Ристо Малчески

ЗА РАЦИОНАЛНИТЕ КОРЕНИ НА ПОЛИНОМ ОД *n*-ти СТЕПЕН СО ЦЕЛОБРОЈНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Функцијата од облик

(1) $$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x + a_n$$

каде што коефициентите $a_i, i = 0,1,...,n$ се реални или комплексни броеви, n е природен број и $a_0 \neq 0$ ја нарекуваме **полином од *n*-ти степен.** Корените на овој полином се решенија на соодветната алгебарска равенка он n-ти степен.

(2) $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Во 1746 год. Даламбер покажал дека оваа равенка мора да има n решенија. Овој став, познат како **основна теорема на алгебрата**, прецизно го докажал Гаус во 1797 год во својата докторска дисертација. Под **алгебарско решавање** на равенката (2) подразбираме дека решенијата на равенката треба да ги изразиме во вид на алгебарска функција од нејзините коефициенти. Така на пример, за n=2 равенката (2) има облик $ax^2 + bx + c = 0$ и притоа изразот $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ го овозможува нејзиното алгебарско решавање, а за n=3 и n=4 исто така постојат соодветни формули (Кардановите и Ферариевите). Оваа определба на поимот алгебарско решавање на равенката (2) ја дал италијанскиот математичар Руфини во 1799 год. Абел покажал дека равенките со степен n>4 не можат алгебарски да се решат. Меѓутоа, ако коефициентите на (2) се дадени броеви, тогаш равенката (2) може приближно да се реши, а во некои случаи може да се определат и точните решенија на (2).

1. Определување на рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти со помош на резолвентна равенка

Нека во равенката

(3) $$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2}+...+A_{n-1}x + A_n = 0$$

коефициентите A_i, $i = 0,1,2,...,n$ се цели броеви при што $A_0 \neq 0$. Равенката (3) има n решенија и тие можат да бидат рационални, ирационални или комплексни броеви. Ќе покажеме како можат да се определат рационалните решенија на (3), доколку тие постојат. Да забележиме дека следните размислувања овозможуваат да се определат рационалните корени и на равенка со рационални коефициенти. Имено, рационалните коефициенти можеме да ги сведеме на цели ако помножиме со најмалиот заеднички именител на коефициентите.

Ако во равенката (3) воведеме смена $y=\frac{x}{A_0}$, тогаш ја добиваме таканаречената **резолвентна равенка** која има облик

(4) $$y^n+a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}+...+a_{n-1}y+a_n=0,$$

каде што $a_i=A_iA_0^{i-1}$, за $i=1,2,...,n$. Нека $x_0=\frac{p}{q}$ е рационално решение на равенката (4), каде што p и q се заемно прости броеви. Тогаш

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n+a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}+...+a_{n-1}\frac{p}{q}+a_n=0,$$

и, по множењето со q^n добиваме

(5) $$p^n+a_1p^{n-1}q+a_2p^{n-2}q^2+...+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0.$$

Ако сите членови освен првиот ги префрлиме на десната страна и поделиме со q, добиваме

(6) $$\frac{p^n}{q}=-\left(a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}q\ +...+a_{n-1}pq^{n-2}+a_nq^{n-1}\right).$$

Но, p,q,n и a_i, $i=1,2,...,n$ се цели броеви, па затоа десната страна во (6) е цел број. Значи, мора и левата страна да е цел број, од што следува дека $q=1$, во спротивно добиваме противречност (по претпоставка p и q се заемно прости броеви). Од досега изнесеното следува дека рационалните решенија на равенката (4) се целобројни. Според тоа, (5) го добива обликот

(7) $$p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+...+a_{n-1}p+a_n=0.$$

Ако сите членови на (7) освен првиот ги префрлиме на десната страна и поделиме со p добиваме

(8) $$\frac{a_n}{p}=-\left(p^{n-1}+a_1p^{n-2}+a_2p^{n-3}+...+a_{n-2}p+a_{n-1}\right).$$

Десната страна, како и во (6) е цел број, па значи и $\frac{a_n}{p}$ е цел број. Конечно:

Секое целобројно решение на равенкаш̄а (4) е делиш̄ел на слободниош̄ член.

