Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1996/97 година

О НЕТРАНЗИТИВНИМ ПАРАДОКСИМА

Павле Младеновић, Београд

Ако су x, y и z реални бројеви, такви да је $x \leq y$ и $y \leq z$, онда важи и неједнакост $x \leq z$. Другим речима, релација $\leq$, која је дефинисана на скупу реалних бројева, јесте транзитивна. Постоје и многи други примери транзитивних релација. На пример, транзитивна је и релација инклузије (у ознаци $\subset$) дефинисана на произвољној фамилији скупова.

Међутим, нису све релације транзитивне. На пример, ако на кошаркашком турниру, који се игра по систему свако са сваким, екипа A победи екипу B, а екипа B победи екипу C, онда екипа A не мора да победи у сусрету са екипом C. Уведемо ли ознаку $X\rho Y$ за тврђење *екипа X је победила екипу Y*, онда из услова $A\rho B$ и $B\rho C$ не следи обавезно $A\rho C$.

Многе релације, које се могу срести у реалним ситуацијама, изгледају на први поглед транзитивне, а у ствари нису такве. У вези са тим могу настати и различите парадоксалне ситуације. Наводимо неколико примера таквог типа.

1. Парадокс гласања. Претпоставимо да на избору за народног посланика учествују три кандидата. Означимо их са A, B и C. Претпоставимо да трећина гласача рангира кандидате на следећи начин: A је најбољи, B је други, а C је најгори. Означимо то рангирање са (A, B, C). При томе подразумевамо да сваки припадник те трећине гласача у случају избора једног од кандидата A, B и C, гласа за A, а у случају избора једног између нека два кандидата, гласа за онога који је боље рангиран. Претпоставимо даље да друга трећина гласача рангира кандидате на следећи начин (B, C, A), а ранг листа сваког гласача из последње трећине је (C, A, B). Сада је лако приметити следеће: ако се на листи налазе сва три кандидата, онда ће сваки од њих добити тачно трећину гласова. Ако се на листи налазе само A и B, онда побеђује A са $2/3$ освојених гласова; ако су на листи само B и C, онда побеђује B са $2/3$ освојених гласова; а ако се на листи налазе само C и A, онда побеђује C са $2/3$ освојених гласова.

У вези са овим парадоксом гласања приметимо и следеће: ако су A, B и C законски пројекти, при чему по једна трећина народних посланика рангира те нацрте на претходно записане начине, онда при гласању за сва три нацрта, сваки добија по $1/3$ гласова. Ако се на гласање прво стави један пар нацрта (да би један од њих био елиминисан), *довољно је* прво ставити на гласање пар (A, B), да би се обезбедило изгласавање нацрта C!

Наведени парадокс гласања познат је и под именом Ероуов парадокс, у част Кенета Ероуа (Kennet Arrow), који је доказао такозвану *теорему о немогућности идеалног изборног система*. У свом раду *Социјални избор и индивидуалне вредности* (Arrow K. J.: Social Choice and Individual Values, Wiley 1951), Ероу је формулисао пет услова који по општеприхваћеном мишљењу морају бити задовољени да би се избори сматрали демократским, а онда је доказао да су тих пет услова логички противречни. То значи да ма како били формулисани услови избора, бар један од тих 5 суштинских услова није задовољен. Овај резултат Кенета Ероуа може се упоредити са теоремом о некомплетности формалне аритметике коју је 1931. године доказао немачки математичар Гедел (Kurt Gödel). За поменути резултат Кенет Ероу је 1972. године добио Нобелову награду из економије.

2. Парадокс три екипе. На припремама за предстојеће такмичење налази се 9 стонотенисера. Претпоставимо да су они нумерисани бројевима 1, 2, 3, …, 9 и да играч са већим редним бројем у међусобном сусрету увек побеђује играча са мањим редним бројем. Тренер је саставио три трочлане екипе, које ради тренинга играју међусобне мечеве по принципу сваки играч једне екипе против сваког играча друге екипе. Екипе су састављене на следећи начин:

$$A = \{6, 7, 2\}, \quad B = \{1, 5, 9\}, \quad C = \{8, 3, 4\}.$$

Лако је проверити да при формулисаним условима екипа A побеђује екипу B, екипа B побеђује екипу C, а екипа C побеђује екипу A. При томе, у сваком од ова три меча резултат је 5 : 4.

