ОДРЕЂИВАЊЕ ЦЕЛОБРОЈНИХ НУЛА ПОЛИНОМА КОЈИМА СУ КОЕФИЦИЈЕНТИ ЦЕЛИ БРОЈЕВИ

Славица Бранковић, Београд

Налажење нула неког полинома n-тог степена $f(x)$, у ствари је налажење решења једначине n-тог степена $f(x) = 0$.

Како се једначине са рационалним коефицијентима могу свести на еквивалентне са целим коефицијентима, то се приказани поступци односе и на њих.

Француски математичар Даламбер је 1746. године први доказао да једначина n-тог степена има n решења у скупу комплексних бројева, што је Гаус прецизније доказао 1797. године у својој дисертацији. То је основни став алгебре. Италијански математичар Руфини први је прецизно дефинисао шта се подразумева под алгебарским решавањем једначине: То значи да решења једначине треба изразити у функцији њених коефицијената користећи се алгебарским рачунским операцијама. На такав начин могу се решити линеарне и квадратне једначине. За решења кубне и једначине четвртог степена постоје компликованији и непрактични обрасци Кардана и Ферарија (италијански математичари).

Велики норвешки математичар Нилс Абел је доказао да се једначине степена вишег од четвртог не могу увек алгебарски решити. Међутим, ако су коефицијенти неки посебни бројеви, онда се таква једначина може решити.

Полином n-тог степена са целобројним коефицијентима има тачно n нула које могу бити рационалне, ирационалне или комплексне. Разматраће се случајеви налажења нула када су оне рационални бројеви са посебним освртом када су целобројне, као и комплексне, где су реални и имагинарни делови цели бројеви.

1. Безуова теорема

Код налажења нула полинома вишег степена користи се позната теорема Безуа (француски математичар).

Теорема. Остатак дељења полинома

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

са $x - \alpha$ једнак је вредности тога полинома за $x = \alpha$, тј. једнак је броју

$$f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Доказ. Поделимо полином $f(x)$ са $x-\alpha$. На основу теореме о дељењу полинома добијамо

$$f(x) = (x-\alpha)q(x) + r.$$

Специјално, за $x=\alpha$, $f(\alpha)=r$, чиме је доказ завршен.

Последица. Ако је број α нула полинома $f(x)$ (тј. $f(\alpha)=0$), тада је тај полином дељив (без остатка) са $x-\alpha$.

На пример, полином $x^n - a^n$ дељив је са $x-a$, јер замењујући x са a добијамо $f(a) = a^n - a^n = 0$. Може се показати да су полиноми $x^{2n} - a^{2n}$ и $x^{2n+1} + a^{2n+1}$ дељиви са $x+a$.

Примери:

1. Наћи остатак дељења полинома $x^{2n} - a^{2n}$ са $x+a$.

Тражени остатак је једнак вредности полинома за $x=-a$, тј. $(-a)^{2n} + a^{2n} = a^{2n} + a^{2n} = 2a^{2n}$.

2. Наћи нуле полинома $f(x) = x^5 + 5x^3 + 20x^2 - 6x - 20$.

Уврштавањем налазимо да је $f(1) = f(-1) = f(-2) = 0$, тј. бројеви 1, -1, -2 су нуле полинома. По Безуовој теореми полином је дељив са $(x-1)(x+1)(x+2)$, количник је $x^2 - 2x + 10$. Тако су још две нуле полинома решења квадратне једначине $x^2 - 2x + 10 = 0$, а то су бројеви $1+3i$ и $1-3i$.

2. Одређивање целобројних нула полинома са целим коефицијентима.

Теорема. Нека су коефицијенти полинома

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

цели бројеви и α целобројна нула тог полинома. Тада је α делилац слободног члана a_0.

Доказ. По услову имамо

$$f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

значи

$$a_0 = -\alpha(a_n\alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots + a_1).$$

Пошто је израз у загради цео број (сви коефицијенти a_i, као и број α, су цели бројеви), то је a_0 дељиво са α.

Доказано тврђење значајно олакшава налажење целобројних нула полинома са целим коефицијентима. У ствари, потребно је исписати све делиоце слободног члана (и позитивне и негативне) и уврштавајући их у полином видети који се своде на нулу. Ако ниједан делилац слободног члана не своди полином на нулу, тада тај полином нема целих нула.

Ако слободни члан a_0 има много делилаца, описани метод доводи до много рачунања. У том случају, могуће је скратити обим рачунања. Сменом $x = y + k$, од полинома $f(x)$ добијамо нов полином по y

$$g(y) = a_n(y+k)^n + a_{n-1}(y+k)^{n-1} + \ldots + a_1(y+k) + a_0.$$

Налазимо да је слободни члан новог полинома једнак

$$a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0$$

тј. једнак је $f(k)$.

Пошто је $y = x - k$, то ако полином $f(x)$ има нулу α, тада полином $g(y)$ има нулу $\alpha - k$ и тада, према раније доказаном, слободни члан полинома $g(y)$, тј. број $f(k)$ мора бити дељив са $\alpha - k$.

Тако смо доказали следеће тврђење:

Тврђење. Нека је

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

неки полином са целим коефицијентима и α његова целобројна нула. Тада је за произвољни цео број k број $\alpha - k$ делилац броја $f(k)$.

Ово тврђење значајно скраћује обим посла. У ствари, ако су већ нађени делиоци $b_1, \ldots, b_s$ слободног члана a_0 полинома $f(x)$, потребно је узети произвољан цео број k и видети за које је од наведених делилаца број $b_j - k$ делилац броја $f(k)$. Само ти делиоци могу бити нуле полинома $f(x)$. За k је згодно узети мале бројеве, на пр. $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Пример:

1. Наћи нуле полинома $f(x) = x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 37x - 60$.

Делиоци слободног члана -60, b_j су: 1, -1, 2,- 2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, 6, -6, 10, -10, 12, -12, 15, -15, 20, -20, 30, -30, 60, -60. Узмимо $k = 1$ и нађимо бројеве $b_j - 1$: 0, -2, 1, -3, 2, -4, 3, -5, 4, -6, 5, -7, 9, -11, 11, -13, 14, -16, 19, -21, 29, -31, 59, -61 Пошто је $f(k) = f(1) = -108$, а број 108 није дељи са 0, -5, 5, -7, -11, 11, -13, 14, -16, 19, -21, 29, -31, 59, -61, то од првонађених делилаца b_j остају само бројеви -1, 2, -2, 3, -3, 4, 5, -5 , -6, 9 као могуће нуле полинома. Да бисмо умањили број могућих нула, узмимо $k = 2$ и израчунајмо у односу на сужени скуп бројева b_j бројеве $b_j - 2$: -3, 0, -4, 1, -5, 2, 3, -7, 8. Како $f(2) = -154$ није дељиво са -3, 0, -4, -5, 3, 8 то остају само три делиоца слободног члана који могу бити нуле датог полинома и то су 3, 4 и -5. Непосредном провером се показује да су 4 и -5 нуле полинома.

По Безуовој теореми полином је дељив са $(x-4)(x+5)$:

$$x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 37x - 60 = (x-4)(x+5)(x^2 + 2x + 3).$$

Значи, још две нуле датог полинома, које нису цели бројеви, добијају се као решења једначине $x^2 + 2x + 3 = 0$, а то су $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$.

3. Одређивање рационалних нула полинома са целим коефицијентима.

Метод примењен за налажење целобројних нула полинома са целим коефицијентима примењује се и за налажење рационалних нула ових полинома.

Аналогно као и у случају целобројних нула доказује се следеће тврђење:

Тврђење. Рационалне нуле полинома $f(x)$ са целим коефицијентима облика су $\frac{p}{q}$, где $p \in Z$, $q \in N$, $(p, q) = 1$, p је делилац слободног члана a_0, а q делилац коефицијента најстаријег члана a_n. При томе, ако је $\frac{p}{q}$ нула полинома $f(x)$, то је за произвољан цео број k број $p - kq$ делилац броја $f(k)$.

Доказ. Заиста, ако је $\frac{p}{q}$ нула полинома $f(x)$ тада је

$$a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \ldots + a_1\frac{p}{q} + a_0 = 0.$$

Ако ову једнакост помножимо са $\frac{q^n}{p}$ добијамо

$$a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q_{n-1} + a_0\frac{q^n}{p} = 0,$$

па, пошто су коефицијенти a_i, p и q цели бројеви, закључујемо да је и $a_0\frac{q^n}{p}$ цео број. Пошто су p и q узајамно прости, то p мора бити делилац од a_0.

Аналогно, ако полазну једнакост помножимо са q^{n-1} добијамо

$$a_n\frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 pq^{n-2} + a_0 q^{n-1} = 0,$$

па због природе бројева a_i, p и q, закључујемо да је $a_n\frac{p^n}{q}$ цео број, односно, да је q делилац броја a_n.

Последица. Из овог тврђења произилази да за полиноме са целим коефицијентима, код којих је коефицијент најстаријег члана a_n једнак 1, све рационалне нуле могу бити само цели бројеви, који су делиоци слободног члана a_0.

Некада је лакше свести налажење рационалних нула полинома $f(x)$ на налажење целобројних нула неког другог полинома са целим коефицијентима. То се може радити на следећи начин: Помножимо полином $f(x)$ са ${a_n}^{n-1}$ и ставимо $a_n x = y$; добићемо нови полином по y са целим коефицијентима коме је најстарији коефицијент једнак 1:

$$g(y) = y^n + a_{n-1}y^{n-1} + a_{n-2}a_n y^{n-2} + \ldots + a_0{a_n}^{n-1}.$$

Примери:

1. Наћи нуле полинома $f(x) = 2x^4 + 7x^3 - 12x^2 - 38x + 21$.

Делиоци слободног члана су: ±1, ±3, ±7, ±21, а најстаријег коефицијента ±1, ±2. Све рациналне нуле припадају скупу: ±1, ±3, ±7, ±21, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, $\pm\frac{7}{2}$, $\pm\frac{21}{2}$. Узмимо $k=1$, $f(1)=-20$ и из скупа могућих нула издвојимо бројеве за које је $p-q$ делилац од -20. То су: 3, 21, -1, -3, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{-3}{2}$. За $k=3$ из суженог скупа узимамо оне бројеве за које је $p-3q$ делилац броја $f(3)=150$. То су бројеви -3, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$. Провером се добија да су рационалне нуле $\frac{1}{2}$ и -3. Остале две нуле налазе се применом Безуове теореме ($x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$).

2. Наћи нуле полинома $f(x)=4x^4+8x^3-x^2-8x-3$.

Помножимо полином са 4 и уведемо смену $y=2x$, након чега добијамо нови полином по y: $g(y)=y^4+4y^3-y^2-16x-12$. Слободни члан -12 има делиоце b_j: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12. Узмимо $k=1$ и формирајмо бројеве b_j-1: 0, -2, 1, -3, 2, -4, 3, -5, 5, -7, 11, -13. Пошто је $f(1)=-24$, могуће нуле полинома $g(y)$ су бројеви -1, 2, -2, 3, -3, 4. Непосредном провером добијамо да су нуле: $y_1=-1$, $y_2=2$, $y_3=-2$ и $y_4=-3$. Како је $x=\frac{y}{2}$, то су нуле полазног полинома: $x_1=\frac{-1}{2}$, $x_2=1$, $x_3=-1$, $x_4=\frac{-3}{2}$.

4. Одређивање целих комплексних нула полинома са целим коефицијентима.

На аналоган, претходно описани начин, могу се налазити и комплексне нуле облика $\alpha+i\beta$, где су α и β цели бројеви.

Важи следеће тврђење:

Тврђење. Нека је

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$$

полином са целим реалним коефицијентима и $\alpha+i\beta$ ($\beta\neq0$) његова цела комплексна нула, тада је слободни члан a_0 дељив са $\alpha^2+\beta^2$.

Доказ. Ако су коефицијенти полинома $f(x)$ реални, то осим нуле $\alpha+i\beta$, постоји нула која је њој коњуговано комплексни број $\alpha-i\beta$. По Безуовој теореми полином $f(x)$ је дељив триномом

$$(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)=(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2.$$

Тако је $f(x)=(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)q(x)$, где је $q(x)$ полином степена $n-2$. Слободни члан овог производа једнак је производу слободних чланова множилаца

$$a_0=(\alpha^2+\beta^2)b_0,$$

где је $b_0\in Z$ слободни члан од $q(x)$. Тиме је тврђење доказано.

Налажење целих комплексних нула нешто је сложеније него налажење целих реалних нула. У ствари, потребно је исписати све позитивне делиоце слободног члана и затим пронаћи све начине на које се они могу представити у облику $\alpha^2+\beta^2$ и на крају видети који се од комплексних бројева $\pm\alpha\pm i\beta$ јављају као нуле посматраног полинома.

И овде посао олакшава следеће тврђење:

Тврђење. Ако је $\alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) цела комплексна нула полинома са целим коефицијентима $f(x)$, то је за произвољни цео број k број $f(k)$ дељив са $(\alpha - k)^2 + \beta^2$.

Ово се доказује као и у случају целих реалних нула.

Пример:

1. Наћи целе комплексне нуле полинома $f(x) = x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 50x + 50$.

Слободни члан 50 има целе позитивне делиоце: 1, 2, 5, 10, 25, 50. Растављени на суму двају квадрата $\alpha^2 + \beta^2$, $\beta \neq 0$, имају облик

$$\begin{aligned} 1 &= 0^2 + 1^2 \\ 2 &= 1^2 + 1^2 \\ 5 &= 2^2 + 1^2 = 1^2 + 2^2 \\ 10 &= 3^2 + 1^2 = 1^2 + 3^2 \\ 25 &= 4^2 + 3^2 = 3^2 + 4^2 = 0^2 + 5^2 \\ 50 &= 7^2 + 1^2 = 1^2 + 7^2 = 5^2 + 5^2 \end{aligned}$$

Значи, дати полином може имати само следеће целе нуле (реалне и комплексне): 1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10, 25, -25, 50, -50, i, $-i$, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$, $2+i$, $2-i$, $-2+i$, $-2-i$, $1+2i$, $1-2i$, $-1+2i$, $-1-2i$, $3+i$, $-3+i$, $3-i$, $-3-i$, $1+3i$, $1-3i$, $-1+3i$, $-1-3i$, $4+3i$, $4-3i$, $-4+3i$, $-4-3i$, $3+4i$, $3-4i$, $-3+4i$, $-3-4i$, $5i$, $-5i$, $7+i$, $-7+i$, $7-i$, $-7-i$, $1+7i$, $1-7i$, $-1+7i$, $-1-7i$, $5+5i$, $5-5i$, $-5+5i$, $-5-5i$.

Добили смо 56 бројева који могу бити нуле датог полинома. Да би одбацили неке од њих узмимо $k = 1$. Како је $f(1) = 20$ то долазе у обзир само комплексни бројеви $\alpha + i\beta$ за које је $(\alpha - 1)^2 + \beta^2$ делилац броја 20 и они цели бројеви α за које је $\alpha - 1$ делилац броја 20. Провера даје само следећих 20 могућих нула: -1, 2, 5, i, $-i$, $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$, $2+i$, $2-i$, $-2+i$, $-2-i$, $1+2i$, $1-2i$, $3+i$, $3-i$, 5, $3+4i$, $3-4i$.

Узмимо $k = -1$ и одаберимо оне од нађених 20 бројева за које је $(\alpha+1)^2 + \beta^2$ делилац броја $f(-1) = 136$. Сада остаје 10 бројева: i, $-i$, $-1+i$, $-1-i$, $-2+i$, $-2-i$, $1+2i$, $1-2i$, $3+i$, $3-i$.

На крају узмимо $k = 3$ и одаберимо оне од тих 10 бројева за које је $(\alpha-3)^2+\beta^2$ делилац броја $f(3) = 8$. То су бројеви: $1+2i$, $1-2i$, $3+i$, $3-i$. (Да смо узели $k = 2$ и $k = -2$ смањење броја могућих нула ишло би спорије).

Провера показује да су нађена четири броја заиста нуле датог полинома.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1998/99 година