Според тоа, за определување на рационалните решенија на равенката (3), доколку истите постојат, можеме да го искористиме следниот алгоритам:

(а) *во равенкаш̄а (3) воведуваме смена* $y=\frac{x}{A_0}$ *и ја сведуваме на еквиваленш̄наш̄а на неа равенка (4);*

(б) *ѓи ой̄ределуваме целобројниш̄е делиш̄ели на слободниош̄ член на равенкаш̄а (4);*

(в) *ако а е делиш̄ел на слободниош̄ член на равенкаш̄а (4), ш̄оѓаш со ӣроба ӣроверуваме дали е решение на (4);*

(г) *ако целобројните решенија на равенката (4) се* $m_1, m_2, \ldots, m_k$, *тогаш рационалните решенија на равенката (3) се добиваат со замена во* $y=\frac{x}{A_0}$ *и тие се* $\frac{m_1}{A_0}, \frac{m_2}{A_0}, \ldots \frac{m_k}{A_0}$.

Во чекорот (в) од презентираниот алгоритам, меѓу делителите на слободниот член на равенката (4) со проба ги определуваме рационалните корени на равенката (4). Да забележиме дека, ако a е решение на (4), тогаш полиномот $y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}y + a_n$ се дели со y-a, при што за еден се намалува степенот на полиномот.

Проверката дали делителот a на слободниот член a_n на полиномот

$$y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}y + a_n$$

е решение на равенката (4) и делењето на полиномот, со цел да се намали степенот на полиномот, можеме да го направиме и на друг начин. Подолу изнесената постапка ќе ја покажеме и за полиномот во равенката (3).

Ако полиномот $y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}y + a_n$ го поделиме со y-a, добиваме полином од (n-1)-ви степен и броен остаток R, односно

(9) $$y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}y + a_n = (y-a)(y^{n-1} + b_1y^{n-2} + b_2y^{n-3} + \ldots + b_{n-1}) + R.$$

Ако во идентитетот (9) ставиме y=a, првиот собирок на десната страна ќе се анулира, па ќе добиеме

(10) $$R = a^n + a_1a^{n-1} + a_2a^{n-2} + \ldots + a_{n-1}a + a_n,$$

што значи дека остатокот на делењето е еднаков со вредноста на полиномот за y=a, т.е. $R = P_n(a)$. Ако е y=a корен на полиномот (4), тогаш $R = P_n(a) = 0$, што значи дека полиномот е делив со y-a без остаток.

Ако во десната страна на (9) извршиме множење и средување по y, па потоа ги изедначиме соодветните коефициенти на двете страни, ќе добиеме дека

$$\begin{aligned} b_1 &= a + a_1 \\ b_2 &= ab_1 + a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n-1} &= ab_{n-2} + a_{n-1} \\ R &= ab_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

Значи, коефициентите b_i, $i = 1,2,\ldots n-1$ на количникот и остатокот R од делењето на полиномот $y^n + a_1y^{n-1} + a_2y^{n-2} + \ldots + a_{n-1}y + a_n$ со y-a можеме да ги пресметаме постапно за секој a. Притоа најдобро е да се користи следната шема (наречена: **Хорнерова шема**):

(11) $$\left|\begin{array}{llllll} 1 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & b_1 = a + a_1 & b_2 = ab_1 + a_2 & \ldots & b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1} & R = ab_{n-1} + a_n \end{array}\right| a$$

Броевите во вториот ред на оваа шема се коефициентите на полиномот добиен со делење на полиномот $y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \ldots + a_{n-1} y + a_n$ со y-a, а последниот коефициент во овој ред е остатокот од делењето R. Ако тој е еднаков на нула, тогаш $y=a$ е решение на дадената равенка (4), односно е нула на полиномот.

2. Решени примери

Пример 1. Да се реши равенката $x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8 = 0$.

Целобројни делители на слободниот член A_4 се $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ и ± 8. Заменувајќи ги овие броеви во дадената равенка наоѓаме дека нејзините решенија се $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2$ и $x_4 = 4$.

Пример 2. Да се реши равенката $x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 2x - 8 = 0$.

Целобројни делители на слободниот член A_4 се $\pm 1, \pm 2, \pm 4$ и ± 8. Заменувајќи ги овие броеви во дадената равенка наоѓаме дека нејзини решенија се $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Ако полиномот од равенката го поделиме со полиномот $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ добиваме

$$x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 2x - 8 = (x^2 - 1)(x^2 - 2x + 8).$$

Оттука наоѓаме $(x^2 - 1)(x^2 - 2x + 8) = 0$, т.е. $x^2 - 2x + 8 = 0$ па затоа останатите две решенија на почетната равенка се $x_{3,4} = 1 \pm i\sqrt{7}$.

Пример 3. Да се реши равенката $3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = 0$.