3. Парадокс са коцкама за игру. Нека су дате две коцке за игру чије су стране нумерисане бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6. При бацању те две коцке добија се један од следећих 36 *могућих исхода*:

11,	12,	13,	14,	15,	16,	21,	22,	23,	24,	25,	26,
31,	32,	33,	34,	35,	36,	41,	42,	43,	44,	45,	46,
51,	52,	53,	54,	55,	56,	61,	62,	63,	64,	65,	66.

На пример, са 23 је означен исход да на првој коцки падне број 2, а на другој коцки број 3 и слично за остале исходе. Ако нас интересује догађај H да је збир палих бројева већи од 8, онда је догађај H одређен исходима 36, 45, 46, 54, 55, 56, 63, 64, 65, 66. Тих исхода има 10 и за њих се каже да су *повољни за догађај* H. Код класичне дефиниције вероватноће претпоставља се да су сви могућни исходи једнако вероватни, а вероватноћа догађаја дефинише се као количник броја повољних и броја могућних исхода. Ако вероватноћу догађаја H означимо са $P(H)$, онда у складу са класичном дефиницијом добијамо

$$P(H) = \frac{\text{број исхода повољних за догађај } H}{\text{број могућних исхода}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Претпоставимо сада да су дате коцке за игру A, B, C и D чије стране нису нумерисане стандардно бројевима 1, 2, 3, 4, 5, 6, него на следећи начин:

$$A(1,1,1,5,5,5), \quad B(2,2,2,2,6,6), \quad C(3,3,3,3,3,3), \quad D(0,0,4,4,4,4).$$

Наведени запис означава да су три стране коцке A нумерисане бројем 1, а три стране те коцке бројем 5 и слично за остале коцке. Два играча играју следећу игру. Први играч бира једну од дате 4 коцке (по жељи, не случајно), а затим од преосталих коцки други играч бира коцку по жељи. Затим свако баца своју коцку, а победник је онај ко добије већи број. Поставља се питање: који играч је у повољнијем положају? На први поглед намеће се одговор да је први играч у повољнијем положају јер, пошто први бира коцку, може изабрати најбољу. Међутим, да ли постоји најбоља коцка? Да бисмо дали одговор на постављено питање прво формулишемо критеријум: *Коцка X је боља од коцке Y, ако је приликом бацања коцки X и Y вероватноћа догађаја $\{X > Y\}$ већа од вероватноће догађаја $\{X < Y\}$.* (Напомињемо да је $\{X < Y\}$ природна ознака за догађај да на коцки X падне мањи број него на коцки Y.)

Приликом бацања коцки A и B догађај $\{A < B\}$ се реализује, ако се реализује неки од исхода 12, 16, 56. Исходи 12 и 16 могу да се реализују на укупно $3 \cdot 6 = 18$ начина, а исход 56 може да се реализује на $3 \cdot 2 = 6$ начина. На основу тога и класичне дефиниције вероватноће добијамо:

$$P\{A < B\} = \frac{3 \cdot 6 + 3 \cdot 2}{36} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}, \quad P\{B < A\} = \frac{1}{3}.$$

Према томе, коцка B је боља од коцке A и то *два пута*, јер играч који баца коцку B побеђује играча који баца коцку A са вероватноћом $2/3$ (тј. побеђује два пута чешће него што губи). Чињеницу да је коцка B боља од коцке A означимо са $A \prec B$. Сличним резоновањем добијамо и следеће једнакости: $P\{B < C\} = \frac{4 \cdot 6}{36} = \frac{2}{3}$, $P\{C < D\} = \frac{6 \cdot 4}{36} = \frac{2}{3}$, $P\{D < A\} = \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 3}{36} = \frac{2}{3}$. Према томе, коцка C је боља од коцке B, коцка D је боља од коцке C, а коцка A је боља од коцке D, тј. добили смо да је $A \prec B \prec C \prec D \prec A$! Зато је други играч у повољнијем положају, јер независно од избора првог играча, други може изабрати коцку која му даје могућност да победи са вероватноћом $2/3$.

4. Парадокс код бацања новчића. При бацању новчића он пада тако да се са његове горње стране налази једна од његових страна: писмо у ознаци П или грб у ознаци Г. Претпоставимо да у сваком бацању новчића свака од његове две стране пада са вероватноћом 1/2. Ако се новчић баца више пута, онда претпостављамо да су та бацања независна, а то значи да су за сваки природан број n сви резултати који се могу добити у n бацања једнако вероватни и да имају вероватноћу 2^{-n}. На пример, ако се новчић баца 3 пута, онда је скуп могућних резултата

$$\Omega = \{\text{ППП, ППГ, ПГП, ПГГ, ГПП, ГПГ, ГГП, ГГГ}\}$$

а сви елементи скупа Ω (низови дужине три чији су чланови слова П и Г), имају вероватноћу 1/8.

Претпоставимо да се новчић баца неограничен број пута и да нас интересује догађаја D да ће се у низу резултата тројка ГПП појавити пре тројке ППП. Вероватноћа тог догађаја се једноставно одређује. Ако је у прва три бацања пао бар један грб, онда се тројка ППП не може појавити пре тројке ГПП. А ако се у прва три бацања појаве три писма, онда се тројка ГПП очигледно није појавила пре тројке ППП. Зато је вероватноћа догађаја D једнака 7/8.

Претпоставимо сада да два играча A и B играју следећу игру. Прво играч A бира једну тројку из скупа Ω, а затим играч B од преосталих 7 тројки скупа Ω бира једну. Онда се изводи низ независних бацања новчића, а побеђује онај играч чија се тројка прва појави у низу добијених резултата (као резултат три узастопна бацања новчића). Да ли је ова игра повољнија за играча A или за играча B?

Да бисмо дали одговор на постављено питање прво формулишемо следећи критеријум на основу кога упоређујемо две различите тројке из скупа Ω. Природно је сматрати да је тројка $T_1 \in \Omega$ боља од тројке $T_2 \in \Omega$ ако је вероватноћа догађаја да се тројка T_1 појави у низу бацања новчића пре тројке T_2 већа од 1/2. У табели 1 дате су вероватноће догађаја да се тројке из прве колоне појаве пре тројки из прве врсте.

Примећујемо да ма како играч A изабрао тројку из прве врсте, играч B може бирати тројку из прве колоне која му обезбеђује победу са вероватноћом већом од 1/2. При томе, ако играч A бира неку од тројки ПГП, ПГГ, ГПП, ГПГ, онда играч B може избором погодне тројке осигурати себи победу са вероватноћом 2/3. Ако играч A бира неку од тројки ППГ или ГГП, онда играч B може изабрати тројку која му омогућује победу са вероватноћом 3/4. И коначно, ако играч A бира неку од тројки ППП или ГГГ, онда играч B може вероватноћу своје победе повећати на 7/8 (видети последњу врсту у табели 1).

Напомена 1. Ако су играчи A и B изабрали тројке ППГ и ГПП (у претходно описаној игри), онда бацање новчића до појаве неке од тих тро-

	ППП	ППГ	ПГП	ПГГ	ГПП	ГПГ	ГГП	ГГГ
ППП	–	1/2	2/5	2/5	1/8	5/12	3/10	1/2
ППГ	1/2	–	2/3	2/3	1/4	5/8	1/2	7/10
ПГП	3/5	1/3	–	1/2	1/2	1/2	3/8	7/12
ПГГ	3/5	1/3	1/2	–	1/2	1/2	3/4	7/8
ГПП	7/8	3/4	1/2	1/2	–	1/2	1/3	3/5
ГПГ	7/12	3/8	1/2	1/2	1/2	–	1/3	3/5
ГГП	7/10	1/2	5/8	1/4	2/3	2/3	–	1/2
ГГГ	1/2	3/10	5/12	1/8	2/5	2/5	1/2	–
max	7/8	3/4	2/3	2/3	2/3	2/3	3/4	7/8

Табела 1

јки у низу резултата може *да потраје*, јер почетак низа резултата може да има облик ПГПГ...ПГ или ГПГП...ГП. Број могућих исхода експеримента бацања новчића до појаве једне од тих тројки није коначан. Коректно заснивање вероватноћа о којима је реч базира се на Колмогоровљевој аксиоматици теорије вероватноћа.

Напомена 2. Постоји више начина да се одреди (израчуна) вероватноћа догађаја да се у низу бацања новчића неки коначан низ слова П и Г појави пре неког другог коначног низа. Формулисаћемо овде такозвани Конвејев алгоритам, назван тако по енглеском математичару Џону Конвеју (John Conway).

Нека су дата два коначна низа исхода П и Г (не обавезно једнаке дужине), на пример, $A =$ППГППГГП и $B =$ПГГППГГ. Низ A има дужину 8, а низ B дужину 7. Дефинишемо бројеве $A * B$, $A * A$, $B * A$ и $B * B$ на следећи начин: Запишемо низ A и испод њега низ B тако да се почеци низова поклапају. Затим уочимо произвољан члан низа A и гледамо да ли се завршетак низа A почињући од уоченог члана поклапа са почетком низа B. Ако је одговор потврдан, онда изнад уоченог члана низа A записујемо јединицу, а у противном случају записујемо нулу. Ако то урадимо за сваки члан низа A добијамо бинарни запис броја који (по дефиницији) означавамо са $A * B$.

$$\begin{array}{rcccccccccl} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & = A * B = 9 \\ A = & \text{П} & \text{П} & \text{Г} & \text{П} & \text{П} & \text{Г} & \text{Г} & \text{П} & \\ B = & \text{П} & \text{Г} & \text{Г} & \text{П} & \text{П} & \text{Г} & \text{Г} & & \end{array}$$

У наведеном конкретном примеру је $A * B = 00001001_2 = 9$. Аналогно одређујемо и бројеве $A * A$, $B * A$ и $B * B$. За $A * A$ добијамо

$$\begin{array}{rcccccccccl} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & = A * A = 129 \\ A = & \Pi & \Pi & \Gamma & \Pi & \Pi & \Gamma & \Gamma & \Pi & \\ A = & \Pi & \Pi & \Gamma & \Pi & \Pi & \Gamma & \Gamma & \Pi & \end{array}$$

Слично $B * A = 0$ и $B * B = 1000100_2 = 68$. Вероватноћа догађаја да ће се и низу резултата који се добијају при бацању новчића, подниз B појавити пре подниза A израчунава се по формули

$$P(B \text{ се појављује пре } A) = \frac{A * A - A * B}{A * A - A * B + B * B - B * A}. \qquad (1)$$

За низове $A =$ППГППГГП и $B =$ПГГППГГ та вероватноћа је једнака

$$\frac{169 - 9}{169 - 9 + 68 - 0} = \frac{30}{47}.$$

Методи доказа формуле (1) који су познати писцу овог текста излазе из оквира средњошколске математике.

ЗАДАЦИ

1. Претпоставимо да су младићи A, B и C запросили једну исту девојку. Она је одлучила да их рангира по следећим критеријумима: интелигенција, физичка привлачност и новчани приходи и да затим између произвољне двојице да предност ономе ко је бољи бар по два критеријума. Када је извршила рангирање по интелигенцији добила је редослед (A, B, C), који означава да је A најпаметнији, B просечан, а C најмање паметан. А када их је рангирала по физичкој привлачности и новчаним приходима добила је редом (B, C, A) и (C, A, B). За ког младића ће се девојка определити?

2. Користећи формулу (1) проверите вероватноће записане у табели 1.

3. Израчунати вероватноћу догађаја да ће се у низу резултата добијених при бацању новчића подниз ПГГПГГГ појавити пре подниза ГГПГГГП.