(a,b)=4$ следува $a=4k, b=4m$ при што $NZD(k,m)=1$. Понатаму, од $NZD(a,b,c)=2$ следува $c=2n$, каде n е непарен број. Понатаму, точно еден од броевите k и m мора да е делив со 4 и точно еден е делив со 5 или со 25. Исто така, тоа значи дека $n=1, n=5$ или $n=25$. Од последното следуваат девет можности:

$$(k,m,n)\in\{(1,100,1),(1,100,5),(1,100,25),(4,25,1),(4,25,5),$$
$$(4,25,25),(1,20,25),(4,5,25),(1,4,25)\},$$

па затоа

$$(a,b,c)\in\{(4,400,2),(4,400,10),(4,400,50),(16,100,2),(16,100,10),$$
$$(16,100,50),(4,16,50),(4,80,50),(16,20,50)\}.$$

37. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $n=111111$ и $m=111111111$.

Решение. *Прв начин*. Имаме

$$n=111111=111\cdot 1001 \text{ и } m=111111111=111\cdot 1001001,$$

па затоа 111 е заеднички делител на m и n. Бидејќи $1001=7\cdot 11\cdot 13$ и 1001001 не е делив со ниту еден од броевите 7, 11 и 13 заклучуваме дека $NZD(m,n)=111$.

Втор начин. Имаме

$$\begin{aligned} NZD(m,n) &= NZD(m-1000n,n) = NZD(111,111111) \\ &= NZD(111,111\cdot 1000) = 111. \end{aligned}$$

38. Филип запишал неколку различни природни броеви чиј збир е еднаков на 100, притоа користејќи само две различни цифри. Колку најмногу броеви може да запише Филип?

Решение. Постојат шест броја помали од 100 во чиј запис се користат точно две различни цифри и тоа: $a,b,\overline{aa},\overline{bb},\overline{ab},\overline{ba}$. Нивниот збир е

$$a+b+(10a+a)+(10b+b)+(10a+b)+(10b+a)=23(a+b),$$

па затоа тој не може да биде еднаков на 100, бидејќи бројот 100 не е делив со 23. Значи, Филип не може да запише шест броја. Филип може да запише пет броја и тоа, на пример, $1+6+11+16+66=100$.

Забелешка. При определувањето на броевите 1, 6, 11, 66 и 16 е користена равенката

$$100=a+b+(10a+a)+(10b+b)+(10a+b)=22a+13b,$$

од каде следува дека цифрата b е парна и е помала од 8, а цифрата a е помала од 5. Со непосредна проверка се добива дека во случајов единствено решение е дадениот пример.

За да се види дали имаме и други примери со пет броја потребно е да се разгледаат останатите пет равенки кои се добиваат, што заради симетрија значи дека треба да се разгледаат уште равенките:

$$100=22(a+b)+a \text{ и } 100=23a+12b.$$

Јасно, бидејќи збирот $a+b$ мора да е помал или еднаков на 4 и цифрата a мора да е парна, добиваме дека не постојат цифри a и b такви што $100=22(a+b)+a$. Во случајот $100=23a+12b$ цифрата a мора да е парна и помала или еднаква на 4. Со непосредна проверка се добива дека и во овој случај немаме решение на задачата. Значи, Филип можел единствено да ги запише броевите 1, 6, 11, 66 и 16.

39. Определи ги сите прости броеви a,b,c такви што

$$4a+5b+6c=96.$$

Решение. Бидејќи $4a,6c$ и 96 се парни броеви, мора да е и $5b$ парен број. Тоа значи дека b е парен број, и како b е прост број, добиваме $b=2$. Со замена во почетната равенка добиваме $4a+6c=86$, односно $2a+3c=43$. Понатаму, $2a\geq 4$, па затоа $3c\leq 39$, односно $c\leq 13$. Но, c е прост број, па затоа $c\in\{2,3,5,7,11,13\}$. Со непосредна проверка се добиваат решенијата

$$c=3,a=17;\ c=7,a=11;\ c=11,a=5 \text{ и } c=13,a=2.$$

40. Марга, Ана и Иван наизменично фрлаат коцка за играње. Прва фрла Марга, потоа Ана, па Иван. Повторно Марга итн. понатаму во круг по истиот редослед. Секој од нив, кога е негов ред, коцката ја фрла еднаш, се додека не добие шестка. Откако ќе ја добие својата прва шестка, играчот во секое следно фрлање, до крајот на играта, коцката ја фрла повеќе пати. Марга ја фрла коцката 4 пати, Ана шест, а Иван осум пати. Играта завршила по 27 кругови. Коцката вкупно е фрлена 152 пати. Колку пати можеле коцката да ја фрлат Марга и Ана ако Иван коцката ја фрлил 48 пати?

Решение. Секој од нив тројцата дошол на ред 27 пати. Ако сите коцката ја фрлиле по еднаш, таа ќе била фрлена 81 пат. Преостанатите $152-81=71$ фрлања се направени со дополнетелни фрлања. Иван коцката ја фрлил 48 пати, што значи дека тој направил $48-27=21$ дополнително фрлање. Преостанатите $71-21=50$ дополнителни фрлања ги направиле Марга и Ана. Ако Марга во x кругови фрлала дополнително, а Ана во y кругови фрлала дополнително, тогаш $3x+5y=50$. Понатаму, x и y мораат да бидат природни броеви и како 50 и $5y$ се деливи со 5, заклучуваме дека $3x$ мора да е делив со 5, односно x мора да е делив со 5. Но $3x\leq 50$, па затоа x може да биде 0, 5, 10 или 15. Сега имаме:

- ако Марга не фрлала дополнително ниту еднаш, тогаш со замена во $3x+5y=50$ добиваме дека Ана дополнително фрлала во 10 круга,
- ако Марга дополнително фрлала во 5 круга, тогаш со замена во $3x+5y=50$ добиваме дека Ана дополнително фрлала во 7 круга,
- ако Марга дополнително фрлала во 10 круга, тогаш со замена во $3x+5y=50$ добиваме дека Ана дополнително фрлала во 4 круга,
- ако Марга дополнително фрлала во 15 круга, тогаш со замена во $3x+5y=50$ добиваме дека Ана дополнително фрлала во 1 круг.

41. Андреј работел 6 теста по математика секој од кои се бодува со цел

број бодови од 0 до 100. На секој од првите 5 теста имал еднаков број бодови, а на шестиот тест добил повеќе бодови отколку на претходниот тест. Ако на шесте теста во просек освоил по 72 бода, колку бодови можел Андреј да освои на последниот шести тест?

Решение. Со x да го означиме бројот на освоените бодови на секој од првите 5 теста, а со y бројот на поените освоени на шестиот тест. Тогаш $\frac{5x+y}{6}=72$ и $100>y>72$. Имаме $5x=432-y$, па затоа бројот $432-y>0$ е делив со 5. Но, $100>y>72$, што значи дека можни вредности за y се 77, 82, 87, 92 и 97, па тоа се бодовите кои Андреј можел да ги освои на последниот тест.

III. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

1. За нумерирање на страниците на една книга, кое започнува од првата страна со бројот 1, се употребени 2019 цифри. Колку нумерирани страници има оваа книга?

   Решение. Со едноцифрени броеви се означени страниците од 1 до 9, т.е. 9 страници. Со двоцифрени броеви се означени страниците од 10 до 99, т.е. 90 страници и за нив се употребени $2\cdot 90=180$ цифри. За означување на другите страници се употребени
   $$2019-(9+180)=2019-189-1830$$
   цифри. Овие цифри се употребени за $1830:3=610$ трицифрени редни броеви и тоа се страниците од 100 до 709. Значи, книгата има 709 страници.

2. Определи ја разликата на најмалиот непарен четирицифрен број чиј збир на цифри е 4 и најголемиот парен трицифрен број чиј производ на цифри е 16.

   Решение. Бидејќи
   $$4=4+0+0+0=3+1+0+0=2+2+0+0=2+1+1+0=1+1+1+1,$$
   добиваме дека најмалиот непарен четирицифрен број чиј збир на цифри е 4 е бројот 1003. Слично, бидејќи
   $$16=1\cdot 2\cdot 8=1\cdot 4\cdot 4=2\cdot 2\cdot 4,$$
   добиваме дека најголемиот парен трицифрен број чиј производ на цифри е 16 е бројот 812. Нивната разлика е $1003-812=191$.

3. Определи го производот на збирот и разликата на најголемиот трицифрен парен број запишан со различни цифри и најмалиот трицифрен непарен број запишан со различни цифри.

   Решение. Најголемиот трицифрен парен број запишан со различни цифри е 986, а најмалиот трицифрен непарен број запишан со различни цифри е 103. Нивниот збир е $986+103=1089$, а нивната разлика е $986-103=883$. Значи, бараниот производ е
   $$1089\cdot 883=961587.$$

4. Збирот на педесет различни природни броеви е 8625. Вториот број е за 5 поголем од првиот, третиот број е за 5 поголем од вториот, четвртиот е за 5 поголем од третиот, ..., педесеттиот број е за 5 поголем од четириесет и деветтиот број. Определи ги најмалиот и најголемиот собирок во дадениот збир.

   Решение. Со x да го означиме првиот собирок. Тогаш по ред собирците се:

$$\begin{aligned}&x,\\&x+5,\\&x+5+5=x+2\cdot5,\\&x+2\cdot5+5=x+3\cdot5,\\&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\&x+49\cdot5,\end{aligned}$$

   па затоа

$$\begin{aligned}&50x+(1+2+3+...+49)\cdot5=8625,\\&50x+\tfrac{49\cdot50}{2}\cdot5=8625,\\&50x+1225\cdot5=8625,\\&50x+6125=8265,\\&50x=2500,\\&x=50.\end{aligned}$$

   Значи, првиот собирок е 50, а последниот собирок е $50+49\cdot5=295$.

5. Пет броја се такви што кога собираме по четири од нив се добиваат збировите 186, 203, 214, 228 и 233. Кои се тие броеви?

   Решение. Ако броевите се a,b,c,d,e, тогаш

$$\begin{cases}a+b+c+d=186\\a+b+c+e=203\\a+b+d+e=214\\a+c+d+e=228\\b+c+d+e=233.\end{cases}$$

   Ако ги собереме горните равенка добиваме

$$4(a+b+c+d+e)=1064,$$

   односно

$$a+b+c+d+e=266.$$

   Сега последователно добиваме

$$\begin{aligned} &e=266-186=80,\\ &d=266-203=63,\\ &c=266-214=38,\\ &b=266-228=38,\\ &a=266-233=33. \end{aligned}$$

6. Павле замислил природен број и го собрал со бројот 2112, при што добиениот збир бил еднаков на збирот на сите природни броеви кои се поголеми од 55 и се помали од 107. Кој број го замислил Павле?

Решение. *Прв начин*. Нека x е непознатиот број. Имаме

$$56+57+...+105+106=x+2112,$$

т.е.

$$1+2+...+106-(1+2+...+55)=x+2112.$$

Ако ја искористиме формулата

$$1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2},$$

добиваме

$$\begin{aligned} &\frac{106\cdot107}{2}-\frac{55\cdot56}{2}=2112+x,\\ &5671-1540=2112+x,\\ &4131=2112+x,\\ &x=4131-2112,\\ &x=2019. \end{aligned}$$

Втор начин. Нека x е непознатиот број. Имаме

$$\begin{aligned} &56+57+...+105+106=x+2112,\\ &106+(56+105)+(57+104)+...+(80+81)=2112+x,\\ &106+25\cdot161=2112+x,\\ &106+4025=2112+x,\\ &4131=2112+x,\\ &x=2019. \end{aligned}$$

7. Сите цифри на петцифрениот број $\overline{abcde}$ ($a\neq0, e\neq0$) се меѓусебно различни. Притоа збирот на цифрите е еднаков на 10. Кога овој број ќе се собере со бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед се добива број кој е запишан со исти цифри. Определи ги овие петцифрени броеви.

Решение. Бидејќи збирот на цифрите на бројот $\overline{abcde}$ е 10 и сите цифри се различни, заклучуваме дека тоа се цифрите 0, 1, 2, 3, 4. Понатаму, при собирањето на двата броја немаме пренос (збирот на било кои две цифри е помал или еднаков на 7), па бидејќи збирот е број запишан со исти цифри, заклучуваме дека збирот на броевите $\overline{abcde}$ и $\overline{edcba}$ мора да е еднаков на 44444. Понатаму, 0 и 4 не може да се прва и последна цифра, а како $c+c=4$ заклучуваме дека $c=2$. Конечно, бараните петцифрени броеви се: 14203, 10243, 30241 и 34201.

8. На некој трицифрен број од десна страна му е допишана цифрата 2. Добиениот број е поделен со 7, па на добиениот количник од десна страна му е допишана цифрата 3. Така добиениот број е поделен со 43 и е добиен бројот 41. Определи го почетниот трицфрен број.

Решение. *Прв начин.* Нека x е бараниот трицифрен број. При допишување од десно на цифрата 2 се добива бројот $10x+2$. По делењето со 7 се добива бројот $(10x+2):7$, а по допишување на цифрата 3 се добива бројот $10((10x+2):7)+3$, кој е днаков на $43\cdot 41$. Според тоа,

$$\begin{aligned}
&10((10x+2):7)+3=43\cdot 41\\
&10((10x+2):7)+3=1763\\
&10((10x+2):7)=1760\\
&(10x+2):7=176\\
&10x+2=1232\\
&x=123.
\end{aligned}$$

Втор начин. Бројот кој поделен со 43 дава 41 е $43\cdot 41=1763$. По бришење на допишаната цифра 3 го добиваме бројот 176. Бројот кој поделен со 7 дава 176 е $176\cdot 7=1232$. По бришење на допишаната цифра 2 се добива почетниот број 123.

9. Магдалена вежба математика така што некој број прво го множи со 2, а потоа на добиениот резултат додава 16. Добиениот резултат пак го множи со 2, потоа на производот му додава 16 итн. Од кој едноцифрен природен број почнала да пресметува Магдалена ако во еден момент го добила бројот 68?

Решение. Магдалена бројот 68 можела да го добие откако претходно на добиениот број му го додала бројот 16. Почетниот број го наоѓаме ако пресметуваме station наназад. Имаме:

$$68-16=52,$$
$$52:2=26,$$
$$26-16=10,$$
$$10:2=5.$$

Значи бараниот број е 5.

Бројот 68 магдалена можела да го добие по множењето со 2. Почетниот број го наоаѓаме ако пресметуваме station наназад. Имаме:

$$68:2=34,$$
$$34-16=18,$$
$$18:2=9.$$

Значи, бараниот број е 9.

Конечно, Магдалена можела да почне да пресметува од бројот 5 или од бројот 9.

10. Рампо замислил пет броја такви што, почнувајќи од најмалиот, секој следен број е три пати поголем од претходниот. Збирот на најмалиот и најголемиот број е за 172 поголем од збирот на преостанатите три броја. Кои броеви ги замислил Рампо?

    Решение. Нека најмалиот замислен број е x. Тогаш другите четири броја се $3x, 9x, 27x$ и $81x$. Затоа важи $x+81x=3x+9x+27x+172$, од каде добиваме $82x=39x+172$, т.е. $x=4$. Значи, Рампо ги замислил броевите 4, 12, 36, 108 и 324.

11. Производот на два броја е 2538. Ако едниот од нив се намали за 6, а другиот остане непроменет, тогаш новиот производ е 2214. Кои се тие броеви?

    Решение. *Прв начин.* Бараните броеви да ги означиме со x и y. Имаме $xy=2538$. Ако бројот x ќе го намалиме за 6, добиваме

$$2214=(x-6)y,$$
$$2214=xy-6y,$$
$$2214=2538-6y,$$
$$6y=2538-2214,$$
$$6y=324,$$
$$y=324:6=54$$

Значи, $x=2538:54=47$.

Втор начин. Кога едниот број се намалува за 6, а другиот број остане непроменет, добиваме дека производот се намалува за

$$2538-2214=324.$$

Според тоа, бројот кој не се менува е шест пати помал од бројот 324 и тоа е бројот $324:6=54$. Значи, другиот број е $324:54=47$.

12. Калина замислила број. Ако Калина формира низа која има 2021 член таква што првиот член на низата е замислениот број, а секој следен нејзин член е за 20,21 поголен од претходниот, тогаш збирот на сите членови на низата ќе биде 11,1 пати поголем од производот $2021\cdot 2021$. Кој број го замислила Калина?

Решение. Нека замислениот број е x. Низата од 2021 челнови која се добива на опишаниот начин е

$$x, x+20,21\cdot 1, x+20,21\cdot 2, x+20,21\cdot 3,..., x+20,21\cdot 2020.$$

Имаме

$$x+x+20,21\cdot 1+x+20,21\cdot 2+...+x+20,21\cdot 2020=11,1\cdot 2021\cdot 2021,$$
$$2021x+20,21\cdot(1+2+...+2020)=11,1\cdot 2021\cdot 2021$$
$$2021x+20,21\cdot\tfrac{2020\cdot 2021}{2}=11,1\cdot 2021\cdot 2021$$
$$x+20,21\cdot 1010=11,1\cdot 2021$$
$$x=11,1\cdot 2021-20,21\cdot 1010$$
$$x=2021\cdot 11,1-2021\cdot 10,1$$
$$x=2021\cdot(11,1-10,1)$$
$$x=2021.$$

Значи, Калина го замислила бројот 2021.

13. Ако на четирицифрен број му се избрише една цифра па добиениот трицифрен број го собереме со почетниот четирицифрен број, добиваме 1254. Определи го почетниот четирицифрен број.

Решение. Јасно, цифрата на илјадите на почетниот четирицифрен број е 1. Значи, четирицифрениот број е од видот $\overline{1abc}$.

Ако ја избришеме цифрата c добиваме $\overline{1abc}+\overline{1ab}=1245$, од каде ја добиваме равенката $110a+11b+c=154$. Јасно, $a=1$, бидејќи за $a=2$ левата странба е поголема од 154, а за $a=0$ таа е помала од 154. Имаме $11b+c=44$, од каде наоѓаме $b=4$ и $c=0$. Значи, во случајов почетниот број е 1140.

Ако ја избришеме цифрата b добиваме $\overline{1abc}+\overline{1ac}=1254$, од каде ја добиваме равенката $110a+10b+2c=154$, Јасно, $a=1$ и добиваме

$5b+c=22$, од каде наоѓаме $b=3, c=7$ или $b=4, c=2$. Значи, во случајов почетниот број е 1137 или 1142.

Ако ја испуштиме цифрата a добиваме $\overline{1abc}+\overline{1bc}=1254$, од каде ја добиваме равенката $100a+20b+2c=154$. За $a=0$ добиваме $10a+c=77$, па затоа $b=7, c=7$ и почетниот број е 1077, а за $a=1$ добиваме $10b+c=27$, па затоа $b=2, c=7$ и почетниот број е 1127.

Ако ја испуштиме цифрата 1, добиваме $\overline{1abc}+\overline{abc}=1254$, од каде ја добиваме равенката $100a+10b+c=127$. Јасно, $a=1$, па добиваме $10b+c=27$, од каде следува $b=2, c=7$ и почетниот број е 1127, кој веќе го најдовме.

Конечно, почетниот број е 1077, 1127, 1137, 1140, 1142.

14. Збирот на два броја и нивниот збир е $\frac{40}{21}$. Определи ги овие броеви ако апсолутната вредност на едниот број е четири пати поголема од апсолутната вредност на другиот број.

Решение. Бараните броеви да ги означиме со x и y. Според условот на задачата

$$x+y+(x+y)=\frac{40}{21},$$

па затоа $x+y=\frac{20}{21}$. Понатаму, $|x|=4|y|$, што значи дека се можни два случаја и тоа:

- $x=4y$, од каде наоѓаме $y=\frac{4}{21}$ и $x=\frac{16}{21}$,
- $x=-4y$, од каде наоѓаме $y=-\frac{20}{63}$ и $x=\frac{80}{63}$.

15. Определи ги броевите a, b и c ако се знае дека нивниот збир е поголем од бројот a за $\frac{5}{2}$, од бројот b за $\frac{59}{6}$ и од бројот c за $\frac{5}{3}$.

Решение. Од условот на задачата следуваат равенките

$$a+b+c=a+\frac{5}{2},\ a+b+c=b+\frac{59}{6} \text{ и } a+b+c=c+\frac{5}{3}.$$

Ако ги собереме добиените равенки наоѓаме $2(a+b+c)=14$, т.е. $a+b+c=7$. Сега лесно се добива дека $a=4\frac{1}{2}$, $b=-2\frac{5}{6}$ и $c=5\frac{1}{3}$.

16. Горјан има толку денови колку што неговиот татко има седмици и толку месеци колку што неговиот дедо има години. Сите тројца заед-

но имаат 100 години. Колку години има секој од нив?

Решение. Нека Горјан има x години. Тогаш таткото има $7x$, а дедото има $12x$ години. Според тоа,

$$x+7x+12x=100,$$

од каде добиваме $x=5$. Значи, Горјан има 5 години, татко му има 35 години и дедо му има 60 години.

17. Дедото, таткото и синот заедно имаат 84 години, при што бројот на годините на таткото е аритметичка средина на броевите на годините на дедото и синот. Колку години има таткото?

Решение. Нека дедото има d, таткото t и синот s години. Тогаш $t=\frac{d+s}{2}$, т.е. $d+s=2t$. Имаме, $d+t+s=84$, од каде добиваме $t+2t=84$, односно $t=28$. Значи, таткото има 28 години.

18. Андреј патувал од Скопје до Њујорк. Од Скопје не постои директен лет за Њујорк, па затоа купил авионска карта за лет преку Истанбул. Од Скопје тргнал во сабота во 20:00 часот. Летот од Скопје до Истанбул траел $1\frac{1}{12}$ часа. Во Истанбул чекал 7 часа. Летот од Истанбул до Њујорк траел $11\frac{5}{12}$ часа. Ако се знае дека Истанбул е источно од Скопје со временска разлика од 2 часа, а Њујорк е западно од Истанбул со временска разлика 8 часа, кој ден и колку часот било во Њујорк кога слетал неговиот авион?

Решение. Вкупното траење на патувањето е

$$1\frac{1}{12}+7+11\frac{5}{12}=19\frac{6}{12}=19\frac{1}{2}=19{,}5 \text{ часа.}$$

Тие тргнале од Скопје во Истанбул, а Истанбул е источно, заради временската разлика од 2 часа на 19,5 часа треба треба да се додадат 2 часа, што е еднакво на 21,5 часа. Бидејќи временската разлика на Истанбул и Њујорк е 8 часа, а Њујорк е западно од Истанбул, треба да се одземат 8 часа, што изнесува 13,5 часа. Од 20:00 часот до полноќ има 4 часа, што значи дека во Њујорк Андреј слетал во недела во 9:30 часот.

19. Збирот на годините на семејство во кое има татко, мајка, две ќерки близначки и син е 81. Таткото е 4 години постар од мајката. По 4 години бројот на годините на таткото ќе биде двојно поголем од збирот на годините на неговите деца. Разликата во годините на сестрите и

братот е 3. Колку години има секој член на ова семејство?

Решение. Со a,b,c,d соодветно да ги означиме годините на таткото, мајката, ќерките и синот. Имаме

$$a+b+2c+d=81. \tag{1}$$

По 4 години децата че имаат $2(c+4)+d+4$ години, а таткото ќе има $a+4$ години, па затоа $2(2(c+4)+d+4)=a+4$, односно

$$2c+d=0,5a-10. \tag{2}$$

Од условот на задачата дека таткотто е 4 години постар од мајката следува

$$b=a-4. \tag{3}$$

Ако од (2) и (3) замениме во (1) последователно добиваме

$$\begin{aligned}&a+(a-4)+(0,5a-10)=81,\\&2,5a=95,\\&a=38.\end{aligned}$$

Значи, таткото има $a=38$ години, а мајката има $b=38-4=34$ години.

Разликата во годините на братот и сестрите близначки е 3, па имаме две можности.

1) Сестрите се 3 години постари од братот, т.е. $d=c-3$, па ако замениме во (1) добиваме $38+34+2c+c-3=81$, од каде наоѓаме $c=4$, па затоа $d=4-3=1$. Значи, сестрите имаат по 3 години, а братот има 1 година.
2) Сестрите се 3 години помали од братот, т.е. $d=c+3$, па ако замениме во (1) добиваме $38+34+2c+c+3=81$, од каде наоѓаме $c=2$, па затоа $d=5$. Значи, сестрите имаат по 2 години, а братот има 5 години.

20. Горјан на својот брат Андреј му рекол: „Оваа година ќе наполнам онолку години колку што е збирот на цифрите на годината во која сум роден.“ Андреј му одговорил: „Интересно, тоа важи и за мене.“ Колку години наполнил помладиот, а колку постариот брат ако разговорот се водел во 2019 година?

Решение. Нека годината на раѓање е $\overline{abcd}$. Тогаш човекот има $a+b+c+d$ години и важи

$$\begin{aligned}&\overline{abcd}+a+b+c+d=2019,\\&1000a+100b+10c+d+a+b+c+d=2019,\end{aligned}$$

$$1001a+101b+11c+2d=2019.$$

Јасно, a може да биде 1 или 2.

Ако $a=1$, тогаш

$$1001+101b+11c+2d=2019,$$

$$101b+11c+2d=1018.$$

Сега можно е само $b=9$, па затоа

$$909+11c+2d=1018,$$

$$11c+2d=109.$$

Сега можно е само $c=9$, па затоа

$$99+2d=109,$$

$$d=5.$$

Значи, лицето е родено во 1995 година,па затоа постариот брат има $2019-1995=24$ години.

Ако $a=2$, тогаш

$$2002+101b+11c+2d=2019,$$

$$101b+11c+2d=17.$$

Сега можно е само $b=0$, па затоа

$$11c+2d=17.$$

Сега можно е само $c=0$ или $c=1$. Ако $c=0$, тогаш $2d=17$, што не е можно, а ако $c=1$, тогаш

$$11+2d=17,$$

$$d=3.$$

Значи, лицето е родено во 2013 година,па затоа помладиот брат има $2019-2013=6$ години.

21. Три $3D$ принтери принтаат зададен модел кој може да се состави од повеќе делови. Ако истовремено принтаат првиот и вториот принтер, потребни се вкупно 30 минути за принтање на целиот модел. Ако истовремено принтаат првиот и третиот принтер потребни се 40 минути за принтање на целиот модел. На вториот и третиот принтер за истовремено принтање на целиот модел им се потребни 24 минути. Колку минути му се потребни на секој од принтерите за самостојно принтање на целиот модел?

Решение. Ако на првиот, вториот и третиот принтер му се потребни p,v,t минути, соодветно, тогаш од условот на задачата следува дека за 1 минута:

- првиот и вториот принтер ќе испринтаат $\frac{1}{p}+\frac{1}{v}=\frac{1}{30}$ од моделот,
- првиот и тртиот принтер ќе испринтаат $\frac{1}{p}+\frac{1}{t}=\frac{1}{40}$ од моделот,
- вториот и третиот принтер ќе испринтаат $\frac{1}{v}+\frac{1}{t}=\frac{1}{24}$ од моделот.

Ако ги собереме добиените равенки наоѓаме

$$2(\frac{1}{p}+\frac{1}{v}+\frac{1}{t})=\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{24},$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{v}+\frac{1}{t}=\frac{1}{20}.$$

Сега

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{v}+\frac{1}{t}-(\frac{1}{p}+\frac{1}{v})=\frac{1}{20}-\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{t}=\frac{1}{60},$$

$$t=60\,\mathrm{min},$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{v}+\frac{1}{t}-(\frac{1}{p}+\frac{1}{t})=\frac{1}{20}-\frac{1}{40}$$

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{40},$$

$$v=40\,\mathrm{min},$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{v}+\frac{1}{t}-(\frac{1}{v}+\frac{1}{t})=\frac{1}{20}-\frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{120},$$

$$p=120\,\mathrm{min}.$$

Значи, ако засебно го принтаат моделот, тогаш на првиот принтер му требаат 120 минути, на вториот му требаат 40 минути и на третиот му требаат 60 минути.

22. Два воза тргнале во пресрет еден кон друг. Првиот воз тргнал од местото A возејќи со просечна брзина $58\,km/h$, а вториот воз тргнал од местото B возејќи со просечна брзина $64\,km/h$. Возовите се сретнале по 4 часа. До моментот на средбата првиот воз имал три застанувања, секое по 10 минути, а вториот воз имал две застанувања, секое по 15 минути. Определи ја должината на патот меѓу местата A и B?

Решение. *Прв начин*. Првиот воз имал 3 застанувања од по 10 минути, па затоа тој возел $4h-3\cdot10\,\mathrm{min}=3h30\,\mathrm{min}$. За ова време првиот воз поминал $3\cdot58+58:2=203\,km$. Вториот воз имал 2 застанувања од по 15 минути, па затоа тој возел $4h-2\cdot15\,\mathrm{min}=3h30\,\mathrm{min}$. За ова време тој поминал $3\cdot 64+64:2=224\,km$. Должината на патот меѓу двете места е $203+224=427\,km$.

Втор начин. Првиот воз имал 3 застанувања од по 10 минути, па затоа тој возел $4h-3\cdot 10\min=3h30\min$. Вториот воз имал 2 застанувања од по 15 минути, па затоа тој возел $4h-2\cdot 15\min=3h30\min$. Значи, двата воза возеле еднакво време. За еден час двата воза заедно поминуваат $64+58=122\,km$. Значи, должината на патот меѓу местата A и B е $3\cdot 122+122:2=427\,km$

23. Во септември 2014 година, кога тргнале во прво одделение, сите ученици од V^a одделение заедно имале 153 години, а во септември 2018 година, на почетокот на петто одделение, тие исти ученици заедно имале 245 години. Колку од нив тргнале на училиште на 6, а колку на седум години?

Решение. *Прв начин.* Од септември 2014 до септември 2018 година поминале 4 години. За тоа време вкупниот број години на учениците се зголемил за $245-153=92$ години. Бидејќи секој ученик е постар 4 години, во одделението имале $92:4=23$ ученици. Ако сите ученици на училиште тргнале на 6 години, тогаш тие во септември 2014 година заедно ќе имале $23\cdot 6=138$ години. Но тие заедно имале 153 години, т.е. $153-138=15$ повеќе. Бидејќи секој ученик кој тргнал на училиште на 7 години е 1 година постар, заклучуваме дека на 7 години тргнале 15 ученици, а на 6 години тргнале $23-15=8$ ученици.

Втор начин. Нека x е бројот на учениците кои во прво одделение тргнале на 6 години, а y е бројот на учениците кои во прво одделение тргнале на 7 години. Во септември 2014 година тие заедно имале 153 години, па важи $6x+7y=153$. Во септември 2018 година, т.е. четири години покасно x ученици имале 10 години, а y ученици имале 11 години, па како заедно имале 245 години добиваме $10x+11y=245$. Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка добиваме $4x+4y=92$, т.е. $4(x+y)=92$, па затоа $x+y=23$. Значи, $x=23-y$ и ако замениме во првата равенка последователно добиваме

$$6(23-y)+7y=153,$$
$$138-6y+7y=153,$$
$$y=15.$$

Значи, на 7 години во прво одделение тргнале 15 ученици, а $23-15=8$ ученици во прво одделение тргнале на 6 години.

Трет начин. Нека x е бројот на учениците кои во прво одделение тргнале на 6 години, а y е бројот на учениците кои во прво одделение тргнале на 7 години. Во септември 2014 година тие заедно имале 153 години, па важи $6x+7y=153$. Бројот $6x$ е парен, па како 153 е непарен број мора $7y$ да е непарен, т.е. y да е непарен број. Понатаму, бидејќи $7\cdot 23=161>153$ бројот y може да биде 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 или 21. Во 2018 година, т.е. по 4 години едните ученици че имаат 10, а другите 11 години. Така ја имаме следнава табела:

$y=1$	$6x=146$	146 не е делив со 6	
$y=3$	$6x=132$	$x=22$	$3\cdot 11+22\cdot 10=253>245$
$y=5$	$6x=118$	118 не е делив со 6	
$y=7$	$6x=104$	104 не е делив со 6	
$y=9$	$6x=90$	$x=15$	$11\cdot 9+15\cdot 10=249>245$
$y=11$	$6x=76$	76 не е делив со 6	
$y=13$	$6x=62$	62 не е делив со 6	
$y=15$	$6x=48$	$x=8$	$15\cdot 11+8\cdot 10=245$
$y=17$	$6x=34$	34 не е делив со 6	
$y=19$	$6x=20$	20 не е делив со 6	
$y=21$	$6x=6$	$x=1$	$21\cdot 11+1\cdot 10=241<245$

Значи, во 2014 година во 1 одделение тргнале 8 ученици на 6 години и 15 ученици на 7 години.

24. Ана купила книга и пенкало чии цени изразени во денари се природни броеви. Двете цени ги заокружила на десетки и кажала дека за пенкалото платила 240 денари, а за книгата 310 денари.

а) Која е најмалата сума пари кои Ана можела да ја потроши за купување на пенкалото и книгата?

б) Дали Ана може за разликата меѓу најмалата и најголемата сума пари што можела да ги потроши за купување на пенкалото и книгата да купи сок од 16 денари?

Решение. а) Најниската можна цена на пенкалото е 235 денари, а најниската можна цена на книгата е 305 денари. Значи, најмалиата сума која Ана можела да ја плати е $335+305=540$ 2енари.

б) Најголемата можна цена на пенкалото е 244, а најголемата можна цена на книгата е 314 денари. Најголемата можна сума која Ана можела да ја потроши за купување пенкалото и книгата е $244+314=558$ денари. Разликата е $558-540=18$ денари и како $18:16$ Ана можела да купи сок од 16 денари.

25. За опремување на училиштето се набавени комплети од по 2 компјутери и еден печатач. Цената на еден компјутер е 19680 денари, а цената на еден печатач е три пати помала од цената на еден комјутер. Општината на училиштето му уплатило 80360 денари, што е четвртина од вкупната цена. Колку компјутери и колку печатачи биле набавени?

Решение. Вкупната сума за целата набавка е $80360\cdot 4=321440$ денари. Цената на еден печатач е $19680:3=6560$ денари. Цената на еден комплет од 2 комјутери и 1 печатач е $2\cdot 19680+6560=45920$ денари. Училиштето набавило $321440:45920=7$ такви комплети. Значи, биле набавени 14 компјутери и 7 печатачи.

26. Кога од своите парти Ана ќе му даде на Иван 180 денари, а на Маја ќе ѝ даде 430 денари, тогаш Иван ќе има два пати повеќе денари од Ана, а Маја ќе има три пати повеќе денари од Ана. Колку пари има секое од децата, ако сите заедно имаат вкупно 4320 денари?

Решение. Од условот на здачата следува дека, ако на крајот Ана има x денари, тогаш Иван има $2x$ денари, а Маја има $3x$ денари. Тие заедно имаат $6x$ денари, па затоа $6x=4320$, т.е. $x=720$. Значи, на крајот Ана има 720 денари, Иван има 1440 денари и Маја има 2160 денари. Но, Ана има дала на Иван 180 и на Маја 430 денари, па затоа таа на почетокот имала $720+180+430=1330$ денари. Иван имал $1440-180=1260$ денари и Маја имала $2160-430=1730$ денари.

27. Јован, Марко, Филип и Ласте треба во кафич да платат сметка од 560 денари. Проверувајќи кој колку пари има откриле дека без парите на Јован имаат 850 денари, без парите на Марко имаат 900 денари, без парите на Филип имаат 880 денари и без парите на Ласте имаат 940 денари. Кои двајца пријатели заедно имаат толку пари колку што е сметката која треба да ја платат?

Решение. Ако со j,m,f и l ги означиме парите кои ги имаат соодветно Јован, Марко, Филип и Ласте, тогаш од условот на здачата следува

$$m+f+l=850,$$
$$j+f+l=900,$$
$$j+m+l=880,$$
$$j+m+f=940.$$

Ако ги собереме горните равенства и добиеното равенство го поделиме со 3, наоѓаме:

$$3(j+m+f+l)=3570,$$
$$j+m+f+l=1190.$$

Значи, Јован има $1190-850=340$, Марко има $1190-900=290$, Филип има $1190-880=310$ и Ласте има $1190-940=250$ денари. Конечно, точна сума за да ја платат сметката имаат Филип и Ласте.

28. Таткото има три сина на кои им дава џепарлак. Најстариот син добива третина од целата сума и уште 30 денари, средниот син добива третина од остатокот и уште 30 денари, а најмалиот син ги добива преостанатите 430 денари. Колку пари добиваат најстариот и средниот син?

Решение. Нека S е вкупната сума која синовите ја добиваат за џепарлак. Тогаш, првиот син добива $x=\frac{1}{3}s+30$ денари, вториот син добива $y=\frac{1}{3}(S-x)+30=\frac{2}{9}S+20$ денари и третиот син добива $z=430$ денари. Од $x+y+z=S$ следува $\frac{4}{9}S=480$, односно $S=1080$ денари. Значи, најстариот син добива 390 денари, а средниот син добива 260 денари.

29. На главниот градски плоштад Максим има музички настап 10 последователни вечери. За секој настап тој добива по 3000 денари, а ако организаторот процени дека Максим имал извонреден настап, тој добива 5000 денари. Максим за своите 10 настапи вкупно добил 36000 денари. Колку пати организаторот проценил дека Максим имал извонреден настап?

Решение. *Прв начин.* Ако сите 10 вечери настапот е обичен, тогаш Максим ќе добиел $10\cdot 3000=30000$ денари. Извонреден настап се плаќа повеќе $5000-3000=2000$ денари и како Максим добил повеќе $36000-30000=6000$ денари, заклучуваме дека бројот на извонредните настапи е $6000:2000=3$.

Втор начин. Со x да го означиме бројот на вечерите кога Максим имал извонреден настап. Тогаш $10-x$ вечери тој имал обичен настап. Од условот на задачата следува равенката

$$5000x+3000(10-x)=36000,$$

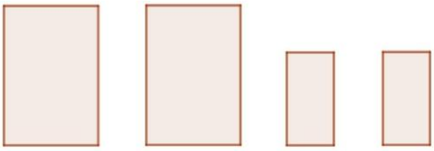
чие решение е $x=3$. Значи, Максим 3 вечери имал извонреден настап.

30. Андреј за една книга потрошил $\frac{4}{15}$ од својата заштеда, за друга $\frac{7}{30}$, а за тетратки $\frac{3}{10}$ од својата заштеда. Му преостанале 720 денари. Колкава била заштедата на Андреј? Колку платил за книгите, а колку за тетратките?

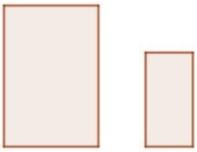
Решение. Андреј за книгите и тетратките потрошил $\frac{4}{15}+\frac{7}{30}+\frac{3}{10}=\frac{4}{5}$ од својата заштеда. Му преостанало $1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ од заштедата и тоа е еднакво на 720 денари. Значи, заштедата на Андреј е еднаква на $720\cdot5=3600$ денари. За првата книга тој платил $\frac{4}{15}\cdot3600=960$ денари, за втората книга платил $\frac{7}{30}\cdot3600=840$ денари и за тетратките платил $3600-(960+840+720)=\frac{3}{10}\cdot3600=1080$ денари.

31. Горјан купил 5 еднакви големи тетратки и 3 еднакви мали тетратки. Ако купел уште 2 големи и 2 мали тетратки ќе платела 220 денари повеќе, а ако купел уште 1 голема и 3 мали тетратки ќе платела 190 денати повеќе. Колку пари платил Горјан за купените тетратки?

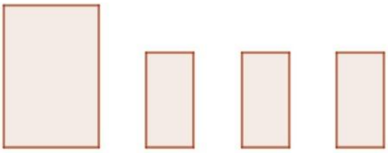
Решение. *Прв начин.* Две големи и две мали тетратки заедно чинат 220 денари.



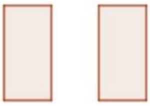
Тоа значи дека 1 голема и 1 мала тетратка заедно чинат 110 денари.



Понатаму, една голема и три мали тетратки заедно чинат 190 денари.



Ако од последните четири тетратки отстраниме 1 голема и една мала тетратка, цената ќе се намали за 110 денари, што значи дека две мали тетратки заедно чинат $190-110=80$ денари. Според тоа, една мала тетратка чини $80:2=40$ денари.



Значи, една голема тетратка чини $110-40=70$ денари. Конечно, Горјан за купување на тетратките платил $5\cdot 70+3\cdot 40=470$ денари.

Втор начин. Нека со x ја означиме цената на големата тетратка, а со y цената на малата тетратка. Од условот на задачата следува системот равенки:

$$\begin{cases} 2x+2y=220 \\ x+3y=190. \end{cases}$$

Од втората равенка имаме $x=190-3y$, па ако замениме во првата добиваме $2(190-3y)+2y=220$, т.е. $380-6y+2y=220$, од каде добиваме $y=40$. Значи, $x=190-3\cdot 40=70$. Конечно,

$$5x+3y=5\cdot 70+3\cdot 40=470,$$

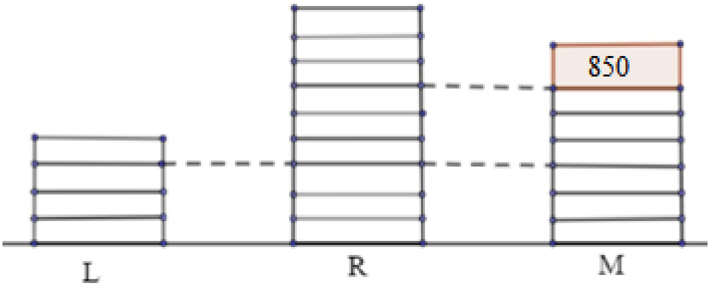
што значи дека Горјан платил 470 денари.

32. Една компанија заработила $\frac{1}{7}$ повеќе од планираната сума пари, а потоа управата на компанијата одлучила на вработените да им подели $\frac{1}{24}$ од заработените пари. По поделбата на вработените, на компанијата и останале милион евра повеќе од планираната саму пари. Колку била планираната сума пари? Ако сите вработени добиле еднаков износ од 12500 евра, колку вработени има во оваа компанија?

Решение. Нека x е планираната сума пари. Тогаш заработувачката е $x+\frac{1}{7}x=\frac{8}{7}x$. Компанијата поделила на вработенмите $\frac{1}{24}$ од заработените пари, што значи дека и останале $\frac{23}{24}$ од заработените пари. Значи, останале $\frac{23}{24}\cdot\frac{8}{7}x=\frac{23}{21}x$ евра. Според тоа, $\frac{23}{21}x=x+1000000$, од каде добиваме $\frac{2}{21}x=1000000$, т.е. $x=10500000$ евра. Според тоа, планираната заработувачка била 10500000 евра. Компанијата поделила $\frac{1}{24}\cdot\frac{8}{7}x=\frac{1}{24}\cdot\frac{8}{7}\cdot10500000=500000$ евра и како секој вработен добил по 12500, во компанијата имало $500000:12500=40$ вработени.

33. Ласте, Рампо и Марко заедно заштеделе 7500 денари. Познато е дека Рампо заштедил три пати повеќе од три четвртини на парите на Ласте, а Марко заштедил 850 денари повеќе од две третини од заштедата на Рампи. Колку пари заштедил секој од нив?

Решение. Сумата која ја заштедил Ласте ќе ја означиме со столб. Бидејќи Рампо заштедил три пати повеќе од три четвртини на парите на Ласте, столбот на Ласте ќе го поделиме на четири дела и еден од деловите ќе го означиме со x (види цртеж). Понатаму, сумата на Рампо е 3 пати поголема од три четвртини на парите на Ласте, што значи дека таа е еднаква на $9x$ (види цртеж). Сумата на Марко ќе ја прикажеме со столб еднаков на две третини од столбот на Рампо на кој ќе му додадеме 850 денари.



Според тоа, важи

$$\begin{aligned}&4x+9x+(6x+850)=7500,\\&19x+850=7500,\\&19x=6650,\\&x=350.\end{aligned}$$

Значи, Ласте заштедил $4\cdot350=1400$ денари, Рампо заштедил $9\cdot350=3150$ денари и Марко заштедил $6\cdot350+850=2950$ денари.

34. На акција се продаваат пакети чоколади. Ана и Билјана купиле по два пакети, а Цанко ги купил последните три пакети, па за Дарко немало чоколади. Затоа Ана, Билјана и Цанко решиле рамноправно со Дарко да ги поделат чоколадите. Дарко за својот дел дал 2450 денари. Како

Ана, Билјана и Цанко треба правично да ги поделат овие 2450 денари?
Решение. Вкупно имало $2+2+3=7$ пакети, па затоа секое од четирите деца требало да плати по $\frac{7}{4}$ пакети. Дарко дал 2450 денари, што значи дека четвртина чоколади во еден пакет чинат $2450:7=350$ денари. Ана платила два пакети, т.е. $\frac{8}{4}$ пакети, што значи дека таа потрошила $8\cdot 350=2800$ денари, а исто толку потрошила и Билјана. Затоа Ана и Билјана од парите на Дарко треба да земат по $2800-2450=350$ денари, а Цанко треба да земе $2450-700=1750$ денари. Навистина, тој платил три пакети, односно $\frac{12}{4}$ пакети, што значи дека дал $12\cdot 350=4200$ денари, а треба да учествува со 2450, односно треба да поврати $4200-2450=1750$ денари.

35. Дедо Алекс се договорил со Рампо 12 часа да бере грозје и за тоа да му исплати 3400 денари и $20\,kg$ грозје. Рампо работел 2 часа помалку и за тоа дедо Алекс покрај $20\,kg$ грозје му платил уште 2700 денари. Колку чини еден килограм грозје?
Решение. Рампо работел 2 часа помалку и за тоа добил 700 денари помалку од договореното. Тоа значи дека неговиот надомест е $700:2=350$ денари по час. Затоа тој за работа од 10 часа требало да добие $350\cdot 10=3500$ денари. Но тој добил 2700 денари и $20\,kg$, што значи дека $20\,kg$ чини $3500-2700=800$ денари. Конечно, еден килограм грозје чини $800:20=40$ денари.

36. Пабло планирал тренинг за трка со велосипед, при што направил две паузи. До првата пауза тој поминал $\frac{2}{7}$ од планираниот пат. Потоа поминал уште $54\,km$ па ја направил втората пауза и до тогаш поминал $\frac{7}{11}$ од планираниот пат. Колку километри бил планираниот пат?
Решение. Нека x е должината на планираниот пат. Од $(\frac{7}{11}-\frac{2}{7})x=54$ добиваме $\frac{27}{77}x=54$, од каде следува $x=154\,km$.

37. Во секој од три еднакви садови собира по 600 литри течност и секој е наполнет до половина. Од првиот сад во вториот се прелеани 18% од течност. Потоа од вториот во третио се прелеани $\frac{2}{3}$ од течноста.

Потоа од третиот во првиот сад се прелеани $\frac{3}{8}$ од течноста и уште 5 литри. Колку литри течност треба да се прелее од садот со најмногу во садот со најмалку течност така што во двата сада да има исто количество течност?

Решение. Во секој од садовите има по $\frac{1}{2}\cdot 600=300\,l$ течност. Од првиот во вториот сад се прелеани $300\cdot\frac{18}{100}=54\,l$ течност, па затоа сека во вториот сад има $354\,l$ течност, а во првиот останале $246\,l$ течност. Сега, од вториот во третиот сад се прелеани $\frac{2}{3}\cdot 354=236\,l$ течност, па затоа во него останале $118\,l$ течност, а во третиот сад има $536\,l$ течност. Понатаму, од третиот во првиот сад се прелеани $\frac{3}{8}\cdot 586+5=201+5=206\,l$ течност, па сега во првиот сад има $246+206=452\,l$ течност, а во третиот сад има $536-206=330\,l$ течност.

Значи, во првиот сад има $452\,l$ течност, во вториот сад има $118\,l$ течност и во третиот сад има $330\,l$ течност. Бидејќи најмногу течност има во првиот, а најмалку во вториот сад треба од првиот сад да прелееме течност во втоиот сад и во секој од нив да има по $(452+118):2=285\,l$ течност. Значи, од првиот во вториот сад треба да прелееме $285-118=167\,l$ течност.

38. Вкупно 24 лица поделиле 48 кроасани. Секое дете добило по 8 кроасани, секоја жена добила по 2, а секој маж добил по 1 кроасан. Колку биле деца, колку жени и колку мажи, ако секој добил барем еден кроасан?

Решение. Со d да го означиме бројот на децата, со z бројот на жените и со m бројот на мажите. Од условот на задачата следува системот равенки

$$\begin{cases} d+z+m=24, \\ 8d+2z=m=48. \end{cases}$$

Ако од втората равенка ја одземе првата добиваме $7d+z=24$. Бидејќи d и z се природни броеви и $7\cdot 4=28>24$ можни вредности за d се 1, 2 и 3. Конечно,

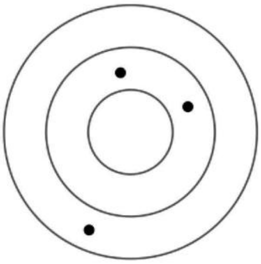
- за $d=1$ добиваме $z=17$ и $m=6$,

- за $d=2$ добиваме $z=10$ и $m=12$,
- за $d=3$ добиваме $z=3$ и $m=18$.

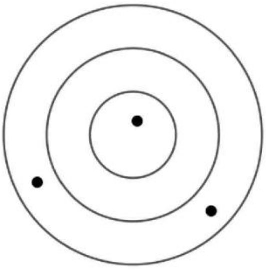
39. Пет мачки за 6 дена ловат 5 глувци. За колку дена 2 мачки можат да уловат 3 глувци?

Решение. Бидејќи пет мачки за 6 дена ловат 5 глувци, пет пати помалку мачки за 6 дена ќе уловат пет пати помалку глувци. Значи, една мачка за 6 дена ќе улови еден глушец. Сега, двојно повеќе мачки за 6 дена ќе уловат двојно повеќе глувци, т.е. 2 мачки за 6 дена ќе уловат 2 глувци. Понатаму, 2 мачки за два пати пократко време ќе уловат два пати помалку глувци, т.е. 2 мачки за 3 дена ќе уловат 1 глушец. Конечно, ист број мачки за три пати подолго време ќе уловат три пати повеќе глувци, што значи дека 2 мачки за 9 дена ќе уловат 3 глувци.

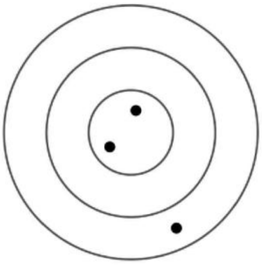
40. На долните цртежи се прикажани метите кои тројца пријателиги погодиле со воздушна пушка и бројот на освоените бодови/



22



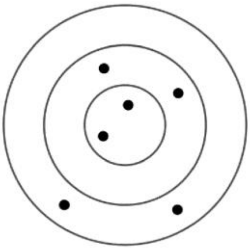
24



36

Колку бодови се вреднува секој одделен круг на метата?

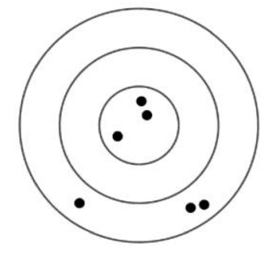
Решение. *Прв начин.* Бројот на бодовите кои ги носи најмалиот круг да го означиме со a, средниот круг со b и големиот круг со c. Ако заедно го гледаме првиот и третиот круг добиваме дека во секој круг имаме по два погодоци и вкупно 38 бодови. Тоа значи дека $2a+2b+2c=58$, па затоа $a+b+c=29$.



Ако ги набљудуваме втората е третата мета заедно, добивамме по три погодоци во најмалиот и најголемиот круг и тие вкупно вредат $24+36=60$ бодови. Последното значи

$$3a+3c=60, \text{ т.е. } a+c=20.$$

Понатаму заклучуваме



$$a+b+c=29,$$
$$(a+c)+b=29$$
$$20+b=29,$$
$$b=9.$$

Сега, од првата мета имаме $9+9+c=22$, па затоа $c=4$, а од втората мета имаме $4+4+a=24$, односно $a=16$.

Конечно, погодокот во најмалиот круг е 16, во средниот круг е 9 и во најголемиот круг е 4 бода.

Втор начин. Бројот на бодовите кои ги носи најмалиот круг да го означиме со a, средниот круг со b и големиот круг со c. Ако ги споредиме првата и третата мета заклучуваме дека $2a-2b=36-22$, односно $2a-2b=14$, од каде наоѓаме $a-b=7$, т.е. $a=b+7$.

Со споредување на втората и третата мета заклучуваме дека $a-c=12$, односно $a=c+12$.

Понатаму, од втората мета имаме $a+2c=24$, па ако замениме за a добиваме $c+12+2c=24$, од каде наоѓаме $c=4$. Сега имаме

$$a=c+12=4+12=16 \text{ и } b=a-7=9.$$

41. Од 99 ученици кои биле во зоолошка градина 76 купиле сок, а 59 купиле чоколадо. Една деветина од сите ученици не купиле ништо. Колку ученици купиле само сок а колку само чоколадо?

Решение. Бидејќи една деветтина од учениците не купиле ништо, заклучуваме дека $99:9=11$ ученици не купиле ништо. Понатаму, вкупно се купени $76+59=135$ сока и чоколади, а $99-11=88$ ученици купиле барем по еден производ, заклучуваме дека $135-88=47$ ученици купиле и сок и чоколадо. Понатаму, 76 ученици купиле сок, а 47 и сок и чоколадо, па значи дека $76-47=29$ ученици купиле само сок. Слично, само чоколадо купиле $59-47=12$ ученици.

42. Ана, Билјана, Цветанка и Дара прават хартиени авиончиња. Тие решиле да направат 1000 авиончиња. Ана и Билјана направиле 167 авиончиња, а Билјана и Цветанка направиле 181 авионче. Ана направила 8 авиончиња повеќе од Дара. Моментално до саканиот број им недостасуваат 677 авиончиња. Колку авиончиња направило секое девојче?

Решение. *Прв начин.* Сите заедно направиле $1000-677=323$ авиончиња. Билјана и Цветанка направиле 181 авионче, што значи дека Ана и Дара направиле $323-181=142$ аиончиња. Ана направила 8 авиончиња повеќе од Дара, што значи дека Дара направила $(142-8):2=67$ авиончиња. Според тоа, Ана направила $67+8=75$ авиончиња. Ана и Билјана направиле 167 авиончиња, па заклучуваме дека Билјана направила $167-75=92$ авиончиња. Конечно, Цветанка направила $181-92=89$ авиончиња.

Втор начин. Нека со a,b,c,d да го означиме бројот на авиончињата кои ги направиле Ана, Билјана, Цветанка и Дара, соодветно. Од условот на задачата следува

$$\begin{cases} a+b=167, \\ b+c=181, \\ a-d=8, \\ a+b+c+d=323. \end{cases}$$

Од втората и четвртата равенка добиваме $a+181+d=323$, па затоа $a+d=142$. Сега, ако ги собереме последната равенка и третата равенка на системот добиваме $2a=150$, па затоа $a=75$. Понатаму, $b=167-75=92$, $d=a-8=67$ и $c=181-92=89$.

43. Анита и Бранко со топче гаѓаат мета, при што секој гаѓа по 50 пати. Едниот дел од метата е обоен жолто, а другиот црвено. За секој погодок во метата се добива определен број поени, а ако метата се промаши не се добиваат поени. Анита 36 пати ја погодила метата во жолтиот дел, а 2 пати ја промашила. Бранко 6 пати ја погодил метата во црвениот дел и двојно повеќе пати од Анита ја промашил метата. Горјан им соопштил дека заедно освоиле 716 поени и дека Бранко освоил 4 поени помалку од Анита. Колку поени вреди погодокот во жолтиот, а колку во црвениот дел на метата?

Решение. *Прв начин*. Анита 36 пати го погодила жолтиот дел од метата и промашила 2 пати, што значи дека $50-36-2=12$ пати го погодила црвениот дел од метата. Понатаму, Бранко 6 пати го погодил црвениот дел од метата и $2\cdot 2=4$ пати промашил, што значи дека $50-6-4=40$ пати го погодил жолтиот дел од метата.

Со a да ги означиме поените кои ги освоила Анита, а со b поените кои ги освоил Бранко. Имаме $a+b=716$ и $a=b+4$. Со замена од втората во првата равенка имаме $2b+4=716$, од каде добиваме $b=356$, па затоа $a=360$.

Со x да ги означиме поените кои се добиваат за погодок во жолтиот дел, а со y поените кои се добиваат за погодок во црвениот дел од метата. Анита и Бранко освоиле 360 и 356 поени соодветно, па затоа

$$\begin{cases} 36x+12y=360 \\ 40x+6y=356 \end{cases}$$

од каде добиваме $x=8$ и $y=6$. Значи, погодокот на жолтиот дел од метата вреди 8 поени, а на црвениот дел од метата вреди 6 поени.

Втор начин. Анита 36 пати го погодила жолтиот дел од метата и промашила 2 пати, што значи дека $50-36-2=12$ пати го погодила црвениот дел од метата. Понатаму, Бранко 6 пати го пгодил црвениот дел од метата и $2\cdot 2=4$ пати промашил, што значи дека $50-6-4=40$ пати го погодил жолтиот дел од метата.

Со x да ги означиме поените кои се добиваат за погодок во жолтиот дел, а со y поените кои се добиваат за погодок во црвениот дел од метата. Бидејќи жолтиот дел од метата вкупно е погоден $36+40=76$ пати, а црвениот дел од метата вкупно е пгоден $12+6=18$ пати добиваме $76x+18y=716$. Понатаму, Анита освоила $36x+12y$ поени, а Бранко освоил $40x+6y$ поени, па затоа $36x+12y-(40x+6y)=4$, односно $6y-4x=4$. Така го добивме системот равенки

$$\begin{cases} 76x+18y=716, \\ 6y-4x=4, \end{cases}$$

чие решение е $x=8$ и $y=6$. Значи, погодокот на жолтиот фдел од метата вреди 8 поени, а на црвениот дел од метата вреди 6 поени.

44. На натпревар по математика 14 ученици ги решиле сите задачи, 32% од учениците решиле некои задачи и 12% од учениците не решиле ниту една задача. Колку ученици учествувале на натпреварот?

Решение. Ако со x го означиме бројот на учениците кои учествувале во натпреварот, тогаш од условот на задачата следува равенката

$$14+0,32x+0,12x=x\,.$$

Последната равенка е еквивалентна со равенката $0,56x=14$, чие решение е $x=\frac{14}{0,56}=25$. Значи, на натпреварот учествувале 25 ученици.

45. Горјан добил кутија полна со бомбони. Првиот ден тој изел четвртина од бомбоните, а вториот ден изел четвртина од остатокот. Колку бомбони добил Горјан, ако на крајот на вториот ден му останале 9 бомбони?

Решение. *Прв начин*. По вториот ден на Горјан му останале 9 бомбони и овие бомбони се $\frac{3}{4}$ од бомбоните кои му останале по првиот ден. Значи, по првиот ден на Горјан му останале $\frac{4}{3}\cdot 9=12$ бомбони. Овие 12 бомбони се $\frac{3}{4}$ од бомбоните кои ги добил Горјан, што значи дека тој добил $\frac{4}{3}\cdot 12=16$ бомбони.

Втор начин. Нека Горјан добил x бомбони. Првиот ден изел $\frac{1}{4}x$, па му останале $x-\frac{1}{4}x=\frac{3}{4}x$ бомбони. Вториот ден Горјан изел $\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}x=\frac{3}{16}x$ бомбони и му останале 9 бомбони. Така ја добиваме равенката $\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}x+9=x$, чие решение е $x=16$. Значи, Горјан добил 16 бомбони.

46. Во едно училиште учителот подготвил определен број благодарници за учесниците на Денот на математиката. За учество му се пријавиле $\frac{2}{13}$ повеќе ученици од бројот на подготвените благодарници, но на самиот Ден на математиката не дошле $\frac{1}{15}$ од пријавените ученици. Колку ученици учествувале на Денот на математиката ако учителот дополнително морал да отпечати 20 благодарници?

Решение. Нека x е бројот на благодарниците кои ги подготвил учителот. За учество се пријавиле $x+\frac{2}{13}x=\frac{15}{13}x$ ученици. На Денот на математиката дошле $\frac{14}{15}$ од овој број, т.е. дошле $\frac{14}{15}\cdot\frac{15}{13}x=\frac{14}{13}x$ ученици. Ова е за $\frac{1}{13}$ повеќе од бројот на подготвените благодарници. Од $\frac{1}{13}x=20$ следува $x=260$. Значи, на Денот на математиката учествувале $260+20=280$ ученици.

47. Воз тргнал од почетната станица со определен број патници. На следните три станици се симнувале последователно $\frac{1}{8}$ од патниците, па $\frac{1}{7}$ од преостанатите патници, па $\frac{1}{6}$ од преостанатите патници. Потоа во возот останале 105 патнници. На станиците не се качил ниту еден патник. Колку патници тргнале со возот од почетната станица?

Решение. *Прв начин.* Откако се симнале $\frac{1}{6}$ од преостанатите патници во возот останале 105 патници. Тоа значи дека овие 105 патници се $\frac{5}{6}$ од патниците кои биле во возот пред третото симнување. Значи, пред третото симнување во возот имало $105\cdot\frac{6}{5}=126$ патници. Овие 126 патници се $\frac{6}{7}$ од патниците кои во возот биле пред второто симнување. Тоа значи дека пред второто симнување во возот имало $126\cdot\frac{7}{6}=$ 147 патници. Овие 147 се $\frac{7}{8}$ од патниците кои биле во взото пред првото симнување, т.е. кои на почетокот се качиле во возот. Значи, во возот на почетокот се качиле $147\cdot\frac{8}{7}=168$ патници.

Втор начин. Нека на почетокот во возот се качиле x патници. По првата станица се симнале $\frac{1}{8}x$ патници, што значи дека останале $x-\frac{1}{8}x$ патници. Од нив по втората станица се симнале $\frac{1}{7}(x-\frac{1}{8}x)$ патници, што значи дека останале $x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{7}(x-\frac{1}{8}x)$ патници. Од нив по третата станица се симнале $\frac{1}{6}(x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{7}(x-\frac{1}{8}x))$ патници, што значи дека останале $x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{7}(x-\frac{1}{8}x)-\frac{1}{6}(x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{7}(x-\frac{1}{8}x))$ патници. Затоа важи

$$x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{7}(x-\frac{1}{8}x)-\frac{1}{6}(x-\frac{1}{8}x-\frac{1}{7}(x-\frac{1}{8}x))=105.$$

Решението на последната равенка е е $x=168$, што значи дека на почетокот во возот имало 168 патници.

48. Во две корпи има јаболка. Кога од првата корпа ќе се извадат $\frac{5}{6}$, а од втората корпа ќе се извадат $\frac{3}{4}$ од јаболката, тогаш во двете корпи ќе останат по 20 јаболка. Колку вкупно јаболка има и колку ќе останат во двете корпи заедно ако од првата корпа извадиме $\frac{2}{3}$ од јаболката, а во втората оставиме $\frac{3}{5}$ од јаболката?

Решение. Кога од првата корпа вадиме $\frac{5}{6}$ од јаболката во неа ќе остане $\frac{1}{6}$ и тоа се 20 јаболка. Значи во првата корпа има $6\cdot 20=120$

јаболка. Кога од втората корпа ќе извадиме $\frac{3}{4}$ во неа ќе останат $\frac{1}{4}$ од јаболката и тоа се 20 јаболка. Значи, во втората корпа има $4\cdot 20=80$ јаболка. Во двете корпи вкупно имало $120+80=200$ јаболка. Ако од првата корпа извадиме $\frac{2}{3}$ од јаболката во неа ќе останат $\frac{1}{3}\cdot 120=40$ јаболка. Во втората корпа ќе останат $\frac{3}{5}\cdot 80=48$ јаболка. Значи, во двете корпи ќе останат $40+48-88$ јаболка.

49. Маја имала три бисери со различен број монистра. Од нив направила три нови бисери во секој од кои имало по 80 монистра. Тоа го направила така што од првиот бисер извадила $\frac{3}{7}$ од монистрата и ги ставила на вториот бисер, потоа оид вториот бисер извадила $\frac{3}{7}$ од монистрата и ги ставила на вториот бисер и од така добиениот трет бидер преместила $\frac{3}{7}$ од монистрата на првиот бисер.

Решение. *Прв начин*. По последното преместување на $\frac{3}{7}$ од монистрата, од третиот на првиот бисер на третиот бисер останале 80 монистра и тоа се $\frac{4}{7}$ од монистрата кои биле претходно на третиот бисер. Значи на третиот бидер имало $\frac{7}{4}\cdot 80=140$ монистра. Значи, на првиот бисер се преместени $\frac{3}{7}\cdot 140=60$ монистра, на првиот бисер биле $80-60=20$ монистра. Слично заклучуваме и за првите две преместувања.

	Прв бисер	Втор бисер	Трет бисер
На крајот	80	80	80
Пред трето преместување	20	80	140
Пред второ преместување	20	140	80
Пред прво преместување	35	125	80

Втор начин. Нека на првиот, вториот и третиот бисер на почетокот маме x, y и z монистра, соодветно. По првото преместување на бисерите имаме $\frac{4}{7}x,\ y+\frac{3}{7}x, z$ монистра. По второто преместување на бисерите имаме $\frac{4}{7}x, \frac{4}{7}(y+\frac{3}{7}x), z+\frac{3}{7}(y+\frac{3}{7}x)$. Сега, на вториот бисер имаме 80 монистра, па затоа $\frac{4}{7}(y+\frac{3}{7}x)=80$, т.е. $y+\frac{3}{7}x=140$. Затоа, на третиот бисер ќе имаме $z+\frac{3}{7}(y+\frac{3}{7}x)=z+\frac{3}{7}\cdot 140=z+60$ монистра, а по преместувањето на првиот бисер ќе останат $\frac{4}{7}(z+60)$ монистра, што значи $\frac{4}{7}(z+60)=80$, од каде добиваме $z=80$. По третото преместување на првиот бисер ќе имаме $\frac{4}{7}x+\frac{3}{7}(z+60)=\frac{4}{7}x+60$ монистра, па затоа $\frac{4}{7}x+60=80$, т.е. $x=35$. Конечно, од $y+\frac{3}{7}x=140$ следува $y+15=140$, односно $y=125$.

Конечно, на почетокот на првиот бисер имало 35, на вториот 125 и на третиот 80 монистра.

50. Бројот на екипите на училишната ракометна лига е поголем од 18 и е помал од 30. Во текот на првенството секоја екипа одиграла со секоја од преостанатите екипи по два натпревари, една како домаќин и друга како готин. Во првенството 35% од вкупниот број натпревари завршиле со победа на гостинската екипа. Определи го најмалиот и најголемиот број натпревари во кои победила гостинската екипа.

Решение. Нека n е бројот на ракометните екипи во првенството. Тогаш $18<n<30$. Во текот на првенството се одиграни $n(n-1)$ натпревар, а гостинската екипа победила во $35\%n(n-1)=\frac{7}{20}n(n-1)$ натпревари. Бидејќи $\frac{7}{20}n(n-1)$ мора да е природен број, производот $n(n-1)$ мора да е делив со 20. Бидејќи n и $n-1$ се последователни природни броеви тие се со различна парност, па затоа n е делив со 20 или $n-1$ е делив со 20 или еден од нив е делив со 5, а другиот е делив со 4.

Единствен природен број $18<k<30$ кој е делив со 20 е 20, па затоа $n=20$ или $n-1=20$. Тоа значи дека $n=20$ или $n=21$. Единствени природни броеви n и $n-1$ во зададениот интервал кои се такви што едниот е делив со 5, а другиот е делив со 4 се $n=25$ и $n-1=24$. Значи, $n\in\{20,21,25\}$.

Најмалиот број натпревари во кои победила гостинската екипа се добива за $n=20$ и во овој случај имаме $\frac{7}{20}\cdot 20\cdot 19=133$ натпревари.

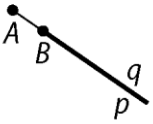
Најголемиот број натпревари во кои победила гостинската екипа се добива за $n=25$ и во овој случај имаме $\frac{7}{20}\cdot 25\cdot 24=210$ натпревари.

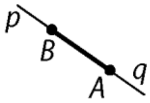
IV. ГЕОМЕТРИЈА

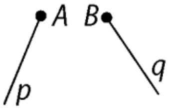
1. Што може да биде пресек на две полуправи? За секој случај скицирај по еден пример.

   Решение. Пресекот на две полуправи Ap и Bq може да биде:

   а) полуправа б) отсечка в) точка г) празно множество







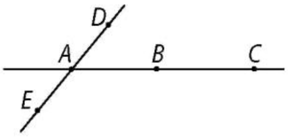
2. Дадени се точките A, B, C, D, E. Нека точките A, B, C се колинеарни и точките A, D, E се колинеарни, но не постојат 4 точки кои се колинеарни. Колку

   а) прави, б) триаголници,

   определуваат овие пет точки?

   Решение. Еден од можните распореди на петте точки е прикажан на цртежот десно. Во секој распоред овие точки определуваат:

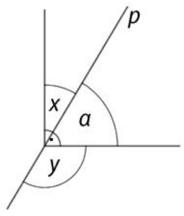
   а) 6 прави, б) 8 триаголници.



3. Две прави се сечат и формираат четири агли. Збирот на накрсните остри агли е за половина од правиот агол помал од едниот од накрсните тапи агли. Определи ги овие четири агли.

   Решение. Ако едниот од острите агли го означиме со α, добиваме $2\alpha+45^\circ=180^\circ-\alpha$, односно $3\alpha=135^\circ$. Значи, $\alpha=45^\circ$, па четирите агли се $45^\circ, 135^\circ, 45^\circ, 135^\circ$.

4. Правата p, која минува низ темето на правиот агол, формира агли како на цртежот десно. Ако збирот на аглите x и y е еднаков на $163^\circ 14'$, определи ја големината на напоредниот агол на аголот α.



Решение. Имаме $x=90^\circ-\alpha$ и $y=180^\circ-\alpha$, па затоа

$$90^\circ-\alpha+180^\circ-\alpha=163^\circ14',$$

од каде следува $\alpha=53^\circ23'$, па затоа $180^\circ-\alpha=126^\circ37'$.

5. Аголот α е поголем од својот комплементен агол точно онолку колку што е помал од својот суплементен агол. Определи го аголот α.

Решение. За аголот α комплементнот агол е $90^\circ-\alpha$, а суплементниот агол е $180^\circ-\alpha$. Од условот на задачата следува

$$\alpha-(90^\circ-\alpha)=(180^\circ-\alpha)-\alpha,$$

од каде последователно добиваме

$$2\alpha-90^\circ=180^\circ-2\alpha,$$

$$4\alpha=270^\circ,$$

$$\alpha=67^\circ30'.$$

6. Аглите α и β се суплементни, а аглите β и γ се комплементни. Збирот на аглите α и γ е еднаков на 123°. Определи ги аглите α,β и γ.

Решение. Од условот на задачата следува $\alpha+\beta=180^\circ$, $\beta+\gamma=90^\circ$ и $\alpha+\gamma=123^\circ$. Ако ги собереме овие равенства и потоа поделиме со 2, добиваме $\alpha+\beta+\gamma=196^\circ30'$. Сега

$$\alpha=196^\circ30'-(\beta+\gamma)=196^\circ30'-90^\circ=106^\circ30',$$

$$\beta=196^\circ30'-(\alpha+\gamma)=196^\circ30'-123^\circ=73^\circ30',$$

$$\gamma=196^\circ30'-(\alpha+\beta)=196^\circ30'-180^\circ=16^\circ30'.$$

7. Определи го аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 20 часот и 21 минута.

Решение. Почетните положби на големата и малата стрелка на часовникот нека се во 12 часот. Големата стрелка за 1 час (60 минути) прави полн агол, па за 1 минута таа прави агол од 6°. За 21 минута та ќе направи агол од $21\cdot6^\circ=126^\circ$. Малата стрелка за 1 час (60 минути) прави агол од $360^\circ:12=30^\circ$, па за 8 часа таа ќе направи агол од 240°. Понатаму, таа за 1 минута прави агол од $30^\circ:60=0,5^\circ$, па за 21 минута ќе направи агол од $21\cdot 0,5^\circ = 10,5^\circ = 10^\circ 30'$. Според тоа, за 8 часа и 21 минута малата стрелка ќе направи агол од $250^\circ 30'$. Аголот кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 20 часот и 21 минута е еднаков на разликата на добиените агли, т.е. тој е еднаков на

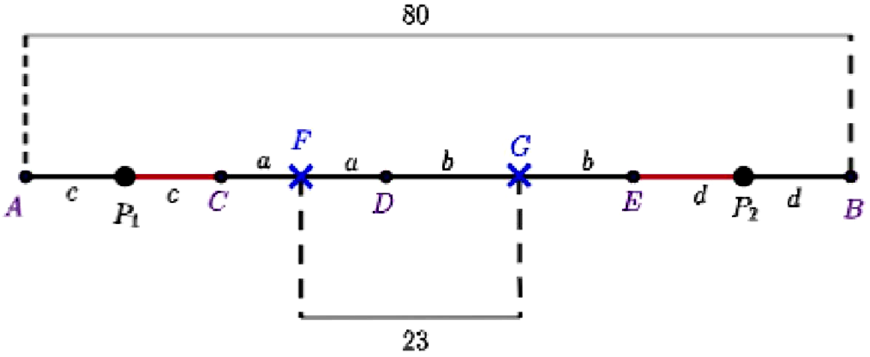
$$250^\circ 30' - 126^\circ = 124^\circ 30'.$$

Вториот агол кој го зафаќаат стрелките на часовникот во 21 часот и 21 минута е испакнатиот агол и тој е еднаков на

$$360^\circ - 124^\circ 30' = 235^\circ 30'.$$

8. На отсечката AB со должина $80\,cm$ редоследно се земени точки C, D, E така што точката C е најблиска до точката A. Растојанието меѓу средините на отсечките CD и DE е еднакво на $23\,cm$. Определи го растојанието меѓу средините на отсечките AC и EB.

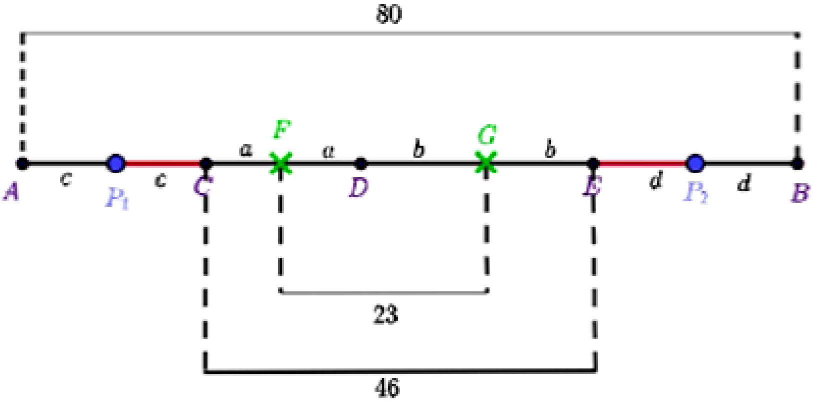
Решение. На отсечката AB со F и G да ги означиме средините на отсечките CD и DE и да означиме $a = \overline{CD} = \overline{FD}, b = \overline{DG} = \overline{GE}$. Да ги означиме и должините на отсечките од условите на задачата. На отсечката AB да ги означиме средините на отсечките AC и EB редоследно со P_1 и P_2, па да ги означиме еднаквите должини на отсечките AP_1 и P_1C и еднаквите должини на отсечките EP_2 и P_2B.



Треба да се определи растојанието меѓу точките P_1 и P_2, односно $c + 2a + 2b + d$. Имаме $\overline{FG} = a + b = 23\,cm$, па затоа

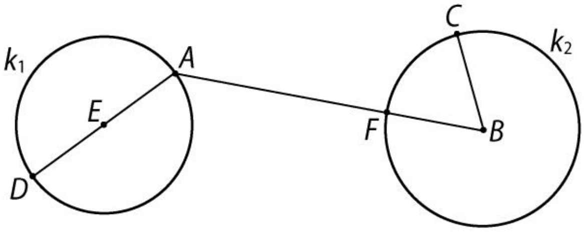
$$\overline{CE} = 2a + 2b = 2(a + b) = 46\,cm.$$

Разликата $80 - 46 = 34\,cm$ соодветствува на збирот на должините на отсечките AC и EB, т.е. $2c + 2d = 34$, па затоа $c + d = 17\,cm$. Конечно имаме



$$\overline{P_1P_2}=c+2a+2b+d=(c+d)+2(a+b)=17+46=63\,cm.$$

9. На дадениот цртеж точката E е центар на кружницата k_1, а точката B е центар на кружницата k_2. Ако радиусот на k_1 е еднаков на $13cm$, отсечката AB има должина $53cm$ и искршената линија $DABC$ има должина $1m$, определи ја должината на отсечката AF.



Решение. Нека r е радиусот на кружницата k_2. Бидејќи $\overline{DA}=26\,cm$, $\overline{AB}=53\,cm$ и должината на искршената линија $DABC$ е $1m$, следува

$$1m=\overline{DA}+\overline{AB}+\overline{BC}=26\,cm+53\,cm+r,$$

па затоа $r=21cm$. Сега,

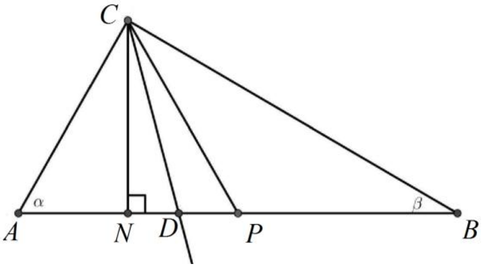
$$\overline{AF}=\overline{AB}-\overline{BF}=\overline{AB}-r=32\,cm.$$

10. Петтина на острiот агол α на правоаголниот триаголник ABC е еднаква на третина на острiот агол β на тој триаголник. Спореди ги должините на страните на триаголникот ABC.

Решение. Бидејќи $\frac{\alpha}{5}=\frac{\beta}{3}$, добиваме дека $\alpha=\frac{5\beta}{3}>\beta$. Затоа $a>b$, што значи дека $c>a>b$.

11. Во правоаголен триаголник ABC точката P е средина на страната AB, а точката N е подножје на висината повлечена од темето на правиот агол C. Докажи дека симетралата на $\measuredangle ACB$ го дели $\measuredangle NCP$ на два еднакви дела.

Решение. Нека $\measuredangle BAC=\alpha$ и $\measuredangle CBA=\beta$. Пресекот на симетралата на $\measuredangle ACB$ со страната AB да го означиме со D. Траиаголникот ANC е правоаголен , па затоа



$$\measuredangle ACN=90^\circ-\measuredangle NAC=90^\circ-\alpha=\beta.$$

Центарот на опишаната кружница околу правоаголен триаголник се наоѓа во средината на хипотенузата, па затоа $\overline{PB}=\overline{PC}$, т.е. триаголникот BCP е рамнокрак. Според тоа, важи $\measuredangle PCB=\measuredangle CBP=\beta$. Понатаму, важи

$$\measuredangle ACD=\measuredangle ACN+\measuredangle NCD=\beta+\measuredangle NCD,$$
$$\measuredangle DCB=\measuredangle DCP+\measuredangle PBC=\measuredangle DCB+\beta.$$

Но, $\measuredangle ACD=\measuredangle DCB$, па затоа

$$\beta+\measuredangle NCD=\measuredangle DCB+\beta\text{, т.е. }\measuredangle NCD=\measuredangle DCB,$$

што и требаше да се докаже.

12. Во еден триаголник еден внатрешен агол е еднаков на еден надворешен агол. Еден од преостанатите два надворешни агли е пет пати поголем од некој од преостанатите два внатрешни агли. Определи ги надворешните и внатрешните агли на овој триаголник.

Решение. Бидејќи надворешниот агол е еднаков на збирот на двата несоседни внатрешни агли, заклучуваме дека надворешен агол може да биде еднаков на внатрешен агол само во исто теме. Значи, триаголникот е правоаголен. Нека внатрешните агли се α,β,γ и соодветните надворешни агли се $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ при што $\gamma_1=\gamma=90^\circ$. Можни се следниве случаи $\alpha_1=5\beta,\beta_1=5\alpha,\alpha_1=5\alpha$ и $\beta_1=5\beta$.

1) Ако $\alpha_1=5\beta$, тогаш од $\alpha_1=\beta+\gamma$, следува $\beta=22^\circ30',\alpha=67^\circ30'$, $\beta_1=157^\circ30',\alpha_1=112^\circ30'$.

2) Ако $\beta_1=5\alpha$, тогаш аналогно како во 1) добиваме исти агли по

големина.

3) Ако $\alpha_1 = 5\alpha$, тогаш од $\alpha_1 + \alpha = 180^\circ$, добиваме $\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$, $\alpha_1 = 150^\circ, \beta_1 = 120^\circ$.

4) Ако $\beta_1 = 5\beta$, тогаш аналогно како во 3) добиваме исти агли по големина.

Значи, внатрешните агли на триаголникот се $22^\circ 30', 67^\circ 30', 90^\circ$, а надворешните се $157^\circ 30', 112^\circ 30', 90^\circ$, или внатрешните се $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, а надворешните се $150^\circ, 120^\circ, 90^\circ$.

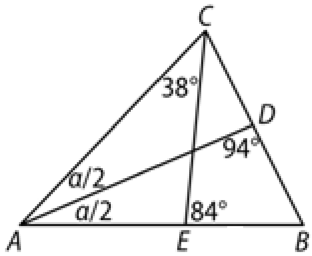
13. Симетралата на внатрешниот агол во темето A на триаголникот ABC ја сече страната BC во точката D. Нека E е внатрешна точка на страната AB и нека важи $\measuredangle ADB = 94^\circ$, $\measuredangle ACE = 38^\circ$ и $\measuredangle CEB = 84^\circ$. Определи ги најкратката и најдолгата страна на триаголникот ABC.

Решение. Од триаголникот AEC следува дека $\alpha + 38^\circ = 84^\circ$, па е $\alpha = 46^\circ$. Од триаголникот ABD добиваме

$$\beta = 180^\circ - (94^\circ + \tfrac{\alpha}{2}) = 63^\circ,$$

а од триаголникот ABC следува

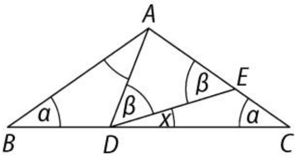
$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 71^\circ.$$



Според тоа, најкратка е страната BC, а најдолга е страната AB.

14. Нека D е точка на основата BC на рамнокракиот триаголник ABC таква што $\measuredangle BAD$ е еднаков на $2020'$ и E е точка на кракот AC таква што $\overline{AE} = \overline{AD}$. Определи го $\measuredangle CDE$.

Решение. Триаголниците ABC и ADE се рамнокраки, па затоа можеме да означиме $\measuredangle ABC = \measuredangle ACD = \alpha$, $\measuredangle ADE = \measuredangle AED = \beta$ и $\measuredangle CDE = x$, види цртеж. Во триаголник збирот на два внатрешни агли е еднаков на несоседниот надворешен агол, па затоа $x + \alpha = \beta$ и $\alpha + 2020' = \beta + x$. Од каде добиваме

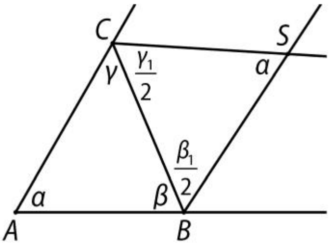


$$\alpha + 2020' = x + \alpha + x, \text{ т.е. } x = 1010' = 16^\circ 50'.$$

15. Даден е триаголник ABC. Аголот формиран од симетралите на надворешните агли во темињата B и C е еднаков на внатрешниот агол во темето A и е за 7° поголем од внатрешниот агол во темето C. Спореди ги должините на страните на триаголникот ABC.

Решение. Според условот на задачата имаме

$$\measuredangle CSB=\alpha, \alpha=\gamma+7^\circ,$$
$$\measuredangle SCB=\frac{\gamma_1}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2},$$
$$\measuredangle SBC=\frac{\beta_1}{2}=\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{2\alpha-7^\circ}{2}.$$



За внатрешните агли на триаголникот BSC важи

$$\alpha+\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{2\alpha-7^\circ}{2}=180^\circ, \text{ т.е. } 5\alpha+\beta=367^\circ.$$

За внатрешните агли на триаголникот ABC имаме

$$\alpha+\beta+\alpha-7^\circ=180^\circ, \text{ т.е. } 2\alpha+\beta=187^\circ.$$

Според тоа, $5\alpha+\beta-(2\alpha+\beta)=367^\circ-187^\circ$, т.е. $\alpha=60^\circ$. Сега имаме $\gamma=\alpha-7^\circ=53^\circ$ и $\beta=180^\circ-(60^\circ+53^\circ)=67^\circ$. Според тоа, $\beta>\alpha>\gamma$, па затоа $b>a>c$.

16. Даден е триаголник ABC со $\measuredangle ACB=112^\circ$. На страната AB избрани се точки P и R такви што $\overline{AC}=\overline{AP}$ и $\overline{BC}=\overline{BR}$. Определи го $\measuredangle RCP$.

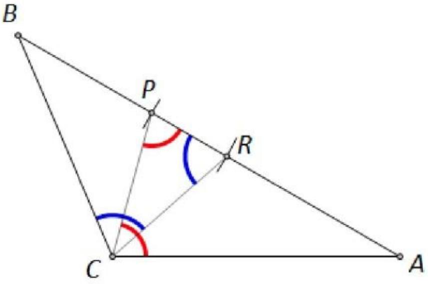
Решение. Бидејќи $\overline{AC}=\overline{AP}$ триаголникот APC е рамнокрак. Затоа $\measuredangle CPA=\measuredangle ACP=x$.

Бидејќи $\overline{BC}=\overline{BR}$, триаголникот BCR е рамнокрак. Затоа важи

$$\measuredangle RCB=\measuredangle BRC=y.$$

Нека $\measuredangle RCP=z$. Тогаш

$$x+y=112^\circ+z.$$

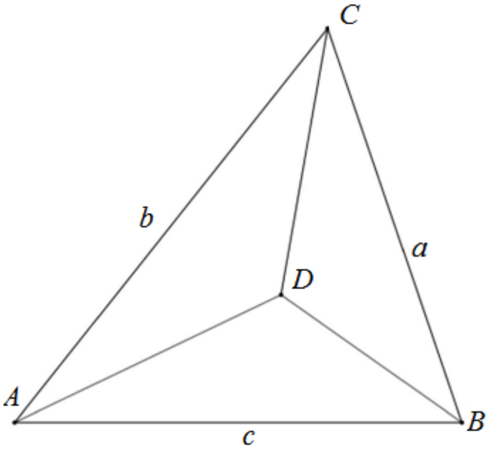


Во триаголникот CRP важи $x+y+z=180^\circ$, па затоа

$$112^\circ+z+z=180^\circ, \text{ т.е. } z=34^\circ.$$

17. Аголот под кој се сечат симетралите на два внатрешни агли на некој

триаголник е еднаков на 111°. Едната од нив се сече со третата симетрала на аголот под агол од 122°. Определи ги аглите на овој триаголник.



Решение. Некиа на пример симетралите повлечени од темињата A и B се сечат под агол од 111°, а симетралите повлечени од темињата A и C се сечат под агол од 122°. Во триаголникот ABD важи $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+111^\circ=180^\circ$, па затоа $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=69^\circ$, т.е.

$$\alpha+\beta=138^\circ.$$

Сега, од триаголникот ABC добиваме $\gamma=180^\circ-138^\circ=42^\circ$. Понатаму, од триаголникот ACD имаме $\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}+122^\circ=180^\circ$, па затоа

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}=58^\circ, \text{ т.е. } \alpha+\gamma=116^\circ.$$

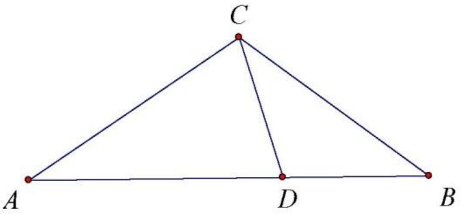
Значи,

$$\alpha=116^\circ-\gamma=116^\circ-42^\circ=74^\circ.$$

Конечно,

$$\beta=138^\circ-\alpha=138^\circ-74^\circ=64^\circ$$

18. Во рамнокрак триаголник ABC на основата AB земена е точка D таква што $\overline{AD}=\overline{AC}$ и $\overline{BD}=\overline{CD}$. Определи ги аглите на триаголниците ABC, ADC и DBC.



Решение. Според условот на здачата триаголниците ADC и DBC се рамнокраки. Затоа важи

$\measuredangle BAC=\measuredangle CBA=\measuredangle DCB=\alpha$.

Понатаму, $\measuredangle CDA=2\alpha$ како надворешен агол на триаголникот DBC. Бидејќи DC е основа на рамнокрак триаголник важи $\measuredangle CDA=\measuredangle ACD=2\alpha$. Сега, од триаголникот ADC добиваме $\alpha+2\alpha+2\alpha=180^\circ$, т.е. $\alpha=36^\circ$.

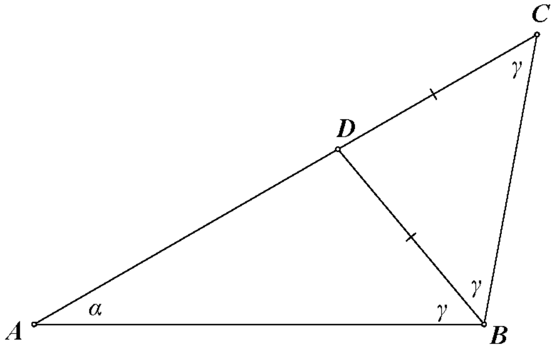
За аглите на триаголникот ABC добиваме: $\measuredangle CBA=\measuredangle ABC=36^\circ$ и $\measuredangle BCA=108^\circ$.

За аглите на триаголникот ADC добиваме: $\measuredangle ADC=\measuredangle DCA=72^\circ$ и $\measuredangle CAD=36^\circ$.

За аглите на триаголникот DBC добиваме: $\measuredangle CBD=\measuredangle BDC=36^\circ$ и $\measuredangle CDB=108^\circ$.

19. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle ACB$ е два пати помал од $\measuredangle CBA$, а за 20° е поголем од $\measuredangle BAC$. Нека D е пресекот на симетралата на $\measuredangle CBA$ со страната AC. Која отсечка е подолга, AD или DC?

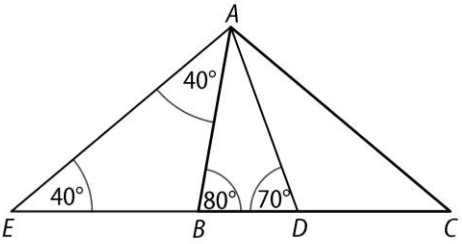
Решение. Да означиме $\measuredangle BAC=\alpha$, $\measuredangle CBA=\beta$ и $\measuredangle ACB=\gamma$. Јасно, најмалиот агол во триаголникот ABC е α, па $\gamma=\alpha+20^\circ$ и $\beta=2\alpha+40^\circ$, види цртеж. Сега, од $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ следува $4\alpha+60^\circ=180^\circ$, па затоа $\alpha=30^\circ$. Следува $\gamma=50^\circ$ и $\beta=100^\circ$.



Понатаму. триаголникот BCD е рамнокрак, па затоа $\overline{DC}=\overline{DB}$. Во триаголникот ABD аголот наспроти страната AD е поголем од аголот наспроти страната DB, па затоа $\overline{AD}>\overline{DB}$, што значи $\overline{AD}>\overline{DC}$.

20. Во триаголникот ABC е $\measuredangle B=80^\circ$. Нека D е точка на страната BC таква што $\measuredangle BDA=70^\circ$ и $\overline{AB}+\overline{BD}=\overline{AC}$. Определи го $\measuredangle ACB$.

Решение. Нека E е точка од правата CB таква што $\overline{AB}=\overline{BE}$ и B е меѓу C и E (цртеж десно). Тогаш од триаголникот BAD имаме $\measuredangle BAD = 180^\circ - 80^\circ - 70^\circ = 30^\circ$ па затоа $\measuredangle EAD = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ = \measuredangle EDA$, што значи дека триаголникот AED е рамнокрак ($\overline{EA} = \overline{ED}$). Сега,



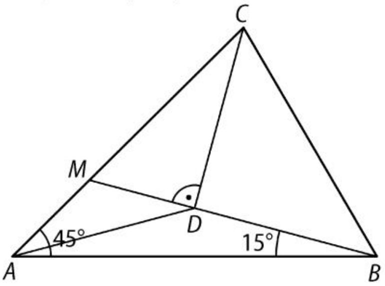
$$\overline{AE} = \overline{EB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AC},$$

што значи дека триаголникот AEC е рамнокрак, па затоа

$$\measuredangle ACB = \measuredangle ACE = \measuredangle AEC = \measuredangle AEB = 40^\circ.$$

21. Даден е триаголник ABC, $\measuredangle BAC = 45^\circ$. Нека M е точка на страната AC таква што $\overline{MC} = 2\overline{AM}$ и $\measuredangle ABM = 15^\circ$. Определи го $\measuredangle ACB$.

Решение. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од темето C на MB (цртеж десно). Од $\triangle ABM$ заклучуваме дека $\measuredangle AMB = 120^\circ$, па затоа $\measuredangle CMD = 60^\circ$. Затоа во $\triangle MCD$ важи $\overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{MC} = \overline{AM}$. Бидејќи $\triangle AMD$ е рамнокрак, добиваме дека $\measuredangle MAD = \measuredangle MDA = 30^\circ$, па затоа и $\triangle ADC$ е рамнокрак. Тоа значи, $\overline{CD} = \overline{AD}$. Понатаму, $\measuredangle DAB = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$, па затоа и $\triangle ABD$ е рамнокрак и $\overline{AD} = \overline{BD}$. Според тоа, $\overline{CD} = \overline{BD}$, што значи дека катетите на правоаголниот триаголник BDC се еднакви. Затоа $\measuredangle DCB = 45^\circ$. Конечно, бараниот агол е

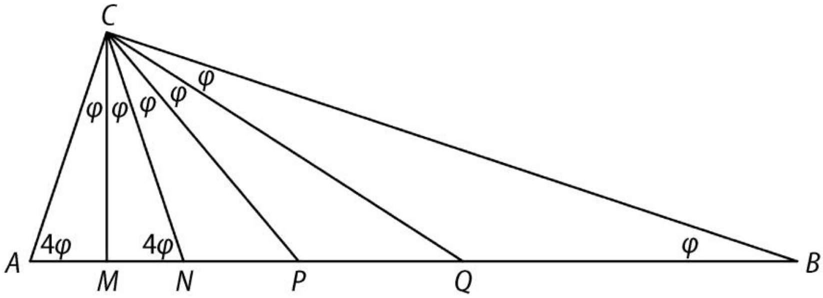


$$\measuredangle ACB = \measuredangle MCD + \measuredangle DCB = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ.$$

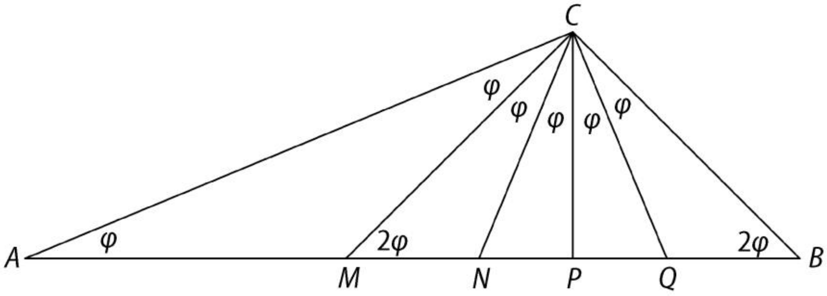
22. На страната AB на триаголникот ABC, кој не е правоаголен, се дадени точки M, N, P и Q, во овој редослед од A кон B, такви што правите CM, CN, CP и CQ го делат $\measuredangle ACB$ на пет еднакви делови. Ако внатрешните агли на триаголникот CMN се еднакви на внатрешните агли на триаголникот ABC, определи ги аглите на триаголникот ABC.

Решение. Можни се два случаја.

а) Нека $\measuredangle ABC = \measuredangle MCN = \varphi$. Тогаш $\measuredangle MNC$ е надворешен за триаголникот NBC, па затоа $\measuredangle MNC = \measuredangle BAC = 4\varphi$, види цртеж. Оттука следува дека $10\varphi = 180^\circ$, т.е. $\varphi = 18^\circ$. Затоа $\measuredangle ACB = 5\varphi = 90^\circ$, што противречи на претпоставката дека триаголникот ABC не е правоаголен. Значи во овој случај задачата нема решение.



б) Нека $\measuredangle BAC = \measuredangle MCN = \varphi$. Тогаш $\measuredangle CMN$ е надворешен за триаголникот ACM, па затоа $\measuredangle CMN = \measuredangle ABC = 2\varphi$, види цртеж. Оттука следува дека $8\varphi = 180^\circ$, т.е. $\varphi = 22^\circ 30'$. Затоа $\measuredangle ACB = 5\varphi = 112^\circ 30'$, $\measuredangle CAB = \varphi = 22^\circ 30'$ и $\measuredangle CBA = 2\varphi = 45^\circ$.



23. Должините на две страни на триаголникот ABC се $a = 5,6\,cm$ и $b = 12,8\,cm$. Определи ја:

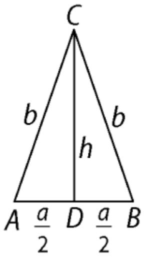
а) најмалата, б) најголемата,

можна вредност на периметарот на триаголникот ABC ако должината на третата негова страна е цел број сантиметри.

Решение. Имаме $b > a$, па затоа неравенството на триаголник го добива видот $b - a < c < a + b$. Според тоа, $7,2 < c < 18,4$ и како должината на c е цел број сантиметри важи $8 \le c \le 18$. Периметарот на триаголникот ABC е најмал можен за $c=8cm$ и притоа $O=26,4cm$, а е најголем можен за $c=18cm$ и притоа $O=36,4cm$.

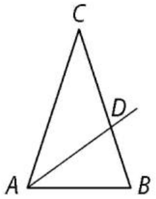
24. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AC}=\overline{BC}$. Точката D е средина на основата AB. Периметарот на триаголникот ABC е еднаков на $50cm$, а периметарот на триаголникот ADC е еднаков на $40cm$. Определи ја должината на отсечката CD.

Решение. Да означиме $\overline{AD}=\overline{DB}=\frac{a}{2}$, $\overline{AC}=\overline{BC}=b$ и $\overline{CD}=h$, цртеж десно. Од условот на задачата следува $a+2b=50$, од каде добиваме $a+\frac{b}{2}=25$. Понатаму, повторно од условот на задачата следува $a+\frac{b}{2}+x=40$. Сега од последните две равенки добиваме $25+x=40$, односно $x=15cm$.



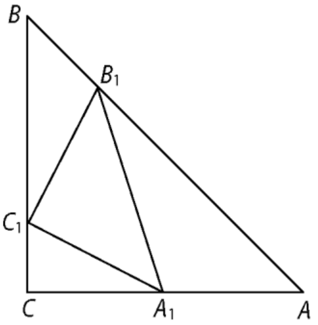
25. Основата AB на рамнокрак триаголник ABC е $10cm$, а аголот при основата е 72°. Ако симетралата на $\measuredangle BAC$ го сече кракот BC во точката D, определи ја должината на искршената линија $BADC$.

Решение. Лесно се гледа дека триаголникот BAD е рамнокрак со агли 72°, 72° и 36°. Затоа $\overline{AB}=\overline{AD}$. Триаголникот ADC е рамнокрак со агли 36°, 36° и 108°, па затоа $\overline{CD}=\overline{AD}$. Според тоа, должината на искршената $BADC$ е $\overline{BA}+\overline{AD}+\overline{DC}=30\,cm$.



26. Триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се рамнокраки правоаголни со хипотенузи AB и A_1B_1, соодветно, при што точката A_1 припаѓа на отсечката AC, точката B_1 припаѓа на отсечката AB и точката C_1 припаѓа на отсечката BC. Докажи дека

$$\overline{AA_1}=2\overline{CC_1}.$$



Решение. Нека D е подножјето на нормалата повлечена од точката B_1 на страната BC и нека $\overline{CC_1}=x$.

Според признакот АСА триаголниците CA_1C_1 и DC_1B_1 се складни правоаголни триаголници, па затоа важи

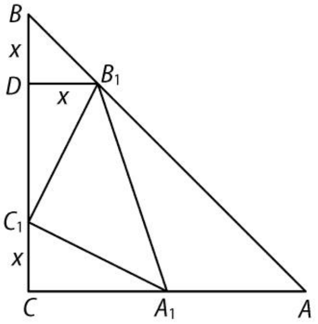
$$\overline{DB_1} = \overline{CC_1} = x \text{ и } \overline{CA_1} = \overline{DC_1}.$$

Бидејќи триаголникот DB_1B е рамнокрак правоаголен, важи $\overline{DB} = \overline{DB_1} = x$. Сега имаме

$$\overline{AA_1} = \overline{AC} - \overline{CA_1} = \overline{BC} - \overline{DC_1}$$

$$= \overline{DB} + \overline{CC_1} = 2x = 2\overline{CC_1},$$

што и требаше да се докаже.



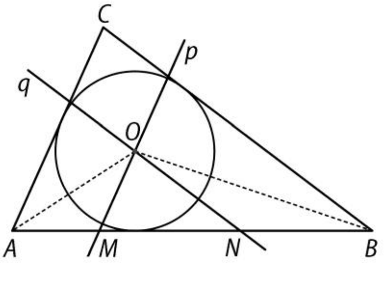
27. Во разностран триаголник ABC впишана е кружница k со центар O. Низ точката O се повлечени прави p и q такви што $p \parallel AC$ и $q \parallel BC$. Правата p ја сече страната AB во точка M, а правата q ја сече AB во точка N. Докажи дека периметарот на триаголникот OMN е еднаков на должината на страната AB.

Решение. Бидејќи правата AO е симетрала на $\measuredangle BAC$, добиваме

$$\measuredangle MAO = \measuredangle CAO = \measuredangle AOM,$$

што значи дека триаголникот AOM е рамнокрак. Значи, $\overline{AM} = \overline{OM}$. На потполно аналоген начин се докажува дека триаголникот BON е рамнокрак, па затоа $\overline{BN} = \overline{ON}$. Конечно,

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{NB} = \overline{OM} + \overline{MN} + \overline{NO}.$$



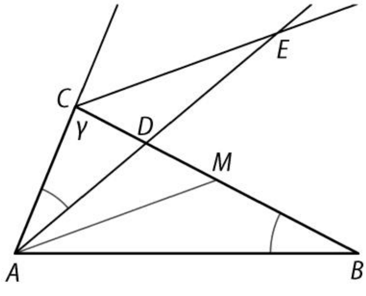
28. Во триаголникот ABC важи $\overline{BC} = 2\overline{AC}$. Нека D е точка на страната BC таква што $\measuredangle CAD = \measuredangle ABC$. Симетралата на надворешниот агол во темето C ја сече полуправата AD во точката E. Докажи дека $\overline{AE} = \overline{AB}$.

Решение. Нека M е средината на страната BC. Тогаш важи

$$\overline{AC} = \overline{CM} = \overline{MB}.$$

Ако $\measuredangle ACM = \gamma$, тогаш

$$\measuredangle AMC = \measuredangle CAM = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$



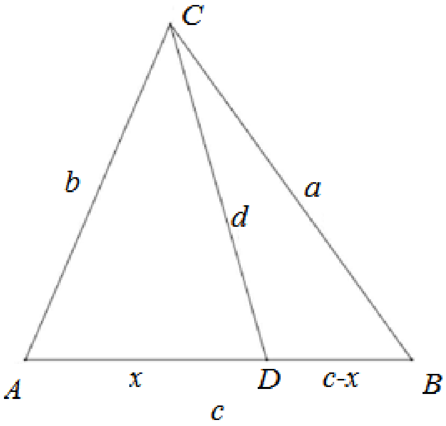
па затоа $\measuredangle AMB = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. Исто така

$$\measuredangle ACE = \gamma + \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2} = \measuredangle AMB.$$

Сега од признакот АСА следува дека $\triangle ACE \cong \triangle BMA$, па затоа важи $\overline{AE} = \overline{AB}$.

29. Триаголник со периметар $55\,mm$ е поделен со некоја отсечка на два триаголника. Определи ја должината на отсечката со која е поделен почетниот триаголник ако периметрите на добиените триаголници се $41\,mm$ и $25\,mm$.

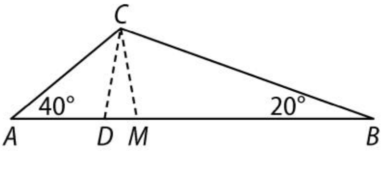
Решение. Периметарот на дадениот триаголник е еднаков на збирот на периметрите на двата добиени триаголници намален за две должини на отсечката со која која тој триаголник го дели на два дела (цртеж десно). Имаме



$$55 = 41 + 25 - 2d,$$
$$2d = 41 + 25 - 55,$$
$$2d = 11,$$
$$d = 5{,}5\,mm.$$

30. За $\triangle ABC$ важи $\measuredangle BAC = 40^\circ$, $\measuredangle ABC = 20^\circ$ и $\overline{AB} - \overline{BC} = 10\,cm$. Ако симетралата на $\measuredangle ACB$ ја сече правата AB во точката M, определи ја должината на отсечката CM.

Решение. Нека D е точка на страната AB таква што $\overline{BD} = \overline{BC}$. Тогаш $\triangle CDB$ е рамнокрак, па затоа



$$\measuredangle BCD = \measuredangle CDB = 80^\circ.$$

Бидејќи

$$\measuredangle ACD = \measuredangle DAC = 40^\circ,$$

ќе важи $\overline{AD} = \overline{CD}$. Од $\triangle CDM$ имаме

$$\measuredangle CDM = \measuredangle CMD = 80^\circ,$$

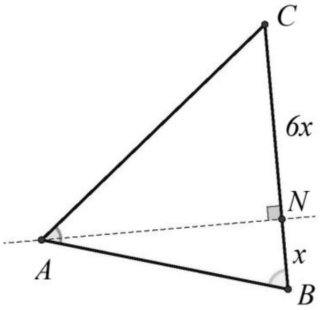
па затоа

$$\overline{CM}=\overline{CD}=\overline{AD}=\overline{AB}-\overline{BD}=\overline{AB}-\overline{BC}=10\,cm.$$

31. Даден е триаголник ABC таков што $\measuredangle BAC+\measuredangle CBA=135^\circ$. Точката N е подножјето на висината повлечена од темето A. Ако $\overline{NC}=6\overline{NB}$, а плоштината на триаголникот ABC е $3024\,mm^2$, определи ја должината на страната BC.

Решение. Имаме $\measuredangle BAC+\measuredangle CBA=135^\circ$, па затоа

$$\measuredangle ACB=180^\circ-\measuredangle BAC-\measuredangle CBA=45^\circ.$$

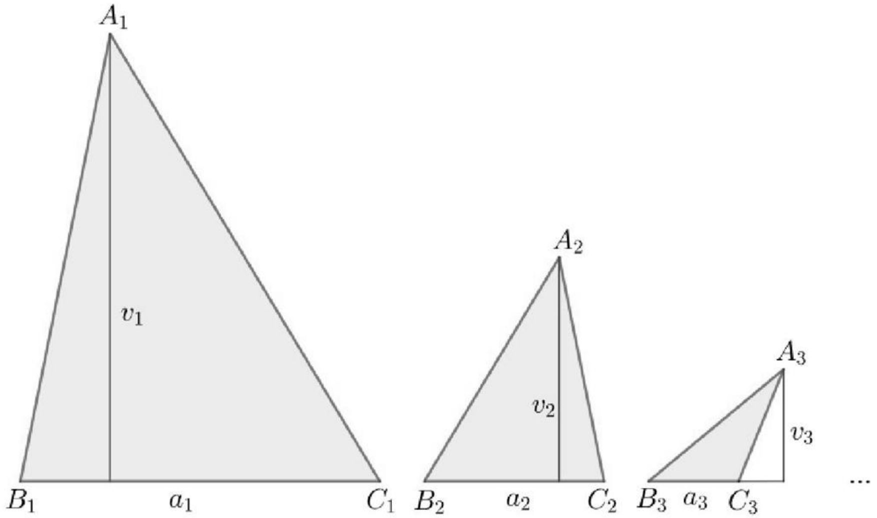


Отсечката AN е висина во триаголникот ABC, па затоа $\measuredangle CNA=90^\circ$ (цртеж десно). Значи, $\measuredangle NAC=45^\circ$ и $\overline{NC}=\overline{AN}$. Од $\overline{NC}=6\overline{NB}=6x$ следува $\overline{AN}=\overline{NC}=6x$ и $\overline{BC}=7x$. Според тоа,

$3024=P_{ABC}=\frac{\overline{AN}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{6x\cdot 7x}{2}=21x\cdot x$, т.е. $x\cdot x=144$, од каде добиваме $x=12\,mm$. Конечно, $\overline{BC}=7x=84\,mm$.

32. Пабло нацртал триаголник $A_1B_1C_1$, а потоа до него нацртал нов триаголник $A_2B_2C_2$ со една страна B_2C_2 еднаква на половина од страната B_1C_1 на првиот триаголник и половина од соодветната висина на првиот триаголник. Потоа покрај вториот триаголник нацртал трет триаголник $A_3B_3C_3$ со страна B_3C_3 еднаква на половина од страната B_2C_2 на вториот триаголник и висина на таа страна еднаква на половина од соодветната висина на вториот триаголник. На ист начин Пабло продолжил да црта триаголници, при што откако го нацртал шестиот триаголник збирот на плоштините на сите нацртани триагилници бил еднаков на $4095\,cm^2$. Определи ги плоштините на најголемиот и најмалиот триаголник.

Решение. Со a_1 и v_1 да гио означиме должините на страната и висината на првиот триаголник (види цртеж). За неговата плоштина имаме $P_1=\frac{1}{2}a_1v_1$. Понатаму, страната на вторито триаголник е $a_2=\frac{1}{2}a_1$, а неговата висина е $v_2 = \frac{1}{2}v_1$, па затоа неговата плоштина е еднаква на $P_2 = \frac{1}{2}a_2v_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}a_1\cdot\frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{4}P_1$.



На ист начин се заклучува дека

$P_2 = \frac{1}{4}P_2 = \frac{1}{16}P_1$, $P_4 = \frac{1}{4}P_3 = \frac{1}{64}P_1$, $P_5 = \frac{1}{4}P_4 = \frac{1}{256}P_1$, $P_6 = \frac{1}{4}P_5 = \frac{1}{1024}P_1$.

Имаме,

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 4095,$

$P_1 + \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{16}P_1 + \frac{1}{64}P_1 + \frac{1}{256}P_1 + \frac{1}{1024}P_1 = 4095$

$P_1(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024}) = 4095,$

$\frac{1365}{1024}P_1 = 4095,$

$P_1 = 3072\,cm^2,$

$P_6 = \frac{1}{1024}\cdot 3072 = 3\,cm^2.$

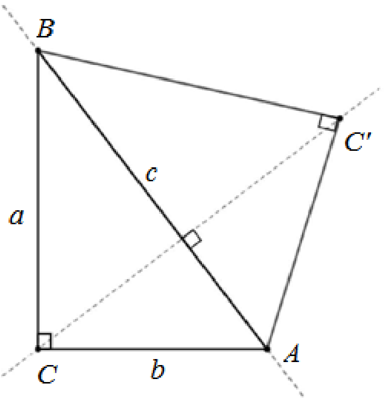
Значи плоштината на првиот триаголник е $3072\,cm^2$, а плоштината на шестиот триаголник е $3\,cm^2$.

33. Должината на страната AC на правоаголниот $\triangle ABC$ со прав агол во темето C е еднаква на $\frac{3}{4}$ од должината на страната BC, а должината на страната AB е 25% поголема од должината на страната BC. Со слепување на $\triangle ABC$ и неговата симетрична слика во однос на правата

AB се добива четитиаголник со периметар $16{,}8\,cm$. Определи го периметарот на $\triangle ABC$.

Решение. При ознаки како на цртежот десно, од условот на задачата следува

$b=\frac{3}{4}a=0{,}75a$ и $c=a+\frac{25}{100}a=1{,}25a$.



Ликот кој се добива со осната симетрија е складен правоаголен триаголник ABC' на $\triangle ABC$. Со слепување на овие два триаголника се добива четириаголникот $BCAC'$. Притоа важи $\overline{AC'}=\overline{AC}=b$ и $\overline{BC'}=\overline{BC}=a$, па затоа за периметарот на четириаголникот $BCAC'$ добиваме $2a+2b=16{,}8$, односно $2a+2\cdot 0{,}75a=16{,}8$, па затоа

$$3{,}5a=16{,}8\text{, т.е. } a=4{,}8\,cm.$$

Сега

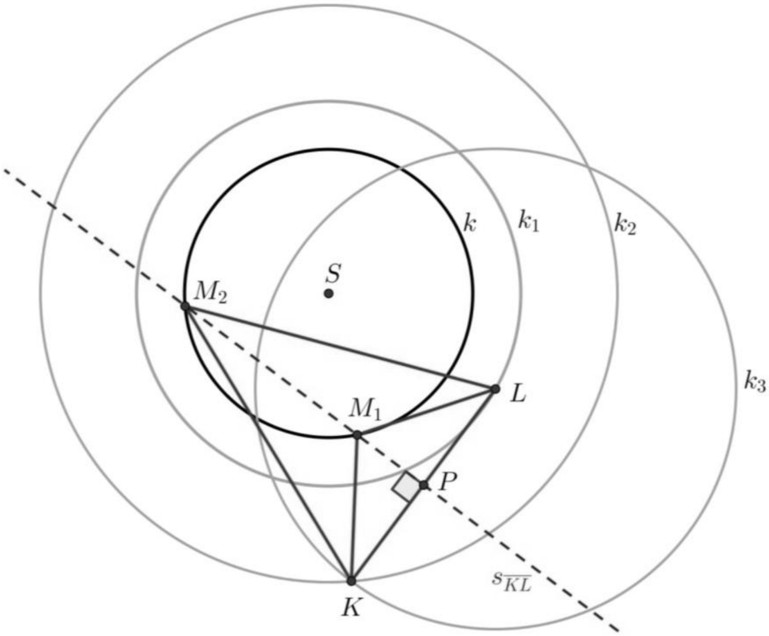
$$b=0{,}75\cdot 4{,}8=3{,}6\,cm \text{ и } c=1{,}25a=1{,}25\cdot 4{,}8=6\,cm.$$

34. Нацртај кружница k со центар S и радиус $3\,cm$. Нацртај точки K и L за кои важи $\overline{SK}=6\,cm, \overline{SL}=4\,cm, \overline{KL}=5\,cm$. Конструирај ги сите рамнокраки триаголници со основа KL, а темето наспроти основата припаѓа на кружницата k.

Решение. Прво цртаме кружница k со центар S и радиус $3\,cm$. Потоа цртаме точки точки K и L такви што $\overline{SK}=6\,cm, \overline{SL}=4\,cm,$ $\overline{KL}=5\,cm$.

- Цртаме кружница k_1 со центар S и радиус $4\,cm$.
- Цртаме кружница k_2 со центар S и радиус $6\,cm$.
- На кружницата k_1 избираме точка L.
- Цртаме кружница k_3 со центар во точката L и радиус $5\,cm$.
- Точката K е една од пресечните точки на кружниците k_3 и k_2.

Понатаму, ја конструираме симетралата на s_{KL} на отсечката KL. Пресекот насиметралата s_{KL} и дадената кружница k е темето M на бараниот рамнокрак триаголник. На цртежот тоа се триаголниците KLM_1 и KLM_2.

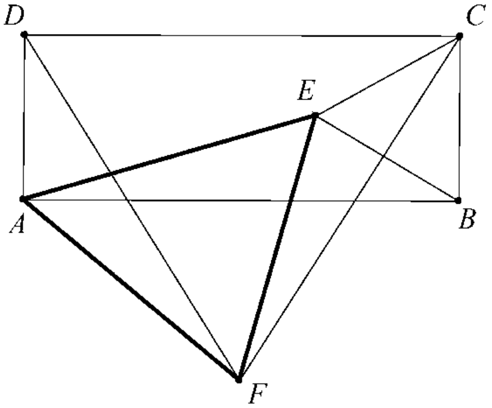


35. Даден е правоаголник $ABCD$. Нека E е точка во внатрешноста на правоаголникот таква што триаголникот BCE е рамностран и нека F е точка таква што триаголникот CDF исто така е рамностран. Точката F се наоѓа на другата страна на правата AB во однос на темињата на правоаголникот C и D. Докажи дека триаголникот AEF е рамностран.

Решение. Бидејќи

$$\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BE}=b\,,\ \overline{AB}=\overline{CD}=\overline{DF}=a \text{ и}$$

$$\measuredangle ADF=\measuredangle EBA=90^\circ-60^\circ=30^\circ$$



од признакот за складност САС следува дека $\triangle AFD \cong \triangle ABE$, па затоа $\overline{AF} = \overline{AE}$. На сличен начин докажуваме дека $\triangle AFD \cong \triangle FCE$. Важи $\overline{BE} = \overline{EC} = b$, $\overline{DF} = \overline{CF} = a$, $\measuredangle DCF = 60^\circ, \measuredangle ECB = 60^\circ$ и $\measuredangle DCB = 90^\circ$. Од $\measuredangle DCF + \measuredangle ECB = 120^\circ$ и $\measuredangle DCF + \measuredangle ECB = 90^\circ + \measuredangle ECF$, следува дека $90^\circ + \measuredangle ECF = 120^\circ$, па затоа $\measuredangle ECF = 30^\circ$.

Од признакот са складност САС следува дека $\triangle AFD \cong \triangle ABE$, па затоа $\overline{AF} = \overline{EF}$. Со тоа докажавме дека страните на триаголникот AFE се еднакви, па затоа тој е рамностран.

36. Во четириаголникот $ABCD$ аголот β е три пати поголем од аголот α, аголот γ е два пати поголем од аголот β, а аголот δ е содржател на аголот од 60°. Определи ги аглите на овој четириаголник.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}&\beta = 3\alpha,\\ &\gamma = 2\beta = 6\alpha,\\ &\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ,\\ &\alpha + 3\alpha + 6\alpha + \delta = 360^\circ,\\ &10\alpha + \delta = 360^\circ.\end{aligned}$$

За $\delta = 60^\circ$ добиваме $10\alpha = 300^\circ$, па затоа $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$ и $\gamma = 180^\circ$.

За $\delta = 120^\circ$ добиваме $10\alpha = 240^\circ$, па затоа $\alpha = 24^\circ$, $\beta = 72^\circ$ и $\gamma = 144^\circ$.

За $\delta = 180^\circ$ задачата нема решение, бидејќи внатрешен агол на четириаголник не може да е рамен агол.

За $\delta = 240^\circ$ добиваме $10\alpha = 120^\circ$, па затоа $\alpha = 12^\circ$, $\beta = 36^\circ$ и $\gamma = 72^\circ$.

За $\delta = 300^\circ$ добиваме $10\alpha = 60^\circ$, па затоа $\alpha = 6^\circ$, $\beta = 18^\circ$ и $\gamma = 36^\circ$.

37. Основата на пластеник има форма на правоаголник со страни со должини $4m$ и $2m$. Во него треба да се сместат саксии во форма на коцка во кои се засадени трендафили и каранфили. Каранфилите се во вазни со должина на раб $10cm$, а трендафилите се во вазни со должина на раб $20cm$. Вазни со каранфили треба да има три пати повеќе од вазни со трендафили. Колку вазни со каранфили, а колку со трендафили ќе има во пластеникот?

Решение. Должините на страните на правоаголникот се $4m=400cm$ и $2m=200cm$. Плоштината на основата на пластеникот е

$$400\cdot 200=80000\,cm^2.$$

Плоштината на основата на вазна со каранфил е $10\cdot 10=100\,cm^2$, а плоштината на основата на вазна со трендафил е $20\cdot 20=400\,cm^2$. Со x да го означиме бројот на вазните со трендафили. Тогаш имаме

$$400x+3\cdot 100x=80000,$$
$$700x=80000,$$
$$x=114\tfrac{2}{7}.$$

Значи, ќе имаме 114 вазни со трендафили и $3\cdot 114=342$ вазни со каранфили.

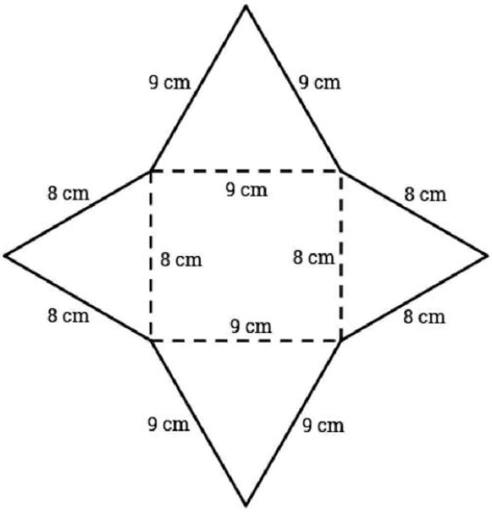
38. Плоштината на правоаголникот е еднаква на $72\,cm^2$, а должините на неговите страни изразени во сантиметри се природни броеви. Испиши ги сите различни правоаголници кои ја имаат наведената плоштина. Над секоја страна надвор од правоаголникот кој има најмал периметар е конструиран рамностран триаголник. Определи го периметарот на добиената фигура.

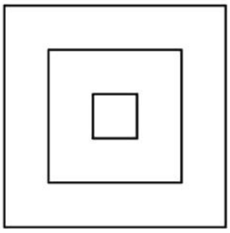
Решение. Имаме $72=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3$, па затоа должините на страните на правоаголникот може да бидат:

$1cm$ и $72cm$,
$2cm$ и $36cm$,
$3cm$ и $24cm$,
$4cm$ и $18cm$,
$6cm$ и $12cm$,
$8cm$ и $9cm$.

Најмал периметар има правоаголникот со страни $8cm$ и $9cm$. Фигурата која се добива е прикажана на цртежот десно. Нејзинипт периметар е

$$4\cdot 8+4\cdot 9=68cm.$$





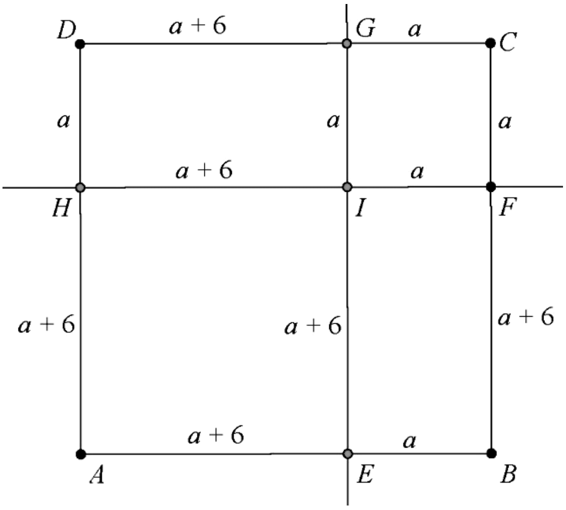
39. Пабло на училишното игралиште со кредна нацртал три квадрати со плоштини $25m^2, 9m^2$ и $1m^2$ (цртеж десно). Определи ја вкупната должина на сите линии кои ги нацртал Пабло.

Решение. Бидејќи $1=1\cdot1$, $9=3\cdot3$ и $25=5\cdot5$, должината на страните на најмалиот, средниот и најголемиот квадрат се $1m, 3m$ и $5m$, соодветно. Збирот на должините на сите линии е еднаков на збирот на периметрите на нацртаните квадрати, т.е. тој е еднаков на $4\cdot1+4\cdot3+4\cdot5=36m$

40. Квадрат со плоштина $400cm^2$ помош на две прави е поделен на два квадрата и два правоаголника. Определи ги периметрите на секој од делбените квадрати и правоаголници, ако должините на соседните страни на двата правоаголника се разликуваат за $60mm$.

Решение. Должините на соседните страни на двата делбени правоаголници се разликуваат за $60mm=6cm$. Плоштината на дадениот квадрат е еднаква на $400cm^2$ и како $20\cdot20=400$ заклучуваме дека должината на неговата страна е $20cm$

Нека должината на страната на помалиот делбен квадрат е a. Тогаш должината на страната на поголемиот делбен квадрат е $a+6$ (види цртеж). При ознаките како на дадениот цртеж важи $a+(a+6)=20$, од каде добиваме $a=7cm$. Сега, периметарот на квадратот $AEIH$ е



$$O_1 = 4(a+6) = 4 \cdot 13 = 52\,cm,$$

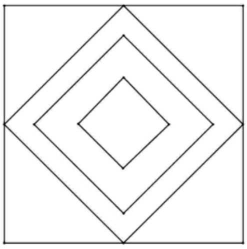
париметарот на квадратот $IFCG$ е

$$O_2 = 4a = 4 \cdot 7 = 28\,cm,$$

а периметарот на секој од правоаголниците $HIGD$ и $EBFI$ е

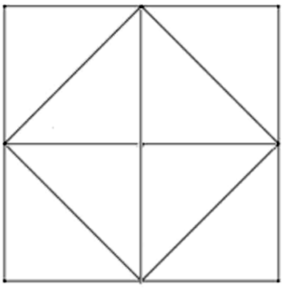
$$O_3 = 2a + 2(a+6) = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 13 = 40\,cm$$

41. Во првиот квадрат е впишан втор квадрат чии темиња се средините на страните на првиот квадрат. Во внатрешноста на вториот квадрат се наоѓа трет квадрат чии страни од страните на вториот квадрат се оддалечени по $2\,cm$. Во внатрешноста на третиот квадрат се наоѓа четврт квадрат чии страни се од страните на третиот квадрат оддалечени по $3\,cm$. Определи ја плоштината на првиот квадрат, ако плоштината на четвртиот квадрат е $9\,cm^2$.



Решение. Од плоштината на четвртиот квадрат, за која важи $P_4 = 9\,cm^2$, следува $a_4 = 3\,cm$. Страните на третиот квадрат се оддалечени од страните на четвртиот квадрат по $3\,cm$, па затоа $a_3 = a_4 + 3 + 3 = 9\,cm$. Страните на вториот квадрат се оддалечени од страните на третиот квадрат по $2\,cm$ и затоа $a_2 = a_3 + 2 + 2 = 13\,cm$. Плоштината на вториот квадрат е

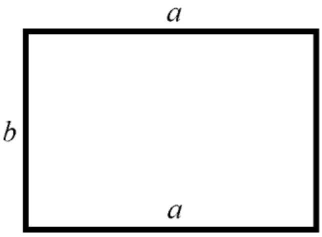
$$P_2 = a_2 \cdot a_2 = 169\,cm^2.$$



Ако ги повлечеме симетралите на страните на првиот квадрат, истиот го делиме на четири еднакви квадрати, секој од кои со дијагоналите е поделен на половина. Притоа едната половина припаѓа на вториот квадрат. Затоа плоштината на првиот квадрат е два пати поголема од плоштината на вториот квадрат, односно

$$P_1 = 2P_2 = 2 \cdot 169 = 338\,cm^2.$$

42. Дедо Ванчо за оградување на својата градина со правоаголен облик потрошил $154\,m$ жица. Ширината на градината е еднаква на $\frac{5}{6}$ од нејзината должина. Колкава е плоштината на градината на дедо Ванчо?



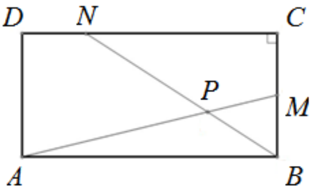
Решение. Нека a е должината и b е ширината на градината. Имаме $b=\frac{5}{6}a$, па затоа

$$2(a+b)=154,$$
$$a+b=77,$$
$$a+\frac{5}{6}a=77,$$
$$\frac{11}{6}a=77,$$
$$a=42\,m,$$
$$b=\frac{5}{6}\cdot 43=35\,m$$

Значи, плоштината на градината на дедо Ванчо е $42\cdot 35=1470\,m^2$.

43. Даден е правоаголник $ABCD$ чии должини на страни се разликуваат за $4\,cm$, има периметар $16\,dm$ и $\overline{AB}>\overline{BC}$. Точката M е средина на страната BC. Точката N лежи на страната CD и важи $\overline{NC}=3\overline{DN}$. Отсечките AM и BN се сечат во точката P. Кој има поголема плоштина, триаголникот ABP или четириаголникот $PMCN$ и за колку?

Решение. Нека $\overline{AB}=a, \overline{BC}=b$. Тогаш $a=b+4$, $16\,dm=160\,cm$, па затоа



$$2a+2b=160$$
$$2(b+4)+2b=160$$
$$2b+8+2b=160$$
$$4b=152$$
$$b=38\,cm$$

и $a=38+4=42\,cm$.

Бидејќи $\overline{NC}=3\overline{DN}$, добиваме $\overline{NC}=\frac{3}{4}\overline{DC}=\frac{3}{4}\cdot 42=31{,}5\,cm$. Понатаму, $\overline{BM}=\overline{MC}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\cdot 38=19\,cm$. Сега добиваме

$$P_{ABP}=P_{ABM}-P_{BMP}=\frac{42\cdot 19}{2}-P_{BMP}=399-P_{BMP},$$
$$P_{PMCN}=P_{BCN}-P_{BMP}=\frac{38\cdot 31{,}5}{2}-P_{BMP}=598{,}5-P_{BMP},$$
$$P_{PMCN}-P_{ABP}=598{,}5-P_{BMP}-(399-P_{BMP})$$
$$=598{,}5-P_{BMP}-399+P_{BMP}=199{,}5\,cm^2$$

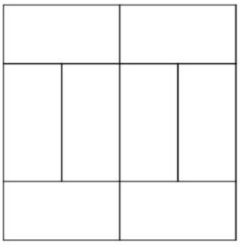
Според тоа, плоштината на четириаголникот $PMCN$ е за $199{,}5\,cm^2$ поголема од плоштината на триаголникот ABP.

44. Родителите на Андреј сакаат да уредат и заградат цветна градина со правоаголен облик. Должините на страните треба да бидат природни броеви изразени во метри, а плоштината да е $24\,m^2$. Колку ќе чини оградата, ако $1m$ ограда чини 750 денари?

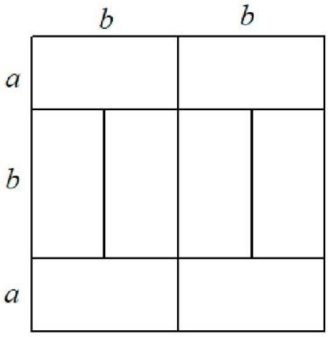
Решение. Од $24=1\cdot 24=2\cdot 12=3\cdot 8=4\cdot 6$ следува дека имаме четири можности и тоа:

- цветната градина има страни $1m$ и $24m$, при што должината на оградата е $2\cdot 1+2\cdot 24=50\,m$ и истата чини $50\cdot 750=37500$ денари,
- цветната градина има страни $2m$ и $12m$, при што должината на оградата е $2\cdot 2+2\cdot 12=28\,m$ и истата чини $28\cdot 750=21000$ денари,
- цветната градина има страни $3m$ и $8m$, при што должината на оградата е $2\cdot 3+2\cdot 8=22\,m$ и истата чини $22\cdot 750=16500$ денари,
- цветната градина има страни $4m$ и $6m$, при што должината на оградата е $2\cdot 4+2\cdot 6=20\,m$ и истата чини $20\cdot 750=15000$ денари,

45. Од осум еднакви плочки во форма на правоаголник е составен квадратот прикажан на цртежот десно. Десет такви квадрати се наредени еден до друг во низа, со што е добиена правоаголна патека во дворот на Горјан. Определи ги периметарот и плоштината на патеката ако периметарот на една плочка е $144\,cm$.



Решение. Нека a е должината на пократката страна, а b е должината на пдолгата страна на плочките (цртеж десно). Бидејќи 8 плочки формираат квадрат, за неговите страни важи $2b=2a+b$ т.е. $b=2a$. Периметарот на правоаголната плочка е $144\,cm$, па затоа



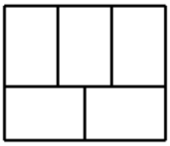
$2a+2b=144,$

$$2a+2\cdot 2a=144$$
$$a=24\,cm, b=48\,cm.$$

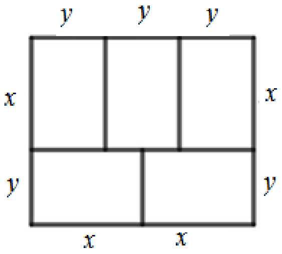
Значи, должината на страната на квадратот е $2b=96\,cm$, а неговата плоштина е $P=96\cdot 96=9216\,cm^2$. Целата патека е направена од 10 такви квадрати, па затоа нејзината плоштина е $92160\,cm^2$. Јасно, периметарот на патеката е еднаков на

$$2\cdot(10\cdot 96+96)=2\cdot 11\cdot 96=2112\,cm.$$

46. Правоаголник со периметар $176\,cm$ е поделен на пет складни помали правоаголницикако што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на големиот правоаголник.



Решение. *Прв начин*. Со x да ја означиме должината, а со y ширината на малиот правоаголник (цртеж десно). Тогаш $2x=3y$ и $4x+5y=176$. Значи, $4x=6y$ и ако замениме во $4x+5y=176$, добиваме $11y=176$, т.е. $y=16\,cm$. Сега, $2x=3\cdot 16$, т.е. $x=24\,cm$. Значи, должините на страните на правоаголникот се

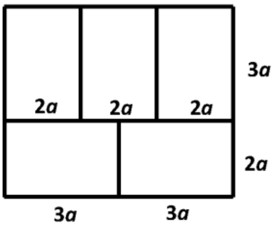


$$a=2\cdot 24=48\,cm \text{ и } b=24+16=40\,cm,$$

па неговата плоштина е

$$P=ab=48\cdot 40=1920\,cm^2.$$

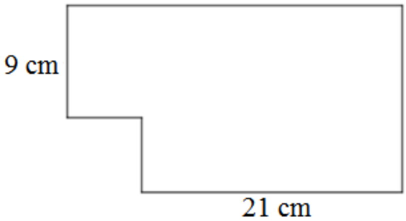
Втор начин. Бидејќи две должини на малиот правоаголник се еднакви на три негови ширини, воведуваме ознаки како на цртежот десно. Должините на страните на правоаголникот се $6a$ и $5a$, па затоа



$$O=2(5a+6a)=22a,$$
$$22a=176,$$
$$a=8\,cm.$$

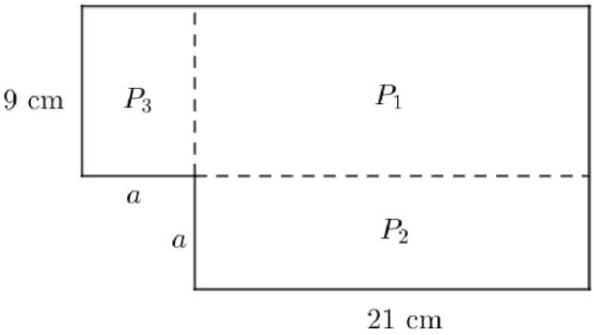
Значи, плоштината на правоаголникот е

$$P=5a\cdot 6a=30\cdot 8\cdot 8=1920\,cm^2.$$



47. На цртежот десно е прикажан правоаголник од кој е отсечен квадрат. Плоштината на добиената фигура е $369\,cm^2$, а должините на скратените страни се $21\,cm$ и $9\,cm$. Определи ја плоштината на отсечениот квадрат.

Решение. Страната на квадратот ќе ја означиме со a, а плоштината со P. Дадената фигура ќе ја поделиме на три дела со плоштини P_1, P_2, P_3 (види цртеж).



Имаме

$$P_1 = 21 \cdot 9 = 189\,cm^2,\ P_2 = 21a \text{ и } P_3 = 9a,$$

па затоа

$$\begin{aligned}189 + 21a + 9a &= 369,\\ 189 + 30a &= 369,\\ 30a &= 180,\\ a &= 6\,cm.\end{aligned}$$

Конечно, плоштината на отсечениот квадрат е $P = a \cdot a = 36\,cm^2$.

48. Плоштината на правоаголникот чии страни се изразени со природни броеви во сантиметри е еднаква на $48\,cm^2$. Колкава може да биде плоштината на квадратот кој има еднаков периметар како и правоаголникот ако должината на страната на квадратот изразена во сантиметри е природен број?

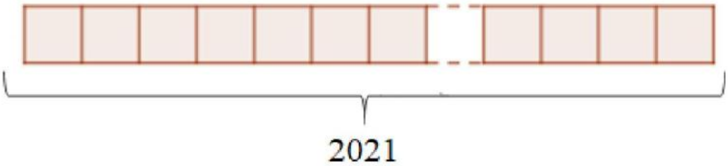
Решение. За правоаголникот имаме $P = 48\,cm^2$ и како $P = ab$, добиваме дека неговите страни и периметарот се:

Страна a	1	2	3	4	6
Страна b	48	24	16	12	8
Периметар $2a+2b$	98	52	38	32	28

Сега за квадратот имаме

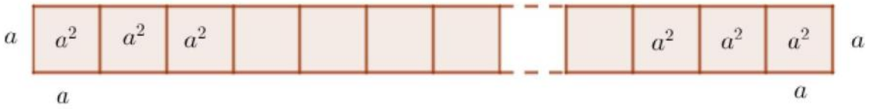
Периметар $4c$	98	52	38	32	28
Страна c	Нема реш.	13	Нема реш.	8	7
Плоштина c^2	Нема реш.	169	Нема реш.	64	49

49. Правоаголник е составен од 2021 складни квадрати (види цртеж).

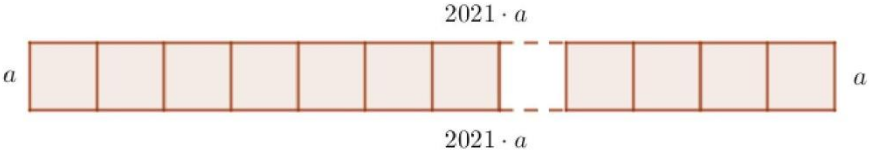


Определи го периметарот на овој правоаголник, ако неговата плоштина е еднаква на $18189\,cm^2$.

Решение. Правоаголникот е составен од 2021 квадрати со должина на страна a, па затоа неговата плоштина е $P=2021a^2$.



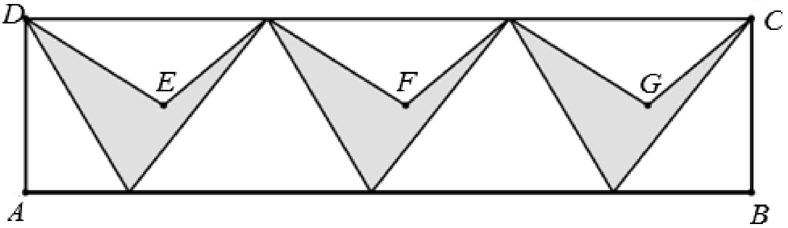
Според тоа, $2021a^2=18189$, од каде добиваме $a^2=9$, т.е. $a=3cm$.



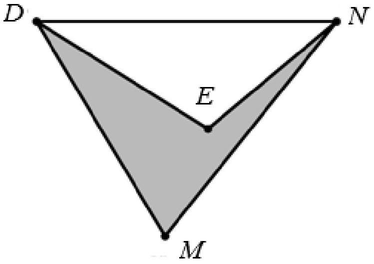
Понатаму, должините на страните на правоаголникот се a и $2021a$, па затоа неговиот периметар е

$$O=2\cdot(a+2021a)=2\cdot2022a=4044\cdot3=12132\,cm\ .$$

50. Определи ја плоштината на осенчениот дел на правоаголникот $ABCD$ чија плоштина е $144\,cm^2$, а ширината му е $\frac{1}{4}$ од должината. Осенчениот дел се состои од три складни четириаголници, а точките E,F,G припаѓаат на симетралата на страната BC.



Решение. Да означиме $\overline{AB}=a$ и $\overline{BC}=b$. Имаме $b=\frac{1}{4}a$, т.е. $a=4b$. Значи, $4b\cdot b=144$, од каде добиваме $b\cdot b=36$, т.е. $b=6\,cm$ и $a=24\,cm$.



Понатаму, осенчените четириаголници се складни, па доволно е да ја определиме плоштината на еден од нив. Тој четириаголник да го означиме со $MNED$. Плоштината на четириаголникот $MNED$ е еднаква на разликата на плоштините на триаголниците NDM и NDE. Триаголникот NDM има основа $\overline{ND}=\frac{1}{3}a=8\,cm$ и висина $\overline{AD}=b=6\,cm$, а триаголникот NDE има основа $\overline{ND}=\frac{1}{3}a=8\,cm$ и висина $\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}b=3\,cm$. Затоа

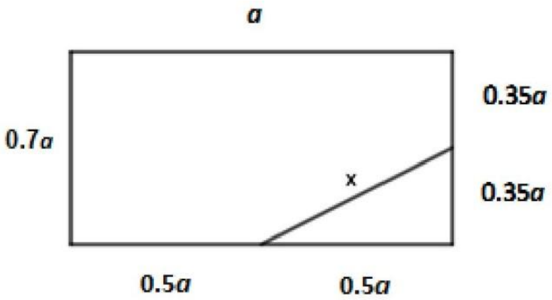
$$P_{MNED}=P_{NDM}-P_{NDE}=\frac{8\cdot 6}{2}-\frac{8\cdot 3}{2}=24-12=12\,cm^2.$$

Конечно, плоштината нма осенчениот дел на правоаголникот е еднаква на $3\cdot 12=36\,cm^2$.

51. Кројачка Ана има платно во форма на правоаголник чија должина на едната страна е 70% од должината на другата страна. Таа платното го пресекла по отсечка чии крајни точки се средините на две соседни страни на правоаголникот и добила два дела во форма на правоаголен триаголник и петаголник. Периметарот на петаголникот е за $68\,dm$ поголем од периметарот на триаголникот. Определи ја плоштината на платното.

Решение. Нека a и b се должините на две соседни страни на правоаголникот и $a>b$. Со x да ја означиме должината на отсечката чии крајни точки се средините на две соседни страни на правоаголникот.

Важи $b = 70\% a = 0,7a$.



Од условот на задачата следува

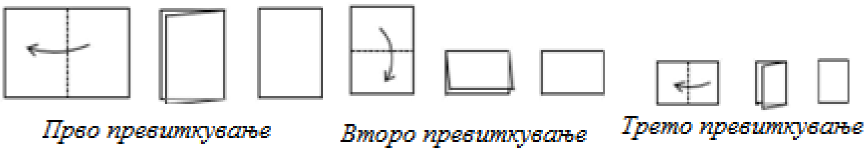
$$0,35a + a + 0,7a + 0,5a + x = x + 0,35a + 0,5a + 68,$$
$$2,55a + x = 0,85a + x + 68$$
$$2,55a = 0,85a + 68$$
$$1,7a = 68$$
$$a = 40\ dm.$$

Значи,

$$b = 0,7a$$
$$b = 0,7 \cdot 40$$
$$b = 28\,dm$$

и плоштината на платното е $40 \cdot 28 = 1120\,dm^2$.

52. Хартија има форма на правоаголник чии страни се долги $480\,mm$ и $360\,mm$. Хартијата е превиткана така што двете страни со помала должина се преклошуваат една со друга (види ги цртежите).



Определи ја плоштината на правоаголникот кој е добиен по петтото превиткување.

Решение. *Прв начин.* По секое превиткување плоштината на правоаголникот се преполовува. Тоа значи дека по петтото превиткување плоштинатата на добиениот правоаголник ќе биде $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ пати помала. Значи, бараната плоштина е

$$480 \cdot 360 : 32 = 172800 : 32 = 5400\,mm^2 = 54\,cm^2.$$

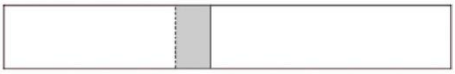
Втор начин. Во табелата се дадени должините на страните на правоаголникот по секое превиткување:

Број на превиткувања	Должини на страни
0	$480\,mm$ и $360\,mm$
1	$240\,mm$ и $360\,mm$
2	$240\,mm$ и $180\,mm$
3	$120\,mm$ и $180\,mm$
4	$120\,mm$ и $90\,mm$
5	$60\,mm$ и $90\,mm$

Според тоа, плоштината на правоаголникот по петтото превиткување ќе биде $60\cdot 90=5400\,mm^2=54\,cm^2$.

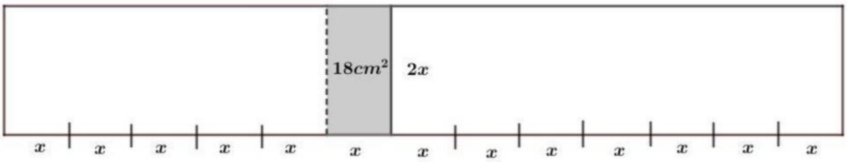
53. Филип од хартија пресекол два правоаголника со различни должини и со еднакви ширини.

Ги залепил така што деловите ќе се преклопуваат и добил нов правоаголник (види го долниот цртеж).



Преклопениот (осенчениот) дел има плоштина $18\,cm^2$, а ширината му е еднаква на ширината на почетните правоаголници. Должината на преклопениот дел е еднаква на шестина од должината на помалиот правоаголник и осмина од должината на поголемиот правоаголник. Колкав е периметарот на новодобиониот правоаголник ако ширината на поголемиот правоаголник е четири пати помала од неговата должина?

Решение. Должината на преклопениот правоаголник да ја означиме со x. Тогаш должината на поголемиот правоаголник е $8x$, а должината на помалиот правоаголник е $6x$. Од условот на задачата следува дека ширината на правоаголниците е $2x$. Понатаму, плоштината на преколшениот дел е $18\,cm^2$, па затоа

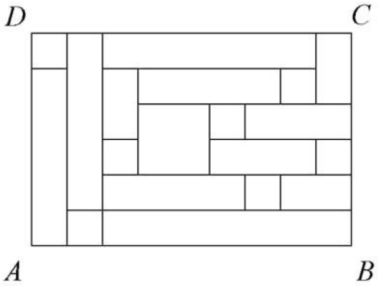


$$x \cdot 2x = 18,$$
$$x \cdot x = 9$$
$$x = 3\,cm.$$

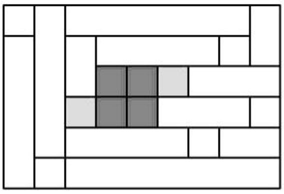
Конечно, должината на поголемата страна на новиот правоаголник е $8x + 6x - x = 13x$, па затоа неговиот периметар е

$$O = 2 \cdot 13x + 2 \cdot 2x = 30x = 30 \cdot 3 = 90\,cm.$$

54. Прваоаголникот $ABCD$ на цртежот десно е поделен на правоаголници, и сите најмали квадрати се складни. Плоштината на правоаголникот $ABCD$ е еднаква на $3456\,cm^2$. Определи го збирот на периметрите на сите правоаголници нацртани внатре во правоаголникот $ABCD$, а кои внатре во себе не содржат помали правоаголници.



Решение. Должината на страната на големиот квадрат е два пати поголема од должината на страната на малиот квадрат (цртеж десно). Понатаму, ако големиот квадрат го поделиме на четири помали квадрати, тогаш малите квадрати внатре во правоаголникот $ABCD$ се распоредени во девет колони и шест редови и во секоја колона и во секој ред има по барем еден квадрат (цртеж десно).



Должината на страната на малиот квадрат да ја означиме со a. За плоштината на правоаголникот имаме

$$9a \cdot 6a = 3456,$$
$$54a^2 = 3456,$$
$$a^2 = 64,$$
$$a = 8\,cm.$$

Квадратот е правоаголник со еднакви страни, па затоа во пресметувањата треба да ги земеме и квадратите. Сега, внатре во правоаголникот $ABCD$ се нацртани следниве правоаголници:

- 7 квадрати со должина на страна $8\,cm$ и периметар $7 \cdot 4 \cdot 8 = 224\,cm,$
- 1 квадрат со должина на страна $16\,cm$ и периметар $4 \cdot 16 = 64\,cm,$
- 1 правоаголник со должини на страни $56\,cm$ и $8\,cm$ и периметар

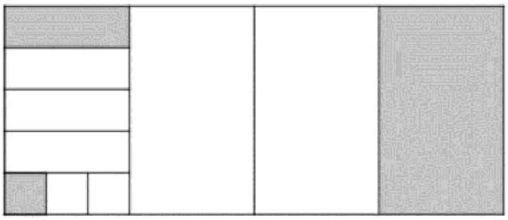
$2\cdot(56+8)=128\,cm$,

- 1 правоаголник со должини на страни $48\,cm$ и $8\,cm$ и периметар $2\cdot(48+8)=112\,cm$,
- 2 правоаголник со должини на страни $40\,cm$ и $8\,cm$ и периметар $2\cdot 2\cdot(40+8)=192\,cm$,
- 2 правоаголник со должини на страни $32\,cm$ и $8\,cm$ и периметар $2\cdot 2\cdot(32+8)=160\,cm$,
- 2 правоаголник со должини на страни $24\,cm$ и $8\,cm$ и периметар $2\cdot 2\cdot(24+8)=128\,cm$,
- 3 правоаголник со должини на страни $16\,cm$ и $8\,cm$ и периметар $3\cdot 2\cdot(16+8)=144\,cm$.

Конечно, збирот на сите периметри на нацртаните правоаголници кои во себе не содржат друг правоаголник е еднаков на

$$224+64+128+112+192+160+128+144=1152\,cm.$$

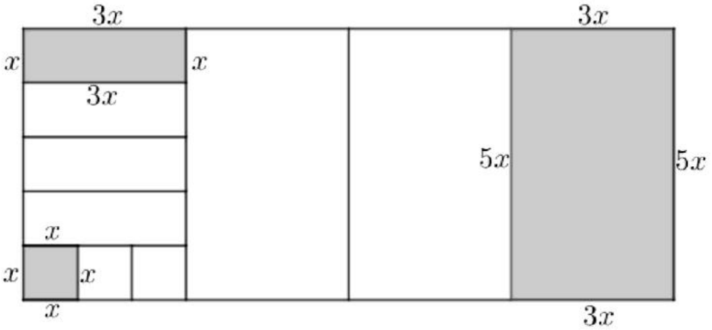
55. Големиот правоаголник на цртежот е поделен на четири складни правоаголници, од кои едниот е обоен. Потоа еден од необоените правоаголници е поделен на пет складни правоаголници, од кои едниот е обоен и на крајот еден од овие пет правоаголници е поделен на три складни правоаголници, од кои едниот е обоен.



Определи ја плоштината на необоениот дел од почетниот правоаголник, ако најмалиот негов обоен дел е квадрат, а збирот на периметрите на трите обоени делови е $19,6\,cm$.

Решение. Со x да ја означиме должината на страната на обоениот квадрат. Тогаш должините на страните на вториот обоен правоаголник се x и $3x$, а должините на првиот обоен правоаголник се $3x$ и $5x$.

Периметрите на обоените правоаголници се $4x$, $2(x+3x)=8x$ и $2(3x+5x)=16x$. Затоа важи $4x+8x+16x=19,6\,cm$, т.е. $28x=19,6\,cm$, од каде наоѓаме $x=0,7\,cm$.



Должините на страните на почетниот правоаголник се $5x = 3,5\,cm$ и $12x = 8,4\,cm$, па затоа неговата плоштина е

$$P = 3,5 \cdot 8,4 = 29,4\,cm^2.$$

Плоштините на обоените делови се

$$P_1 = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49\,cm^2,$$

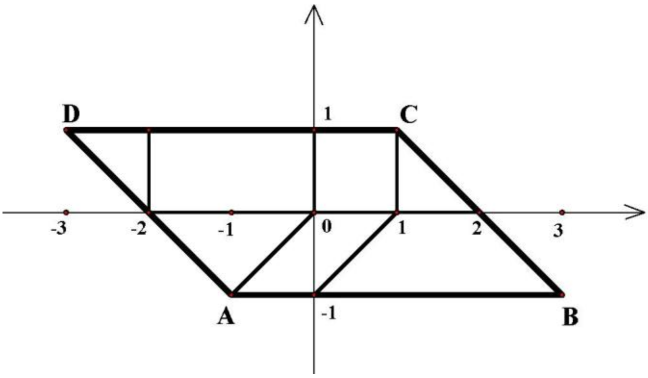
$$P_2 = 2,1 \cdot 0,7 = 1,47\,cm^2$$

$$P_3 = 2,1 \cdot 3,5 = 7,35\,cm^2.$$

Конечно, плоштината на необоениот дел на почетниот правоаголник е

$$P' = P - (P_1 + P_2 + P_3) = 29,4 - (0,49 + 1,47 + 7,35) = 20,09\,cm^2.$$

56. Во координатен систем е нацртан паралелограм $ABCD$, кој е поделен на седум делови: три триаголници, правоаголник, квадрат, паралелограм и трапез (види цртеж).



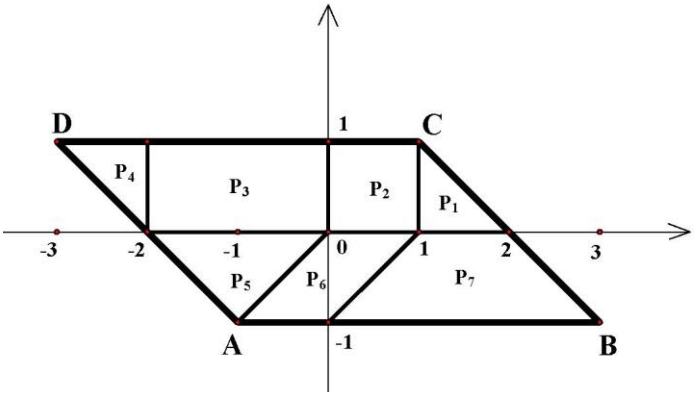
Определи кои делови треба да се обојат за да се обоени 62,5% од паралелограмот $ABCD$, при што се обоени:

а) најмалиот можен број негови делови,

б) најголемиот можен број негови делови.

Решение. Ако со a ја означиме должината на страната AB, а со h

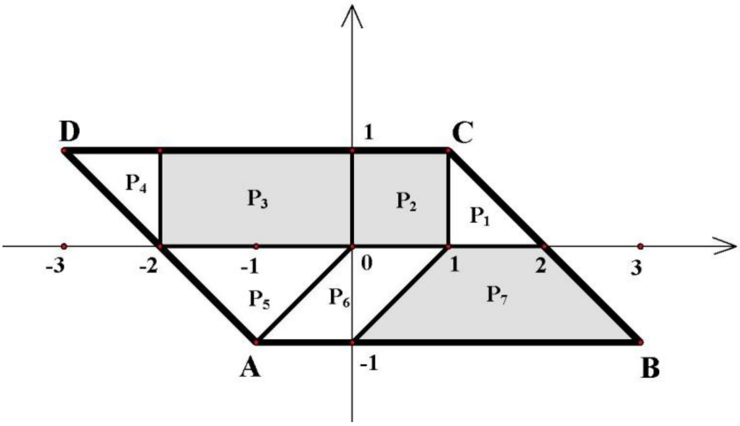
должината на соодветната висина, тогаш $a=4$ и $h=2$. Значи, плоштината на паралелограмот е $P=ah=8$. Бараниот процент 62,5% го претставуваме во вид на дропка. Имаме $62,5\%=\frac{62,5}{100}=\frac{625}{1000}=\frac{5}{8}$. Според тоа, треба да се обои $\frac{5}{8}$ од паралелограмот. При ознаки како на долниот цртеж, за плоштините на деловите на паралелограмот добиваме



$$P_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{16}P,\ P_2=1=\frac{1}{8}P,\ P_3=2=\frac{1}{4}P,$$

$$P_4=\frac{1}{2}=\frac{1}{16}P,\ P_5=1=\frac{1}{8}P,\ P_6=1=\frac{1}{8}P,\ P_7=2=\frac{1}{4}P.$$

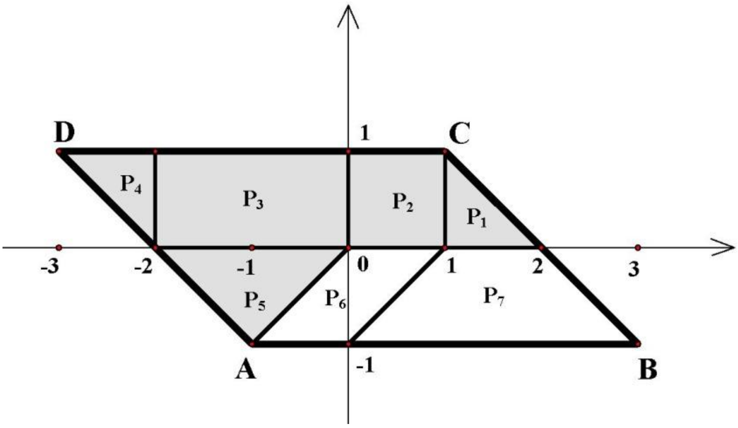
а) Имаме $\frac{5}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, па затоа треба да се обојат двете фигури со плоштини P_3 и P_7, па уште една фигура со плоoштина P_2, P_5 или P_6. Во овој случај боењето може да се направи на три начини: $P_3P_7P_2$, $P_3P_7P_5$ или $P_3P_7P_6$. На долниот цртеж е прикажан првиот начин на боење.



б) Од $\frac{5}{8}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$ следува дека треба да ги обоиме двете фигури P_1 и P_4. Две од трите фигури со плоштини P_2, P_5 или P_6, па една фигура со плоштина P_3 или P_7. Во овој случај имаме шест можности за боење и тоа:

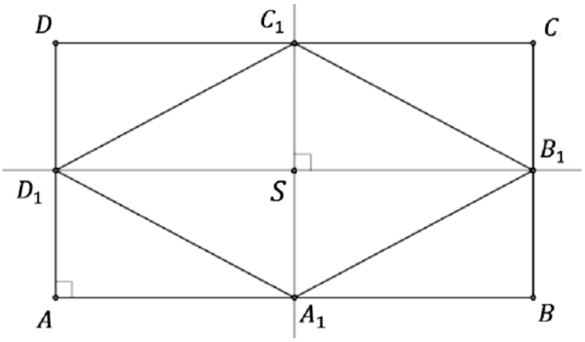
$$P_1P_4P_2P_5P_3,\, P_1P_4P_2P_5P_7,\, P_1P_4P_2P_6P_3,$$
$$P_1P_4P_2P_6P_7,\, P_1P_4P_5P_6P_3,\, P_1P_4P_5P_6P_7.$$

На долниот цртеж е прикажан првиот начен на боење.

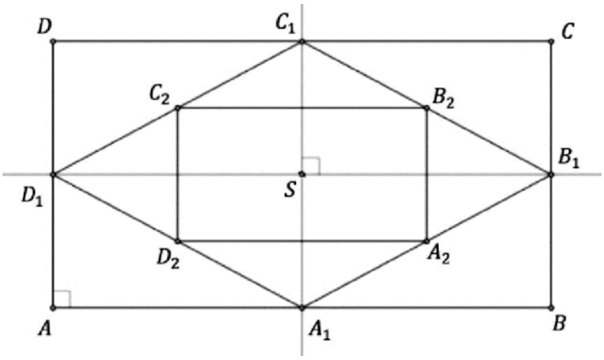


57. На страните на правоаголникот $ABCD$ се означени средините A_1 на AB, B_1 на BC, C_1 на CD и D_1 на DA. Потоа на страните на четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ на истиот начин се означен средините на страните A_2, B_2, C_2, D_2 кои се темиња на четириаголникот $A_2B_2C_2D_2$. Постапката продолжува така што на секој така добиен четириаголник се означуваат средините на страните и тие точки се темиња на нов четириаголник. Докажи дека четириаголникот $A_7B_7C_7D_7$ е ромб. Определи ја плоштината на четириаголникот $A_7B_7C_7D_7$, ако збирот на плоштините на четириаголниците $A_4B_4C_4D_4$, $A_5B_5C_5D_5$ и A_6B_6 C_6D_6 е еднаков на 189.

Решение. Правоаголникот $ABCD$ е основиметрична фигура во однос на симетралите на своите страни, па затоа четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ определен со средините на неговите страни има заемно нормални дијагонали кои се половат, што значи дека четириаголникот $A_1B_1C_1D_1$ е ромб.



Ќе докажеме дека четириаголникот $A_2B_2C_2D_2$ е правоаголник.



Во триаголникот $A_1B_1D_1$ отсечката A_2D_2 е средна линија, па затоа отсечката A_2D_2 е паралелна и еднаква на половина на страната B_1D_1. На ист начин од $A_1B_1C_1$ следува дека отсечката A_2B_2 е паралелна и еднаква на половина на страната A_1C_1. Заради симетријата на ромбот истите заклучоци важат и за другите две страни на четириаголникот $A_2B_2C_2D_2$. Значи, соседните страни на четириаголникот се паралелни со дијагоналите на ромбот $A_1B_1C_1D_1$, што значи дека тиое се заемно нормални, т.е. четириаголникот $A_2B_2C_2D_2$ е правоаголник.

Продолжувајќи ја постапката добиваме дека четириаголниците $A_1B_1C_1D_1, A_3B_3C_3D_3, A_5B_5C_5D_5,...$ се ромбови, а четириаголниците $A_2B_2C_2D_2, A_4B_4C_4D_4, A_6B_6C_6D_6,...$ се правоаголници. Според тоа, четириаголникот $A_7B_7C_7D_7$ е ромб.

Нека P е плоштината на правоаголникот $ABCD$, а $P_1, P_2, P_3,...$ се редоследно плоштините на четириаголниците $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3,...$. Лесно се докажува дека

$$P_1 = \tfrac{1}{2}P, P_2 = \tfrac{1}{2}P_1, P_3 = \tfrac{1}{2}P_2, ..., P_k = \tfrac{1}{2}P_{k-1}, ...$$

Од условот на задачата следува

$$P_4+P_5+P_6=189,$$

па бидејќи $P_4=\frac{1}{2}P_3=\frac{1}{16}P, P_5=\frac{1}{2}P_4=\frac{1}{32}P, P_6=\frac{1}{2}P_5=\frac{1}{64}P$, добиваме

$$\frac{1}{16}P+\frac{1}{32}P+\frac{1}{64}P=196,$$

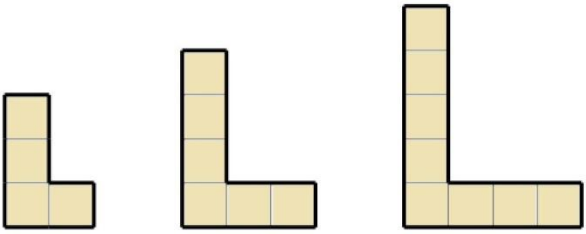
$$\frac{7}{64}P=196,$$

$$P=1728.$$

Конечно,

$$P_7=\frac{1}{2}P_6=\frac{1}{128}P=\frac{1}{128}\cdot 1728=13,5.$$

58. Дадена е низа фигури во вид на буквата L кои се составени од складни квадрати. Првите три члена на низата се дадени на долните цртежи.



Определи ја плоштината на 2021-та фигура во низата ако нејзиниот периметар е еднаков на $40450\,cm$.

Решение. *Прв начин.* Нека a е должината на квадратот. Тогаш периметарот на првиот член на низата фигури е $O_1=10a$, а периметарот на секој следен член се добива со додавање на 4 отсечки со должина a, т.е. $O_2=O_1+4a$, $O_3=O_2+4a=O_1+2\cdot 4a$ итн. Затоа $O_n=O_1+4a(n-1)$, за $n\geq 2$. Според тоа,

$$O_{2021}=O_1+4a\cdot(2021-1)=10a+8080a=8090a,$$

од каде добиваме $8090a=40450$, односно $a=5\,cm$.

Понатаму, ако со n_k го означиме бројот на квадратите во $k-$тата фигура, тогаш $n_1=2\cdot 2$, $n_2=3\cdot 2$, $n_3=4\cdot 2$ итн., што значи дека $n_k=2(k+1)$. Затоа $n_{2021}=2\cdot 2022=4044$. Но, еден квадрат има плоштина $P=a\cdot a=25\,cm^2$, па затоа плоштината на 2021-та фигура е еднаква на $4044\cdot 25=101100\,cm^2$.

Втор начин. Нека a е должината на квадратот. Плоштините и периметрите на фигурите во низата се прикажани во следната табела.

$n-$та фигура	Број квадрати во фугурата	Плоштина на фигурата	Периметар на фигурата
1	$2\cdot 2$	$2\cdot 2a^2$	$5\cdot 2a$
2	$2\cdot 3$	$2\cdot 3a^2$	$7\cdot 2a$
3	$2\cdot 4$	$2\cdot 4a^2$	$9\cdot 2a$
...	...	...	...
k	$2(k+1)$	$2(k+1)a^2$	$(2k+3)\cdot 2a$

Значи, периметарот на 2021-та фигура е

$$O_{2021}=(2\cdot 2021+3)\cdot 2a=4045\cdot 2a=8090a,$$

каде добиваме $8090a=40450$, односно $a=5cm$. Конечно, плоштината на 2021-та фигура е

$$P_{2021}=2(2021+1)a^2=4044a^2=101100\,cm^2.$$

59. Колку коцки со раб $4cm$ треба да се стават една над друга за да се добие квадар со плоштина $352\,cm^2$?

Решение. Бројот на коцките кои треба да ги ставиме да го означиме со n. Тогаш плоштината на квадарот е еднаква на

$$2\cdot 4\cdot 4+4n\cdot 4\cdot 4=32+64n.$$

Според тоа, $32+64n=352$, од каде наоѓаме $n=5$.

60. Со спојување на два еднакви квадари е добиена коцка со плоштина $384\,cm^2$. Определи ја плоштината на квадарот.

Решение. Нека работ на коцката е a. Тогаш $6\cdot a\cdot a=384$, па затоа $a\cdot a=64$, од каде добиваме $a=8cm$. Според тоа, должините на рабовите на квадарот се $a=8cm, a=8cm$ и $c=4cm$, па затоа неговата плоштина е

$$P=2(a\cdot a+a\cdot c+a\cdot c)=2(8\cdot 8+8\cdot 4+8\cdot 4)=256\,cm^2.$$

61. Филип има седум коцки од пластелин. Волуменот на најголемата коцка е $64\,cm^3$. Две коцки имаат должини на рабови $1cm$ пократки од работ на најголемата коцка, а преостанатите коцки имаат должини на

рабови $2cm$ пократки од должината на работ на најголемата коцка. Филип го згмечил пластелинот од сите 7 коцки и формирал квадар. На колку различни начиниможе Филип да формира квадат чии должини на страни изразени во сантиметри се природни броеви?

Решение. Од $64=4\cdot4\cdot4$ заклучуваме дека должината на работ на најголемата коцка е $4cm$. Според тоа, должината на работ на двете средни коцки е $3cm$, а должината на работ на четирите мали коцки е $2cm$. Волуменот на сите седум коцки е

$$64+2\cdot3\cdot3\cdot3+4\cdot2\cdot2\cdot2=150\,cm^3.$$

Волуменот на квадар со должини на страни a,b,c е $V=abc$, па затоа $abc=150=2\cdot3\cdot5\cdot5\,cm^3$. Сите комбинации на должините на рабовите на квадарите кои може да ги направи Филип се дадени во следната табела:

a	1	1	1	1	1	1	2	2	3	5
b	1	2	3	5	6	10	3	5	5	5
c	150	75	50	30	25	15	25	15	10	6

Значи, Филип може да направи 10 квадари.

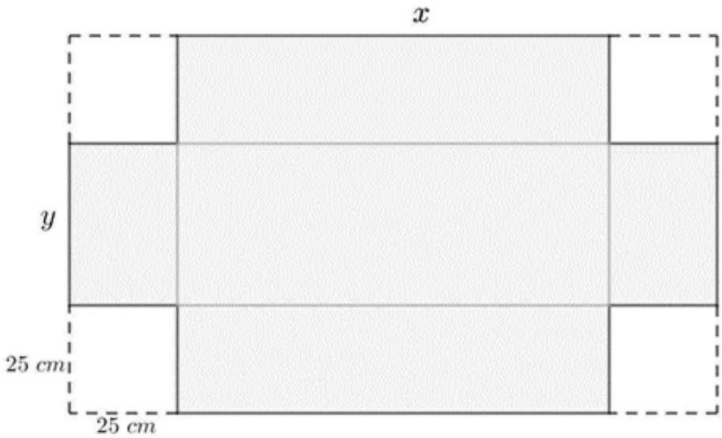
62. Должините на страните на картон со правоаголен облик, изразени во дециметри, се природни броеви. Од секое негово теме е исечен квадрат со должина на страна $25cm$. Преостанатиот дел од картонот е употребен за правење кутија без капак чиј волумен е $112{,}5\,dm^3$. Определи ги должините на страните на почетниот правоаголник.

Решение. Нека a и b се должините на страните на почетниот правоаголник, а x и y се соодветно должините на овие страни намалени за $50cm$. Нека $x>y$, т.е. $a>b$.

При составување на кутијата (квадарот) еден раб ќе биде еднаков на $25cm=2{,}5dm$, а должините на другите два раба ќе бидат x и y. За влуменот на квадарот има е $2{,}5xy=112{,}5$, од каде добиваме $xy=45$.

Можни решенија за должините на рабовите на кутијата се

$x\,(dm)$	1	3	5	9	15	45
$y\,(dm)$	45	15	9	5	3	1



Условот $x > y$, односно $a > b$ го задоволуваат решенијата (9,5), (15,3) и (45,1). Должините на страните на почетниот картон се за $5\,dm$ поголеми, па имаме

$a\,(dm)$	14	20	50
$b\,(dm)$	10	8	6

V. МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

1. Дадени се множествата

$$A=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n<2021 \text{ и } 7\,|\,n\},\ B=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n<2021 \text{ и } 21\,|\,n\},$$
$$C=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n<2021 \text{ и } 84\,|\,n\}.$$

Определи го бројот на елементите на множеството $A\setminus(B\setminus C)$.

Решение. Множеството $A=\{7,14,21,...,2016\}$ има 288 елементи. Множеството $B=\{21,42,63,...,2016\}$ има 96 елементи, а множеството $C=\{84,168,252,...,2016\}$ има 24 елементи. Имаме $C\subset B\subset A$, па затоа множеството $B\setminus C$ има $96-24=72$ елементи, а множеството $A\setminus(B\setminus C)$ има $288-72=216$ елементи.

2. Дадени се множествата $A=\{-3,-2,1,3,5\}$ и $B=\{-1,0,1,2\}$. Спореди ги броевите на елементите на множествата

$$C=\{c\,|\,c=|a|+|b|, a\in A, b\in B\} \text{ и } D=\{d\,|\,d=|a+b|, a\in A, b\in B\}.$$

Решение. Имаме

$$\{a+b\vdots\, a\in A, b\in B\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\},$$

па затоа $D=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$. Понатаму,

$$\{|a|\vdots\, a\in A\}=\{1,2,3,5\} \text{ и } \{|b|\vdots\, b\in B\}=\{0,1,2\},$$

па затоа $C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Значи, множеството D има еден елемент повеќе од множеството C.

3. Определи ги елементите на множествата A,B и C ако:

$$A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\},\ A\cap B=\{5,6,7\},$$
$$A\setminus C=\{1,2,6,7\},\ B\setminus(A\cup C)=\{8,9\},\ B\cap C=\{3,5\}.$$

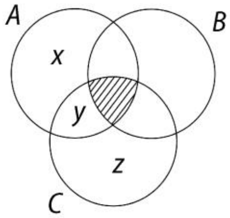
Решение. Од $A\setminus C=\{1,2,6,7\}$ и $B\setminus(A\cup C)=\{8,9\}$ следува дека броевите 1, 2, 6, 7, 8 и 9 не се елементи на C. Понатаму, од $B\cap C=\{3,5\}$ следува дека $3,5\in C$. Сега, од $B\setminus(A\cup C)=\{8,9\}$, $B\cap C=\{3,5\}$ и $A\cap B=\{5,6,7\}$ следува дека $3,5,6,7,8,9\in B$, а од $A\cap B=\{5,6,7\}$, $A\setminus C=\{1,2,6,7\}$ следува $1,2,5,6,7\in A$. Понатаму, бидејќи $3,9\in B$, од

$A\cap B=\{5,6,7\}$ следува $3,9\notin A$, а од $B\setminus(A\cup C)=\{8,9\}$ следува $8\notin A$. Сега, ако $4\notin A$, тогаш $A=\{1,2,5,6,7\}$, а од $B\cap C=\{3,5\}$ следува дека 4 припаѓа на едно од множествата B и C, па $B\setminus(A\cup C)=\{8,9\}$ добиваме дека $4\notin B$ и $4\in C$. Конечно, во овој случај го добиваме решението $A=\{1,2,5,6,7\}$, $B=\{3,5,6,7,8,9\}$ и $C=\{3,4,5\}$.

Ако $4\in A$, тогаш $A=\{1,2,4,5,6,7\}$, па од $A\cap B=\{5,6,7\}$ следува $4\notin B$ и од $A\setminus C=\{1,2,6,7\}$ следува $4\in C$. Така се добива уште едно решение $A=\{1,2,4,5,6,7\}$, $B=\{3,5,6,7,8,9\}$ и $C=\{3,4,5\}$.

4. Дадени се множествата A,B и C такви што $A\cap B\cap C=\emptyset$. Ако множеството $A\setminus B$ има 7 елементи, множеството $C\setminus B$ има 8 елементи, множеството $A\cap C$ има 2 елементи и множеството $A\cup B\cup C$ има 20 елементи, колку елементи има множеството B?

Решение. Да означиме како на цртежот десно. Бидејќи $A\cap B\cap C=\emptyset$, заклучуваме дека:



- $y=2$, бидејќи множеството $A\cap C$ има 2 елементи,
- $x+y=7$, бидејќи множеството $A\setminus B$ има 7 елементи, па затоа $x=5$,
- $y+z=8$, бидејќи множеството $C\setminus B$ има 8 елементи, па затоа $z=6$.

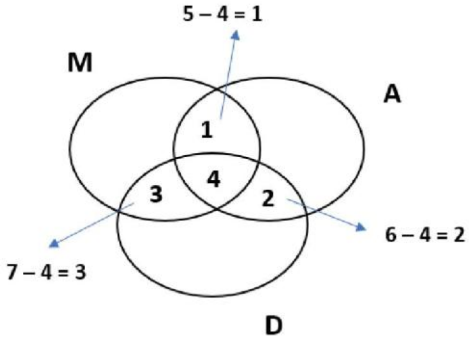
Бидејќи $A\cup B\cup C$ има 20 елементи, множеството B ќе има

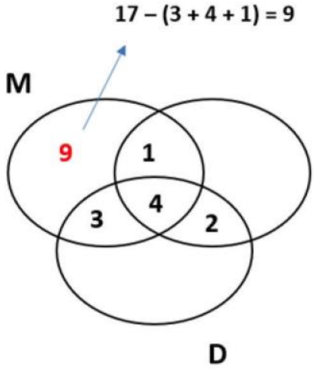
$$20-(x+y+z)=20-13=7$$

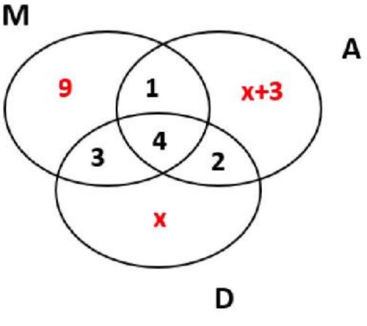
елементи.

5. Маја, Ана и Дорка заедно тренираат ракомет и одлучиле заедно да организираат забава. Се договориле дека вкупниот број гости ќе биде 40. Маја поканила 17 пријатели, а бројот на гостите кои ги поканила само Ана е за 3 поголем од бројот на гостите кои ги поканила само Дорка. Бидејќи тие имаат и заеднички пријатели се случило сите три да поканат 4 заеднички пријатели, Маја и Ана поканиле 5 заеднички пријатели, Ана и Дорка поканиле 6, а Маја и Дорка поканиле 7 заеднички пријатели. Колку гости поканила Ана, а колку Дорка?

Решение. Нека x е бројот на гостите кои ги поканила само Дорка. Задачата ќе ја решиме со помош на Венов дијаграм. Од дадените услови последователно ги конструираме дијаграмите прикажани на долните цртежи:







Бидејќи вкупниот број гости бил 40, добиваме

$$9+x+x+3+3+1+2+4=40,$$

од каде наоѓаме $2x+22=40$, т.е. $x=9$. Значи, Дорка поканила $9+3+4+2=18$ гости и Ана поканила $12+1+4+2=19$ гости.

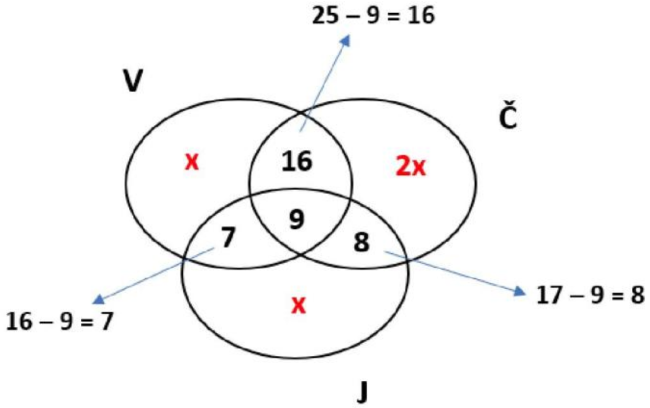
6. Во едно училиште има 97 ученици во петто одделение. Направиле анкета за тоа кој вкус сладолед најмногу сакаат и ги добиле следниве одговори:

- 25 ученици сакаат сладолед од чоколадо и ванила,
- 26 ученици сакаат сладолед од ванила и јагода,
- 17 ученици сакаат сладолед од чоколадо и јагода,
- 9 ученици ги сакаат сите три вкусови сладолед,
- 5 ученици не сакаат сладолед.

Колку ученици сакаат само сладолед од ванила, ако нивниот број е еднаков на бројот на учениците кои сакаат само сладолед од јагода и е двојно помал од бројот на учениците кои сакаат само сладолед од чоколадо?

Решение. Задачата ќе ја решиме со Венов дијаграм. Бидејќи 5 ученици не сакаат сладолед, бројот на учениците кој треба да го распределиме во множествата е $97-5=92$.

Од условите на задачата лесно се добива следниов Венов дијаграм.



Сега од дијаграмот последователно добиваме:

$$x+x+2x+16+7+8+9=92,$$
$$4x+40=92,$$
$$4x=52,$$
$$x=13.$$

Значи, бројот на учениците кои сакаат само сладолед од ванила е 13.

7. На учениците во VI^a им е поставено прашање кој спорт го сакаат. Добиени се следниве одговори: 18 ученици сакаат кошарка, 14 ученици фудбал, 10 ученици ракомет, 5 ученици фудбал и ракомет, 7 ученици кошарка и ракомет, 10 ученици фудбал и кошарка и 4 ученици ги сакаат сите три спорта. Колку ученици има во ова одделение ако секоја ученик сака барем еден спорт.

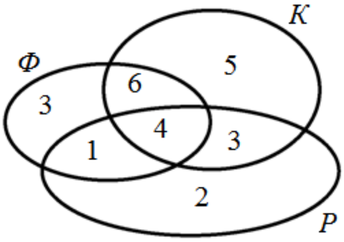
Решение. *Прв начин*. Сите три спорта ги сакаат 4 ученици. Бидејќи 10 ученици сакаат фудбал и кошарка, добиваме дека само фудбал и кошарка сакаат уште $10-4=6$ ученици. Бидејќи 7 ученици сакаат кошарка и ракомет, добиваме дека само кошарка и ракомет сакаат уште $7-3=4$ ученици. Бидејќи 5 ученици сакаат фудбал и ракомет, добиваме дека само фудбал и ракомет сака уште $5-4=1$ ученик.

До сега фудбал сакаат $4+6+1=11$ ученици, па затоа само фудбал сакаат $14-11=3$ ученици. До сега кошарка сакаат $4+6+3=13$ ученици, па затоа само кошарка сакаат $18-13=5$ ученици. До сега ракомет сакаат $4+3+1=8$ ученици, па затоа само ракомет сакаат $10-8=2$ ученика. Конечно, во ова одделение има

$$4+6+3+1+3+5+2=24 \text{ ученици.}$$

Втор начин. Задачата може да ја решиме со користење на Венов дијаграм. Ако ги искористиме размислувањата од првиот начин го добиваме следниот Венов дијаграм. Според тоа, во VI^a одделение има

$$4+6+3+1+3+5+2=24 \text{ ученици.}$$



8. Колку има природни броеви кои се помали или еднакви на 2019, а кои не се деливи со ниту еден од броевите 6, 9 и 15?

Решение. *Прв начин.* Од $2019=6\cdot 336+3$ следува дека броеви кои се деливи со 6 и се помали или еднакви на 2019 има 336. Од $2019=9\cdot 224+3$ следува дека броеви кои се деливи со 9 и се помали или еднакви на 2019 има 224. Од $2019=15\cdot 134+9$ следува дека броеви кои се деливи со 15 и се помали или еднакви на 2019 има 134.

Ако собереме колку има содржатели на 6, 9 и 15, тогаш некои од нив ги броиме повеќе пати. Имамено, броевите кои се деливи со 6 и со 9, т.е. броевите коисе деливи со $NZS(6,9)=18$ ги броевиме два пати. Слично, броевите кои се деливи со 6 и 15, т.е. броевите кои се деливи со $NZS(6,15)=30$ и броевите кои се деливи со 9 и 15, т.е. броевите кои се деливи со $NZS(9,15)=45$ ги броевме два пати. Понатаму, броевите кои се деливи со $NZS(6,9,15)=90$ ги броевме три пати.

Од $2019=18\cdot 112+3$ следува дека броеви кои се деливи со 18 и се помали или еднакви на 2019 има 112. Од $2019=30\cdot 67+9$ следува дека броеви кои се деливи со 30 и се помали или еднакви на 2019 има 67. Од $2019=45\cdot 44+39$ следува дека броеви кои се деливи со 45 и се помали или еднакви на 2019 има 44. Од $2019=90\cdot 22+39$ следува дека броеви кои се деливи со 90 и се помали или еднакви на 2019 има 22.

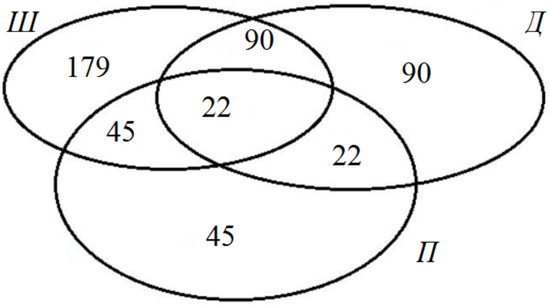
Според тоа, природни броеви кои се помали или еднакви на 2019 и се деливи со 6, 9 и 15 има:

$$336+224+134-(112+67+44)+22=493.$$

Конечно, природни броеви кои се помали или еднакви на 2019 и не се деливи со 6, 9 и 15 има $2019-493=1526$.

Втор начин. Како и во првиот начин определуваме дека броеви кои се деливи со 6, 9 и 15 се 22, броеви кои се деливи со 6 и 9 се 112, броеви кои се деливи со 6 и 15 се 67, броеви кои се деливи со 9 и 15 се 44, броеви кои се деливи со 6 се 336, броеви кои се деливи со 9 се 224 и броеви кои се деливи со 15 се 134.

Сега добиените податоци ги внесуваме во Венов дијаграм и добиваме



Според тоа, природни броеви кои се помали или еднакви на 2019 и се деливи со 6, 9 и 15 има:

$$179+90+90+45+22+22+45=493.$$

Конечно, природни броеви кои се помали или еднакви на 2019 и не се деливи со 6, 9 и 15 има $2019-493=1526$.

9. Колку има цели броеви кои по апсолутна вредност се помали од 2022 и не се деливи со 3, 5 или 7?

Решение. Бројот на бараните броеви е двапати поголем од бројот на природните броеви со истото својство.

Понатаму, бројот на природните броеви кои се помали од 2022 е еднаков на 2021. Ќе определиме колку има природни броевикои се помали од 2022, а кои не се деливи со 3, 5 или 7.

Броевите кои се деливи со 3, 5 и 7 се содржатели на $3\cdot 5\cdot 7=105$. Имаме $2021=105\cdot 19+26$, па затоа има 19 природни броеви кои се помали од 2021 и се делив со 105.

Броевите кои се деливи со 5 и 7 се содржатели на $5\cdot 7=35$. Имаме $2021=35\cdot 57+26$, па затоа има 57 природни броеви кои се помали од 2021 и се делив со 35.

Броевите кои се деливи со 3 и 7 се содржатели на $3\cdot 7=21$. Имаме $2021=21\cdot 96+5$, па затоа има 96 природни броеви кои се помали од 2021 и се делив со 21.

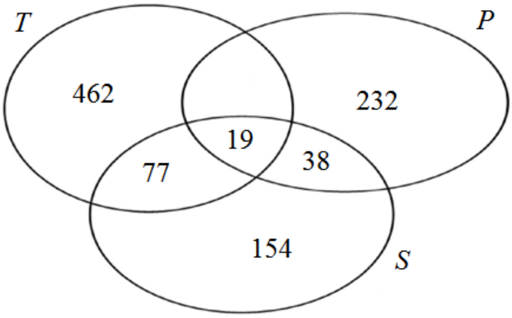
Броевите кои се деливи со 3 и 5 се содржатели на $3\cdot 5=15$. Имаме $2021=15\cdot 134+11$, па затоа има 134 природни броеви кои се помали од 2021 и се делив со 15.

Бидејќи $2021=3\cdot 673+2$ имаме 673 броја кои се помали од 2021 и се деливи со 3.

Бидејќи $2021=5\cdot 404+1$ имаме 404 броја кои се помали од 2021 и се деливи со 5.

Бидејќи $2021=7\cdot 288+5$ имаме 288 броја кои се помали од 2021 и се деливи со 7.

Сега, ако со T,P,S ги означиме множествата броеви кои се помали од 2021 и се делви со 3, 5 и 7 соодветно, го добиваме Веновиот дијаграм прикажан на долниот цртеж.



Според тоа, природни броеви кои се деливи со 3, 5 или 7 и се помали од 2022 има

$$462+232+154+19+77+38+115=1097,$$

па затоа природни броеви кои не се деливи 3, 5 или 7 има

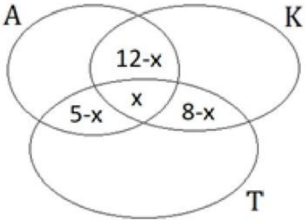
$$20-21-1097=924.$$

Конечно, цели броеви кои по апсолутна вредност се помали од 2022 и кои не се деливи со 3, 5 или 7 има $2\cdot 924=1848$.

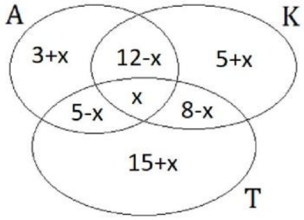
10. Три пријателки Ана, Калина и Темјана цртале знамиња на држави кои сакаат да ги посетат. Ана нацртала 20, Калина 25, а Темјана 28 знамиња. Бројот на знамињата кои ги нацртале и Калина и Ана е еднаков на

три петтини од бројот на знамињата кои ги нацртала Ана. Бројот на знамињата кои ги нацртале и Темјана и Ана е еднаков на четвртина од бројот на знамињата кои ги нацртала Ана. Бројот на знамињата кои ги нацртале и Калина и Темјана е еднаков на две седмини од бројот на знамињата кои ги нацртала Темјана. Бројот на знамињата кои ги нацртале сите три е седумнаесет пати помал од вкупниот број нацртани знамиња. Колку вкупно разлини знамиња нацртале Ана, Калина и Темјана?

Решение. Бидејќи $\frac{3}{5}\cdot 20=12$, Калина и Ана нацртале 12 исти знамиња. Понатаму, $\frac{1}{4}\cdot 20=5$, што значи дека Темјана и Ана нацртале 5 исти знамиња. Од $\frac{2}{7}\cdot 20=8$ добиваме дека Калина и Темјана нацртале 8 исти знамиња.



Нека x е бројот на знамињат кои ги нацртале сите три, а z е вкупниот број знамиња кои се нацртани. Тогаш $z=17x$ и ако добиените податоци за знамињата кои ги нацртале барем две девојчиња ги внесеме во Венов дијаграм, го добиваме дијаграмот прикажан на цртежот десно.



Понатаму, бројот на знамиња кои ги нацртала само Ана е $3+x$, бројот на знамињата кои ги нацртала само Калина е $5+x$ и бројот на знамињата кои ги нацртала само Темјана е $15+x$. Ако овие податоци ги внесеме во Веновиот дијаграм, го добиваме дијаграмот прикажан на цртежот десно. Според тоа,

$$17x=3+x+12-x+5+x+5-x+x+8-x+15+x,$$
$$17x=48+x,$$
$$16x=48,$$
$$x=3$$

Конечно, Ана, Калина и Темјана нацртале $z=17\cdot 3=51$ различни знамиња.

11. Колку има триелементни подмножества на множеството

$$A=\{\frac{1}{11},\frac{2}{11},\frac{3}{11},\frac{4}{11},\frac{5}{11},\frac{6}{11},\frac{7}{11},\frac{8}{11},\frac{9}{11},\frac{10}{11}\}$$

во кои збирот на најмалиот и најголемиот елемент е 1.

Решение. Прво ќе ги определиме паровите дропки (најмала и најголема) чиј збир е 1. Имаме: $(\frac{1}{11},\frac{10}{11}),(\frac{2}{11},\frac{9}{11}),(\frac{3}{11},\frac{8}{11}),(\frac{4}{11},\frac{7}{11}),(\frac{5}{11},\frac{6}{11})$. Во подмножество со првиот пар може да бидат 8 дропки, со вториот пар 6 дропки, со третиот пар 4 дропки, со четвртиот пар 2 дропки. а со петтиот пар ниту една дропка. Според тоа, бараниот број подмножества е $8+6+4+2=20$.

12. Еден песочен часовник мери 10 минути (претурање на песокот од еден во друг дел трае 10 минути), а друг песочен часовник мери 7 минути. Како со користење на овие два часовника ќе се измерат 23 минути?

    Решение. Едно решение е следново: Истовремено се ставаат двата часовника, па по 7 минути се запираат (времето за кое истекува песокот во малиот часовни). Во големиот часовник останал песок за 3 минути. Бараното време се мери од моментот кога истекол песокот во малиот часовник, така што за 3 минути прво истекува песокот од големиот часовник, а потоа уште 2 пати се мерат по 10 минути со големиот часовник.

13. а) Дали постојат четири различни природни броеви такви што збирот на секои три од нив е прост број?

    б) Дали постојат пет различни природни броеви такви што збирот на секои три од нив е прост број?

    Решение. а) Постојат. Такви четворки се, на пример, (1,3,7,9), (3,7,9,31), ...

    б) Не постојат. Секој број при делење со 3 дава остаток 0, 1 или 2. Ако меѓу петте броеви има три броја кои при делење со 3 даваат остатоци 0, 1 и 2, тогаш нивниот збир е делив со 3, а ако нема, тогаш од принципот на Дирихле следува дека меѓу нив има три броја кои при делење со 3 даваат ист остаток, па затоа нивниот збир е делив со 3.

14. Во одделението на Горјан има n ученици. Сите ученици собираат албуми со сликички. Секој ученик собрал најмалку еден албум, а најмногу од сите, 8 албуми, собрал Горјан. Определи ја најмалата вредност на n така што со сигурност можеме да тврдиме дека по-

стојат најмалку 5 ученици кои собрале еднаков број албуми.

Решение. Преостаните ученици во одделението на Горјан можеле да соберат најмалку 1, а најмногу 7 албуми. Ако еднаков број албуми собрале по 4 ученици, тогаш во одделението на Горјан може да има најмногу $7\cdot 4+1=29$ ученици. Значи, во одделнието на Горјан мора да има повеќе од 29 ученици. Ако има 30 ученици, тогаш од 1 до 7 албуми собрале $30-1=29$ ученици, па како $7\cdot 4+1=29$ тогаш од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку 5 ученици кои собрале еднаков број албуми. Значи, најмалата можна вредност на n е 30.

15. Во две исти кутии се наоѓаат вкупно 61 топче. Сите топчиња се обоени во една од пет различни бои и не се сите со иста маса. Постојат топчиња со две различни маси – полесни и потешки. Докажи дека постојат најмалку 4 топчиња обоени со иста боја и со еднаква маса кои се во иста кутија.

Решение. Според принципот на Дирихле во една од кутиите има најмалку 31 топче. Бидејќи топчињата се обоени во 5 различни бои, повторно од принципот на Дирихле следува дека меѓу овие топчиња има 7 кои се обоени во иста боја. Понатаму, овие 7 топчиња се појавуваат во две различни маси, па повторно од принципот на Дирихле следува дека има најмалку 4 топчиња кои имаат иста маса.

16. Колку има трицифрен броеви кои се помали од 200 и кои можат да се запишат како производ a^2b, каде a и b се прости броеви?

Решение. Ако $a=2$, тогаш $a^2=4$. За да производот биде трицифрен број b мора да е поголем или еднаков на бројот 25. За да производот биде помал од 200, b мора да е помал од 50. Според тоа, $b\in\{29,31,37,41,43,47\}$.

Ако $a=3$, тогаш $a^2=9$. Според тоа, bмора да е прост број поголем од бројот 11, а помал од бројот 22. Значи, $b\in\{13,17,19\}$.

Ако $a=5$, тогаш $a^2=25$, па затоа $b\in\{5,7\}$.

Ако $a=7$, тогаш $a^2=49$, па затоа $b\in\{3\}$.

За $a\geq 11$ важи $a^2\geq 121$, па затоа $a^2b\geq 242>200$ за секој прост број b.

Конечно, има вкупно $6+3+2+1=12$ трицифрени броеви со саканите својства.

17. Колку има седумцифрени палиндроми чиј производ на цифри е парен број? За еден број велиме дека е палиндром ако се чита исто и од левата и од десната страна. На пример, бројот 2017102 е палиндром.

Решение. Седумцифрените палиндроми се од видот $\overline{abcdcba}$, па затоа нив ги има колку што има различни броеви од видот $\overline{abcd}$, односно 9000. За да пресметаме колку палиндроми има чиј производ на цифри е парен, доволно е од вкупниот број седумцифрени палиндроми да го одземеме бројот на оние палиндроми чиј производ на цифри е непарен. За да производот на цифрите е непарен потребно и доволно е сите цифри да се непарни, а такви палиндроми има $5\cdot5\cdot5\cdot5=625$. Значи, бараниот број палиндроми е $9000-625=8375$.

18. Збирот на првата и последната цифра на петцифрениот природен број запишан со различни цифри е еднаков на производот на преостанатите три цифри. Колку такви броеви постојат?

Решение. Нека $\overline{abcde}$ е петцифрен број запишан со различни цифри $a,b,c,d,e\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Најмалата можна вредност за $a+e$ е 1(цифрите 1 и 0), а најголематае 17 (цифрите 8 и 9). Броевите 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13 и 17 не може да се запишат како производ на три различни броја, па затоа $a+e\in\{6,8,10,12,14,15,16\}$. Да ги разгледаме овие случаи.

1) $a+e=6=1\cdot2\cdot3$. Во овој случај имаме една можност $(a,e)=(6,0)$. Цифрите b,c,d може да се изберат на $3\cdot2\cdot1=6$ начини, па затоа имаме $1\cdot6=6$ броеви од саканиот вид.
2) $a+e=8=1\cdot2\cdot4$. Во овој случај имаме $(a,e)=(8,0),(5,3),(3,5)$. Цифрите b,c,d може да се изберат на $3\cdot2\cdot1=6$ начини, па затоа имаме $3\cdot6=18$ броеви од саканиот вид.
3) $a+e=10=1\cdot2\cdot5$. Во овој случај имаме $(a,e)=(7,3),(3,7),(6,4),$ $(4,6)$. Цифрите b,c,d може да се изберат на $3\cdot2\cdot1=6$ начини, па затоа имаме $4\cdot6=24$ броеви од саканиот вид.
4) $a+e=12=1\cdot2\cdot6$. Во овој случај имаме $(a,e)=(9,3),(3,9),(8,4),$ $(4,8),(7,5),(5,7)$. Цифрите b,c,d може да се изберат на $3\cdot2\cdot1=6$ начини, па затоа имаме $6\cdot6=36$ броеви од саканиот вид.
5) $a+e=12=1\cdot3\cdot4$. Во овој случај имаме $(a,e)=(7,5),(5,7)$. Циф-

рите b,c,d може да се изберат на $3\cdot 2\cdot 1=6$ начини, па затоа имаме $2\cdot 6=12$ броеви од саканиот вид.

6) $a+e=14=1\cdot 2\cdot 7$. Во овој случај имаме $(a,e)=(9,5),(5,9),(8,6),(6,8)$. Цифрите b,c,d може да се изберат на $3\cdot 2\cdot 1=6$ начини, па затоа имаме $4\cdot 6=24$ броеви од саканиот вид.

7) $a+e=15=1\cdot 3\cdot 5$. Во овој случај имаме $(a,e)=(9,6),(6,9),(8,7),(7,8)$. Цифрите b,c,d може да се изберат на $3\cdot 2\cdot 1=6$ начини, па затоа имаме $4\cdot 6=24$ броеви од саканиот вид.

8) $a+e=16=1\cdot 2\cdot 8$. Во овој случај имаме $(a,e)=(9,7),(7,9)$. Цифрите b,c,d може да се изберат на $3\cdot 2\cdot 1=6$ начини, па затоа имаме $2\cdot 6=12$ броеви од саканиот вид.

Конечно, броеви од саканиот вид има

$$6+18+24+36+12+24+24+12=156.$$

19. Колку различни решенија има бројниот ребус (на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри):

$$\begin{array}{r} ABBCB \\ +BCADA \\ \hline DBDDD \end{array}$$

Решение. Бидејќи $A+B=D<10$ и $C+D=D$, заклучуваме дека $C=0$ (не може да е 9 бидејќи не постои преност 1 од местната вредност на единиците). Цифрата D може да прима вредности: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Тогаш A и B може да ги примаат следниве вредности:

D	$A+B$
3	$1+2,2+1$
4	$1+3,3+1$
5	$1+4,2+3,3+2,4+1$
6	$1+5,2+4,4+2,5+1$
7	$1+6,2+5,3+4,4+3,5+2,6+1$
8	$1+7,2+6,3+5,5+3,6+2,7+1$
9	$1+8,2+7,3+6,4+5,5+4,6+3,7+2,8+1$

Според тоа, ребусот има $2+2+4+4+6+6+8=32$ решенија.

20. Определи го бројот на петцифрените броеви чии цифри се различни и:
    а) се деливи со 10,
    б) збирот на првата и последната цифра е 8?

    Решение. а) Цифрта на единиците мора да биде 0. Од цифрите 1, 2, ..., 9 цифрата на местната вредност на десетките може да се избере на 9 начини, по што ни преостануваат осум цифри. Понатаму, цифрата на местната вредност на стотките може да се избере на 8 начини, цифрата на местаната вредност на илјадитите може да се избере на 7 начини и цифрата на местната вредност на десетилјадитите може да се избере наб начини. Значи, постојат $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ петцифрени броеви кои се деливи со 10 и се запишани со различни циифри.

    б) Првата и последната цифра може да се изберат на 7 начини и тоа: 1 и 7; 2 и 6; 3 и 5; 5 и 3; 6 и 2; 7 и 1; 8 и 0, соодветно. За изборот на цифрата на местната вредност на десетките кога се избрани првата и последната цифра имаме 8 можности, по што за избор на цифрата на местната вредност на стотките имаме 7 можности и за избор на цифрата на местната вредност на илјадитите имаме 6 можности. Конечно, бараниот број броеви е $7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2352$.

21. Колку има четирицифрени броеви кај кои и збирот на цифрите и производот на цифрите еднаков на 8? Испиши ги овие броеви! Определи ја разликата на најголемиот и најмалиот од овие броеви!

    Решение. Имаме $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ следува дека производот на цифрите на некој четирицифрен број ќе биде 8 ако и само ако во некој редослед цифрите на тој број се: 2, 2, 2, 1; 4, 2, 1, 1 или 8, 1, 1, 1. Понатаму, од трите можности збирот на цифрите е еднаков на 8 ако цифрите се 4, 2, 1, 1.

    Со комбинирање на редоследот на цифрите се добиваат следниве броеви:

    1124, 1142, 1214, 1241, 1412, 1421, 2114, 2141, 2411, 4112, 4121 и 4211.

    Според тоа има 12 броеви со саканите својства.

    Најголемиот од овие броеви е 4211, а најмалиот е 1124. Нивната разлика е $4211 - 1124 = 3087$.

22. Во една кутија има сини, зелени и црвени топчиња. Познато е дека без гледање треба да се извлечат најмалку 11 топчиња за да сме сигурни дека меѓу нив има топчиња од сите три бои. Понатаму, потребно е да се извлечат најмалку 10 топчиња за да сме сигурни дека

меѓу нив има барем едно зелено топче и дека треба да се извлечат најмалку 8 топчиња за да сме сигурни дека меѓу нив има барем едно црвено топче. По колку топчиња од секоја боја има во кутијата?

Решение. Нека во кутијата имаме s сини, z зелени и c црвени топчиња. Бидејќи меѓу 8 извлечени топчиња има 1 црвено топче, заклучуваме дека $s+z=7$. Слично важи $s+c=9$. Ако треба да се извлечат најмалку 11 топчиња за да сме сигурни дека меѓу нив има топче од секоја боја, тогаш меѓу 10 топчиња нема топче од секоја боја, што значи дека сите 10 топчиња мора да се од две бои. Сега, бидејќи $s+z=7$ и $s+c=9$, заклучуваме дека $c+z=10$. Ги собираме последните три равенства и добиваме $2(s+c+z)=26$, т.е. $s+c+z=13$. Сега лесно се добива дека $s=3, c=6, z=4$.

23. На фудбалски турнир се натпреварувале 7 екипи. Секои две екипи меѓусебно одиграле по еден натревар. Во случај на победа на една од екипите, таа добива 5 бода, а поразената екипа не добива бодови, додека во случај на нерешен резултат секоја од екипите добива по 2 бода. Познато е дека бројот на бодовите кои вкупно ги освоиле сите екипи на турнирот е еднаков на 90 и дека екипата која освоила најмногу бодови, т.е екипата која победила на турнирот освоила 24 бода. Определи го најголемиот број бодови кои можела да ги освои екипата која била второпласирана на турнирот.

Решение. На турнирот се одиграле вкупно $\frac{7\cdot6}{2}=21$ напревар. Нека x е бројот на натпреварите кои завршиле нерешено. Вкупниот број бодови кои биле освоени на турнирот е 90 и затоа

$$4x+5(21-x)=90,$$

од каде добиваме $x=15$. Значи 15 натпревари завршиле нерешено, а $21-15=6$ со победа на една од екипите. Секоја екипа одиграла по 6 натпревари (по еден натпревар со секоја од преостанатите екипи). Екипата која освоила најмногу бодиви има 24 бода и како

$$24=4\cdot5+2\cdot2+0\cdot0,$$

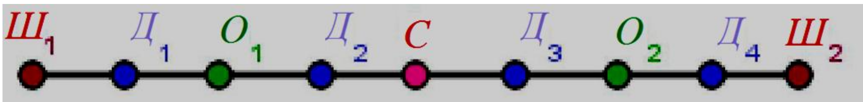
заклучуваме дека таа има 4 победи и 2 нерешени резултати. Тоа значи дека второпласираната екипа можела да има најмногу 2 победи и 4 нерешени резултати, односно $2\cdot5+4\cdot2+0\cdot0=18$ бода. Последното е можно ако втропласираната екипа со правопласираната одиграла нерешено, а од другите пет натпревари 2 победила и 3 одиграла нерешено. Во овој случај сите меѓусебни резултати на другите пет екипи се нерешени.

24. На училишното игралиште во ред, еден до друг, застанале ученици од шесто одделение. Потоа меѓу секои два ученика во редот застанал по еден ученик од седмо одделение. Потоа, меѓу секои два ученика во редот застанал по еден ученик од осмо оддление и на крајот меѓу секои два ученика во редот застанал по еден ученик од деветто одделение. Во тој момент на игралиштето имало 193 ученици. Колку ученици биле од седмо одделение?

Решение. *Прв начин*. Нека имало n ученици од шесто одделение. Меѓу нив може да застане еден ученик помалку, што значи дека имало $n-1$ ученик од седмо одделение. Значи во тој момент имало $n+n-1=2n-1$ ученици и меѓу нив може да застане еден ученик помалку, т.е имало $2n-2$ ученици од осмо одделение. Заедно од шесто до осмо одделение имало $2n-1+2n-2=4n-3$ ученици. Меѓу нив може да застане едне ученик помалку, па затоа имало $4n-4$ ученици од деветто одделение. Конечно, од шесто до деветто одделение имало $4n-+4n-4=8n-7$ ученици, па затоа $8n-7=193$, од каде добиваме $n=25$. Значи, на игралиштето имало 25 ученици од шесто, 24 ученици од седмо, 48 ученици од осмо и 96 ученици од деветто одделение.

Втор начин. Ако во редот има k ученици, тогаш меѓу нив може да се сметат $k-1$ ученик. Бидејќи $193=97+96$, заклучуваме дека пред да се сместат учениците од деветто одделение во редот имало 97 ученици и се сместиле 96 ученици од деветто одделение. Сега, бидејќи $97=49+48$ заклучуваме дека пред да се сместат учениците од осмо одделение во редот имало 49 ученици и се сместиле 48 ученици од осмо одделение. Конечно, бидејќи $49=25+24$ заклучуваме дека пред да се зместат учениците од седмо одделение во редот имало 25 ученици од шесто и се сместиле 24 ученици од седмо одделение.

Трет начин. Ќе нацртаме скица која се однесува на два соседни ученици пд шесто одделение ($Ш_1$ и $Ш_2$).



Според тоа, меѓу секои два ученика од шесто одделение се наоѓа по еден ученик од седмо одделение. Ако една група формираат 8 ученици од $Ш_1$ до $Д_4$, тогаш $8x+1=193$, каде x е бројот на групите прикажани на цртежот. Решение на последната равенка е $x=24$ и како во секоја група имаме по еден ученик од седмо одделение на игралишптето имало 24 ученици од седмо одделение.

25. За балканската средба на млади математичари се пријавиле 8 ученици од Скопје, 7 од Битола, 2 од Прилеп и 3 ученици од Охрид. Треба да се состави петчлена делегација во која ќе има барем по еден ученик од секој од четирите града. На колку начини може да се состави делегацијата.

Решение. Со С да означиме ученик од Скопје, со Б од Битола, со П од Прилеп и со О од Охрид. Според условите на задачата можни се следниве делегации: ССБПО, ББПОС, ППОСБ и ООСБП.

При составувањето на делегацијата ССБПО, двата члена од Скопје се избираат на $\frac{8\cdot7}{2}=28$ начини, еден член од Битола се избира на 7 начини, еден член од Прилеп се избира на 2 начини и еден член од Охрид се избира на 3 начини. Значи ССБПО се избира на $28\cdot7\cdot2\cdot3=1176$ начини.

При составувањето на делегацијата ББПОС, еден член од Скопје се избираат на 8 начини, два члена од Битола се избира на $\frac{7\cdot6}{2}=21$ начин, еден член од Прилеп се избира на 2 начини и еден член од Охрид се избира на 3 начини. Значи ББПОС се избира на $8\cdot21\cdot2\cdot3=1008$ начини.

При составувањето на делегацијата ППОСБ , еден член од Скопје се избираат на 8 начини, еден член од Битола се избира на 7 начин, два члена од Прилеп се избира на 1 начин и еден член од Охрид се избира на 3 начини. Значи ППОСБ се избира на $8\cdot7\cdot1\cdot3=168$ начини.

При составувањето на делегацијата ООСБП, еден член од Скопје се избираат на 8 начини, еден член од Битола се избира на 7 начин, еден член од Прилеп се избира на 2 начин и два члена од Охрид се избираат на $\frac{3\cdot2}{2}=3$ начини. Значи ООСБП се избира на $8\cdot7\cdot2\cdot3=336$ начини.

Конечно, делагијата може да се избере на

$$1176+1008+168+336=2688 \text{ начини.}$$

26. Во магацинот на една книжарница останал поголем број тетратки од 12 различни видови. Одделните цени на една тетратка од секој вид се редоследно: 11, 12, 15, 16, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 29 и 30 денари. На

колку различни начини може да се направи комплет од три тетратки чија вкупна вредност во денари е делива со 5?

Решение. Збирот на три броја е делив со 5 ако и само ако збирот на нивните остатоци при делење со 5 е делив со 5. Затоа ќе формираме множества на следниов начин: $A_i, i=0,1,2,3,4$ е множество броеви (цени во денари) кои при делење со 5 даваат остаток 0, 1, 2, 3, 4 (соодветно). Имаме:

$$A_0=\{15,20,25,30\}, A_1=\{11,16,21,26\}, A_2=\{12,27\}, A_3=\{28\}, A_4=\{29\}$$

а) Цената на секоја од трите тетратки е делива со 5. Постојат 20 можности и тоа:

$$15+15+15,\ 20+20+20,\ 25+25+25,\ 30+30+30,\ 15+15+20,$$
$$15+15+25,\ 15+15+30,\ 20+20+15,\ 20+20+25,\ 20+20+30,$$
$$25+25+15,\ 25+25+20,\ 25+25+30,\ 30+30+15,\ 30+30+20,$$
$$30+30+25,\ 15+20+25,\ 15+20+30,\ 15+25+30,\ 20+25+30.$$

б) Цената на едната тетратка е број делив со 5, цената на втората тетратка е број кој дава остаток 1 при делење со 5 и цената на третата тетратка е број кој дава остаток 4 при делење со 5. Бројот делив со 5 можеме да го избереме на 4 начини, бројот кој дава остаток 1 при делење со 5 исто така на 4 начини и бројот кој дава остаток 4 при делење со 5 на 1 начин. Затоа во овој случај имаме $4\cdot4\cdot1=16$ можности.

15 + 11 + 29, 20 + 11 + 29, 25 + 11 + 29, 30 + 11 + 29,
15 + 16 + 29, 20 + 16 + 29, 25 + 16 + 29, 30 + 16 + 29,
15 + 21 + 29, 20 + 21 + 29, 25 + 21 + 29, 30 + 21 + 29,
15 + 26 + 29, 20 + 26 + 29, 25 + 26 + 29, 30 + 26 + 29.

в) Цената на едната тетратка е број делив со 5, цената на втората тетратка е број кој дава остаток 2 при делење со 5 и цената на третата тетратка е број кој дава остаток 3 при делење со 5. Бројот делив со 5 можеме да го избереме на 4 начини, бројот кој дава остаток 2 при делење со 5 на 2 начини и бројот кој дава остаток 3 при делење со 5 на 1 начин. Затоа во овој случај имаме $4\cdot2\cdot1=8$ можности.

15 + 12 + 28, 20 + 12 + 28, 25 + 12 + 28, 30 + 12 + 28,
15 + 27 + 28, 20 + 27 + 28, 25 + 27 + 28, 30 + 27 + 28.

г) Цената на две тетратки е број кој при делење со 5 дава остаток 1 и цената на третата тетратка е број кој при делење со 5 дава остаток 3. Изборот на двете тетратки од множеството A_1 може да се направи на 10 начини, а додека множеството A_3 има само еден елемент. Значи, имаме 10 можности и тоа:

11 + 11 + 28, 11 + 16 + 28, 11 + 21 + 28, 11 + 26 + 28, 16 + 16 + 28,
16 + 21 + 28, 16 + 26 + 28, 21 + 21 + 28, 21 + 26 + 28, 26 + 26 + 28.

д) Треба да избереме еден број од множеството A_1 и два броја од множеството A_2. Од множеството A_1 еден број може да се избере на 4 начини, а два броја од множеството A_2 може да се изберат на три начини. Значи, во случајов имаме 12 можности и тоа.

11 + 12 + 12, 11 + 12 + 27, 11 + 27 + 27, 16 + 12 + 12,
16 + 12 + 27, 16 + 27 + 27, 21 + 12 + 12, 21 + 12 + 27,
21 + 27 + 27, 26 + 12 + 12, 26 + 12 + 27, 26 + 27 + 27.

ѓ) Еден елемент од множеството A_2 можеме да избереме на 2 начини, а само еден елемент од множеството A_4 на еден начин. Значи, во случајов имаме 2 можности и тоа:

12 + 29 + 29, 27 + 29 + 29 .

е) Бидејќи множествата A_3 и A_4 имаат само по еден елемент, единствена можност е

28 + 28 + 29 .

Конечно, вкупниот број можности на формирање на бараните комплети од три тетратки е:

$$20+16+8+10+12+2+1=69.$$

27. Ангел, Бранко, Цветан, Дамјан, Елена и Фросина треба да се наредат во редица.

а) На колку различни начини децата може да се наредат ако Бранко е лево од Елена?

б) На колку различни начини може да се наредат ако меѓу Цветан и Дамјан не стои ниту едно друго дете?

Решение. а) *Прв начин*. Ако децата ги наредиме без ниту еден услов, тогаш за избор на првото место имаме едно од сите 6 деца, за избор на второто место имаме едно од преостанатите 5 деца итн. Според тоа, вкупно имаме $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$ начини. Да забележиме дека во тие распореди на секој распоред во кој Бранко е лево од Елена му соодветствува точно еден распоред во кој Бранко е десно од Елена и обратно. Имено, Бранко и Елена ги заменуваат местата, а другите деца остануваат на своите места. Затоа бараниот број распореди е $720:2=360$.

Втор начин. Ако Бранко е лево од Елена, треба да ги разгледаме следниве поволнис можности.

1) Бранко е од лево прв во редот. Преостанатите деца можеме произволно да ги распоредиме на $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ начини.
2) Бранко е од лево втор во редот. Тогаш за првото дете имаме 4 можности (сите деца без Елена), а преостанатите 4 можеме да ги распоредиме на $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ начини. Тоа се вкупно $4\cdot24=96$ начини.
3) Бранко е трет од лево. Тогаш првото место може да се пополни на 4 начин (без Елена), второто место на 3 начини (без Елена), а десните три места на $3\cdot2\cdot1=6$ начини. Тоа се вкупно $4\cdot3\cdot6=72$ начини.
4) Бранко е четврт од лево. Тогаш првото место може да се пополни на 4 начини (без Елена), второто на 3 начини (без Елена), третото на 2 начини (без Елена), а преостанатите две места на $2\cdot1=2$ начини. Тоа се вкупно $4\cdot3\cdot2\cdot2=48$ начини.
5) Бранко е петти од лево. Тогаш, аналогно како погоре без Елена првите четири места може да се пополнат на $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ начини, а последното место е Елена, т.е. на 1 начин. Значи, во овој случај имаме 24 начини.

Конечно, вкупно имаме $120+96+72+48+24=360$ начини.

б) Според првите букви на нивните имиња со A, B, C, D, E, F да ги означиме децата. Децата Цветан и Дамјан ќе ги разгледуваме како блок кој нема да се дели. Притоа имаме две можности CD и DC. Затоа за разместување имаме два пати по 5 неделиви целини: децата A, B, E, F и блокот CD и децата A, B, E, F и блокот DC. Во секој од двата случаи имаме по $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$ начини на распоредување, па затоа вкупно имаме $2\cdot120=240$ распоредувања.

28. На колку начини Ивана, Ана и Теодора можат да поделат 6 моливи така што секое од нив добива барем еден молив?

Решение. Секој од шесте моливи можеме да го дадеме на било кое девојче, т.е за секој молив имаме по 3 можности. Според тоа, вкупниот број на распределба на сите шест моливи е еднаков на

$$3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=729.$$

Во овој број ги пребројавме и оние начини во кои едно или повеќе девојчиња нема да добие ниту еден молив. Ако Ивана не добие ниту еден молив, тогаш сите шест моливи ги делиме на Ана и Теодора и тоа можеме да го направиме на $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=64$ начини. Аналогно, ако Ана или Теодора не добие ниту еден молив, имаме по 64 можности, па затоа вкупниот број можности во кој едно девојче не добива молив е еднаков на $3 \cdot 64 = 192$, при што во сите три случаи два пати ги пребројавме случаите во кои по две девојчиња не добиваат ниту еден молив. Тоа се случува на 3 можни начини (сите моливи се на Ивана, сите моливи се на Ана и сите моливи се на Теодора). Значи, бројот на поделбите во кои едно или две девојчиња нема да добие молив е еднаков на $192 - 3 = 189$.

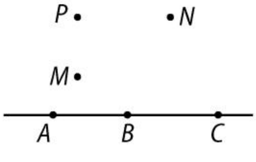
Конечно, бројот на поделбите во кои секое девојче ќе добие барем по еден молив е еднаков на разликата на вкупниот број поделби 729 и бројот 189 на поделбите во кои едно или две девојчиња нема да добие ниту еден молив. Значи, бараниот број поделби е $729 - 289 = 540$.

29. Колку има триаголници со целобројни должини на страни изразен во сантиметри, меѓу кои не постојат два складни триаголници и чиј периметар е еднаков на $20\,cm$? Запиши ги должините на страните на овие триаголници.

Решение. Со a, b, c да ги означиме должините на страните на триаголникот, при што $a \leq b \leq c$. Броевите a, b, c мора да го задоволуваат условот секој од нив да е помал од збирот на другите два, а поголем од апсолутната вредност на нивната разлика. Имајќи го предвид овој услов, како и равенството $a + b + c = 20$ ги добиваме сите можности:

(2, 9, 9), (3, 8, 9), (4, 7, 9), (4, 8, 8), (5, 6, 9), (5, 7, 8), (6, 6, 8), (6, 7, 7).

30. На правата p се дадени три точки и дадени се уште три неколинеарни точки кои не припаѓаат на правата p. Колку отсечки и колку најмногу прави се определени со овие точки?



Решение. Да означиме точки како на цртежот десно. Имаме 6 точки, а како секој пар точки определува по една отсечка, треба да видиме колку пара точки определуваат овие точки. За избор на првата точка имаме 6 можности, а за избор на првата точка втората точка можеме да ја избереме на 5 начини. Бидејќи парот (X, Y) определува иста отсечка како и парот (Y, X), добиваме дека со шесте точки се определени $(6 \cdot 5) : 2 = 15$ отсечки.

Точките A, B, C определуваат една права. Точките M, N, P определuваат три прави. Секоја од точките A, B, C со секоја од точките M, N, P определува по една права. Значи, најголемиот можен број прави определен со дадените шест точки е $1+3+9=12$.

31. Колку точки треба да се означат на права за да бројот на отсечките кои тие точки ги определуваат е десет пати поголем од бројот на полуправите (на таа права) определен со истите тие точки? Најди го бројот на отсечките определени со овие точки.

    Решение. Нека на правата се означени n точки. Секоја отсечка е определена со пар од означените точки. За избор на едната крајна точка X имаме n и откако оваа точка е избрана другата точка Y можеме да ја избереме на $n-1$ начини. Но, XY и YX означува една иста отсечка, па затоа вкупниот број избори поделен со 2 го дава бројот на отсечките. Значи, со n точки се определени $\frac{n(n-1)}{2}$ отсечки. Со секоја означена точка на правата се определени дев полуправи, па затоа бројот на полуправите треба да е $20n$. Имаме $\frac{n(n-1)}{2}=20n$, од каде добиваме $n(n-1)=40n$, т.е. $n=41$. Значи, на правата треба да означиме 41 точка и притоа бројот на отсечките ќе биде $\frac{41\cdot 40}{2}=820$.

32. Дадени се 6 точки меѓу кои нема три колинеарни точки.

    а) Колку отсечки се определени со овие точки?

    б) Колку триаголници се определени со овие точки?

    Решение. а) Секоја отсечка е определена со нејзините две крајни точки. За првата крајна точка имаме 6 можности, а по нејзиниот избор за втората крајна точка имаме 5 можности. Значи, со дадените 6 точки межу кои нема три колинеарни се определени $(6\cdot 5):2=30:2=15$ отсечки.

    б) Секој триаголник е опредлен со неговите темиња. Затоа за да го определиме бројот на триаголниците доволно е за секоја отсечка определена во решението на задачата по а) да избереме трета точка и така добиениот број да го поделиме со 3 (изборот на ист триаголник XYZ може да се направи на три начини: отсечка XY и точка Z, отсечка XZ и точка Y, отсечка YZ и точка X). Изборот на третата точка може да се направи на 4 начини, па затоа бараниот број триаголници е $(4\cdot 15):3=20$.

33. Должините на на страните на триаголникот се природни броеви. Должината на едната страна е 100, а другите две страни се пократки од неа. Колку такви нескладни триаголници постојат?

Решение. *Прв начин*. Нека $a,b,c \in \mathbb{N}$ се должините на страните на триаголникот и $c=100$. Од неравенството на триаголник следува

$$a+b>100, a+100>b, b+100>a,$$

т.е.

$$a+b>100, 100>b-a, 100>a-b$$

и според условот на задачата $a,b<100$.

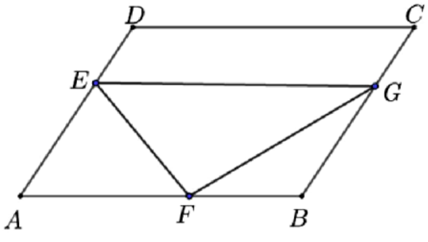
За избраната вредност на $a, a<100$, ќе ги испишпеме сите можност за должината на страната b така што тие нема да се скалдни. Заради $a+b>100$, $a+b$ мора да е најмалку 101, а заради $a,b<100$ добиваме дека $a+b$ е најмногу 198. Така ја добиваме табелата:

a	99	98	97	---	52	51
Можни должини b	2 3 4 5 $\vdots$ 99	3 4 5 $\vdots$ 98	4 5 $\vdots$ 97	---	49 $\vdots$ 52	50 51
Број триаголници	98	96	94	---	4	2

Според тоа, бројот на триаголниците кои ги задоволуваат условите на задачата е еднаков на

$$98+96+94+...+4+2=2\cdot(1+21+3+...+49)=2\cdot\tfrac{49\cdot50}{2}=2450.$$

34. На колку различни начини Андреј кој се наоѓа во точката A може по нацртаните отсечки да дојде до пријателоѕ Бранко кој се наоѓа во точката B? Притоа Андреј смее да се движи само по нацртаните отсечки чии крјни точ-



ки си A, B, C, D, E, F, G и низ секоја од овие точки може да помине најмногу еднаш.

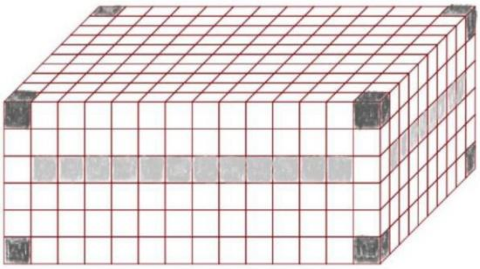
Решение. Можните патеки по кои Андреј може од точката A да дојде во точката B се:

AFB, AFEDCGB, AFEGB, AFGB, AEGB, AEFB,
AEFGB, AEDCGB, AEGFB, AEDCGFB.

Според тоа, постојат вкупно 10 патеки кои ги задоволуваат условите на здачата.

35. Волуменот на дрвен квадар е $840\,cm^3$. Должините на неговите рабови изразени во сантиметри се парни природни броеви. Секој раб е подолг од $2\,cm$. Квадарот е обоен и потоа е расечен на коцки со раб $1\,cm$. Некои од добиените коцки имаат обоени ѕидови, а некои не. Колку коцки имаат непарен број обоени ѕидови?

Решение. *Прв начин*. Имаме $840 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, па како должините на сите рабови се парни природни броеви поголеми од 3, заклучуваме дека должините на рабовите се $6\,cm$, $10\,cm$ и $14\,cm$, види цртеж.



По боењето и расекувањето на квадарот коцките кои се во неговите темиња имаат по три обоени ѕида, коцките кои се на рабовите не не се во темињата имаат по два обоени ѕида и коцките кои се на ѕидовите, но не се на рабовите имаат по еден обоени ѕид.

Имаме 8 коцки во темињата. Понатаму, на ѕид со рабови $6\,cm$ и $10\,cm$ имаме $(6-2)\cdot(10-2) = 32$ коцки кои не се на рабовите, на ѕид со рабови $6\,cm$ и $14\,cm$ имаме $(6-2)\cdot(14-2) = 48$ коцки кои не се на рабовите и на ѕид со рабови $10\,cm$ и $14\,cm$ имаме $(10-2)\cdot(14-2) = 96$ коцки кои не се на рабовите. Значи, коцки со непарен број обоени страни се

$$2\cdot(96+48+32)+8 = 2\cdot 176+8 = 360.$$

Втор начин. Имаме $840 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$, па како должините на сите рабови се парни природни броеви поголеми од 3, заклучуваме дека должините на рабовите се $6cm$, $10cm$. Квадарот е расечен на вкупно 840 коцки, од кои необоени се внатрешните коцки и нив ги има

$$(6-2)\cdot(10-2)\cdot(14-2)=4\cdot8\cdot12=384.$$

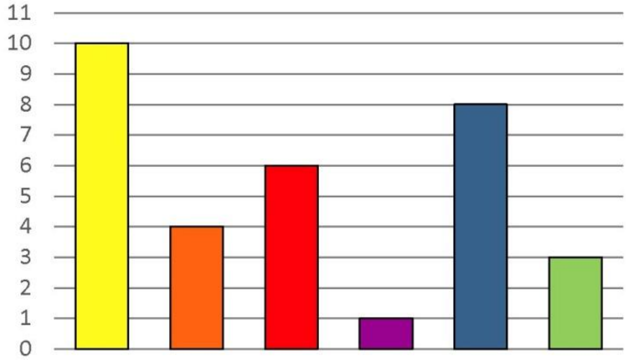
Понатаму, обоените коцки имаат 1, 2 или 3 обоени ѕидови. Со 2 обоени ѕидови се коцките кои се на рабовите и не се во темињата на квадарот, па затоа нивниот број е

$$4\cdot(6-2)+4\cdot(10-2)+4\cdot(14-2)=96.$$

Конечно, со непарен број обоени ѕидови имаме

$$840-384-96=840-480=360 \text{ коцки.}$$

36. Ласте, Марко, Ангел, Филип, Иван и Борис во минатат година биле стрелци за фудбалската екипа на своето училипте. Дијаграмот прикажува колку вкупно голови постигнал секој од нив, но имињата недостасуваат.

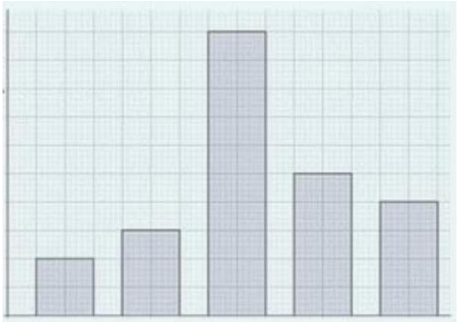


Определи кој колку голови постигнал, ако се знае дека:

1) Марко постигнал два гола помалку од Ласте,
2) Иван постигнал најмалку голови,
3) Бројот на головите на Ласте е еднаков на бројот на головите кои заедно ги постигнале Филип и Ангел,
4) Филип постигнал два пати повеќе голови од Борис.

Решение. Од дадениот дијаграм и условите на задачата заклучуваме дека Иван дал еден гол. Бидејќи Марко постигнал два гола помалку од Ласте, од дијаграмот заклучуваме дека Марко постигнал 8 или 6 или 4 гола, а Ласте постигнал 10 или 8 или 6 гола, соодветно. Од третиот услов и дијаграмот заклучуваме дека Ласте постигнал 10 гола, а Филип и Ангел постигнале 4 и 6 гола во некој редослед. Значи, Марко постигнал 8 гола. Од четвртиот услов заклучуваме дека Филип постигнал 6 гола, а Борис постигнал 3 гола. Според тоа, Ангел постигнал 4 гола.

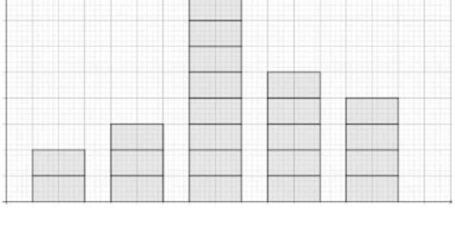
37. По анкетата која ја реализирал со 96 ученици од шесто одделение од своето училиште Горјан нацртал столбест дијаграм но на вертикалната оска на која го прикажувал бројот на учениците не ги запишал броевите, а не ги запишал ниту спортовите на хоризонталната оска. Запамтил дека со пливање се занимава пет пати ученици отколку со тенис, а двојно повеќе ученици отколку со ракомет. Кошаркари има помалку отколку фудбалери. Колку ученици се занимаваат со кошарка?



Решение. Од долниот цртеж се гледа дека на сите столбови на дијаграмот имаме 24 единечни делови. Тоа значи дека еден столб ни прикажува $96:24=4$ ученици.

Од условот дека со пливање се занимаваат пет пати повеќе ученици отколку со тенис и од односот на првиот и третиот столб на дијаграмот заклучуваме дека со пливање се занимаваат $10\cdot 4=40$ ученици, а со тенис се занимаваат $2\cdot 4=8$ ученици.

Понатаму, од условот дека со пливање се занимаваат двојно повеќе ученици отколку со ракомет, заклучуваме дека четвртиот столб на дијаграмот ги прикажува учениците кои се занимаваат со ракомет и тоа се $5\cdot 4=20$ ученици.



Значи, учениците кои се занимаваат со кошарка и фудбал се прикажани со вториот и петтиот столб. Според условот на задачата кошаркари има помалку од фудбалери, што значи дка тие се прикажани со вториот столб и тоа се $3\cdot 4=12$ ученици. Конечно, со фудбал се занимаваат $4\cdot 4=16$ ученици.