Воведуваме смена $x = \frac{y}{3}$ и ја добиваме соодветната резолвентна равенка

$$y^3 + 2y^2 - 21y + 18 = 0.$$

Нејзини решенија бараме меѓу делителите на слободниот член b_3, односно меѓу броевите $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9$ и ± 18. Со проба констатираме дека решенија на резолвентната равенка се $y_1 = 1$, $y_2 = 3$ и $y_3 = -6$. На крајот користејќи ја смената $x = \frac{y}{3}$ за решенијата на почетната равенка добиваме $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 1$ и $x_3 = -2$.

Пример 4. Да се реши равенката $3x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 10x + 4 = 0$.

Воведуваме смена $x = \frac{y}{3}$ и ја добиваме соодветната резолвентна равенка

$$y^4 + 5y^3 - 24y^2 - 90y + 108 = 0.$$

Нејзини решенија бараме меѓу делителите на слободниот член b_4, односно меѓу броевите $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm9,\pm12,\pm18,\pm27,\pm36,\pm54$ и ±108. Со непосредна проверка добиваме дека решенија на резолвентната равенка се $y_1=1$ и $y_2=-6$. Другите две решенија можеме да ги определиме ако дадениот полином го поделиме со $(y-1)(y+6)=y^2+5y-6$, при што добиваме

$$y^4+5y^3-24y^2-90y+108=(y^2+5y-6)(y^2-18).$$

Според тоа, $y^2-18=0$, од што добиваме $y_{3,4}=\pm3\sqrt{2}$.

На крајот користејќи ја смената $x=\frac{y}{3}$ за решенијата на почетната равенка добиваме $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-2$ и $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$.

Пример 5. Да се реши равенката $6x^3+7x^2-9x+2=0$.

Воведуваме смена $x=\frac{y}{6}$ и ја добиваме соодветната резолвентна равенка

$$y^3+7y^2-54y+72=0.$$

Нејзини решенија бараме меѓу делителите на слободниот член b_3, односно меѓу броевите $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm8,\pm9,\pm12,\pm18,\pm24,\pm36$ и ±72.

За да извршиме проверка ја користиме шемата (11). Притоа имаме

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & -54 & 72 & 1 \\ 1 & 8 & -46 & 26 & \end{array}\right.$$

Бидејќи остатокот е R=26, заклучуваме дека 1 не е решение.

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & -54 & 72 & 2 \\ 1 & 9 & -40 & -8 & \end{array}\right.$$

Бидејќи остатокот е R=-8, заклучуваме дека 2 не е решение.

$$\left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 7 & -54 & 72 & 1 \\ 1 & 10 & -24 & 0 & \end{array}\right.$$

Бидејќи остатокот е R=0, заклучуваме дека $y_1=3$ е решение. Првите три броја во вториот ред на шемата се коефициентите на полиномот кој се добива со делење на дадениот полином со y-3. Затоа, другите две решенија можеме да ги добиеме со решавање на квадратната равенка $y^2+10y-24=0$. Решенија на последната равенка се $y_2=2$ и $y_3=-12$.

На крајот користејќи ја смената $x=\frac{y}{6}$ за решенијата на почетната равенка добиваме $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$ и $x_3=-2$.

3. Определување на корените без користење на резолвентната равенка

Од решените примери забележуваме дека при воведувањето на смената $y=\frac{x}{A_0}$, со која се добива соодветната резолвентна равенка потребно е да извршиме значителен број проверки меѓу можните решенија на равенката (4). Бројот на проверките значително се намалува ако ја разгледаме равенката (3) без воведување на смената $y=\frac{x}{A_0}$.

Нека $x_0=\frac{p}{q}$ е рационално решение на равенката (3), каде што p и q се заемно прости броеви. Според тоа имаме

$$A_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + A_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + A_2\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} +\ldots+ A_{n-1}\frac{p}{q} + A_n = 0.$$

Последната равенка ја множиме со q^n и добиваме

(12) $$A_0p^n + A_1p^{n-1}q + A_2p^{n-2}q^2 +\ldots+ A_{n-1}pq^{n-1} + A_nq^n = 0.$$

Ако сите членови, освен првиот, ги префрлиме на десната страна и поделиме со q, добиваме,

(13) $$A_0\frac{p^n}{q} = -\left(A_1p^{n-1} + A_2p^{n-2}q +\ldots+ A_{n-1}pq^{n-2} + A_nq^{n-1}\right).$$

Но, p,q,n и A_i, $i=1,2,\ldots,n$ се цели броеви, па затоа десната страна на (13) е цел број. Значи, мора и левата страна да е цел број, односно q е делител на A_0, во спротивно добиваме противречност (по претпоставка p и w се заемно прости броеви).

Ако сите членови на (12), освен последниот, ги префрлиме на десната страна и поделиме со p, добиваме,

(14) $$A_n\frac{q^n}{p} = -\left(A_0p^{n-1} + A_1p^{n-2}q +\ldots+ A_{n-2}pq^{n-2} + A_{n-1}q^{n-1}\right).$$

Десната страна, како и во (13) е цел број, па според тоа и левата страна е цел број, односно p е делител на A_n (во спротивно би добиле противречност). Според тоа:

Ако равенката (3) има рационално решение $x_0=\frac{p}{q}$, тогаш p мора да е делител на слободниот член A_n, а q мора да е делител на A_0. Значи, проверката ја правиме меѓу броевите од облик $x=\frac{p}{q}$, каде што $q|A_0, p|A_n$.

Веќе забележавме дека презентираната постапка за проверка дали некој од најдените броеви е решение на (4) и намалувањето на степенот на полиномот може да се примени и за полиномот во равенката (3). Имено, ако полиномот во (3) го поделиме со x-a добиваме полином од (n-1)-ви степен и остаток R, т.е.

(15) $A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2}+...+A_{n-1}x + A_n = (x-a)(B_0x^{n-1} + B_1x^{n-2} + B_2x^{n-3}+...+B_{n-1}) + R.$

Ако во последниот идентитет ставиме $x=a$, тогаш првиот собирок на десната страна ќе се анулира, па ќе добиеме

(16) $$R = A_0a^n + A_1a^{n-1} + A_2a^{n-2}+...+A_{n-1}a + A_n.$$

што значи дека $R = P_n(a)$. Ако $x=a$ е нула на полиномот во (3) тогаш R=0, што значи дека полиномот е делив со $x-a$ без остаток.

Ако во (15) извршиме множење и споредување на коефициентите, добиваме

$$B_0 = A_0$$
$$B_1 = aB_0 + A_1$$
$$B_2 = aB_1 + A_2$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$B_{n-1} = aB_{n-2} + A_{n-1}$$
$$R = aB_{n-1} + A_n.$$

Значи, коефициентите B_i, $i = 0,1,2,...n-1$ на количникот и остатокот R од делењето на полиномот во равенката (3) со $x-a$ можеме да ги пресметаме постапно за секој a. Притоа најдобро е да се користи следната шема:

(16) $$\left| \begin{array}{llllll} A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ B_0 & B_1 = aB_0 + A_1 & B_2 = aB_1 + A_2 & \dots & B_{n-1} = aB_{n-2} + A_{n-1} & R = aB_{n-1} + A_n \end{array} \right| \begin{array}{l} a \\ \end{array}$$

Броевите во вториот ред на оваа шема се коефициентите на полиномот добиен со делење на полиномот $A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2}+...+A_{n-1}x + A_n$ со $x-a$, а последниот коефициент во овој ред е остатокот од делењето R. Ако тој е еднаков на нула, тогаш $x=a$ е решение на равенката (3), односно е нула на полиномот.

Пример 6. Да се реши равенката $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = 0$.

Броителот на решението може да биде некој од делителите на бројот 2, т.е. $\pm1,\pm2$, а именителот некој од делителите на бројот 6, т.е. $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. Значи, рационалните решенија на оваа равенка, доколку ги има мораат да се некој од броевите $\pm 1,\pm2,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\pm\frac{1}{6}$.

Заменувајќи ги овие броеви во дадената равенка наоѓаме дека нејзини решенија се $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{3}$ и $x_3 = -2$.

4. Задачи за вежбање

На читателот му препорачуваме да ги реши самостојно следните задачи.

1. $8x^4 + 2x^3 + 23x^2 + 6x - 3 = 0$

   (Одговор: $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{-1}{2}$ и $x_{3,4} = \pm i\sqrt{3}$)

2. $9x^4 - 9x^3 - 55x^2 + x + 6 = 0$

   (Одговор: $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ и $x_{3,4} = \pm\frac{1}{3}$)

3. $4x^4 + 4x^3 + x^2 + 4x - 3 = 0$

   (Одговор: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{-3}{2}$ и $x_{3,4} = \pm i$)

4. $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7x + 3 = 0$

   (Одговор: $x_{1,2} = -1$, и $x_{3,4} = \frac{-1\pm i\sqrt{11}}{2}$)

5. $2x^3 + x^2 - 7x - 6 = 0$

   (Одговор: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{2}$ и $x_3 = 2$)

6. $2x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 25x - 15 = 0$

   (Одговор: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{-1}{2}$ и $x_{3,4} = \pm i\sqrt{5}$)

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија