Ристо Малчески
Алекса Малчески
Слаѓана Брсаковска
Зоран Мисајлески
Томи Димовски

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С6
(збирка задачи за III година)

Скопје, 2019

Рецензенти:
Даниел Велинов
Самоил Малчески
Сања Костадинова

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)(076)

МАТЕМАТИЧКИ талент C6 : (збирка задачи за III година) / Ристо Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2019. - 330 стр. ; 25 см

Други автори: Алекса Малчески, Слаѓана Брсаковска, Зоран Мисајлески, Томи Димовски. - Библиографија: стр. 324-330

ISBN 978-608-4904-85-4
1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Брсаковска, Слаѓана [автор] 4. Мисајлески, Зоран [автор] 5. Димовски, Томи [автор]
а) Математика - Задачи за средно образование
COBISS.MK-ID 111844106

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* С6 е продолжение на книгите Математички талент С1 – С5 и истата е наменета за талентираните ученици по математика од трета година од средното образование. Книгата, всушност, е вториот дел од збирката задачи за трета година и во овој дел се содржани 597 решени задачи и во шест одделни дела се обработени содржини од множества и комбинаторика, полиноми, неравенства, стереометрија, аналитичка геометрија и диференцни равенки.

Како и во книгите *Математички талент* С1 – С5 и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите повторно не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, задачите од диференцни равебки се распоредени во четири одделни делови, при што скоро сите делови се птопратени со соодветните теориски разгледувања.

Рецензентите, д-р Даниел Велинов, д-р Самоил Малчески и д-р Сања Костадинова, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје — Авторите

декември, 2019 г.

IV ДИФЕРЕНЦНИ РАВЕНКИ

1. ЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦНИ РАВЕНКИ

1. Ако $P(n)\neq 1$, за секој $n\in\mathbb{N}$, тогаш општото решение на хомогената линеарна диференцна равенка

$$x_{n+1}+[P(n)-1]x_n=0\,, \tag{1}$$

е дадено со

$$x_n=C\prod_{i=0}^{n-1}[1-P(i)]\,, \tag{2}$$

каде C е произволна константа. Докажи!

Решение. Ако $x_0=0$, тогаш од (1) следува дека $x_n=0$, за секој $n\in\mathbb{N}$, па затоа општото решение на (1) може да се запише во видот (2), при $C=0$.

Нека претпоставиме дека $x_0\neq 0$. Тогаш, од условот на задачата и од (1) следува дека $x_n\neq 0$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Ако во (1) последователно за n земеме вредности $0,1,...,k-1$ ги добиваме равенствата

$$\begin{aligned}
&x_1=[1-P(0)]x_0\\
&x_2=[1-P(1)]x_1\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_k=[1-P(k-1)]x_{k-1}
\end{aligned} \tag{3}$$

Ако од првото равенство го замениме x_1 во второто, а потоа x_2 во третото итн. го добиваме равенството

$$x_k=x_0\prod_{i=0}^{k-1}[1-P(i)]\,,$$

кое е од видот (2), за $C=x_0$.

2. Реши ги диференцните равенки

а) $x_{n+1}-(n+1)x_n=0$, и б) $x_{n+1}-qx_n=0$.

Решение. а) Имаме, $1-P(i)=1+i,\ i=0,1,...,n-1$, што според задача 1 значи дека општото решение на разгледуваната равенка е

$$x_n=C\prod_{i=0}^{n-1}(1+i)=C\cdot n!\,.$$

б) Имаме, $1-P(i)=q,\ i=0,1,...,n-1$, што според задача 1 значи дека општото решение на разгледуваната равенка е

$$x_n=C\prod_{i=0}^{n-1}q=Cq^n\,.$$

3. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1}-x_n=R(n)\,. \tag{1}$$

Решение. Ако во (1) последователно ставиме $n=0,1,2,...,k-1$ добиваме

$$x_1 - x_0 = R(0),$$
$$x_2 - x_1 = R(1), \qquad (2)$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$x_k - x_{k-1} = R(k-1)$$

Со собирање на левите и десните страни на равенствата (2) добиваме $x_k = x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} R(i)$, што значи дека општото решение на равенката (1) е дадено со $x_n = C + \sum_{i=0}^{n-1} R(i)$.

4. Ако $P(n) \neq 1$, за секој $n \in \mathbb{N}$, тогаш општото решение на нехомогената линеарна диференцна равенка

$$x_{n+1} + [P(n) - 1]x_n = Q(n), \qquad (1)$$

е дадено со

$$x_n = \left(C + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q(j)}{\prod_{i=0}^{j}[1-P(i)]}\right) \prod_{i=0}^{n-1}[1 - P(i)], \qquad (2)$$

каде C е произволна константа. Докажи!

Решение. Нека ставиме $x_n = y_n \prod_{i=0}^{n-1}[1 - P(i)], n = 0,1,\dots$. Со замена во (1) ја добиваме диференцната равенка

$$y_{n+1} \prod_{i=0}^{n}[1 - P(i)] + y_n[P(n) - 1]\prod_{i=0}^{n-1}[1 - P(i)] = Q(n),$$

која е еквивалентна на равенката

$$y_{n+1} - y_n = \frac{Q(n)}{\prod_{i=0}^{n}[1-P(i)]}.$$

Од задача 3 следува дека општото решение на последната равенка е дадено со

$$y_n = C + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q(j)}{\prod_{i=0}^{j}[1-P(i)]}.$$

Конечно, ако замениме во $x_n = y_n \prod_{i=0}^{n-1}[1 - P(i)]$ добиваме дека општото решение на равенката (1) е дадено со (2).

5. Реши ја диференцната равенка

$$x_{n+1} - ax_n = Q(n), \ a \in \mathbb{R} \text{ и } Q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Решение. Од задача 4 следува дека општото решение на дадената диференцна равенка е

$$x_n = \left(C + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{Q(j)}{a^{j+1}}\right)a^n = Ca^n + \sum_{j=0}^{n-1} Q(j)a^{n-j-1}, \ C \in \mathbb{R}.$$

6. Реши ги диференцните равенки

а) $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$.

б) $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 1$ и $x_1 = 4$.

в) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$, со почетни услови $x_0 = 1$ и $x_1 = 4$.

Решение. а) Корените на карактеристичната равенка $r^2 - 3r + 2 = 0$ се 2 и 1 и тие се различни. Низите $\{2^n\}$ и $\{1\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение на дадената равенка е $x_n = A \cdot 2^n + B$, $n = 0,1,2,\dots$. Константите A и B ги определуваме од почетните услови и го добиваме системот

$$\begin{cases} A \cdot 2^0 + B = 0 \\ A \cdot 2^1 + B = 1 \end{cases}$$

чие решение е $A = 1$ и $B = -1$. Според тоа, решението на дадената равенка е $x_n = 2^n - 1$, $n = 0,1,2,\dots$.

б) Карактеристичната равенка е $r^2 - 4r + 4 = 0$ и таа има двоен корен 2. Низите $\{2^n\}$ и $\{n2^n\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение на дадената равенка е $x_n = A \cdot 2^n + B \cdot n2^n$, $n = 0,1,2,\dots$. Константите A и B ги определуваме од почетните услови и го добиваме системот

$$\begin{cases} A \cdot 2^0 + B \cdot 0 \cdot 2^0 = 1 \\ A \cdot 2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1 = 4 \end{cases}$$

чие решение е $A = 1$ и $B = 1$. Според тоа, решението на дадената равенка е $x_n = 2^n + n2^n = 2^n(n+1)$, $n = 0,1,2,\dots$.

в) Карактеристичната равенка е $r^2 - 2r + 2 = 0$ и таа има коњугирано комплексни корени $1 - i$ и $1 + i$. Низите $\{(1-i)^n\}$ и $\{(1+i)^n\}$ се непропорционални решенија, па затоа општото решение на дадената равенка е

$$x_n = A(1-i)^n + B(1+i)^n, \ n = 0,1,2,\dots.$$

Константите A и B ги определуваме од почетните услови и го добиваме системот

$$\begin{cases} A(1-i)^0 + B(1+i)^0 = 1 \\ A(1-i)^1 + B(1+i)^1 = 4 \end{cases}$$

чие решение е $A = \frac{1+3i}{2}$ и $B = \frac{1-3i}{2}$. Според тоа, решението на дадената равенка е $x_n = \frac{1+3i}{2}(1-i)^n - \frac{1-3i}{2}(1+i)^n$, $n = 0,1,2,\dots$.

7. Реши ги системите диференцни равенки:

а) $\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + y_n \\ y_{n+1} = 5x_n - y_n \end{cases}$, со почетни услови $x_0 = 0, y_0 = 6$.

b) $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n \\ y_{n+1} = x_n + 4y_n \end{cases}$, со почетни услови $x_0 = 2, y_0 = 1$.

Решение. а) Последователно наоѓаме

$$y_n = x_{n+1} - 3x_n, \quad y_{n+1} = x_{n+2} - 3x_{n+1}.$$

Со замена во $y_{n+1} = 5x_n - y_n$ ја добиваме равенката

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} = 5x_n - x_{n+1} + 3x_n$$

која е еквивалентна на равенката

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - 8x_n = 0.$$

Карактеристичната равенка на последната диференцна равенка е $t^2 - 2t - 8 = 0$ и нејзини решенија се 4 и -2. Според тоа,

$$x_n = A \cdot 4^n + B \cdot (-2)^n.$$

Од $x_0 = 0, y_0 = 6$ и $x_1 = 3x_0 + y_0$ наоѓаме $x_1 = 6$. Значи коефициентите A и B го задоволуваат системот равенки

$$\begin{cases} A \cdot 4^0 + B \cdot (-2)^0 = 0 \\ A \cdot 4^1 + B \cdot (-2)^1 = 6 \end{cases}$$

чии решенија се $A = 1, B = -1$, па затоа $x_n = 4^n - (-2)^n$. За низата $\{y_n\}$ имаме

$$y_n = x_{n+1} - 3x_n = 4^{n+1} - (-2)^{n+1} - 3[4^n - (-2)^n] = 4^n + 5(-2)^n.$$

б) Последователно наоѓаме

$$y_n = 2x_n - x_{n+1}, \quad y_{n+1} = 2x_{n+1} - x_{n+2}.$$

Со замена во $y_{n+1} = x_n + 4y_n$ ја добиваме равенката

$$2x_{n+1} - x_{n+2} = x_n + 4(2x_n - x_{n+1})$$

која е еквивалентна на равенката

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0.$$

Карактеристичната равенка на последната диференцна равенка е $t^2 - 6t + 9 = 0$ и таа има двоен корен 3. Според тоа,

$$x_n = A \cdot 3^n + Bn \cdot 3^n.$$

Од $x_0 = 2, y_0 = 1$ и $x_1 = 2x_0 - y_0$ наоѓаме $x_1 = 3$. Значи коефициентите A и B го задоволуваат системот равенки

$$\begin{cases} A \cdot 3^0 + B \cdot 0 \cdot 3^0 = 2 \\ A \cdot 3^1 + B \cdot 1 \cdot 3^1 = 3 \end{cases}$$

чии решенија се $A = 2, B = -1$, па затоа $x_n = 3^n(2-n)$. За низата $\{y_n\}$ имаме

$$y_n = 2x_n - x_{n+1} = 2 \cdot 3^n(2-n) - 3^{n+1}[2-(n+1)] = 3^n(1+n).$$

8. Реши ја диференцната равенка:

а) $x_{n+1} = \frac{x_n - 2}{x_n + 4}$, при почетен услов $x_0 = 0$, и

б) $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 3}$, при почетен услов $x_0 = 1$.

Решение. При решавање на диференцни равенки од наведениот вид ја користиме следнава постапка: ако е дадена диференцната равенка

$$x_{n+1}=\frac{px_n+q}{rx_n+s} \tag{1}$$

Тогаш секое нејзино решение е определено со првиот член. Нека $x_0=a$. Го разгледуваме системот

$$\begin{cases} y_{n+1}=py_n+qz_n \\ z_{n+1}=ry_n+sz_n \end{cases}$$

кој ги задоволува условите $y_0=a$ и $z_0=1$. Ако $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$ се решенија на овој систем, тогаш ставаме $x_n=\frac{y_n}{z_n}$ и добиваме $x_0=\frac{y_0}{z_0}=a$ и

$$x_{n+1}=\frac{y_{n+1}}{z_{n+1}}=\frac{py_n+qz_n}{ry_n+sz_n}=\frac{p\frac{y_n}{z_n}+q}{r\frac{y_n}{z_n}+s}=\frac{px_n+q}{rx_n+s},$$

т.е. вака најдената низа е решение на диференцната равенка (1).

а) Прво го решаваме системот

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n-2z_n \\ z_{n+1}=y_n+4z_n \end{cases},$$

кој ги задоволува почетните услови $y_0=0, z_0=1$. Со елиминација на z_n и z_{n+1} ја добиваме равенката $y_{n+2}-5y_{n+1}+6y_n=0$. Нејзината карактеристична равенка е $t^2-5t+6=0$ и истата има решенија 2 и 3. Затоа, $y_n=A\cdot 2^n+B\cdot 3^n$. Ако се искористат почетните услови наоѓаме $A=2$ и $B=-2$, што значи $y_n=2\cdot 2^n-2\cdot 3^n$. За низата $\{z_n\}$ наоѓаме $z_n=\frac{y_n-y_{n+1}}{2}=-2^n+2\cdot 3^n$.

Конечно, $x_n=\frac{2\cdot 2^n-2\cdot 3^n}{-2^n+2\cdot 3^n}$.

б) Прво го решаваме системот

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n-z_n \\ z_{n+1}=y_n+3z_n \end{cases},$$

кој ги задоволува почетните услови $y_0=1, z_0=1$. Со елиминација на z_n и z_{n+1} ја добиваме равенката $y_{n+2}-4y_{n+1}+4y_n=0$. Нејзината карактеристична равенка е $t^2-4t+4=0$ и истата има двоен корен 2. Затоа, $y_n=A\cdot 2^n+Bn\cdot 2^n$. Ако се искористат почетните услови наоѓаме $A=1$ и $B=-1$, што значи $y_n=2^n-n2^n$. За низата $\{z_n\}$ наоѓаме $z_n=y_n-y_{n+1}=2^n+n2^n$.

Конечно, $x_n=\frac{2^n-n2^n}{2^n+n2^n}=\frac{1-n}{1+n}$.

9. Реши ја нехомогената диференцна равенка:

а) $x_{n+2}+x_{n+1}-x_n=n-1$, и б) $x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n=n^2$.

Решение. а) Општото решение на соодветната хомогена диференцна равенка е дадено со: $A(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^n+B(-1)^n(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^n$. Бидејќи десната страна на равенката е полином од прва степен и 1 не е корен на карактеристичната равенка $r^2+r-1=0$ добиваме дека $x_n = A_0 + A_1 n$. Со замена во равенката добиваме

$$A_1(n+2)+A_0+A_1(n+1)+A_0-A_1 n-A_0 = n-1$$

од каде после средувањето наоѓаме

$$(A_1-1)n+(3A_1+A_0+1)=0\ ,$$

т.е.

$$A_1-1=0 \text{ и } 3A_1+A_0+1=0\ .$$

Според тоа, $A_1=1, A_0=-4$, па затоа општото решение на равенката е

$$y_n = A(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2})^n + B(-1)^n(\tfrac{\sqrt{5}+1}{2})^n + n-4\ .$$

б) Општото решение на соодветната хомогена диференцна равенка е дадено со: $A+Bn$. Бидејќи десната страна на равенката е полином од втора степен и 1 е двоен корен на карактеристичната равенка $r^2-2r+1=0$ добиваме дека

$$x_n = A_0 n^2 + A_1 n^3 + A_2 n^4\ .$$

Аналогно како во задачата под а) наоѓаме $A_2=\frac{1}{12}, A_1=-\frac{1}{3}, A_0=\frac{5}{12}$, па затоа општото решение на равенката е

$$y_n = A+Bn+\tfrac{5}{12}n^2-\tfrac{1}{3}n+\tfrac{1}{12}\ .$$

10. Докажи дека за секој природен број n бројот $[(5+\sqrt{35})^{2n-1}]$ е делив со 10^n.

Решение. За диференцната равенка $a_{m+2}=10a_{m+1}+10a_m$, со почетни услови $a_0=2$, $a_1=10$, нејзината карактеристична равенка е $t^2-10t-10=0$, чии решенија се $t_{1/2}=5\pm\sqrt{35}$. Според тоа, решение на оваа равенка е низата

$$a_m = (5+\sqrt{35})^m + (5-\sqrt{35})^m\ .$$

Бидејќи $a_0=2$, $a_1=10$, со со индукција лесно се докажува дека за секој $m\in\mathbb{N}$ броевите a_{2m-1} и a_{2m} се деливи со 10^m. Но, $-1<5-\sqrt{35}<0$, па затоа за непарен број $2n-1$ важи $-1<(5-\sqrt{35})^{2n-1}<0$, па затоа бројот $[(5+\sqrt{35})^{2n-1}]=a_{2n-1}$ е делив со 10^n.

11. Дадена е низата $a_0=1, a_1=1, a_{n+1}=14a_n-a_{n-1}-4$, за $n\geq 1$. Докажи дека сите членови на оваа низа се точни квадрати.

Решение. Ја воведуваме смената $a_n=b_n+c$ и ја добиваме диференцната равенка $b_{n+1}=14b_n-b_{n-1}+12c-4$, од која константата c ќе ја определиме така што се анулира слободниот член. Според тоа, $c=\frac{1}{3}$ и диференцната равенка има облик

$$b_0=b_1=\tfrac{2}{3}, b_{n+1}=14b_n-b_{n-1}\ .$$

Нејзината карактеристична равенка е $t^2-14t+1=0$, со решенија $t_{1,2}=7\pm4\sqrt{3}$.

Според тоа,

$$b_n = \alpha(7-4\sqrt{3})^n + \beta(7+4\sqrt{3})^n. \quad (1)$$

Ако во (1) ставиме $n = 0,1$ го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} \alpha+\beta = \frac{2}{3} \\ \alpha(7-4\sqrt{3}) + \beta(7+4\sqrt{3}) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

чии решенија се $\alpha = \frac{2+\sqrt{3}}{6}, \beta = \frac{2-\sqrt{3}}{6}$. Според тоа,

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{2+\sqrt{3}}{6}(7-4\sqrt{3})^n + \tfrac{2-\sqrt{3}}{6}(7+4\sqrt{3})^n + \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{2+\sqrt{3}}{6}[(2-\sqrt{3})^2]^n + \tfrac{2-\sqrt{3}}{6}[(2+\sqrt{3})^2]^n + \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{1}{6}(2-\sqrt{3})^{2n-1} + \tfrac{1}{6}(2+\sqrt{3})^{2n-1} + \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{1}{6}[\tfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}]^{2n-1} + \tfrac{1}{6}[\tfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}]^{2n-1} + \tfrac{1}{3} \\ &= \tfrac{(\sqrt{3}-1)^{4n-2} + 2\cdot 2^{2n-1} + (\sqrt{3}+1)^{4n-2}}{3\cdot 2^{2n}} \\ &= \tfrac{(\sqrt{3}-1)^{4n-2} + 2\cdot(\sqrt{3}-1)^{2n-1}(\sqrt{3}+1)^{2n-1} + (\sqrt{3}+1)^{4n-2}}{3\cdot 2^{2n}} \\ &= (\tfrac{(\sqrt{3}-1)^{2n-1} + (\sqrt{3}+1)^{2n-1}}{\sqrt{3}\cdot 2^n})^2. \end{aligned}$$

Ќе докажеме дека $c_n = \frac{(\sqrt{3}-1)^{2n-1}+(\sqrt{3}+1)^{2n-1}}{\sqrt{3}\cdot 2^n}$ е цел број за секој природен број n. Имаме,

$$\begin{aligned} c_n &= \tfrac{(\sqrt{3}-1)^{2n-1}+(\sqrt{3}+1)^{2n-1}}{\sqrt{3}\cdot 2^n} = \tfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}(\tfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{2})^2 + \tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}(\tfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{2})^2 \\ &= \tfrac{3+\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^n + \tfrac{3-\sqrt{3}}{2}(2+\sqrt{3})^n. \end{aligned}$$

Бидејќи $2\pm\sqrt{3}$ се решенија на квадратната равенка $t^2-4t+1=0$, следува дека c_n е решение на рекурзијата $c_0 = c_1 = 1, c_{n+1} = 4c_n - c_{n-1}$. Оттука следува дека $c_n \in \mathbb{N}$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и $a_n = c_n^2$, што и требаше да се докаже.

12. Дадена е низата $a_n = n\sqrt{5} - [n\sqrt{5}], n = 1,2,3,...$. Определи ги најмалиот и најголемиот број меѓу броевите $a_1, a_2, ..., a_{2009}$.

Решение. Да ја разгледаме низата $\{b_n\}$ определена со $b_0 = 0, b_1 = 1$ и

$$b_n = 4b_{n-1} + b_{n-2}, n \geq 2.$$

Карактеристичната равенка на оваа низа е $t^2 - 4t - 1 = 0$ и нејзини решенија се $t_{1/2} = 2\pm\sqrt{5}$. Според тоа, за низата $\{b_n\}$ добиваме

$$b_n = \frac{(2+\sqrt{5})^n - (2-\sqrt{5})^n}{2\sqrt{5}}$$

и $b_6 = 1292$, $b_7 = 5473$.

За секој $k=1,2,...,5473$ постојат единствени природни броеви x_k и y_k такви што $1292k=5473y_k+x_k$ и $1\le x_k\le 5473$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(1292,5473)=1$, заклучуваме дека $(x_1,x_2,...,x_{5473})$ е пермутација на $(1,2,...,5473)$ и важи

$$y_1\le y_2\le ...\le y_{5473}=1292.$$

Нека $f(x)=x-[x]$. Имаме

$$\begin{aligned} f(x_k\sqrt{5}) &= f(1292k\sqrt{5}-5473y_k\sqrt{5}) \\ &= f\left(\tfrac{(2+\sqrt{5})^6-(2-\sqrt{5})^6}{2}k-\tfrac{(2+\sqrt{5})^7-(2-\sqrt{5})^7}{2}y_k\right) \\ &= f(-(2-\sqrt{5})^6k+(2-\sqrt{5})^7y_k). \end{aligned}$$

Бидејќи

$$0<(2-\sqrt{5})^6k-(2-\sqrt{5})^7y_k\le 5473(2-\sqrt{5})^6-1291(2-\sqrt{5})^7$$

добиваме дека $f(x_k\sqrt{5})=1-(2-\sqrt{5})^6k+(2-\sqrt{5})^7y_k$, па затоа вредностите на функцијата $f(x)$ строго се намалуваат кога k расте со природни вредности од 1 до 5473.

Но, $x_1=1292, x_{5473}=5473, x_{5472}=4181, x_{5471}=2889$ и $x_{5470}=1597$, па затоа бараните минимум и максимум се a_{1292} и a_{1597}, соодветно.

13. Дадена е низата $x_1=1, x_2=4$ и $x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n, n\ge 1$. Определи ги сите природни броеви m такви, што бројот $3x_n^2+m$ е точен квадрат за секој природен број n.

Решение. Карактеристичната равенка на диференцната равенка е

$$x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n,\ n\ge 1, \tag{1}$$

со почетни услови $x_1=1, x_2=4$ е $t^2-4t+1=0$, шии решенија се $x_{1/2}=2\pm\sqrt{3}$, Сорeд тоа, решение на равенката (1) е низа

$$x_n=A(2+\sqrt{3})^n+B(2-\sqrt{3})^n,$$

за некои константи A и B. Ако ги искористиме почетните услови $x_1=1,\ x_2=4$ наоѓаме $A=-B=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, т.е.

$$x_n=\tfrac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n].$$

Сега

$$3x_n^2+1=\tfrac{1}{4}((2+\sqrt{3})^{2n}+(2-\sqrt{3})^{2n})=[\tfrac{1}{2}((2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n)]^2=y_n^2,$$

каде

$$y_n=\tfrac{1}{2}((2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n)$$

е природен број. Според тоа, $m=1$ ги задоволува условите на задачата. Нека претпоставиме дека постои $m\ne 1$ кој исто така ги задоволува условите на задачата. Тогаш $3x_n^2+m=y_n^2+(m-1)=z_n^2$, ($z_n\ge 0$) е точен квадрат за секој n. Значи,

$$m-1=z_n^2-y_n^2=(z_n-y_n)(z_n+y_n)$$

има бесконечно многу делители, што не е можно. Конечно, единстено решение на задачата е $m=1$.

14. Низата $\{a_n\}_{n\geq 1}$ е дефинирана со $a_0=20, a_1=30, a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n, n\geq 0$. Определи ги сите ненулти цели броеви n за кои $1+5a_na_{n+1}$ е точен квадрат.

Решение. Од диференцната равенка следува

$$5a_na_{n+1}-5a_{n-1}a_n=5a_n(3a_n-2a_{n-1})=(4a_n-a_{n-1})^2-(a_{n-1}+a_n)^2$$
$$=(a_n+a_{n+1})^2-(a_{n-1}+a_n)^2.$$

Оттука следува

$$5a_na_{n+1}-(a_n+a_{n+1})^2=5a_{n-1}a_n-(a_{n-1}+a_n)^2=...=5a_0a_1-(a_0+a_1)^2=500\,.$$

Според тоа, $1+5a_na_{n+1}=(a_n+a_{n+1})^2+500$ е меѓу $(a_n+a_{n+1})^2$ и $(a_n+a_{n+1}+1)^2$ ако $a_n+a_{n+1}>250$, т.е. за $n\geq 3$. Бидејќи $a_2=70, a_3=180, a_4=470$, заклучуваме дека за $n\geq 3$ бројот $1+5a_na_{n+1}$ не е точен квадрат. Со проверка за $n=0,1,2$ добиваме дека $1+5a_na_{n+1}$ е точен квадрат само за $n=2$ и тогаш

$$1+5a_2a_3=1+5\cdot 70\cdot 180=251^2$$

15. Докажи, дека $(\frac{2}{3+\sqrt{5}})^n+(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n\in\mathbb{N}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. *Прв начин.* Нека $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Треба да докажеме дека $a^n+\frac{1}{a^n}\in\mathbb{Z}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

За $n=1$ и $n=2$ тврдењето важи бидејќи

$$a+\frac{1}{a}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{2(3-\sqrt{5})}{4}=3\in\mathbb{Z} \text{ и } a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})(a+\frac{1}{a})-2=9\in\mathbb{Z}\,.$$

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за секој $n\leq k$. Тогаш, за $n=k+1$ важи

$$a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}=(a^k+\frac{1}{a^k})(a+\frac{1}{a})-(a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}})$$

и како $a+\frac{1}{a}, a^{k-1}+\frac{1}{a^{k-1}}, a^k+\frac{1}{a^k}\in\mathbb{Z}$ следува дека $a^{k+1}+\frac{1}{a^{k+1}}\in\mathbb{Z}$, т.е. тврдењето важи $n=k+1$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој $n\in\mathbb{N}$.

Втор начин. Да ја разгледаме диференцната равенка $a_{n+2}=3a_{n+1}-a_n$, со почетни услови $a_0=2, a_1=3$. Јасно, решението на оваа диференцна равенка е низа чии членови се природни броеви. Понатаму, лесно се наоѓа дека низата

$$a_n=(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n+(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n=(\frac{2}{3+\sqrt{5}})^n+(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n$$

е решение на разгледуваната диференцна равенка. Конечно од претходните разгледувања следува дека $(\frac{2}{3+\sqrt{5}})^n+(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n\in\mathbb{N}$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

16. Нека $\{a_n\}, n>0$ и $\{b_n\}, n>0$ се низи зададени со $a_0=b_0=1$ и

$$a_n = 9a_{n-1} - 2b_{n-1},$$
$$b_n = 2a_{n-1} + 4b_{n-1},$$

за $n > 1$. Нека $c_n = a_n + b_n$, за $n > 0$. Докажи дека не постојат различни природни броеви *k*, *r* и *m* такви што $c_r^2 = c_k c_m$.

Решение. Од првата релација имаме $b_{n-1} = \frac{9}{2}a_{n-1} - \frac{1}{2}a_n$ и $b_n = \frac{9}{2}a_n - \frac{1}{2}a_{n+1}$. Со замена во втората релација добиваме $a_{n+1} - 13a_n + 40a_{n-1} = 0$. Карактеристичната равенбка на добиената диференцна равенка е $t^2 - 13t + 40 = 0$ и нејзини решенија се $t = 5$ и $t = 8$. Ако ги искористиме почетните услови $a_0 = 1$ и $a_1 = 7$, добиваме дека решението на добиената диференцна равенка $a_n = \frac{5^n + 2\cdot 8^n}{3}$, а оттука добиваме $b_n = \frac{2\cdot 5^n + 8^n}{3}$. Значи, $c^n = 5^n + 8^n$.

Нека претпоставиме дека $c_r^2 = c_k c_m$ за некои $k, m, r \in \mathbb{N}$. Од $8^n < c_n < 2\cdot 8^n$, следува $8^{k+m} < c_k c_m < 4\cdot 8^{k+m}$ и $8^{2r} < c_{2r} < 4\cdot 8^{2r}$, па затоа $k + m = 2r$. Сега,

$$0 = c_k c_m - c_r^2 = 8^k 5^m + 8^m 5^k - 2\cdot 8^r 5^r = (8^{k/2} 5^{m/2} - 8^{m/2} 5^{k/2})^2$$

од каде следува $m = k = r$.

2. ТРИАГОЛНИ БРОЕВИ

1. Реши ја диеференцната равнка:

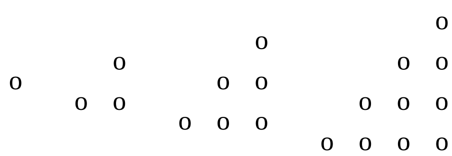
$$t_{n+1} - t_n = n + 1, \tag{1}$$

со почетен услов $t_0 = 0$.

Решение. Според задача 1.3 решението на дадената равенка е дадено со формулата $t_n = t_0 + \sum_{i=0}^{n-1} R(i)$, каде $R(i) = i + 1$, за $i = 1, 2, ..., n$. Тоа значи дека раешението на равенката (1) е

$$t_n = 0 + \sum_{i=0}^{n-1}(i+1) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Всушност, за $n \geq 1$ решението на равенката (1) го дава бројот на точките, распоредени во облик на триаголник (цртеж десно), па затоа оваа низа ја нарекуваме *низа триаголни броеви*. Јасно, од (1) следува дека секој природен број поголем од 1 е разлика на два триаголни броја. Докажи!



2. Докажи дека збирот на два последователни триаголни броја е квадрат на некој природен број и обратно, секој точен квадрат поголем од 1 може да се запише како збир на два триаголни броја.

Решение. За секој природен број $n > 1$ важи:

$$t_n + t_{n-1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2+n+n^2-n}{2} = n^2 ,$$

од каде што следува тврдењето на задачата.

3. Докажи дека разликата на квадратите на два последователни триаголни броеви е куб на природен број.

Решение. Од претходните две задачи следува

$$t_n^2 - t_{n-1}^2 = (t_n - t_{n-1})(t_n + t_{n-1}) = n \cdot n^2 = n^3 .$$

4. Докажи дека збирот на квадратите на два последователни триаголни броја е триаголен број.

Решение. За секој природен број n имаме

$$t_n^2 + t_{n+1}^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2}{2} \bullet \frac{n^2+(n+2)^2}{2} = \frac{(n+1)^2}{2} \cdot \frac{n^2+n^2+4n+4}{2}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{2} \cdot (n^2 + 2n + 2) = \frac{(n+1)^2}{2}[(n+1)^2 + 1] = \frac{(n+1)^2[(n+1)^2+1]}{2} = t_{(n+1)^2} ,$$

што и требаше да се докаже.

5. Докажи дека двојниот производ на два последователни триаголни броја е триаголен број.

Решение. За секој природен број n важи:

$$2t_n t_{n-1} = 2\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n^2+2n)(n+1)^2}{2} = \frac{(n^2+2n)(n^2+2n+1)}{2} = t_{n^2+2n} .$$

6. Докажи дека во низата триаголни броеви има само еден прост број.

Решение. Секој триаголен број е полупроизвод на два последователни природни броја, т.е. $t_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Да ги разгледаме случаите кога n е парен, односно непарен број.

Ако $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, тогаш $t_n = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(k+1)$, а тоа е сложен број, освен за $k = 1$, т.е. $n = 2, t_2 = 3$.

Ако $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, тогаш

$$t_n = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = \frac{2(2k+1)(k+1)}{2} = (k+1)(2k+1) ,$$

т.е. t_n е сложен број.

7. Докажи дека природниот број m е триаголен ако и само ако $8m+1$ е точен квадрат на некој природен број.

Решение. Нека m е триаголен број, т.е. нека за некој $n \in \mathbb{N}$ важи $m = t_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Тогаш

$$8m + 1 = \frac{8n(n+1)}{2} + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2 ,$$

т.е. $8m+1$ е квадрат на природен број.

Обратно, ако $8m+1$ е точен квадрат, тогаш тој е квадрат на непарен број, т.е. за некој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$8m+1=(2n+1)^2=4n^2+4n+1=\frac{8n(n+1)}{2}+1$$

од каде наоѓаме $m=\frac{n(n+1)}{2}$. Според тоа, m е триаголен број.

8. Докажи дека во низата триаголни броеви има бесконечно многу точни квадрати.

Решение. Забележуваме дека триаголните броеви 1 и 36 се точни квадрати. Тоа се првиот и осмиот член во низата триаголни броеви. Ќе докажеме дека, ако t_n е точен квадрат, тогаш $t_{4n(n+1)}$ е точен квадрат. Навистина, ако $t_n=\frac{n(n+1)}{2}=k^2$, тогаш $4n(n+1)=8k^2$ и

$$t_{4n(n+1)}=t_{8k^2}=\frac{8k^2(8k^2+1)}{2}=4k^2(8k^2+1)=(2k)^2[4n(n+1)+1]$$
$$=(2k)^2(2n+1)^2=[2k(2n+1)]^2$$

т.е. $t_{4n(n+1)}$ е точен квадрат.

Забелешка. Генерирањето на сите точни квадрати на низата триаголни броеви е можно со следнава рекурентна формула:

$$t_1=1,\quad t_x=y^2,\quad t_{3x+4y+1}=(2x+3y+1)^2 .$$

Еве ги првите неколку точни квадрати од оваа низа:

$$t_1=1^2,\quad t_8=6^2,\quad t_{49}=35^2,\quad t_{288}=204^2 .$$

9. Со $[x]$ да го означиме најголемиот природен број кој е помал или еднаков на x. Ако m е триаголен број, т.е. $m=t_n$, тогаш $n=[\sqrt{2m}]$. Докажи!

Решение. Од $m=\frac{n(n+1)}{2}$ следува $2m=n^2+n$, т.е.

$$n^2<2m<n^2+2n+1=(n+1)^2,$$

па затоа

$$n<\sqrt{2m}<n+1.$$

Оттука следува дека n е најголемиот цел број кој е помал од $\sqrt{2m}$, па затоа $n=[\sqrt{2m}]$.

10. Нека бројот $x=0{,}136051865...$ е формиран од цифрите на единиците на триаголните броеви. Дали x е рационален број?

Решение. Да запишеме неколку триаголни броеви: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 235, 276, 300, 325, 351, 378, ... Според тоа, првите 27 децимални цифри на бројот x се:

$$x=0{,}136051865568815003100136051 8... .$$

Забележуваме дека постои период од 20 цифри, т.е. дека меѓу испишаните броеви t_n и t_{n+20}, за $n=1,2,3,4,5,6,7$ имаат иста последна цифра. Ќе докажеме дека споменатото својство важи за секој природен број n. За таа цел доволно е да докажеме дека за секој природен број n разликата $t_{n+20}-t_n$ е делива со 10. Имаме

$$t_{n+20} - t_n \frac{(n+20)(n+20+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = 10(2n+21)\,.$$

Конечно, бројот x има периодичен децимален запис, што значи дека тој е рационален број.

11. Ако $t_1, t_2, ..., t_n, ...$ е низата триаголни броеви, тогаш

$$A = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + ... + \frac{1}{t_n} + ... = 2\,.$$

Решение. За секој природен број k имаме $t_k = \frac{k(k+1)}{2}$, па затоа

$$\frac{1}{t_k} = \frac{2}{k(k+1)} = 2\frac{k+1-k}{k(k+1)} = 2[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}]\,.$$

Според тоа,

$$A = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} + ... + \frac{1}{t_n} + ... = 2[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}] + 2[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}] + 2[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}] + ... + 2[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}] + ...$$

$$= 2[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + ...] = 2$$

што и требаше да се докаже.

12. Докажи дека сите броеви кои во систем со основа 9 се запишуваат само со цифрата 1 се триаголни броеви.

Решение. Треба да докажеме дека броевите

$$1_{(9)},\quad 11_{(9)},\quad 111_{(9)},\quad 1111_{(9)},\quad 11111_{(9)},\quad 111111_{(9)} \qquad (1)$$

се триаголни броеви. Имаме

$$\underbrace{111...11}_{k}{}_{(9)} = 1 + 9 + 9^2 + ... + 9^{k-1} = \frac{9^k - 1}{9-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^k - 1}{2} \cdot \frac{3^k + 1}{2}.$$

Но, $3^k - 1$ и $3^k + 1$ се последователни парни броеви, т.е. $3^k - 1 = 2n$ и $3^k + 1 = 2n + 2$, за некој $n \in \mathbb{N}$, па затоа

$$\underbrace{111...11}_{k \text{ edinici}}{}_{(9)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^k - 1}{2} \cdot \frac{3^k + 1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n(2n+2)}{4} = \frac{n(n+1)}{2}$$

што значи дека секој член од низата (1) е триаголен број.

13. Докажи дека секој триаголен број, освен t_1 и t_3, може да се запише како збир на три, не задолжително различни триаголни броеви.

Упатство. Прво докажи ги следниве равенства:

а) $t_{3k+1} = t_k + t_{2k} + t_{2k+1}$, за секој $k \in \mathbb{N}$,

б) $t_{3k+2} = t_{k+1} + t_{2k+1} + t_{2k+1}$, за секој $k \in \mathbb{N}$,

в) $t_{3k} = t_{k-1} + t_{2k} + t_{2k}$, за секој $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Сега, за $n \geq 4$ тврдењето следува од равенствата а), б) и в), а за $n = 2$ имаме

$$t_2 = t_1 + t_1 + t_1\,.$$

14. Докажи дека постои бесконечна низа триаголни броеви, таква што сите нејзини делумни збирови се триаголни броеви.

Решение. Нека претпоставиме дека таква низа постои и дека сме конструирале дел од бараната низа:

$$t_{k_1}, t_{k_2}, t_{k_3}, t_{k_4}, ..., t_{k_n} \qquad (1)$$

при што

$$t_{k_1} + t_{k_2} + t_{k_3} + t_{k_4} + ... + t_{k_n} = t_{k_{n+1}}.$$

Ако на низата (1) го додадеме триаголниот број $t_{t_{k_{n+1}}-1}$ добиваме низа со истото својство. Навистина, бидејќи

$$t_n + (m+1) = t_{m+1}$$

при $m = t_{k_{n+1}} - 1$ имаме

$$t_{k_1} + t_{k_2} + t_{k_3} + t_{k_4} + ... + t_{k_n} + t_{t_{k_{n+1}}-1} = t_{k_{n+1}} + t_{t_{k_{n+1}}-1} = +t_{t_{k_{n+1}}}.$$

На прв поглед изгледа дека оваа конструкција е тешка поради индексите. Но, не е така. Еве пример:

$$t_3 = 6, \quad t_5 = 15, \quad t_{20} = 210, ...$$

Кој е следниот член на оваа низа? Бидејќи $t_3 + t_5 + t_{20} = 231$ од претходно кажаното следува дека четвртиот член на низата е $t_{230} = 26565$, т.е. низата е

$$t_3, t_5, t_{20}, t_{230}, ...$$

Јасно, петтиот член на низата е t_{26564}.

Забелешка. Може да се избере бесконечна низа триаголни броеви, таква што сите нејзини делумни збирови се точни квадрати. На пример, таква е низата:

$$t_1, t_{2\cdot 3^0}, t_{2\cdot 3^1}, t_{2\cdot 3^2}, ..., t_{2\cdot 3^k}, ...$$

за која

$$\begin{aligned}
t_1 + t_{2\cdot 3^0} + t_{2\cdot 3^1} + t_{2\cdot 3^2} + ... + t_{2\cdot 3^k} &= 1 + 3^0(2\cdot 3^0 + 1) + 3^1(2\cdot 3^1 + 1) + 3^2(2\cdot 3^2 + 1) + ... + 3^k(2\cdot 3^k + 1) \\
&= 1 + (3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^k) + 2(3^0 + 3^2 + 3^4 + ... + 3^{2k}) \\
&= 1 + \tfrac{3^{k+1}-1}{2} + 2\cdot\tfrac{3^{2k+2}-1}{9^2-1} \\
&= 1 + \tfrac{3^{k+1}-1}{2} + \tfrac{3^{2k+2}-1}{4} \\
&= \tfrac{3^{2k+2}+2\cdot 3^{k+1}+1}{4} = (\tfrac{3^{k+1}+1}{2})^2.
\end{aligned}$$

3. ФИБОНАЧИЕВИ БРОЕВИ

1. Реши ја диференцната равенка

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \qquad (1)$$

со почетни услови $f_0 = 0,\ f_1 = 1$.

Решение. Равенката (1) е линеарна диференцна равенка од втор ред со константни коефициенти и низата која е нејзино решение е позната како Фибоначиева низа (Фибоначиеви броеви). Нејзината карактеристична тавенка е $r^2 - r - 1 = 0$, со решенија

$$a = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } b = \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Според тоа, општото решение на равенката (1) е дадено со

$$f_n = A(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n + B(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n .$$

Од почетните услови $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ го добиваме системот равенки

$$A\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} + B\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \text{ и } A + B = 0$$

чие решение е $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Според тоа, решението на (25) е дадено со

$$f_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}[(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\tfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n]. \qquad (2)$$

Забелешка. Формулата (2) воп литературата е позната како формула на Бине.

2. Докажи дека за Фибоначиевите броеви важи:

а) $f_{n+m} = f_{n-1}f_m + f_n f_{m+1}$, $n \ge 2$ б) $f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2$,

в) $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$, $n \ge 2$ г) $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$, $n \ge 2$

д) $f_{n-m} f_{n+m} - f_n^2 = (-1)^{n+m-1} f_m^2$, $n > m$ ѓ) $f_n^4 - f_{n-2} f_{n-1} f_{n+1} f_{n+2} = 1$.

Решение. а) За $n = 2$ и $n = 3$ формулата е точна бидејќи

$$f_{m+2} = f_{m+1} + f_m = f_{m+1} f_1 + f_m f_2 \text{ и}$$

$$f_{m+3} = f_{m+2} + f_{m+1} = (f_{m+1} + f_m) + f_{m+1} = f_2 f_m + 2 f_{m+1} = f_2 f_m + f_3 f_{m+1}$$

Нека претпоставиме дека формулата е точна за $n = k$ и $n = k+1$, т.е.

$$f_{k+m} = f_{k-1} f_m + f_k f_{m+1} \text{ и } f_{k+1+m} = f_k f_m + f_{k+1} f_{m+1} .$$

Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$f_{k+m} + f_{k+1+m} = (f_k + f_{k-1}) f_m + (f_k + f_{k+1}) f_{m+1},$$

т.е.

$$f_{k+2+m} = f_{k+1} f_m + f_{k+2} f_{m+1} .$$

Според тоа, формулата е точна за $n = k+2$, па затоа тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

б) Во задачата под а) наместо n стави $n+1$, а наместо m стави n.

в) Ако во формулата од задачата под а) наместо m ставиме n добиваме

$$f_{2n} = f_{n-1} f_n + f_n f_{n+1} = f_n (f_{n-1} + f_{n+1})$$

и како $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$ со замена во последното равенство го добиваме бараното равенство.

г) Ако во формулата од задачата под а) наместо n ставиме $2n$, а наместо m ставиме n добиваме $f_{3n} = f_{2n-1} f_n + f_{2n} f_{n+1}$. Со помош на формулите од задачите под б) и в) последното равенство може да се трансформира на следниот начин:

$$\begin{aligned} f_{3n} &= f_{2n-1} f_n + f_{2n} f_{n+1} = (f_n^2 + f_{n-1}^2) f_n + (f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2) f_{n+1} \\ &= f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^2 (f_{n+1} - f_n) = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3 . \end{aligned}$$

д) Точноста на формулата за $n = m+1$ следува од формулата под б). Нека претпоставиме дека за $n = k$ важи

$$f_{k-m} f_{k+m} - f_k^2 = (-1)^{k+m-1} f_m^2 .$$

Од б) следува $f_{2k+1} = f_k^2 + f_{k+1}^2$, а од а) следува

$$f_{2k+1} = f_{k-m} f_{k+m} + f_{k+1-m} f_{k+1+m} \cdot$$

Од последните две равенства и од индуктивната претпоставка добиваме

$$f_{k+1-m} f_{k+1+m} - f_{k+1}^2 = -(f_{k-m} f_{k+m} - f_k^2) = -(-1)^{k+m-1} f_m^2 = (-1)^{k+m} f_m^2 ,$$

т.е. равенството важи за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $n \geq m+1$.

ѓ) Ако во формулата од задачата под д) ставиме $m = 1$ и $m = 2$ добиваме

$$f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n f_1^2 \text{ и } f_{n-2} f_{n+2} - f_n^2 = (-1)^{n+1} f_2^2 ,$$

што значи дека

$$f_{n-1} f_{n+1} = f_n^2 + (-1)^n \tag{1}$$

и

$$f_{n-2} f_{n+2} = f_n^2 - (-1)^n . \tag{2}$$

Ако ги помножиме последните две равенства го добиваме равенството

$$f_{n-2} f_{n-1} f_{n+1} f_{n+2} = f_n^4 - 1 ,$$

кое е еквивалентно на бараното равенство.

Забелешка. Идентитетот (1) во литературата е познат како идентитет на Косини.

3. Докажи дека за Фибоначиевите броеви важи:

а) $\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$,

б) $\sum_{i=1}^{n} (n-i+1) f_i = f_{n+4} - (n+3)$

в) $\sum_{i=1}^{n} i f_i = n f_{n+2} - f_{n+3} + 2$,

г) $\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}$

д) $\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$,

ѓ) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i f_i = (-1)^n f_{n-1} - 1$.

Решение. а) Од $f_k = f_{k+2} - f_{k+1}$ следува

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} (f_{i+2} - f_{i+1}) = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1 .$$

б) Од задачата под а) имаме

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (n-i+1) f_i &= f_1 + (f_1 + f_2) + (f_1 + f_2 + f_3) + \ldots + (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)\\ &= (f_3 - 1) + (f_4 - 1) + (f_5 - 1) + \ldots + (f_{n+2} - 1)\\ &= \sum_{i=1}^{n+2} f_i - n - f_1 - f_2 = f_{n+4} - (n+3).\end{aligned}$$

в) Од задачите под а) и б) следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i f_i &= (n+1) \sum_{i=1}^{n} f_i - \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) f_i = (n+1)(f_{n+2} - 1) - (f_{n+4} - (n+3))\\ &= n f_{n+2} - (f_{n+4} - f_{n+2}) + 2 = n f_{n+2} - f_{n+3} + 2.\end{aligned}$$

г) Имаме $f_{2k-1} = f_{2k} - f_{2k-2}$ па затоа:

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = \sum_{i=1}^{n} (f_{2i} - f_{2i-2}) = f_{2n} - f_0 = f_{2n}.$$

д) Имајќи ги предвид равенствата под а) и г) добиваме

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = \sum_{i=1}^{2n} f_i - \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n+2} - 1 - f_{2n} = f_{2n+1} - 1.$$

ѓ) Од $(-1)^k f_k = (-1)^k f_{k-1} + (-1)^k f_{k-2} = (-1)^k f_{k-1} - (-1)^{k-1} f_{k-2}$ следува

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (-1)^i f_i &= (-1)^1 f_1 + \sum_{i=2}^{n} [(-1)^i f_{i-1} - (-1)^{i-1} f_{i-2}] \\ &= -f_1 + (-1)^n f_{n-1} - (-1)^1 f_0 \\ &= (-1)^n f_{n-1} - 1,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

4. Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}_0$ важи

$$\text{NZD}(f_n, f_{n+1}) = 1. \qquad (1)$$

Решение. За $n = 0$ имаме $\text{NZD}(f_0, f_1) = \text{NZD}(0,1) = 1$, т.е. равенството е точно.

Нека претпоставиме дека (1) е точно за $n = k$, т.е. дека $\text{NZD}(f_k, f_{k+1}) = 1$. За $n = k+1$ добиваме

$$\text{NZD}(f_{k+1}, f_{k+2}) = \text{NZD}(f_{k+1}, f_{k+2} - f_{k+1}) = \text{NZD}(f_{k+1}, f_k) = 1.$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека равенството (1) е точно за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

5. Докажи дека

$$f_1^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}.$$

Решение. Точни се равенствата

$$f_1^2 = f_1 f_2 = 1 \text{ и } f_k^2 = f_k f_k = f_k (f_{k+1} - f_{k-1}) = f_k f_{k+1} - f_{k-1} f_k,$$

за секој $k = 2, \dots, n$. Според тоа:

$$f_1^2 + \dots + f_n^2 = f_0 f_1 + f_1 f_2 + (f_2 f_3 - f_1 f_2) + \dots + (f_n f_{n+1} - f_{n-1} f_n) = f_n f_{n+1},$$

што и требаше да се докаже.

6. Докажи дека за секои $m, n \geq 1$ важи $f_m \mid f_{mn}$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n.

За $n = 1$ имаме $f_m \mid f_m = f_{m \cdot 1}$. Нека претпоставиме дека за секој $n \in \{2, 3, \dots, k\}$ важи $f_m \mid f_{mn}$. Според задача 2 а) за $n = k+1$ важи

$$f_{m(k+1)} = f_{mk+m} = f_{mk-1} f_m + f_{mk} f_{m+1}.$$

Јасно, $f_m \mid f_{mk-1} f_m$, а од индуктивната претпоставка следува $f_m \mid f_{mk} f_{m+1}$, што значи дека $f_m \mid f_{mk-1} f_m + f_{mk} f_{m+1}$, т.е. $f_m \mid f_{m(k+1)}$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека за секои $m, n \geq 1$ важи $f_m \mid f_{mn}$.

7. Докажи дека ако $m = nq + r$, $m, n > 0$, тогаш $\mathrm{NZD}(f_m, f_n) = \mathrm{NZD}(f_n, f_r)$.

Решение. Според задача 2 а) важи $f_{nq+r} = f_{nq-1} f_r + f_{nq} f_{r+1}$. Понатаму, од задача 6 имаме $f_{nq} = kf_n$ за некој $k \in \mathbb{N}$. Сега од задача 4 следува

$$1 = \mathrm{NZD}(f_{nq}, f_{nq-1}) = \mathrm{NZD}(kf_n, f_{nq-1}),$$

па затоа важи $\mathrm{NZD}(f_n, f_{nq-1}) = 1$.

Конечно, од претходните разгледувања, задача 4 и својствата на NZD добиваме

$$\begin{aligned}\mathrm{NZD}(f_m, f_n) &= \mathrm{NZD}(f_{nq+r}, f_n) = \mathrm{NZD}(f_{nq-1} f_r + f_{nq} f_{r+1}, f_n)\\ &= \mathrm{NZD}(f_{nq-1} f_r + f_{nq} f_{r+1} - kf_n f_{r+1}, f_n)\\ &= \mathrm{NZD}(f_{nq-1} f_r + f_{nq} f_{r+1} - f_{nq} f_{r+1}, f_n)\\ &= \mathrm{NZD}(f_{nq-1} f_r, f_n) = \mathrm{NZD}(f_r, f_n) = \mathrm{NZD}(f_n, f_r),\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

8. Докажи дека $\mathrm{NZD}(f_m, f_n) = f_{\mathrm{NZD}(m,n)}$.

Решение. Нека $m = nq_1 + r_1$. Од задача 7 следува $\mathrm{NZD}(f_m, f_n) = \mathrm{NZD}(f_n, f_{r_1})$. Нека $n = r_1 q_2 + r_2$. Тогаш важи $\mathrm{NZD}(f_n, f_{r_1}) = \mathrm{NZD}(f_{r_1}, f_{r_2})$. Продолжувајќи ја постапката како во Евклидовиот алгоритам добиваме дека постои природен број k таков што $r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k$ и $r_{k-1} = r_k q_{k+1}$. Притоа важи $r_k = \mathrm{NZD}(m, n)$. Бидејќи $r_k \mid r_{k-1}$, од задача 6 следува $f_{r_k} \mid f_{r_{k-1}}$, па затоа

$$\mathrm{NZD}(f_m, f_n) = \mathrm{NZD}(f_{r_{k-1}}, f_{r_k}) = f_{r_k} = f_{\mathrm{NZD}(m,n)}$$

што и требаше да се докаже.

9. Нека $m, n \geq 1$. Докажи дека $f_m \mid f_n$ ако и само ако $m \mid n$.

Решение. Ако $m \mid n$, тогаш од задача 6 следува дека $f_m \mid f_n$.

Обратно, нека $f_m \mid f_n$. Тогаш од задача 8 следува

$$f_m = \mathrm{NZD}(f_m, f_n) = f_{\mathrm{NZD}(m,n)},$$

па затоа $m = \mathrm{NZD}(m, n)$, што значи дека $m \mid n$.

10. Докажи дека бројот f_n е најблизок природен број на бројот $\frac{a^n}{\sqrt{5}}$, каде $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение. Според задача 1 имаме $f_n = \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, каде $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Сега тврдењето на задачата следува од неравенството

$$\left| f_n - \frac{a^n}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{a^n - b^n}{\sqrt{5}} - \frac{a^n}{\sqrt{5}} \right| = \frac{|b|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}.$$

11. Докажи дека

$$x^n = (x^2 - x - 1)(f_1 x^{n-2} + f_2 x^{n-3} + ... + f_{n-2} x + f_{n-1}) + f_n x + f_{n-1}. \qquad (1)$$

Решение. Решацијата (1) ја добиваме ако ја искористиме релацијата

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n,$$

со почетни услови $f_0 = 0,\ f_1 = 1$.

Забелешка. Ако во (1) ставиме $x = 1$ ја добиваме формулата за збирот на првите n Фибоначиеви броеви.

12. Ако $x^2 = x + 1, n \geq 2$, докажи дека за секој природен број n е точно равенството $x^n = f_n x + f_{n-1}$, каде $\{f_n\}$ е низата на Фибоначи.

Решение. Задачата ќе ја решиме со математичка индукција по n. За $n = 1$ и $n = 2$ добиваме

$$x^1 = f_1 x + f_0 = x \text{ и } x^2 = f_2 x + f_1 = x + 1,$$

т.е. тврдењето е точно.

Нека претпоставиме дека за некој за $n > 2$ важи $x^{n-1} = f_{n-1} x + f_{n-2}$. Тогаш

$$\begin{aligned} x^n &= x \cdot x^{n-1} = x(f_{n-1} x + f_{n-2}) = x^2 f_{n-1} + x f_{n-2} = (x+1) f_{n-1} + x f_{n-2} \\ &= x(f_{n-1} + f_{n-2}) + f_{n-1} == x f_n + f_{n-1}. \end{aligned}$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето е точно за секој природен број n.

13. Дали постојат бесконечно многу парови природни броеви (m, n) такви што $m \mid (n^2 + 1)$ и $n \mid (m^2 + 1)$.

Решение. Ќе докажеме, дека сите парови од видот $(n, m) = (f_{2k-1}, f_{k+1})$, каде f_s е $s-$тиот број на Фибоначи го задоволува условот на задачата. Со индукција по $k \geq 1$ лесно се докажува, дека за броевите на Фибоначи е точно равенството $f_{2k+1}^2 + 1 = f_{2k-1} f_{2k+3}$.

Навистина, $f_3^2 + 1 = 2^2 + 1 = f_1 f_5$ и ако $f_{2k-1}^2 + 1 = f_{2k-3} f_{2k+1}$, тогаш бидејќи

$$f_{2k+3} = f_{2k+2} + f_{2k+1} = 2 f_{2k+1} + f_{2k} = 3 f_{2k+1} - f_{2k-1},$$

добиваме

$$\begin{aligned} f_{2k-1} f_{2k+3} &= f_{2k-1}(3 f_{2k+1} - f_{2k-1}) = 3 f_{2k-1} f_{2k+1} - f_{2k-1}^2 \\ &= 3 f_{2k-1} f_{2k+1} - (f_{2k-3} f_{2k+1} - 1) = f_{2k+1}(3 f_{2k-1} - f_{2k-3}) + 1 \\ &= f_{2k+1}^2 + 1. \end{aligned}$$

Од добиенорто равенство следува, дека

$$f_{2k-1} \mid (f_{2k+1}^2 + 1) \text{ и } f_{2k+1} \mid (f_{2k-1}^2 + 1).$$

14. Нека $\{f_n\}$ е низата на Фибоначи.

а) Докажи дека $10 \mid f_{2010}$.

б) Докажи дека $4 \nmid f_{1005}$.

Решение. а) Од $15|2010$ и задача 6 следува $f_{15} | f_{2010}$. Но, $f_{15}=610$ и како $10| f_5$ заклучуваме дека $10| f_{2010}$.

б) Според задача 8 важи $\mathrm{NZD}(f_m, f_n)=f_{\mathrm{NZD}(m,n)}$, што значи дека

$$\mathrm{NZD}(f_6, f_{1005})=f_{\mathrm{NZD}(6,1005)}=f_3=2, \text{ т.е. } \mathrm{NZD}(8, f_{1005})=2$$

па затоа $4 \nmid f_{1005}$.

15. Нека $m,n\in\mathbb{N}$, $1\le m,n\le 1981$ се такви што $|n^2-mn-m^2|=1$. Определи ја најголемата вредност на изразот m^2+n^2.

Решение. Прво во множеството природни броеви ќе ја решиме равенката $|n^2-mn-m^2|=1$. Ако $m=n$ добиваме $m=n=1$. Ако паротт (m,n), $m\ne n$ е решение на горната равенка тогаш важи $n^2-mn-m^2=1$ или $m^2+mn-n^2=1$. Од $n^2=m^2+mn+1$ следува дека $n>m$. Од втората равенка следува $n-m=\frac{mn-1}{m+n}>0$ т.е. $n>m$. Значи, во секој случај постои $k>0$ таков што $n=m+k$ и ако замениме во $n^2-mn-m^2=1$ добиваме дека $k^2+km-m^2=1$, т.е. парот (k,m) е решение на равенката. Според тоа, ако парот $(m,k+m)$ е решение на равенката, тогаш и парот (k,m) е решение на равенката. Важи и обратното, што значи дека ако парот (k,m) е решение на горната равенка, тогаш и парот $(m,k+m)$ е решение на оваа равенка. Ова значи дека парот $(n-m,m)$ индуцира нов пар (m,n). Сега, парот $(1,1)$ е решение на равенката, па затоа последователно добиваме дека паровите

(1,1), (1,2), (2,3), (3,2), (5,8), (8,13), ..., (987, 1597), (1597, 2584), ...

се решенија на дадената равенка. Според тоа, решенија на дадената равенка се паровите составени од последователчните членови на низата на Фибоначи. Јасно, најголемата вредност на изразот m^2+n^2 при дадените услови е 987^2+1597^2.

16. Дадени се осумнаесет отсечки со должини x_i, $i=1,2,3,...,18$, такви што $1\le x_i\le 1997$, $i=1,2,3,...,18$. Докажи дека меѓу овие отсечки постојат три со кои може да се конструира триаголник.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека должините на отсечките се такви што $1\le x_1\le x_2\le ...\le x_{18}\le 1997$. Нека претпоставиме дека меѓу дадените отсечки не постојат три од кои може да се конструира триаголник. Тогаш $x_i\ge x_{i-1}+x_{i-2}$, $i=3,4,5,...,18$, и бидејќи $x_1,x_2\ge 1$, добиваме дека должината на осумнаесеттата отсечка ќе биде поголема или еднаква на осумнаесеттиот член на низата на фибоначи:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597,2584.$$

Според тоа, $x_{18}\ge 2584$, што противречи на $1\le x_i\le 1997$, $i=1,2.3,4,5,...,18$. Значи, меѓу дадените отсечки постојат три од кои може да се конструира триаголник.

3. НЕЛИНЕАРНИ ДИФЕРЕНЦНИ РАВЕНКИ

1. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1} = x_n(2 - cx_n)$, со почетен услов $x_0 = a$

Решение. Ако $c = 0$, тогаш дадената равенка има облик $x_{n+1} = 2x_n$, т.е. таа е линеарна и нејзиното решение е $x_n = 2^n a$.

Нека $c \neq 0$. Равенката последователно ја трансформираме:

$$cx_{n+1} = cx_n(2 - cx_n) \Leftrightarrow cx_{n+1} = (1-(1-cx_n))(1+(1-cx_n)) \Leftrightarrow$$

$$cx_{n+1} = 1-(1-cx_n)^2 \Leftrightarrow 1-cx_{n+1} = (1-cx_n)^2 .$$

Од последната равенка, со помош на математичка индукција наоѓаме

$$1 - cx_n = (1-ca)^{2^n} ,$$

од каде следува $x_n = \frac{1-(1-ca)^{2^n}}{c}$.

2. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{c}{x_n})$, со почетен услов $x_0 = a$.

Решение. Забележуваме дека дека

$$x_{n+1} - \sqrt{c} = \frac{1}{2}\frac{(x_n-\sqrt{c})^2}{x_n} \text{ и } x_{n+1} + \sqrt{c} = \frac{1}{2}\frac{(x_n+\sqrt{c})^2}{x_n} .$$

Според тоа,

$$\frac{x_{n+1}-\sqrt{c}}{x_{n+1}+\sqrt{c}} = \frac{(x_n-\sqrt{c})^2}{(x_n+\sqrt{c})^2} = (\frac{x_n-\sqrt{c}}{x_n+\sqrt{c}})^2 ,$$

од што согласно принципот на математичка индукција следува

$$\frac{x_n-\sqrt{c}}{x_n+\sqrt{c}} = (\frac{a-\sqrt{c}}{a+\sqrt{c}})^{2^n} ,$$

од каде го наоѓаме x_n.

3. Реши ја диференцната равенка $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, со почетен услов $x_0 = a$

Решение. Нека c е број кој ја задоволува релацијата $\frac{c+c^{-1}}{2} = a$. Лесно се проверува дека низата $\{x_n\}$ зададена со

$$x_n = \frac{c^{2^n} + c^{-2^n}}{2}$$

е бараното решение. Навистина,

$$x_{n+1} = \frac{c^{2^{n+1}} + c^{-2^{n+1}}}{2} = \frac{(c^{2^n} + c^{-2^n})^2 - 2}{2} = 2\frac{(c^{2^n} + c^{-2^n})^2}{4} - 1 = 2(\frac{c^{2^n} + c^{-2^n}}{2})^2 - 1 = 2x_n^2 - 1$$

и

$$x_0 = \frac{c^{2^0} + c^{-2^0}}{2} = \frac{c+c^{-1}}{2} = a .$$

4. Низата $\{x_n\}$ е решение на диференцната равенка $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$, кое го задоволува условот $x_{1998} = 3$. Колку е x_1?

Решение. Со непосредна проверка наоѓаме дека

$$x_1 = \frac{x_0-1}{x_0+1},\ x_2 = -\frac{1}{x_0},\ x_3 = -\frac{x_0+1}{x_0-1} \text{ и } x_4 = x_0,$$

што значи дека низата е периодична со период 4. Од $1998 = 4\cdot 499+2$ наоѓаме дека $x_2 = 3$, па како $x_2 = \frac{x_1-1}{x_1+1}$ добиваме $3 = \frac{x_1-1}{x_1+1}$, од каде наоѓаме $x_1 = -2$.

5. Реши го системот диференцни равенки

$$x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2},\quad y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n+y_n}$$

со почетни услови $x_0 = a$ и $y_0 = b$.

Решение. Со множење на дадените равенки добиваме

$$x_{n+1}y_{n+1} = x_n y_n.$$

Од последната релација и од принципот на математичка индукција следува дека $x_n y_n = ab$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Го елиминираме y_n од еквивалентниот систем равенки $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$, $x_n y_n = ab$ и го добиваме системот:

$$x_n y_n = ab,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{ab}{x_n}).$$

Сега, втората равенка ја решаваме како во задача 2 и наоѓаме

$$\frac{x_n-\sqrt{ab}}{x_n+\sqrt{ab}} = (\frac{a-\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}})^{2^n},$$

а од релацијата $x_n y_n = ab$ го наоѓаме y_n.

V АНАЛИТИЧКА ГЕОМЕТРИЈА

1. КРИВИ ОД ВТОР РЕД

1.1. КРУЖНИЦА И ПАРАБОЛА

1. Нека n е природен број. Докажи дека кружницата $x^2+y^2=4^n$ не минува низ точка со целобројни координати која не е на $x-$оската или на $y-$оската.

Решение. За фиксен природен број n кружницата $x^2+y^2=(2^n)^2$ минува низ точките $(\pm 2^n,0)$ и $(0,\pm 2^n)$.

Нека претпоставиме дека постои целоброен пар (x,y) за кој важи $x^2+y^2=(2^n)^2$ и кој е различен од паровите $(\pm 2^n,0)$ и $(0,\pm 2^n)$. Тогаш $|x|<2^n$ и $|y|<2^n$. Целите броеви од парот (x,y) не може да се со различна парност. Ако x и y се со различна парност, тогаш левата страна на $x^2+y^2=(2^n)^2$ е непарен број, а левата страна е парен број. Ако двата цели броја x и y од парот (x,y) се непарни броеви т.е. $x=2p+1$, $y=2q+1$ за некои цели броеви p и q, тогаш

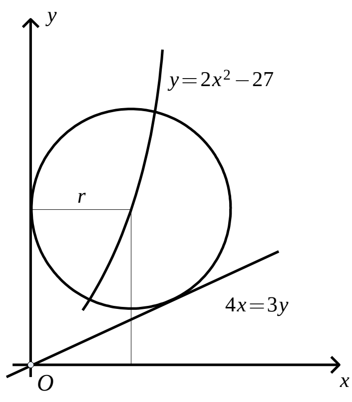
$$x^2+y^2=2[2(p^2+q^2+p+q)+1].$$

Од последното равенство добиваме

$$2(p^2+q^2+p+q)+1=2^{2n-1}$$

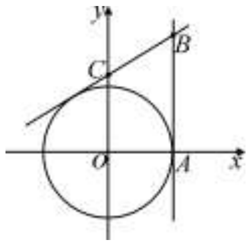
што не е можно. Ако двата цели броја x и y од парот (x,y) се парни броеви, тогаш постојат непарни цели броеви a и b и природен број k ($k<n$) така што $x=2^k a$ и $y=2^k b$. Ако замениме во равенството добиваме $a^2+b^2=2^{2(n-k)}$, што повторно не е можно.

2. Правите $x=0$ и $4x=3y$ се тангенти на кружница која се наоѓа во првиот квадрант и има центар на кривата $y=2x^2-27$. Најди го радиусот на кружницата.



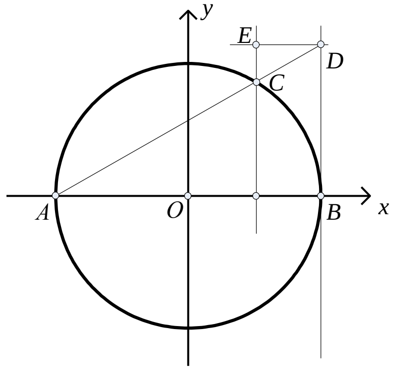
Решение. Нека (a,b) се координатите на центарот на кружницата и r е нејзиниот радиус. Да забележиме дека кружницата лежи во полурамнината определена со правата $4x=3y$ и точката $(0,1)$ (т.е. со позитивниот дел на y-оската), па важи $3a-4b>0$. Бидејќи кружницата се наоѓа во првиот квадрант, следува дека $a>0$ и $b>0$. Од тоа што y-оската е тангента следува дека $r=a$, а бидејќи центарот се наоѓа на параболата $y=2x^2-27$ следува дека $b=2a^2-27=2r^2-27$, па координатите на центарот се $(r,2r^2-27)$. Растојанието од центарот до y-оската е r а до правата $4x=3y$ е $\frac{3(2r^2-27)-4r}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{6r^2-4r-81}{5}$. Бидејќи двете прави се тангенти, следува дека $r=\frac{6r^2-4r-81}{5}$, и оттука добиваме $6r^2-9r-81=0$. Решенија на последнава равенка се -3 и $\frac{9}{2}$, па бараниот радиус е $\frac{9}{2}$.

3. Во точката $A(4,0)$ повлечена е тангентата на кружницата $x^2+y^2=16$. Одреди точка B на таа тангента таква што плоштината на трапезот образуван од координатните оски и тангентите на кружницата повлечени од точката B има плоштина 26.



Решение. Нека t е тангентата на кружницата повлечена во точката A и $B(4,b)\in t$. Со $C(0,c)$ да ја означиме пресечната точка на правата BC и y-оската. Тогаш за плоштината на трапезот $OABC$ добиваме $\frac{b+c}{2}\cdot 4=26$, односно $b+c=13$. Натаму, равенката на правата BC гласи $y=\frac{b-c}{4}x+c$. Условот правата $y=kx+n$ да биде тангента на кружницата $x^2+y^2=r^2$ е $r^2(1+k^2)=n^2$, па добиваме $16(1+(\frac{b-c}{4})^2)=c^2$ и оттука $c=\frac{16+b^2}{2b}$. Заменувајќи $b+c=13$ во последното равенство добиваме $3b^2-26b+16=0$. Решенијата на оваа равенка се $b_1=\frac{2}{3}$ и $b_2=8$. Точката B може да биде од двете страни на x-оската (кружницата е симетрична во однос на $x-$оската) па затоа добиваме 4 точки кои го исполнуваат условот на задачата. Тие се $B_1(4,8), B_2(4,-8), B_3(4,\frac{2}{3})$ и $B_4(4,-\frac{2}{3})$.

4. Дадена е кружница со радиус r и еден негов дијаметар AB. Во точката B е повлечена тангента на кружницата и низ точката A една права, која ја сече кружницата во точката C, а тангентата во точката D. Низ C е повлечена права паралелна со тангентата BD, а низ D права паралелна со дијаметарот AB. Тие две прави се сечат во точката E. Да се одреди геометриското место на точката E, ако тетивата AC ротира околу A.



Решение. Да избереме координатен систем така што равенката на кружницата да биде $x^2+y^2=r^2$. Дијаметарот AB го избираме да лежи на Ox-оската (види цртеж) Тогаш равенката на тангентата е $x=r$, а равенката на тетивата AC е $y=k(x+r)$. Точката C ќе има координати

$$x_C=r\frac{1-k^2}{1+k^2},\ y_C=\frac{2rk}{1+k^2},$$

а точката D ќе има координати $x_D = r,\ y_D = 2rk$. Равенката на правата DE ќе биде

$$y = 2rk\ , \tag{1}$$

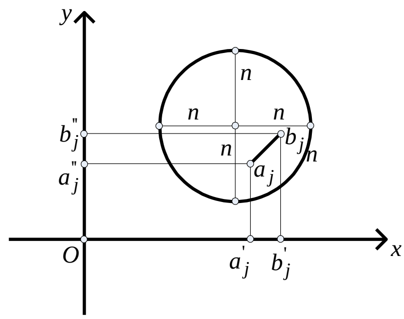
а равенката на правата CE ќе биде

$$x = r\,\frac{(1-k)^2}{1+k^2} \tag{2}$$

Ако од (1) и (2) го елиминираме параметарот k, ќе добиеме $y^2 = 4r^2\,\frac{r-x}{r+x}$ и тоа е равенката на бараното геометриско место.

5. Во рамнината е дадена кружница со радиус $n\,cm$ ($n \in \mathbb{N}$) и произволна права. Во кружницата се наоѓаат $4n$ отсечки со должини $1\,cm$. Докажи дека постои права, паралелна или нормална на дадената, која има заеднички точки со најмалку две од дадените отсечки.

Решение. Да го сместиме кругот и $4n$-те отсечки a_kb_k, $k = 1,2,3,\dots,4n$ во правоаголен систем, при што апсцисната оска ја положуваме на дадената права. Нека $a_k^{'}b_k^{'}$ и $a_k^{"}b_k^{"}$ се проекциите на отсечките a_kb_k на Ox и Oy-оската, соодветно. Ќе докажеме дека не може проекциите на Ox-оската да бидат дисјунктни меѓу себе и исто така дека проекциите на Oy оската да бидат дисјунктни меѓу себе. Ако споменатите проекции се дисјунктни, тогаш очигледните неравенства



$$\sum_{k=1}^{4n} a_k^{'}b_k^{'} < 2n\,, \qquad \sum_{k=1}^{4n} a_k^{"}b_k^{"} < 2n\,,$$

го даваат неравенството

$$\sum_{k=1}^{4n} [a_k^{'}b_k^{'} + a_k^{"}b_k^{"}] < 4n\,. \tag{3}$$

Можеме да претпоставиме дека барем една отсечка a_kb_k зафаќа остар агол со Ox-оската, т.е. можеме да претпоставиме дека за барем еден j е исполнето неравенството

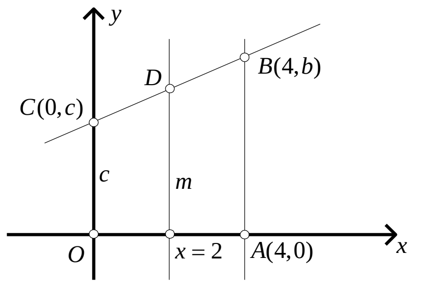
$$a_j^{'}b_j^{'} + a_j^{"}b_j^{"} > a_jb_j\,, \tag{4}$$

зошто ако сите отсечки a_kb_k се паралелни со Ox-оската или сите отсечки a_kb_k се паралелни со Oy-оската, тогаш очигледно е дека ќе постои права со бараното својство.

Од неравенствата $a_k^{'}b_k^{'} + a_k^{"}b_k^{"} \ge a_kb_k$, $k = 1,2,3,\dots,4n$ и од неравенствата (3) и (4) се доаѓа до противречноста $4n < 4n$ (неравенството $a_j^{'}b_j^{'} + a_j^{"}b_j^{"} > a_jb_j$ следува од тоа што збирот на две страни на еден триаголник е поголем од третата страна, види цртеж).

6. Во точката $A(4,0)$ е повлечена тангента на кружницата $x^2+y^2=16$. Одреди точка B на таа тангента, таква што плоштината на трапезот, образуван од координатните оски и тангентите на кружницата повлечени од точката B, има плоштина 26 квадратни единици.

Решение. Ако t е тангента на кружницата $x^2+y^2=16$ во точката $A(4,0)$ и нека $B\in t$, тогаш координатите на B се $(0,b)$. Ако C е точката во која тангентата на кружницата, повлечена во точката B, ја сече y оската, тогаш таа ќе има координати $(0,c)$. Треба да ја одредиме b (види цртеж), од условот дека плоштината на трапезот $OABC$ е 26 квадратни единици, т.е. $\frac{b+c}{2}\cdot 4=26$, $b+c=13$.



Равенката на правата BC е:

$$y-c=\frac{b-c}{4-0}(x-0),\ y=\frac{b-c}{4}x+c.$$

Правата $y=kx+n$ е тангента на кружницата $x^2+y^2=r^2$ само ако важи

$$r^2(1+k^2)=n^2.$$

Во нашиот случај имаме

$$16(1+(\tfrac{b-c}{4})^2)=c^2,\ c=\frac{16+b^2}{2b}.$$

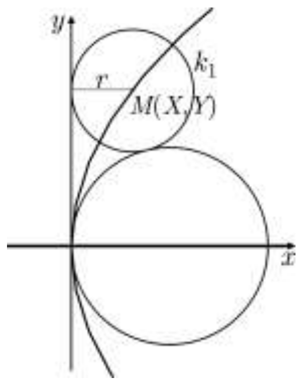
Од $b+c=13$ и последната равенка добиваме $3b^2-26b+16=0$, т.е. $b_1=\frac{2}{3}, b_2=8$. Ако ја земеме предвид симетријата во однос на x-оската добиваме дека постојат вкупно 4 точки и тоа $B_{1/2}(4,\pm 8)$ и $B_{3/4}(4,\pm\frac{2}{3})$.

7. Нека a е позитивен реален број. Најди го геометриското место на центрите на кружниците кои ги допираат: кружницата $x^2+y^2-2ax=0$ и y-оската.

Решение. Нека k_1: $(x-X)^2+(y-Y)^2=r^2$ е кружница чиј центар $M(X,Y)$ припаѓа на бараното геометриско место. Бидејќи y-оската е тангента на k_1, следува дека $X=r$ или $X=-r$.

1) Ако $X=r$, добиваме дека

$$k_1: x^2-2xX+y^2-2yY+Y^2=0.$$



Сега, од системот

$$\begin{cases} x^2-2xX+y^2-2yY+Y^2=0 \\ x^2+y^2-2ax=0 \end{cases},$$

добиваме

$$-2xX-2yY+2ax+Y^2=0.$$

Оттука, ако $Y\neq 0$, имаме

$$y=\frac{1}{2Y}(-2xX+2ax+Y^2)=\frac{a-X}{Y}x+\frac{Y}{2}.$$

Со замена во втората равенка од системот, добиваме

$$x^2+\frac{(a-X)^2}{Y^2}x^2+(a-X)x+\frac{Y^2}{4}-2ax=0\ .$$

Бидејќи двете кружници имаат едиствена пресечна точка, следува дека мора дискриминантата на последната равенка да е нула. Значи,

$$(X+a)^2-Y^2(1+\frac{(a-X)^2}{Y^2})=0\ .$$

Со средување на последново равенство добиваме $Y^2=4aX$. Значи бараното геометриско место во овој случај е параболата $y^2=4ax$.

Ако $Y=0$, се добива

$$\begin{cases}x^2-2xX+y^2=0\\ x^2+y^2-2ax=0\end{cases}.$$

Оттука $2(a-X)x=0$. Уште и $a\neq X$ (во спротивно кружниците би се совпаѓале), па $x=0$ и $y=0$. Според тоа двете кружници се допираат. Во овој случај бараното геометриско место на точки е позитивниот дел од $x-$оската.

2) Ако $X=-r$ и $Y=0$, работејќи слично како во 1) го добиваме системот

$$\begin{cases}x^2+2xr+y^2-2yY+Y^2=0\\ x^2+y^2-2ax=0\end{cases}$$

а потоа и равенката

$$(1+(\frac{a+r}{Y})^2)x^2+(r-a)x+\frac{Y^2}{4}=0\,,$$

чија дискриминанта е $-Y^2-4ar$ и е негативна.

Значи кружниците немаат пресечни точки. Ако $Y=0$ се добива негативниот дел од x-оската.

Конечно, бараното геометриско место на точки е x-оската и параболата $y^2=4ax$.

8. Две кружници со радиуси R и r се допираат во точката M. На кружницата со радиус r е дадена точка N, дијаметрално спротивна на M и во таа точка е повлечена тангента. Да се најде радиусот на кружницата која што ги допира двете кружници и тангентата што минува низ точката N.

Решение. I *случај*. Кружниците се допираат однадвор (направи цртеж). Имаме:

$$(R+2r-x)^2+y^2=(R+x)^2$$
$$(x-r)^2+y^2=(r+x)^2,$$

од каде што, со елиминација на y, се добива $x=\frac{r(R+r)}{R}$. Другата кружница која ги допира двете дадени кружници и тангентата има центар во точката S и радиус $\frac{R+r}{2}$.

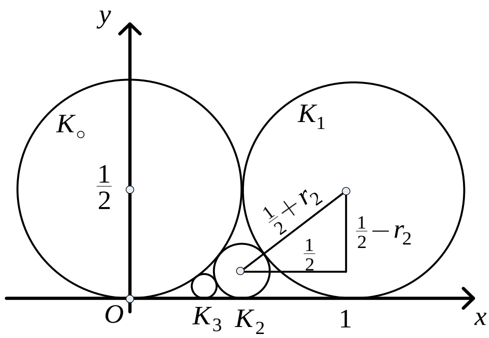
II *случај*. Кружинците се допираат однатре. Во овој случај може да се претпостави дека $R>r$ (направи цртеж). Има три такви кружници. Едната од нив има центар во точка P и радиус $x=\frac{R-r}{2}$, а другите две се симетрични меѓу себе. Нивните радиуси се добиваат од следните релации

$$(r-x)^2 + y^2 = (r+x)^2$$
$$(R-2r-x)^2 + y^2 = (R-x)^2$$

од каде што добиваме дека $x = \frac{r(R-r)}{R}$.

9. Нека K_0 е кружницата со центар во $C_0 = (0, \frac{1}{2})$ и радиус $\frac{1}{2}$, K_1 е кружница со центар во $C_1 = (1, \frac{1}{2})$ и радиус $\frac{1}{2}$, K_2 е кружница која ги допира K_0, K_1 и x-оската и K_3 е кружницата која ги допира K_0, K_2 и x-оската. Докажи дека за $n = 1,2,3$ радиусот r_n на кружницата K_n е $r_n = \frac{1}{2n^2}$ и дека кружницата K_n ја допира x-оската во точката $x_n = \frac{1}{n}$.

Решение. Нека x_n е x-координатата на допирната точка на K_n со x-оската и нека $C_n = (a_n, b_n)$ е центарот на K_n. Тогаш, $r_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2\cdot 1^2}$ и $x_1 = 1 = \frac{1}{1}$, па за $n = 1$ тврдењето е докажано.



За $n = 2$ очигледно е дека $x_2 = \frac{1}{2}$ и $b_2 = r_2$. Со примена на Питагоровата теорема наоѓаме

$$(\tfrac{1}{2} + r_2)^2 = (\tfrac{1}{2} - r_2)^2 + (\tfrac{1}{2})^2$$

и оттука $r_2 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2\cdot 2^2}$, па тврдењето е докажано и за $n = 2$.

Слично, бидејќи K_0 и K_3 се допираат следува дека $x_3^2 + (\frac{1}{2} - r_3)^2 = (\frac{1}{2} + r_3)^2$ а од допирот на K_2 и K_3 следува дека $(\frac{1}{2} - x_3)^2 + (\frac{1}{8} - r_3)^2 = (\frac{1}{8} + r_3)^2$. Од првата равенка се добива дека важи $x_3^2 = 2r_3$ а од втората $4x_3^2 - 4x_3 + 1 = 2r_3$. Значи, останува да го решиме системот

$$\begin{cases} x_3^2 = 2r_3 \\ 4x_3^2 - 4x_3 + 1 = 2r_3 \end{cases}.$$

Со замена на r_3 од првата равенка во втората ја добиваме квадратната равенка $3x_3^2 - 4x_3 + 1 = 0$, чии решенија се 1 и $\frac{1}{3}$. Јасно, 1 не може да биде координатата на бараниот допир, па $x_3 = \frac{1}{3}$. Сега, $r_3 = \frac{x_3^2}{2} = \frac{1}{18} = \frac{1}{2\cdot 3^2}$, па тврдењето е докажано и за $n = 3$.

10. Во рамнината се дадени кружницата $k:\ (x + \frac{9}{4})^2 + (y + \frac{11}{4})^2 = \frac{289}{16}$ и точки $M(1 - 2\sqrt{2}, \frac{7+2\sqrt{2}}{4})$ и $N(1 + 2\sqrt{2}, \frac{7-2\sqrt{2}}{4})$, надвор од неа.

a) Најди ја равенката на кружницата која минува низ точките M и N и ја допира кружницата k .

b) Кунструирај ја кружницата која минува низ точките M и N и ја допира кружницата k .

Решение. а) Центрите $O(p,q)$ на кружниците кои минуваат низ точките M и N се наоѓаат на симетралата на отсечката MN чија равенка гласи:

$$q=4p-\tfrac{9}{4} \tag{1}$$

Кружниците кои минуваат низ точките M и N ги задоволуваат равените

$$(1-2\sqrt{2}-p)^2+(\tfrac{7+2\sqrt{2}}{4}-q)^2=r^2 \text{ и } (1+2\sqrt{2}-p)^2+(\tfrac{7-2\sqrt{2}}{4}-q)^2=r^2$$

соодветно. Ако ги собереме последните две равенки после средувањето ја добиваме равенката

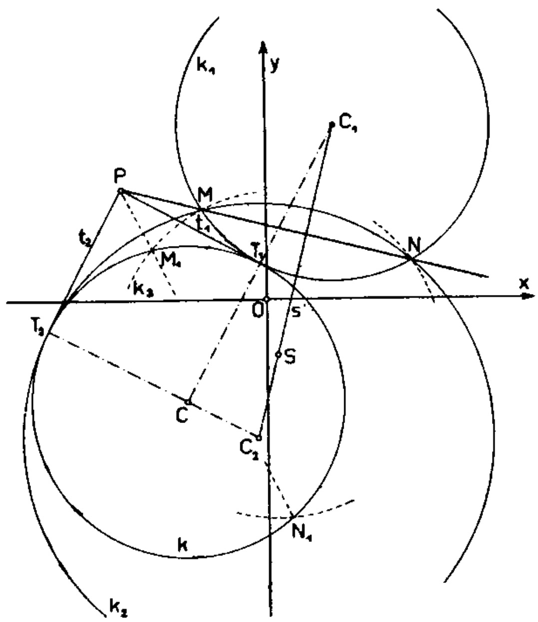
$$p^2+q^2-2p-\tfrac{7}{2}q+\tfrac{201}{16}=r^2\,. \tag{2}$$

Понатаму, ако го искористиме условот за да две кружници $(O_1(p_1,q_1),r_1)$ $(O_2(p_2,q_2),r_2)$ се допираат, кој гласи $(p_1-p_2)^2+(q_1-q_2)^2=(r_1+r_2)^2$ ја добиваме равенката

$$(-\tfrac{9}{4}-p)^2+(-\tfrac{11}{4}-q)^2=(\tfrac{17}{4}+r)^2 \tag{3}$$

Конечно, за да ги определиме бараните кружници треба да го решиме системот од трите равенки (1), (2) и (3) со непознати p,q и r . Со решавање на овој систем ги добиваме кружниците $k_1:\ O_1(\tfrac{7}{4},\tfrac{19}{4}),\ r_1=\tfrac{17}{4}$ и $k_2:\ O_2(-\tfrac{3}{8},-\tfrac{15}{4}),\ r_2=\tfrac{51}{8}$.

б) Конструкцијата ќе ја реализираме користејќи степен на точка во однос на кружница. Ја повлекуваме симетралата s на отсечката MN и на симетралата земаме произволна точка S .



Повлекуваме кружница k_3 со центар во S и радиус $\overline{SM}=\overline{SN}$. Кружницата k_3 ја сече кружницата k во точките M_1 и N_1 . Повлекуваме права M_1N_1 и во пресекот со правата MN наоѓаме точка . Од точката P на кружницата k повлекуваме тангенти t_1 и t_2 кои ја допираат кружницата k во точки T_1 и T_2 , соодветно. Правите CT_1 и CT_2 ја сечат симетралата s во точки C_1 и C_2, соодветно и тоа се центрите на бараните кружници k_1 и k_2, чии радиуси се $\overline{C_1T_1}$ и $\overline{C_2T_2}$, соодветно.

11. Точките K и L се ортогонални проекции на две точки P и Q од параболата на нејзината оска, соодветно (различни од нејзиното теме A). Докажи дека

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AL}}=\frac{\overline{PK}^2}{\overline{QL}^2}$$

Решение. Ќе ја разгледаме параболата чие теме е координатниот почеток, а нејзина оска е x-оската. Нејзината равенка е $y^2=2px$, за некој реален параметар p. Нека дадените точки се $P(\frac{a^2}{2p},a)$ и $Q(\frac{b^2}{2p},b)$. Нивните проекции врз нејзината оска се $K(\frac{a^2}{2p},0)$ и $L(\frac{b^2}{2p},0)$. Затоа, $\frac{\overline{PK}^2}{\overline{QL}^2}=\frac{a^2}{b^2}$ и $\frac{\overline{AK}}{\overline{AL}}=\frac{\frac{a^2}{2p}}{\frac{b^2}{2p}}=\frac{a^2}{b^2}$, односно $\frac{\overline{AK}}{\overline{AL}}=\frac{\overline{PK}^2}{\overline{QL}^2}$ што и требаше и да се докаже.

12. Правите l_1 и l_2 се паралелни со апсцисната оска, а растојанието меѓу нив е еднакво на 1 (правата l_1 е поблиску до апсцисната оска). Правата l_1 и параболата $y=x^2$ се сечат во точката A а правата l_2 и ординатната оска се сечат во точката B. Пресметај ја вредноста на $\measuredangle OAB$ каде O е координатниот почеток.

Решение. Нека равенките на правите се $l_1: y=b$ и $l_2: y=b+1$. Ако x_1 е апсцисната на точката A тогаш нејзината ординате е $x_1^2=b$ (види цртеж). Нека пресечната точка на l_1 и ординатната оска е точката D.

Од правоаголниот $\triangle AOC$ имаме:

$$\overline{OA}^2=x_1^2+(x_1^2)^2=b+b^2.$$

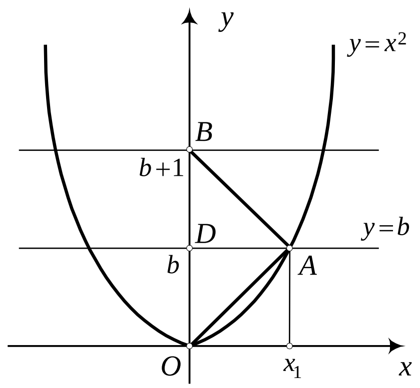
Од условите на задачата, за правоаголниот триаголник ABD, имаме

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=b+1.$$

Бидејќи $\overline{OB}=b+1$, имаме

$$\overline{OB}^2=(b+1)^2=b^2+2b+1$$
$$=(b^2+b)+(b+1)=\overline{AO}^2+\overline{AB}^2.$$

Според обратната теорема на Питагора, триаголникот $\triangle OAB$ е правоаголен со хипотенуза OB. Значи, $\measuredangle OAB=90^\circ$.



13. Најди геометриско место на точки во рамнината, за кои што разликата на квадратите на растојанијата од дадена точка и од дадена права е постојана.

Решение. Нека точката A не лежи на правата l. Избираме, во рамнината определена со A и l, координатен систем таков што x-оската се совпаѓа со правата

l, а точката A да лежи на y-оската (види цртеж). Точката A има координати $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$.

Нека $M(x, y)$ е произволна точка од бараното геометриско место точки и нека $MM_1 \perp l$, $M_1(x, 0)$. По услов е:

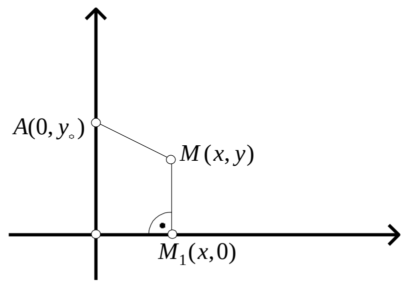
$$\overline{MA}^2 - \overline{MM_1}^2 = c, \ c = \text{const}.$$

Оттука наоѓаме:

$$x^2 + (y - y_0)^2 - y^2 = c$$

$$x^2 + y_0^2 - 2yy_0 = c$$

$$y = \tfrac{1}{2y_0} x^2 + \tfrac{y_0^2 - c}{2y_0}.$$



Значи, бараното геометриско место точки е парабола. Притоа

1) Ако $y_0^2 = c$, параболата ја допира правата l.

2) Ако $A \in l$, тогаш $y_0 = 0$, па бараното геометриско место при $c > 0$ се две прави, нормални на правата l и на растојание $\sqrt{c}$ од точката A. При $c = 0$ правите се совпаѓаат, а при $c < 0$ бараното множество точки е празно.

14. Со формулата $y = x^2 - 2(k-1)x + k^2$, $k \in \mathbb{R}$ дадено е множество параболи. Одреди го геометриското место на темињата на параболите.

Решение. Ги одредуваме прво координатите на темето на параболата

$$y = x^2 - 2(k-1)x + k^2.$$

Тие се променливи. Да ги означиме со x и y, тогаш:

$$x = -\tfrac{b}{2a} = -\tfrac{-2(k-1)}{2} = k - 1,$$

$$y = \tfrac{4ac - b^2}{4a} = \tfrac{4k^2 - 4(k-1)^2}{4} = k^2 - k^2 + 2k - 1 = 2k - 1.$$

Го елиминираме параметарот k од овие две равенства и добиваме

$$y = 2k - 1 = 2(x+1) - 1 = 2x + 1.$$

Значи, правата $y = 2x + 1$ е бараното геометриско место.

15. Множеството прави Γ е определено со равенката $y = 2ax - a^2$. Определи го множеството точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ низ кои не минува ниту една од правите од множеството Γ.

Решение. Ако (x, y) е точка од рамнината низ која не минува ниту една права од множеството прави Γ, тогаш равенката $y = 2ax - a^2$ нема реално решение по параметарот a во множеството реални броеви. Значи, квадратната равенка

$$a^2 - 2ax + y = 0$$

нема реални решенија. Според тоа, нејзината дискриминанта D е негативна. Сега $(-2x)^2 - 4y < 0$, односно $x^2 < y$.

Обратно, нека (x, y) е точка од рамнината за која $x^2 < y$. Нека претпоставиме дека постои права $y = 2ax - a^2$ која минува низ точката (x, y). Значи, равенката

$$a^2 - 2ax + y = 0$$

има реално решение. Според тоа, $D \geq 0$, каде $D = 4(x^2 - y)$.

Добиваме $x^2 - y \geq 0$, т.е. $y \leq x^2$ што е во спротивност со почетната претпоставка.

Конечно, множеството точки од рамнината низ кои не минува ниту една права од множеството точки Γ е внатрешноста на параболата $y = x^2$.

16. Определи ја кривата на која се наоѓаат темињата на параболите $y = -x^2 + bx + c$, кои ја допираат параболата $y = x^2$.

Решение. Нека параболите $y = -x^2 + bx + c$ и $y = x^2$ меѓусебно се допираат. Тогаш равенката $-x^2 + bx + c = x^2$ има едно решение. Равенката $2x^2 - bx - c = 0$ има едно решение, т.е. има двоен корен ако и само ако $b^2 + 8c = 0$. Според тоа параболите се допираат ако и само ако $c = -\frac{b^2}{8}$, т.е. ако и само ако параболата $y = -x^2 + bx + c$ го има обликот $y = -x^2 + bx - \frac{b^2}{8}$. Нејзино теме е $T(\frac{b}{2}, \frac{b^2}{8})$. Бидејќи $\frac{b^2}{8} = \frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2$, добиваме дека темињата на параболите се наоѓаат на параболата $\frac{b}{2} \to \frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2$, т.е. $y = \frac{1}{2}x^2$.

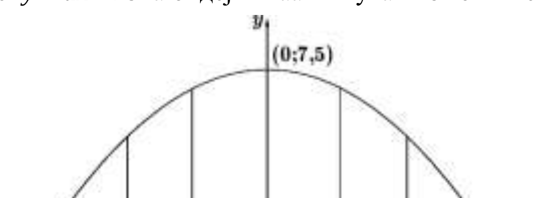
17. На река широка $30m$ треба да се изгради параболичен мост со столбови на растојание $5m$. Висината на средниот столб е $7,5m$. Колкави се висините на другите столбови?

Решение. Мостот го поставуваме во координатен систем како на цртежот.

Тогаш равенката на параболата е $y = ax^2 + b$ а бидејќи таа минува низ точките $(0;7,5)$ и $(15,0)$ добиваме $b = 7,5$ и $a = -\frac{1}{30}$. Висините на другите столбови се

$$h_1 = -\frac{1}{30}5^2 + 7,5 = \frac{20}{3}$$

$$h_2 = -\frac{1}{30}10^2 + 7,5 = \frac{25}{6}$$



18. Аголот образуван од полуправите $y = x$ и $y = 2x$ при $x \geq 0$ отсекува од параболоата $y = x^2 + px + q$ два лаци, кои ги проектираме на $x-$оска. Докажи дека проекцијата на левиот лак е за еден пократка од проекцијата на десниот лак.

Решение. Апсцисите x_1 и x_2 на пресечните точки на правата $y = x$ и параболата се решенија на равенката $x^2 + (p-1)x + q = 0$, па според тоа $x_1 + x_2 = 1 - p$.

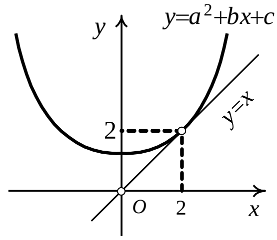
Аналогно, точките на пресек на параболата и правата $y=2x$ имаат апсциси x_3 и x_4 кои се решенија на равенката $x^2+(p-2)x+q=0$, па според тоа $x_3+x_4=2-p$. Броевите x_1, x_2, x_3, x_4 се означени така што $x_1<x_2$, $x_3<x_4$, $x_1>x_3$, $x_2<x_4$. Проекцијата на левиот лак има должина x_1-x_3, а на десниот лак x_4-x_2. Нивната разлика е

$$x_4-x_2-(x_1-x_3)=(x_3+x_4)-(x_1+x_2)=2-p-(1-p)=1$$

19. Одреди ги реалните броеви b и c така што правата $y=x$ ја допира параболата $y=x^2+bx+c$ во точка со апсциса 2.

Решение. *Прв начин.* Го формираме системот равенки

$$\begin{cases} y=x^2+bx+c \\ y=x \end{cases}.$$



Оттука, со замена на x од втората во првата равенка добиваме $x^2+(b-1)x+c=0$. За да правата и параболата се допираат потребно е дискриминантата на последната равенка да биде еднаква на нула, односно $(b-1)^2-4c=0$. Од друга страна точката на допирот има апсциса 2 и лежи на правата $y=x$, па мора и ординатата да и биде 2. Но таа точка лежи и на параболата, па добиваме $2=2^2+2b+c$. Значи го добивме системот равенки

$$\begin{cases} 2=2^2+2b+c \\ (b-1)^2-4c=0 \end{cases}.$$

Решението на последниов систем е $b=-3,\ \ c=4$.

Втор начин. Јасно е дека ординатата на допирната точка е 2. Заменувајќи $x=2$ и $y=2$ во равенката на параболата добиваме $2^2+b\cdot 2+c=2$ и оттука $c=-2(b+1)$. Коефициентот пред x^2 во равенката на параболата е позитивен, па параболата е завртена нагоре. Значи за секој реален број x важи $x^2+bx+c\geq x$. Строго неравенство важи секаде освен во точката 2, односно неравенството $x^2+bx+c>x$ важи за $x\in(-\infty,2)\cup(2,\infty)$. Според тоа равенката $x^2+bx+c=x$ има едно реално решение, односно дискриминантата и е еднаква на нула. Значи $D=(b-1)^2-4c=0$. Имајќи предвид дека $c=-2(b+1)$ добиваме

$$(b-1)^2+8(b+1)=0.$$

Решени на последнава равенка е $b=-3$. Според тоа $c=4$.

20. Нека ABC е вписан триаголник во параболата $y=x^2$. Броевите a,b,c се апсциси на средните точки на неговите страни.

Определи го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот .

Решение. Нека $A(l,l^2)$, $B(m,m^2)$ и $N(n,n^2)$ се темиња на триаголникот ABC. Тогаш од условот на задачата имаме

$$c=\tfrac{1}{2}(m+l),\ b=\tfrac{1}{2}(l+n),\ a=\tfrac{1}{2}(n+m),$$

а според формулата за пресметување на плоштина на триаголник зададен во координати имаме

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} m-l & m^2-l^2 \\ n-l & n^2-l^2 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\,|(m-n)(n-l)(l-m)|.$$

Од друга страна,

$$\overline{AB}=\sqrt{(m-l)^2+(m^2-l^2)^2}=|m-l|\sqrt{1+(m+l)^2}=|m-l|\sqrt{1+4c^2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)^2}=|n-m|\sqrt{1+(n+m)^2}=|n-m|\sqrt{1+4a^2}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(l-n)^2+(l^2-n^2)^2}=|l-n|\sqrt{1+(l+n)^2}=|l-n|\sqrt{1+4b^2}$$

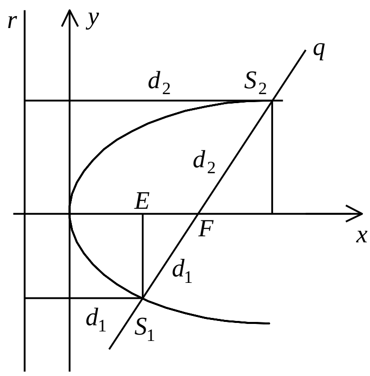
Сега радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ќе го пресметаме по формулата

$$R=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{4P_{ABC}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+4a^2)(1+4b^2)(1+4c^2)}\,.$$

21. Нека q е произволна права низ фокусот F на параболата $y^2=2px$, а S_1 и S_2 се пресечните точки на правата q и параболата. Докажи дека $\frac{1}{\overline{FS_1}}+\frac{1}{\overline{FS_2}}=\frac{2}{p}$.

Решение. Секоја точка од параболата се наоѓа на еднакво растојание од фокусот F и од директрисата (правата r). Растојанието меѓу фокусот и директрисата е p. Со E и G ќе ги означиме проекциите на S_1 и S_2 соодветно на x- оската. Ако $\overline{FS_1}=d_1$ и $\overline{FS_2}=d_2$, тогаш $\overline{FE}=p-d_1$, $\overline{FG}=d_2-p$.

Од сличноста на $\triangle FES_1$ и $\triangle FGS_2$ следува $\frac{p-d_1}{d_1}=\frac{d_2-p}{d_2}$, а оттука $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{2}{p}$, односно $\frac{1}{\overline{FS_1}}+\frac{1}{\overline{FS_2}}=\frac{2}{p}$.



22. Дадена е парабола $y^2=2px,\ p>0$. На параболата се дадени точки A,B,C (A има најголема, а C најмала ордината) такви што симетралата на $\measuredangle ABC$ е паралелна со $x-$оската. Ако должината на проекцијата на отсечката AC на $y-$оската е еднаква на $4p$, определи ја ординатата на средината на отсечката BC.

Решение. Нека $(\frac{y_A^2}{2p},y_A),(\frac{y_B^2}{2p},y_B),(\frac{y_C^2}{2p},y_C)$ се координатите на точките $A,B,$ C, соодветно. Бидејќи правите AB и BC за фаќаат суплементни агли со $x-$

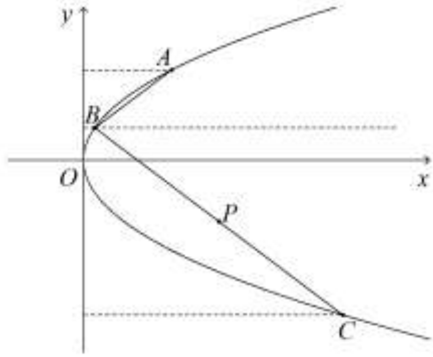
оската, следува дека нивните коефициенти на правци се спротивни. Од условот $k_{AB} = -k_{BC}$ имаме

$$\frac{y_A - y_B}{\frac{y_A^2}{2p} - \frac{y_B^2}{2p}} = -\frac{y_B - y_C}{\frac{y_B^2}{2p} - \frac{y_C^2}{2p}},$$

т.е.

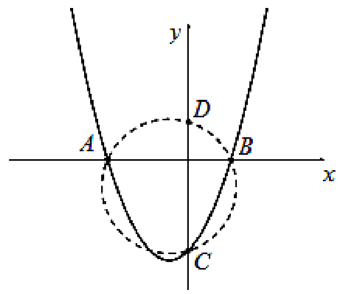
$$\frac{y_A - y_B}{y_A^2 - y_B^2} = -\frac{y_B - y_C}{y_B^2 - y_C^2},$$

од каде добиваме $y_A + 2y_B + y_C = 0$. Бидејќи $y_A > y_C$, а должината на проекцијата на отсечката AC на $y-$оската е еднаква на $4p$ добиваме $y_A - y_C = 4p$. Од последните две равенства следува $2y_B + 2y_C = -4p$, што значи дека ординатата на средината P на отсечката BC е $\frac{y_B + y_C}{2} = -p$.



23. Нека p и q се реални броеви. Графикот на функцијата $f(x) = x^2 + px + q$ ги сече кординатните оски во три различни точки A, B, C. Докажи, дека кружницата опишана околу триаголникот ABC ја сече $y-$оската во точка со ордината 1.

Решение. Нека графикот ги сече координатните оски во точките $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(0,c)$. Тогаш a и b се нули на квадратната функција, па затоа $ab = q$, а c е вредноста на функцијата за $x = 0$, па затоа $c = f(0) = q$. Нека $D(0,d)$ е втората пресечна точка на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Бидејќи тетивите AB и CD се сечат во координатниот почеток важи

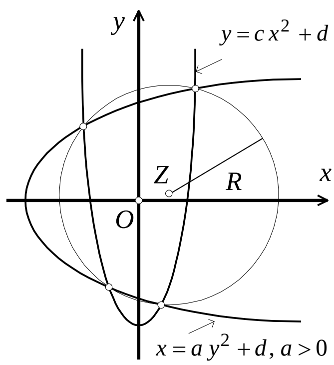


$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OC} \cdot \overline{OD},$$

па како $\overline{OA} = |a|, \overline{OB} = |b|,\ \overline{OC} = |c|, \overline{OD} = |d|$ добиваме $|ab| = |cd|$. Броевите ab и cd се секогаш со ист знак и тоа негативни ако координатниот почеток е во внатрешноста на кружницата и позитивни ако центарот е надвор од кружницата. Сега од $ab = cd$ и $ab = q = c$ следува дека $d = 1$, што и требаше да се докаже.

24. Во рамнината се дадени две параболи со заемно нормални оски така, што тие се сечат во четири точки. Докажи, дека пресечните точки лежат на една кружница.

Решение. Избираме правоаголен координатен систем Oxy така, што оските на параболите се координатни оски (види цртеж). Тогаш равенката на едната парабола е



$$x = ay^2 + b, \ (a > 0, b < 0),$$

а на другата е

$$y = cx^2 + d, \ (c > 0, d < 0).$$

Координатите (x, y) на пресечните точки на параболите го задоволуваат системот равенки

$$\begin{cases} x = ay^2 + b \\ y = cx^2 + d \end{cases}$$

Ако првата равенка ја поделиме со a, а втората со c и ги собереме, после идентични тsрансформации ја добиваме равенката

$$(x - \tfrac{1}{2a})^2 + (y - \tfrac{1}{2c})^2 = \tfrac{1}{4a^2} + \tfrac{1}{4c^2} - \tfrac{b}{a} - \tfrac{d}{c},$$

која е равенка на кружница со центар $Z(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2c})$ и радиус $R = \sqrt{\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4c^2} - \frac{b}{a} - \frac{d}{c}}$.

25. Правата $y = kx + n$ ја сече параболата $y^2 = 2px$ во две точки. Тангентите кон параболата повлечени во пресечните точки зафаќаат агол од 45°. Определи ја зависноста меѓу k, n и p.

Решение. Пресечните точки на правата и параболата се решенија на системот

$$\begin{cases} y = kx + n \\ y^2 = 2px \end{cases},$$

од каде што последователно добиваме

$$(kx + n)^2 = 2px$$

$$k^2x^2 + (2k - 2p)x + n^2 = 0.$$

Решенија на последната квадратна равенка се

$$x_{1/2} = \frac{p - kn \pm \sqrt{p^2 - 2pnk}}{k^2},$$

а y-координатата на пресечните точки се $y_{1/2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2knp}}{k}$. Сега, коефициентите на правец на тангентите на хиперболата во пресечните точки се $t_{1/2} = \frac{kp}{p \pm \sqrt{p^2 - 2knp}}$.

Од условот на задачата $\frac{t_1 - t_2}{1 + t_1 t_2} = 1$, добиваме

$$\frac{kp}{p - \sqrt{p^2 - 2knp}} - \frac{kp}{p + \sqrt{p^2 - 2knp}} = 1 + \frac{k^2p^2}{p^2 - (p^2 - 2knp)},$$

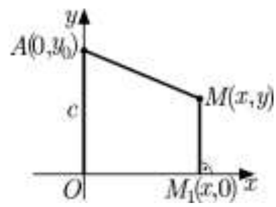
од каде со алгебарски трансформации се добива $(\frac{2n + kp}{2})^2 + 2knp = p^2$.

26. Определи ја кривата на која се наоѓаат темињата на параболите $y = -x^2 + bx + c$, кои ја допираат параболата $y = x^2$.

Решение. Нека параболите $y=-x^2+bx+c$ и $y=x^2$ меѓусебно се допираат. Тогаш равенката $-x^2+bx+c=x^2$ има едно решение. Равенката $2x^2-bx-c=0$ има едно решение, т.е. има двоен корен ако и само ако $b^2+8c=0$. Според тоа параболите се допираат ако и само ако $c=-\frac{b^2}{8}$, т.е. ако и само ако параболата $y=-x^2+bx+c$ го има обликот $y=-x^2+bx-\frac{b^2}{8}$. Нејзино теме е $T(\frac{b}{2},\frac{b^2}{8})$. Бидејќи $\frac{b^2}{8}=\frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2$, добиваме дека темињата на параболите се наоѓаат на параболата $\frac{b}{2}\to\frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2$, т.е. $y=\frac{1}{2}x^2$.

27. Најди го геометриското место на точки во рамнина за кои разликата од квадратите на растојанијата од дадена точка и од дадена права е константна и еднаква на c.

Решение. Нека A е дадената точка и l е дадената права. Избираме координатен систем со $x-$оска дадената права, а $y-$оска нормалата на дадената права што минува низ A. Тогаш $A(0,y_0)$. Нека $M(x,y)$ е произволна точка од бараното геометриско место и $M_1(x,0)$ е проекцијата на M на $x-$оската.



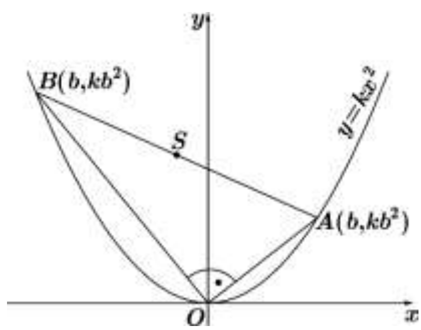
Тогаш, $\overline{AM}^2-\overline{M_1M}^2=c$, т.е. $x^2+(y-y_0)^2-y^2=c$. Оттука $2yy_0=x^2+y_0^2-c$.

1) Ако $y_0\neq 0$, т.е. A не лежи на l, бараното геометриско место е параболата $y=\frac{1}{2y_0}x^2+\frac{y_0^2-c}{2y_0}$.

2) Ако $y_0=0$, т.е. A лежи на l, добиваме $x^2=c$, па бараното геометриско место се правите $x=\sqrt{c}$ и $x=-\sqrt{c}$ за $c\geq 0$, а празно множество за $c<0$.

28. Докажи дека центрите на опишана кружница околу правоаголен триаголник, чии темиња лежат на дадена парабола, и темето каде што е правиот агол се совпаѓа со темето на параболата, лежат исто така на парабола.

Решение. Нека темињата на правоаголниот триаголник AOB со прав агол кај темето $O(0,0)$ лежат на параболата $y=kx^2$ (јасно $O(0,0)$ е теме на параболата). Тогаш координатите на темето A се (a,ka^2) а на B се (b,kb^2) каде што $a,b\neq 0$. Равенката на правата низ O и A е $y=kax$ а низ O и B е $y=kbx$. Бидејќи OA и OB се заемно нормални прави следува дека $b=-\frac{1}{k^2a}$.



Значи темето B има координати $(-\frac{1}{k^2a},\frac{1}{k^3a^2})$. Ако S е центарот на опишаната кружница околу триаголникот, тогаш S е средина на AB па има координати

$$S(\tfrac{1}{2}(a-\tfrac{1}{k^2a}),\tfrac{1}{2}(ka^2+\tfrac{1}{k^3a^2}))$$

Нека $x=\frac{1}{2}(a-\frac{1}{k^2a})$, $y=\frac{1}{2}(ka^2+\frac{1}{k^3a^2})$. Тогаш

$$y=\tfrac{1}{2}(ka^2+\tfrac{1}{k^3a^2})=\tfrac{1}{2}k((a-\tfrac{1}{k^2a})^2+\tfrac{2}{k^2})=\tfrac{1}{2}k((2x)^2+\tfrac{2}{k^2})=2kx^2+\tfrac{1}{k}$$

29. Докажи, дека сите тетиви на параболата $y^2=4ax$ кои се хипотенузи на правоаголен триаголник со прав агол во координатниот почеток, минуваат низ иста точка.

Решение. Нека $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$ се крајни точки на тетива која е хипотенуза на правоаголен триаголник со прав агол во координатниот почеток O. Коефициентите на правци на правите OA и OB се $k=\frac{y_1}{x_1}$ и $k'=\frac{y_2}{x_2}$. Од $k'=-\frac{1}{k}$ следува

$$x_1x_2+y_1y_2=0. \qquad (1)$$

Нека $y=mx+b$ е равенката на правата на која лежи тетивата AB. Тогаш x_1 и x_2 се решенија на квадратната равенка $(mx+b)^2=4ax$, т.е. на равенката

$$m^2x^2+(2bm-4a)x+b^2=0.$$

Затоа

$$x_1x_2=\frac{b^2}{m^2} \text{ и } y_1y_2=(mx_1+b)(mx_2+b)=m^2x_1x_2+mb(x_1+x_2)+b^2=\frac{4ab}{m}.$$

Сега од (1) и последните две равенства добиваме $\frac{b^2}{m^2}+\frac{4ab}{m}=0$, т.е. $b=-4am$. Според тоа, секоја тетива која е хипотенуза на правоаголен триаголник со прав агол во координатниот почеток лежи на права чија равенка е

$$y=mx-4am=m(x-4a),$$

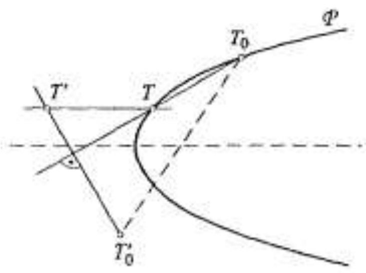
а тоа е права која минува низ точката $(4a,0)$.

Конечно, од произволноста на точките A и B следува тврдењето на задачата.

30. Дадена е точка T_0 од параболата P чија равенка е $y^2=2px$ и точка T_0' таква што средината на отсечката T_0T_0' припаѓа на оската на параболата P. За променлива точка T на P, различна од T_0 и на неа симетричната точка во однос на оската на параболата, нормалата повлечена од точката T_0' на правата T_0T ја сече правата s која минува низ T и е паралелна на оската на P во точка T'. Определи го геометриското место на точката T'.

Решение. Нека апсцисите на точките T_0,T_0',T,T' се x_0,x_0',x,x', а нивните ординати се $y_0,-y_0,y,y$, соодветно. Коефициентите на правци на правите T_0T и $T_0'T'$ се

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{2p(y-y_0)}{y^2-y_0^2}=\frac{2p}{y+y_0} \text{ и } \frac{y+y_0}{x'-x_0'},$$



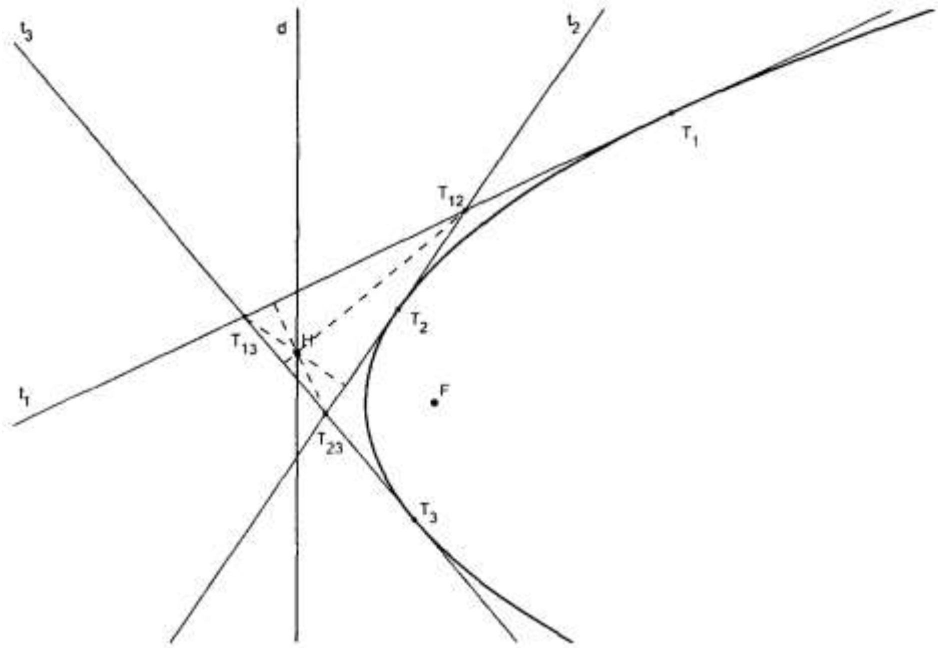
Па затоа овие две пра се заемно нормални ако и само ако

$$x'-x_0' = -2p \text{ , т.е. } x' = x_0' - 2p = \text{const} .$$

Затоа точката T' лежи на правата чија равенка е $x = x_0' - 2p$ и која е нормална на оската на параболата и е оддалечена за $2p$ од точката T_0'. Притоа, секоја точка $T'(x', y')$ од оваа права се добива со опишаната постапка од единствената точка на параболата со ордината y'. Единствено точките со ординати y_0 и $-y_0$ не може да се добијат на опишаниот начин.

31. Докажи, дека ортоцентарот на триаголникот формиран од три тангенти на параболата лежи на директрисата на таа парабола.

Решение. Нека равенката на параболата е $y = 2px$. Тогаш равенката на нејзината директриса е $x = -\frac{p}{2}$. Равенките на тангентата на параболата во точките $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$, $T_3(x_3, y_3)$ се



$$yy_1 = px + px_1 , \tag{1}$$

$$yy_2 = px + px_2 , \tag{2}$$

$$yy_3 = px + px_3 , \tag{3}$$

соодветно. Тангентите (2) и (3) се сечат во точката $T_{23}(\frac{1}{2p} y_2 y_3, \frac{1}{2}(y_2 + y_3))$.

Правата (1) има коефициент на правец $\frac{p}{y_1}$, па затоа висината на триаголникот повлечена во точката T_{23} има равенка

$$y-\frac{1}{2}(y_2+y_3)=-\frac{y_1}{p}(x-\frac{y_2y_3}{2p}).$$

Пресечната точка на висината и директрисата има ордината

$$y=\frac{1}{2}(y_2+y_3)-\frac{y_1}{p}(-\frac{p}{2}-\frac{y_2y_3}{2p})=\frac{1}{2}(y_1+y_2+y_3)+\frac{y_1y_2y_3}{2p^2}.$$

Добиениот израз е симетричен во однос на y_1,y_2,y_3, од што следува тврдењето на задачата.

32. Дадени се параболите $y=x^2+ax+b$ и $y=-x^2+cx+d$ кои што немаат заедничка точка. Дали постои права таква што параболите да лежат на различна страна од правата.

Решение. За фиксна вредност на независно променливата x, вредноста на првата парабола е x^2+ax+b а вредноста на втората парабола е $-x^2+cx+d$. За овие две вредности средна вредност е $\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}$, при што

$$x^2+ax+b<\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2} \text{ и } -x^2+cx+d<\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}.$$

Според тоа, првата парабола $y=x^2+ax+b$ се наоѓа над графикот на правата $y=\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}$ а втората парабола $y=-x^2+cx+d$ се наоѓа под графикот на правата $y=\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}$ и тоа е една од правите кои го исполнуваат условот на задачата.

33. Дали постои вредност на параметарот a, така што темето на параболата $y=4x^2-4(a+1)x+a$ да лежи во вториот квадрант.

Решение. Параболата можеме да ја запишеме во облик

$$y=4[x^2-(a+1)x]+a,$$
$$y=4[x^2-2\frac{a+1}{2}x+(\frac{a+1}{2})^2]-(a+1)^2+a,,$$
$$y=4(x-\frac{a+1}{2})^2-(a^2+a+1).$$

Според тоа, нејзино теме е $T(\frac{a+1}{2},-(a^2+a+1))$. Бидејќи

$$a^2+a+1=a^2+2\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=(a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4},$$

за $a\in\mathbb{R}$, добиваме дека $-(a^2+a+1)\leq-\frac{3}{4}<0$. Значи, точката T припаѓа или на третиот или на четвртиот квадрант. Таква вредност за параметарот a не постои.

34. Нека a и b се реални броеви. Познато е дека параболата $y=ax^2+b$ ја сече кривата $y=x+\frac{1}{x}$ во точно три точки. Докажи, дека $3ab<1$.

Решение. Од условот на задачата следува дека системот

$$\begin{cases} y = ax^2 + b \\ y = x + \frac{1}{x} \end{cases}$$

има три реенија, односно равенката од трет степен има

$$ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$$

има три реални решенија. Овие решенија да ги означиме со x_1, x_2, x_3. Од Виетовите формули следува

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{a}, \qquad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{b}{a}, \qquad x_1x_2x_3 = \frac{1}{a}$$

Неравенството кое треба да го докажеме е еквивалентно со неравенството $\frac{1}{a^2} > 3\frac{b}{a}$, односно со неравенството

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 > 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1),$$

т.е. со неравенството

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 > 0,$$

кое очигледно е исполнето.

35. Одреди го, во комплексната рамнина, множеството точки

$$\{z \mid z = \frac{3t+i}{t-i}, t \in \mathbb{R}\} .$$

Решение. Комплексниот број $z = x + iy$ во комплексната рамнина е претставен со точката $M(x, y)$, каде што $x, y \in \mathbb{R}$. Затоа ќе го пресметаме реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број $z = \frac{3t+i}{t-i}$. Имаме: $z = \frac{3t+i}{t-i} \cdot \frac{t+i}{t+i} = \frac{3t^2-1}{t^2+1} + \frac{4t}{t^2+1} i$, т.е.

$$x = \frac{3t^2-1}{t^2+1},\ y = \frac{4t}{t^2+1} \tag{1}$$

За да ја добиеме врската меѓу x и y, ќе го елиминираме параметарот t. Имаме, $x = \frac{3t^2-1}{t^2+1} = 3 - \frac{4}{t^2+1}$, т.е. $t^2 + 1 = \frac{4}{3-x}$ ($x \neq 3$), па затоа $y = 4t\frac{3-x}{4}$, т.е.

$$t = \frac{y}{3-x} . \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $(\frac{y}{3-x})^2 + 1 = \frac{4}{3-x}$, т.е

$$(x-1)^2 + y^2 = 4 \tag{3}$$

Значи, сите точки припаѓаат на една кружница, со центар во точката (1,0) и радиус 2.

За секоја точка (x, y) од кружницата (3), освен за точката (3,0), постои $t \in \mathbb{R}$ така што $x + iy = \frac{3t+i}{t-i}$. Според (2) мора да важи $t = \frac{y}{3-x}$, па ако замениме во (1) гледаме дека тие релации се задоволени. За точката (3,0) не постои $t \in \mathbb{R}$, за кој би било $3 = \frac{3t^2-1}{t^2+1}$.

Следователно, бараното множество точки е кружница, со центар во точката (1,0) и радиус 2, без точката (3,0).

1.2. ХИПЕРБОЛА И ЕЛИПСА

1. Како гласи равенката на рамнострана хипербола, која минува низ точката $M(4,3)$?

Решение. Хиперболата е рамнострана, ако $a=b$; нејзината равенка зависи само од еден параметар a:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad \text{или} \qquad x^2-y^2=a^2.$$

Ако го искористиме условот хиперболата да минува низ точката $M(4,3)$, ќе имаме $a^2=4^2-3^2=7$, па равенката на хиперболата е $x^2-y^2=7$.

2. Нацртај го графикот на решенијата на равенката

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}=\frac{2}{1+xy}.$$

Решение. Дадената равенка ја трансформираме во видот

$$x^2-2xy+y^2+2x^2y^2-x^3y-xy^3=0$$

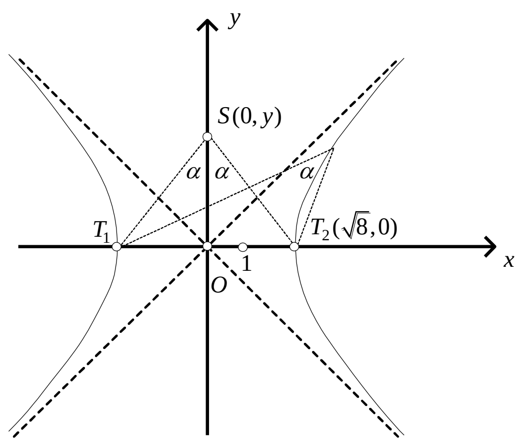
$$(x-y)^2(1-xy)=0.$$

Оттука $x=y$ или $xy=1$.

Следствено, графикот на дадената равенка е вкупноста на правата $y=x$ и хиперболата $xy=1$.

3. Најди ги координатите на точката M од хиперболата $x^2-y^2=8$, која лежи во првиот квадрант и од која реалната оска на хиперболата се гледа под агол од 30°.

Решение. Геометриското место на точки од првиот и вториот квадрант, од кои реалната оска на дадената хипербола се гледа под агол α ($\alpha=30^\circ$) е кружен лак со центар во точката $S(0,y)$ (види цртеж).



Од правоаголниот триаголник T_1OS следува дека

$$y=\sqrt{8}\cdot \operatorname{ctg}30^\circ=2\sqrt{6}$$

$$r=\frac{\sqrt{8}}{\sin 30^\circ}=4\sqrt{2}.$$

Според тоа, равенката на кружницата е

$$x^2+(y-2\sqrt{6})^2=(4\sqrt{2})^2.$$

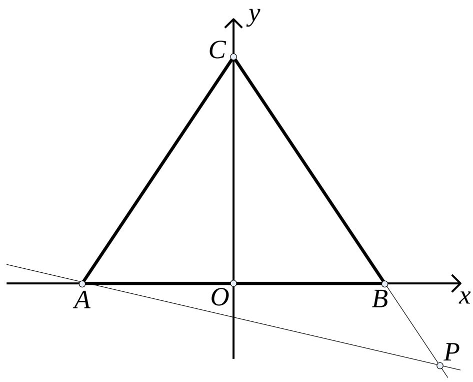
Точката M е пресек на кружницата k и хиперболата, па нејзините координати ги наоѓаме со решавање на системот

$$x^2 + (y - 2\sqrt{6})^2 = 32$$
$$x^2 - y^2 = 8.$$

Од четирите решенија на овој систем, го избираме само она во првиот квадрант; на таков начин добиваме $M(4\sqrt{2}, 2\sqrt{6})$.

4. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа $\overline{AB} = 2a$ и нека P е пресечна точка на правата BC со правата p што минува низ темето A и е нормална на страната AC. Да се најде геометриското место на точките P кога точките A и B се фиксни, а точката C се движИ, така што триаголникот ABC секогаш да е рамнокрак.

Решение. Од условите на задачата следува дека точката C се движи по симетралата на отсечката AB. Затоа, да избереме координатен систем, така што правата AB да е x-оската, а симетралата на отсечката AB да е y-оската (види цртеж). Тогаш имаме $A(-a,0)$, $B(a,0)$ и $C(0,c)$, при што $c \neq 0$ се менува. Равенките на правите BC и p се:

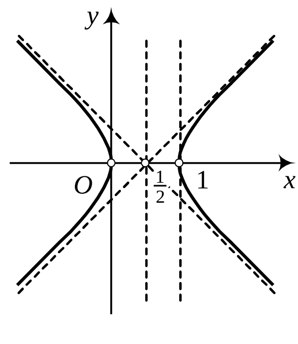


$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1 \text{ и } y = -\frac{a}{c}(x+a),$$

соодветно. Со елиминација на параметарот c се добива равенката $x^2 - y^2 = a^2$ што претставува врска меѓу координатите x и y на точката P. Значи, геометриското место на точките P е хипербола.

5. Права која минува низ координатниот почеток ги сече правите $x + y = 1$ и $x - y = 1$ во точките A и B. Нека $S(a,b)$ е средината на отсечката AB. Докажи дека $(a - \frac{1}{2})^2 - b^2 = \frac{1}{4}$. (Односно дека геометриското место на средините на отсечката AB е хиперболата $(x - \frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{1}{4}$).

Решение. Нека $y = kx$ е произволна права која минува низ координатниот почеток (различна од x-оската). Тогаш, пресеци со дадените прави се точките P и Q зададени со $P(\frac{1}{k+1}, \frac{k}{k+1})$ и $Q(\frac{1}{1-k}, \frac{k}{1-k})$. Средната точка на отсечката PQ е

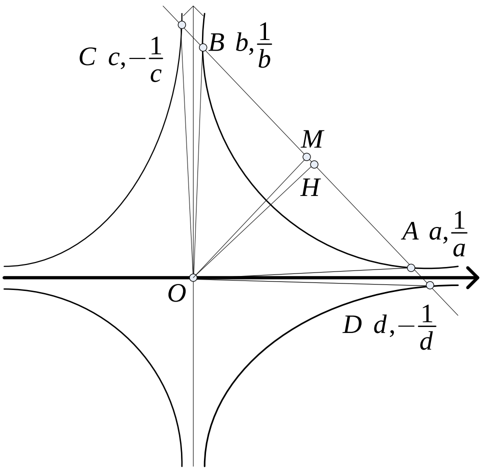


$$S(a,b) = (\frac{1}{1-k^2}, \frac{k}{1-k^2}),$$

при што $a = \frac{1}{1-k^2}, b = \frac{k}{1-k^2}$. Сега

$$(a - \frac{1}{2})^2 - b^2 = (\frac{1}{1-k^2} - \frac{1}{2})^2 - (\frac{k}{1-k^2})^2 = (\frac{k^2+1}{2(1-k^2)})^2 - \frac{k^2}{(1-k^2)^2} = \frac{(k^2+1)^2 - 4k^2}{4(1-k^2)^2} = \frac{(1-k^2)^2}{4(1-k^2)^2} = \frac{1}{4}.$$

6. Дадени се две хиперболи H_1 и H_2 чии равенки се $y=\frac{1}{x}$ и $y=-\frac{1}{x}$, соодветно. Една права ја сече H_1 во точките A и B, а H_2 во точките C и D. Нека O е координатниот почеток. Докажи дека триаголниците OAC и OBD имаат еднакви плоштини.



Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека распоредот на хиперболите, правите и точките се како на цртежот. Во спротивно со ротација на рамнината во кој ги правиме разгледувањата околу точката O за агол $k\cdot 90^\circ$ каде k е цел број се добива истата фигура, освен можеби ако не треба да се изврши преозначување на објектите.

Нека $A(a,\frac{1}{a})$, $B(b,\frac{1}{b})$, $C(c,-\frac{1}{c})$ и $D(d,-\frac{1}{d})$. Да забележиме дека броевите a,b,c,d се попарно различни и $c<0$, $d>a>b>0$. Со l_{AB} и l_{CD} ќе ги означиме равенките на правите кои минуваат низ паровите точки A,B и C,D соодветно. Притоа:

$$l_{AB}:\quad \frac{x-a}{b-a}=\frac{y-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}},\text{ т.е. } y=-\frac{1}{ab}x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$l_{CD}:\quad \frac{x-c}{d-c}=\frac{y+\frac{1}{c}}{-\frac{1}{d}+\frac{1}{c}},\text{ т.е. } y=\frac{1}{cd}x-\frac{1}{d}-\frac{1}{c}.$$

Но, бидејќи $l=l_{AB}=l_{CD}$, ги добиваме равенствата $ab=-cd$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{d}-\frac{1}{c}$, т.е.

$$a+b=c+d. \tag{1}$$

Апсцисата на средната точка M на отсечката AB е еднаква на $x_M=\frac{a+b}{2}$, па заради равенствата (1) добиваме дека $x_M=\frac{c+d}{2}$, т.е. M е средна точка на отсечката CD. Но, тогаш, бидејќи A,B,C и D припаѓаат на иста права, добиваме

$$\overline{AC}=\overline{AM}+\overline{MC}=\overline{MD}+\overline{MB}=\overline{BD}.$$

Сега, бидејќи должините на висините на триаголниците OAC и OBD од темето O се еднакви, добиваме дека $P_{\triangle OAC}=P_{\triangle OBD}$, што требаше да се докаже.

7. Темињата A,B и C од триаголникот припаѓаат на хиперболата $xy=1$. Докажи дека и неговиот ортоцентар припаѓа на оваа хипербола.

Решение. Бидејќи точките A,B и C припаѓаат на хиперболата $xy=1$, имаме $A(a,\frac{1}{a})$, $B(b,\frac{1}{b})$, $C(c,\frac{1}{c})$ при што $abc\neq 0$. Равенките на правите на кои лежат страните на триаголникот се:

$$p_{AB}: y-\frac{1}{a}=\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{b-a}(x-a), \qquad \text{т.е.} \qquad y=-\frac{1}{ab}x+\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

$$p_{BC}: y-\frac{1}{b}=\frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{c-b}(x-b), \qquad \text{т.е.} \qquad y=-\frac{1}{bc}x+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},$$

$$p_{CA}: y-\frac{1}{c}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}{a-c}(x-c), \qquad \text{т.е.} \qquad y=-\frac{1}{ac}x+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

Сега равенките на нормалите се

$$p_A: \quad y-\frac{1}{a}=bc(x-a), \qquad \text{т.е.} \qquad y=bcx-abc+\frac{1}{a},$$

$$p_B: \quad y-\frac{1}{b}=ac(x-b), \qquad \text{т.е.} \qquad y=acx-abc+\frac{1}{b},$$

$$p_C: \quad y-\frac{1}{c}=ab(x-c), \qquad \text{т.е.} \qquad y=abx-abc+\frac{1}{c},$$

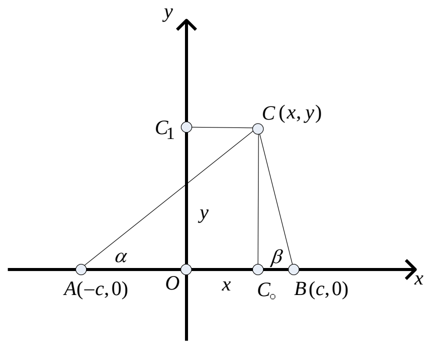
Заедничка точка на трите прави p_A, p_B, p_C е $H(-\frac{1}{abc},-abc)$ за која е очигледно дека припаѓа на хиперболата.

8. Должината на страната AB на триаголникот ABC е $2c$, а за аглите α и β е исполнето равенството $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=-k^2$. Определи го геометриското место на темето C.

Решение. Ќе поставиме координатен систем така што средината на страната AB е координатен почеток, а апсцисната оска е паралелна со страната AB. Тогаш точката A има координати $A(-c,0)$ а точката $B(c,0)$. Нека третото теме C има координати $C(x,y)$. Ако $\alpha=\measuredangle A$ и $\beta=\measuredangle B$, тогаш $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{c+x}$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{y}{c-x}$. Од условот $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=-k^2$, добиваме $\frac{y}{c+x}\frac{y}{c-x}=-k^2$, од каде со трансформации добиваме дека

$$\frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{k^2c^2}=1.$$

Значи, темето C припаѓа на хипербола.

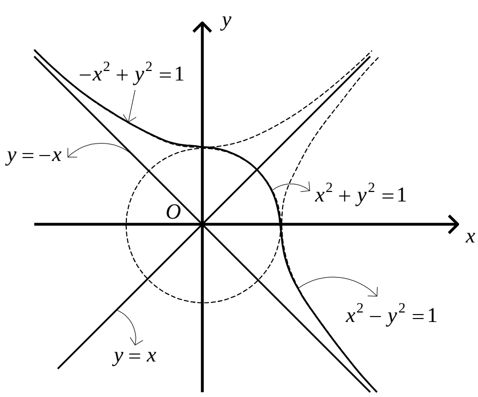


9. Нацртај график на функцијата $x|x|+y|y|=1$.

Решение. Ќе разгледаме четири случаи.

1) Ако $x\geq 0$, $y\geq 0$, тогаш функцијата е $x^2+y^2=1$, па графикот е дел од кружницата $x^2+y^2=1$ кој лежи во првиот квадрант (види цртеж).

2) Ако $x<0$, $y\geq 0$, тогаш функцијата е $-x^2+y^2=1$, па графикот е



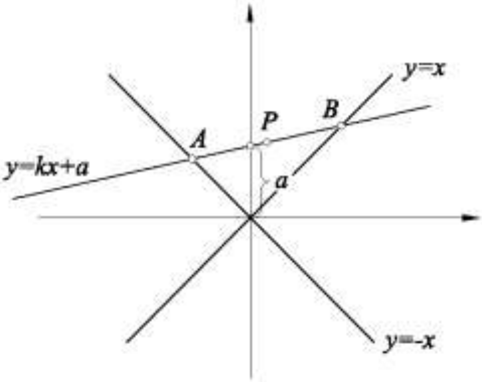
дел од рамнострана хипербола $-x^2+y^2=1$ во вториот квадрант.

3) Ако $x<0, y<0$, тогаш функцијата е $-x^2-y^2=1$, па не постојат точки во координатната рамнина што го задоволуваат тој услов.

4) Ако $x\geq 0, y<0$, тогаш функцијата е $x^2-y^2=1$, па графикот е дел од хиперболата $x^2-y^2=1$ во четвртиот квадрант.

10. Права низ точката $P(a,0)$ ги сече симетралите на квадрантите на координатниот систем во точките A и B. Определи го геометриското место на средината на отсечките AB.

Решение. Нека равенката на правата низ точката $P(a,0)$ е $y=kx+a$. Пресечната точка на оваа права со симетралата $y=-x$ на втори и четврти квадрант е $A(-\frac{a}{k+1},\frac{a}{k+1})$, а пресечната точка со симетралата $y=x$ на први и трети квадрант е $B(\frac{a}{k-1},\frac{a}{k-1})$. Според тоа, координатите на средината на отсечката AB се



$$x=\frac{ak}{1-k^2},\ y=\frac{a}{1-k^2}.$$

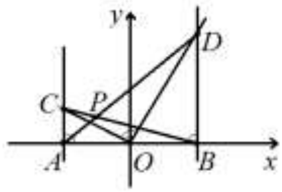
Значи, $\frac{x}{y}=k$, од каде добиваме $y=\frac{a}{1-(\frac{x}{y})^2}$, т.е. $y^2-x^2=ay$, па затоа

$$(y-\tfrac{a}{2})^2-x^2=\tfrac{a^2}{4}.$$

Според тоа, бараното геометриско место е хипербола со центар $(0,\frac{a}{2})$.

11. Дадени се точките $A(-2,0)$ и $B(2,0)$. Точките C и D припаѓаат на нормалите на отсечката AB во точките A и B соодветно, при што $\measuredangle COD$ е прав. Одреди го геометриското место на точки на пресекот на правите AD и BC.

Решение. Нека точката C има координати $C(-2,c)$. Равенката на правата OC е $y=-\frac{c}{2}x$. Бидејќи $\measuredangle COD$ е прав, равенката на правата OD е $y=\frac{2}{c}x$ и точката D има координати $D(2,\frac{4}{c})$. Равенката на правата AD е $y=\frac{1}{c}(x+2)$, додека на правата BC е $y=-\frac{c}{4}(x-2)$. Координатите на пресечната точка P, на правите AD и BC, се решение на системот



$$\begin{cases} y=\frac{1}{c}(x+2) \\ y=-\frac{c}{4}(x-2). \end{cases}$$

Со елиминација на параметарот c од равенките, се добива равенката $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

Конечно, од произволноста на ***c***, следува дека геометриското место е елипсата

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

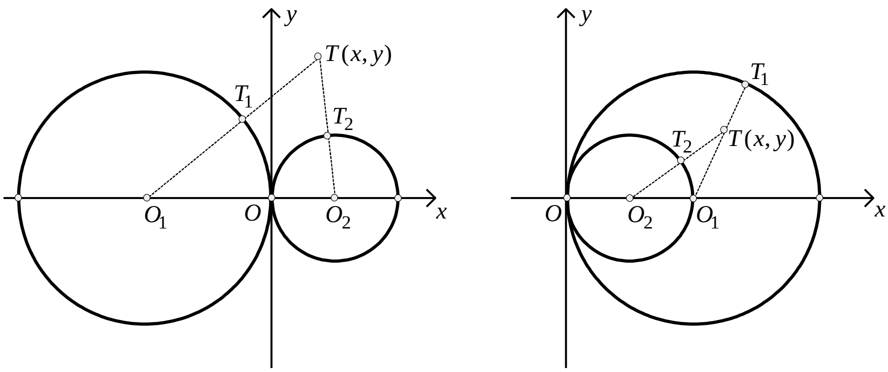
12. Дадени се две кружници кои се допираат и имаат радиуси r и $2r$. Да се најде геометриското место на точките еднакво оддалечени од дадените кружници.

Решение. Да ги сместиме дадените кружници во правоаголниот координатен систем така што нивните центри да лежат на Ox-оската, а допирната точка се наоѓа во координатниот почеток.

I случај. кеужинците се допираат однадвор (види цртеж). Ако $T(x,y)$ е точка, надвор од кружинците, која припаѓа на бараното геометриско место, тогаш од условот $\overline{TT_1}=\overline{TT_2}$, т.е. $\overline{TO_1}-2r=\overline{TO_2}-r$, се добива

$$8(x+\tfrac{r}{2})^2-y^2=2r^2$$

што претставува равенка на хипербола. Очигледно е дека сите точки од отсечката O_1O_2 исто така припаѓаат на геометриското место.

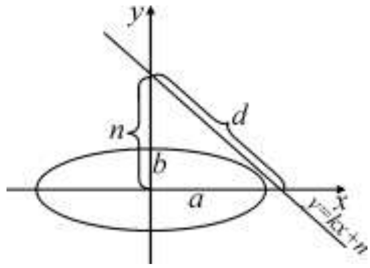


II случај: кружинците се допираат однатре (види цртеж). И во овој очигледно е дека сите точки од негативниот дел на Ox-оската припаѓаат на бараното геометриско место на точки. Дали има други точки од тоа геометриско место? Ако $T(x,y)$ е таква точка, тогаш јасно е дека T мора да биде надвор од помалата, а внатре, во поголемата кружница. Тогаш, од условот на задачата добиваме $\overline{TT_1}=\overline{TT_2}$, т.е. $2r-\overline{TO_1}=\overline{TO_2}-r$, од каде што се добива $8(x-\frac{3r}{2})^2+9y^2=18r^2$ што претставува равенка на елипса.

13. Одреди ја онаа тангента на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ која со координатните оски формира триаголник со најмала хипотенуза.

Решение. Нека правата $y=kx+n$ е тангента на дадената елипса. Според тоа, системот

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ y=kx+n\end{cases}$$



има единствено решение. Заменувајќи го y од втората во првата равенка добиваме квадратна равенка по y и користејќи дека нејзината дискриминанта е еднаква на 0 го добиваме условот за допир на правата и елипсата $a^2k^2+b^2=n^2$. Ако $k=0$ или $n=0$ тангентата е паралелна со една од координатните оски, па не формира триаголник. Значи можеме да претпоставиме дека $k\neq 0$ и $n\neq 0$. Натаму ако ја запишеме равенката на тангентата во сегментен облик добиваме $\frac{x}{-\frac{n}{k}}+\frac{y}{n}=1$, па нејзиниот отсечок меѓу координатните оски има должина $d=\sqrt{\frac{n^2}{k^2}+n^2}$. Според тоа

$$d^2=\frac{n^2}{k^2}+n^2=\frac{a^2k^2+b^2}{k^2}+a^2k^2+b^2=a^2k^2+\frac{b^2}{k^2}+a^2+b^2=(ak-\frac{b}{k})^2+(a+b)^2.$$

Должината на отсечокот ќе биде најмала ако $ak-\frac{b}{k}=0$. Оттука $k=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ и $n=\pm\sqrt{ab+b^2}$ ($a,b>0$). Значи постојат четири прави со бараната особина и тие се

$$y=\sqrt{\frac{b}{a}}\,x+\sqrt{ab+b^2},\ y=\sqrt{\frac{b}{a}}\,x-\sqrt{ab+b^2},$$

$$y=-\sqrt{\frac{b}{a}}\,x+\sqrt{ab+b^2} \text{ и } y=-\sqrt{\frac{b}{a}}\,x-\sqrt{ab+b^2}.$$

14. Отсечка AB со должина a се движи така што точката A се лизга по апсцисната оска, а точката B се лизга по ординатната оска. Определи го геометриското место на точките $M(x,y)$ кои отсечката AB ја делат во однос $1:2$ сметајќи од точката A.

Решение. Ако точката A се лизга по апсцисната оска, тогаш нејзините координати се од вид $A(m,0)$, а ако точката B се лизга по y оската, тогаш нејзините координати се од облик $B(0,n)$. Притоа $(m-0)^2+(0-n)^2=a^2$, т.е.

$$m^2+n^2=a^2. \qquad (1)$$

Координатите x и y на делбената точка M се $x=\frac{m+0\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2m}{3}$, $y=\frac{0+\frac{1}{2}n}{1+\frac{1}{2}}=\frac{n}{3}$, т.е.

$$m=\frac{3}{2}x,\ n=3y. \qquad (2)$$

Ако од (2) замениме во (1) добиваме

$$(\frac{3}{2}x)^2+(3y)^2=a^2, \text{ т.е. } 9x^2+36y^2=4a^2.$$

Значи, точките M лежат на елипсата $9x^2+36y^2=4a^2$.

15. Определи го тангенсот од аголот кој го зафаќаат заедничките тангенти на кривите $x^2+2y^2=2$ и $y^2=4x$.

Решение. Условод за да правата $y=kx+l$ е тангента на елипсата со полуоски a и b е $a^2k^2+b^2=l^2$, а условот за да правата $y=kx+l$ е тангента на параболата $y^2=2px$ е $p=2kl$. Така го добиваме системот равенки

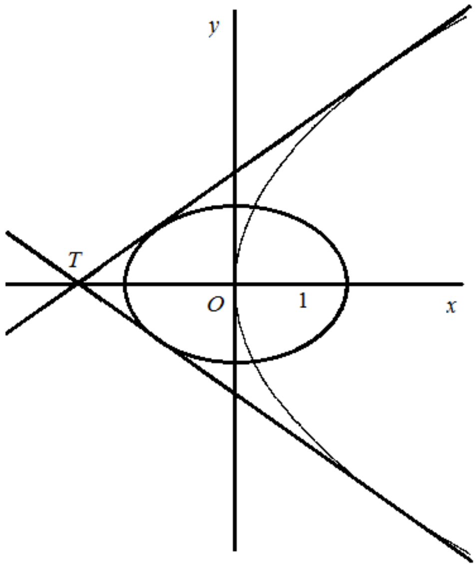
$$\begin{cases}2k^2+1=l^2\\2=2kl\end{cases}$$

од каде ја добиваме биквадратната равенка

$$2k^4+k^2-1=0,$$

чии реални решенија се

$k_1=\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{tg}\varphi_1$ и $k_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{tg}\varphi_2$.

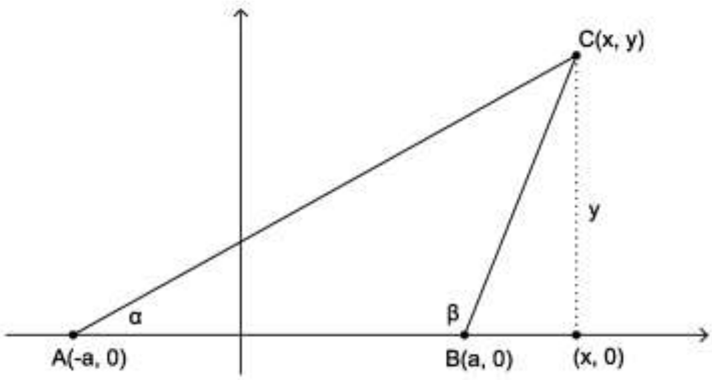


Затоа

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\operatorname{tg}\varphi_1-\operatorname{tg}\varphi_2}{1+\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2}=\frac{2k_1}{1-k_1^2}=\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=2\sqrt{2}.$$

16. Даден е триаголник ABC таков што $\overline{AB}=2a$ и $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=-9$. Определи го геометриското место на темето C.

Решение. Бидејќи производот на тангенсите на двата агли на триаголникот ABC е негативен, заклучуваме дека триаголникот ABC е тапоаголен. Нека



претпоставиме дека аголот β е тап. Триаголникот ABC го поставуваме во правоаголен координатен систем како што е прикажано на долниот цртеж.

Имаме $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x+a}$ и $\operatorname{tg}\beta=-\operatorname{tg}(\pi-\beta)=-\frac{y}{x-a}$. Од $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=-9$ следува

$$\frac{y}{x+a}\cdot\frac{-y}{x-a}=-9, \text{ т.е. } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{9a^2}=1,$$

што значи дека бараното геометриско место е хипербола со полуоски a и $3a$.

17. Дадена е елипсата $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Докажи дека постои кружница таква што пресекот на било кои две тангенти повлечени кон елипсата кои се заемно нормални се сечат во некоја нејзина точка.

Решение. Нека $y=kx+l$ и $y=-\frac{1}{k}x+m$ се тангенти повлечени кон елипсата. Притоа, од равенката $kx+l=-\frac{1}{k}x+m$, добиваме

$$x=\frac{k(m-l)}{k^2+1} \text{ и } y=k\frac{k(m-l)}{k^2+1}+l=\frac{k^2m+l}{k^2+1},$$

па според тоа нивната пресечна точка е $(\frac{k(m-l)}{k^2+1},\frac{k^2m+l}{k^2+1})$.

Од тоа што $y=kx+l$ и $y=-\frac{1}{k}x+m$ се тангенти кон елипсата, имаме $a^2k^2+b^2=l^2$ и $\frac{a^2}{k^2}+b^2=m^2$, т.е. $a^2+b^2k^2=k^2m^2$. Според тоа

$$k^2m^2+l^2=a^2k^2+b^2+a^2+b^2k^2=(a^2+b^2)(k^2+1).$$

Сега, за координатите на пресечната точка имаме

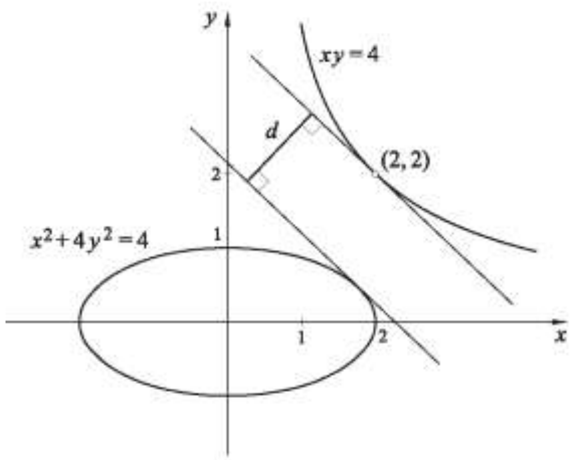
$$(\frac{k(m-l)}{k^2+1})^2+(\frac{k^2m+l}{k^2+1})^2=\frac{k^2(m-l)^2+(k^2m+l)^2}{(k^2+1)^2}=\frac{k^2m^2+k^2l^2+k^4m^2+l^2}{(k^2+1)^2}=\frac{l^2(k^2+1)+k^2m^2(k^2+1)}{(k^2+1)^2}$$

$$=\frac{l^2+k^2m^2}{(k^2+1)^2}=\frac{(k^2+1)(a^2+b^2)}{k^2+1}=a^2+b^2$$

Значи, пресечната точка лежи на централна кружница со радиус $\sqrt{a^2+b^2}$.

18. Нека A е точка на хиперболата $xy=4$, а B е точка на елипсата $x^2+4y^2=4$. Докажи, дека важи $\overline{AB}>\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Решение. Кривите се централносиметрични, па затоа е доволно да се разгледуваат само во првиот квадрант. Тангентата на хиперболата во точката $(2,2)$ има равенка $y=4-x$, бидејќи заради симетричноста на хиперболата во однос на правата $y=x$, тангентата на хиперболата има коефициент на правец -1.



Повлекуваме тангента на елипсата паралелна на шравата $y=4-x$. Таа има равенка $y=-x+l$. Од условот за тангента на елипса $ak^2+b^2=l^2$ добиваме $4+1=l^2$, па затоа $l=\sqrt{5}$. Според тоа, равенката на тангентата на елипсата е $y=-x+\sqrt{5}$.

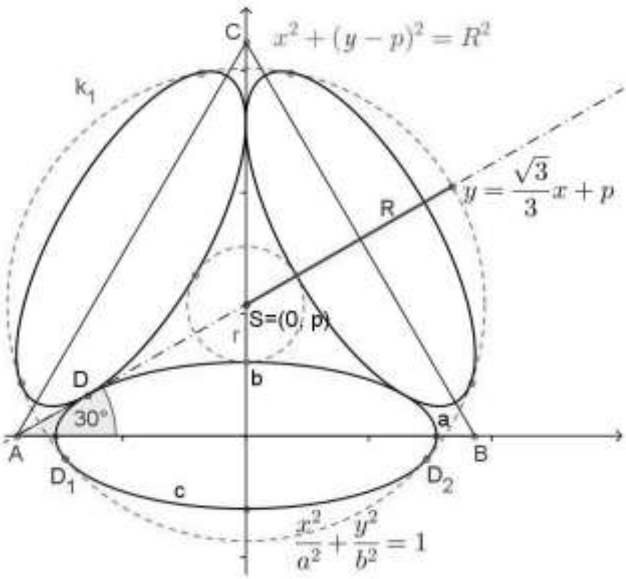
Растојанието меѓу овие две прави е еднакво на растојанието од точката $(2,2)$ до тангентата на елипсата, т.е. тоа еднакво на

$d=\frac{|2+2-\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$.

Конечно, ако A и B се точки од хиперболата и елипсата, соодветно, тогаш растојанието меѓу нив сигурно е поголемо од d, бидејќи точката во која тангентата на елипсата ја допира елипсата не припаѓа на правата $y=x$.

19. Три елипси со полуоски a и b ($a>b$) лежат во рамнината така што по парови надворешно се допираат, а главните оски им лешат на страните на еден рамностран триаголник (види цртеж). Две концентрични кружници, поголема со радиус R и помала со радиус r ($R\neq r$), ги допираат трите елипси. Изрази ги R и r со помош на a и b.

Решение. Елипсите ќе ги поставиме во координатен систем така што оската на елипсата c лежи на $x-$оската и нејзиниот центар се наоѓа во координатниот почеток (види цртеж). Тогаш нејзината равенка е $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, а равенката на кружницата k_1 е $x^2+(y-p)^2=R^2$. Јасно, правата AS е тангента на елипсата c.



Нејзиниот коефициент на правец е $k=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и минува низ точката $S(0,p)$. Затоа нејзината равенка е $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+p$. Од условот правата да е тангента на елипсата

$$a^2(\frac{\sqrt{3}}{3})^2+b^2=p^2\text{, т.е. } p^2=\frac{a^2+3b^2}{3}.$$

Сега, од $r=p-b$ добиваме

$$r=\sqrt{\tfrac{a^2+3b^2}{3}}-b\,.$$

Кружницата k_1 ја допира елипсата во точките D_1 и D_2 чии ординати се еднакви. Од системот равенки

$$\begin{cases} x^2+(y-p)^2=R^2 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

добиваме

$$\tfrac{R^2-(y-p)^2}{a^2}+\tfrac{y^2}{b^2}=1,$$

односно

$$(a^2-b^2)y^2+2b^2py+b^2(R^2-p^2-a^2)=0\,.$$

Последната равебка има двоен корен, што значи дека нејзината дискриминанта е еднаква на нула, т.е.

$$(2b^2p)^2-4(a^2-b^2)b^2(R^2-p^2-a^2)=0$$

$$R^2=\tfrac{a^2(p^2+a^2-b^2)}{a^2-b^2}.$$

Ако во последното равенство замениме $p^2=\frac{a^2+3b^2}{3}$, после средувањето добиваме

$$R=\tfrac{2a^2}{\sqrt{3(a^2-b^2)}}\,.$$

2. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Точките $A_1(a_1,a_2)$, $B_1(b_1,b_2)$ и $C_1(c_1,c_2)$ се средини на страните на триаголникот ABC. Определи ги координатите на темињата на триаголникот.

Решение. Нека $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ и $C(x_3,y_3)$ се темиња на триаголникот. Бидејќи A_1,B_1,C_1 се средни точки на страните BC,CA,AB соодветно, ги добиваме системите:

$$\begin{cases} a_1=\frac{x_2+x_3}{2} \\ b_1=\frac{x_1+x_3}{2} \\ c_1=\frac{x_1+x_2}{2} \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_2=\frac{y_2+y_3}{3} \\ b_2=\frac{y_1+y_3}{2} \\ c_2=\frac{y_1+y_2}{2} \end{cases}.$$

Системите ќе ги запишеме во облик

$$\begin{cases} x_1+x_2=2c_1 \\ x_2+x_3=2a_1 \\ x_3+x_1=2b_1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_1+y_2=2c_2 \\ y_2+y_3=2a_2 \\ y_3+y_1=2b_2 \end{cases}.$$

Со нивно решевање добиваме

$A(b_1+c_1-a_1,b_2+c_2-a_2)$, $C(a_1+b_1-c_1,a_2+b_2-c_2)$, $B(a_1+c_1-b_1,a_2+c_2-b_2)$.

2. Во рамнина се дадени три точки A', B' и C'. Да се определат три точки A, B, C во рамнината така што A е средина на CC', B е средина на AA' и C е средина на BB'.

Решение. Во рамнината поставуваме правоаголен координатен систем xOy. Нека координатите на дадените точки во овој систем се: $A' = (a', a'')$, $B' = (b', b'')$ и $C' = (c', c'')$. Нека координатите на бараните точки се $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ и $C(c_1, c_2)$. Од условите за преполовување добиваме:

$$(a_1, a_2) = (\frac{c'+c_1}{2}, \frac{c''+c_2}{2}),\ (b_1, b_2) = (\frac{a'+a_1}{2}, \frac{a''+a_2}{2}),\ (c_1, c_2) = (\frac{b'+b_1}{2}, \frac{b''+b_2}{2}).$$

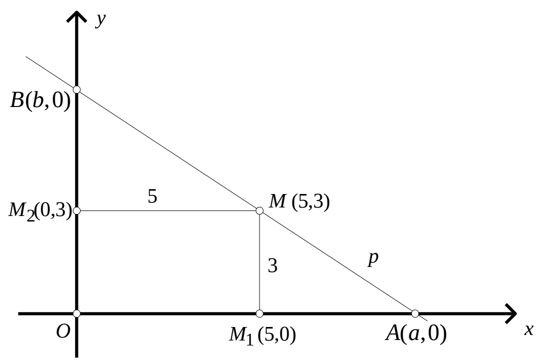
Со изедначување на соодветните координати и по решавање на така добиениот систем линеарни равенки, добиваме

$$a_1 = \frac{a'+2b'+4c'}{7},\quad a_2 = \frac{a''+2b''+4c''}{7}$$
$$b_1 = \frac{b'+2c'+4a'}{7},\quad b_2 = \frac{b''+2c''+4a''}{7}$$
$$c_1 = \frac{c'+2a'+4b'}{7},\quad c_2 = \frac{c''+2a''+4b''}{7}.$$

За решението да биде комплетно треба да докажеме дека точките A, B и C со вакви координати можат да се конструираат, ако се познати координатите на A', B' и C' (во условот на задачата не се бараат координатите на A, B, C, туку се бараат да се конструираат тие точки). Но, бидејќи конструкција на отсечка со двојна должина, на отсечка со должина збир на должини на дадените отсечки и делење на дадена отсечка на 7 дела е позната, точките A, B и C може да се конструираат со помош на координатите на A', B' и C' во поставениот координатен систем.

3. Во координатната рамнина xOy дадена е точка $M(5,3)$. Дали може низ точката M да се повлече права p која координатните оски ги сече во точките $A(a,0)$ и $B(0,b)$, така што a и b да се природни броеви? Определи ги сите такви прави.

Решение. Нека нормалните проекции на точката M врз координатните оски Ox и Oy се точките $M_1(5,0)$ и $M_2(0,3)$ соодветно. Нека p е права која го исполнува условот на задачата, и $A(a,0)$ и $B(0,b)$ се нејзини пресеци со координатните оски Ox и Oy соодветно. Триаголниците AM_1M и MM_2B се слични (имаат еднакви агли), па според тоа



$$\overline{AM_1} : \overline{M_1M} = \overline{MM_2} : \overline{M_2B}, \text{ т.е. } (a-5):3 = 5:(b-3),$$

од каде следува

$$(a-5)(b-3)=15\,. \qquad (1)$$

Бидејќи a и b се природни броеви, ќе ги определиме решенијата на (1) во $\mathbb{N}$. Можни се следните случаи:

$$\begin{cases} a-5=1 \\ b-3=15 \end{cases}, \quad \begin{cases} a-5=3 \\ b-3=5 \end{cases}, \quad \begin{cases} a-5=5 \\ b-3=3 \end{cases}, \quad \begin{cases} a-5=15 \\ b-3=1 \end{cases}.$$

Соодветни решенија на системите се $a_1=6, b_1=18$; $a_2=8, b_2=8$; $a_3=10, b_3=6$; $a_4=20, b_4=4$. Не е тешко да се провери дека за секое од четирите решенија е определена по една права која го исполнува условот на задачата. Бараните прави се: $3x+y=18$, $x+y=8$, $3x+5y=30$ и $x+5y=20$.

4. Дадени се правите $y=2x-5$ и $y=-4x+1$. Дали може да се определат вредностите на параметрите m, n и k, така што пресечните точки на дадените прави и правите $y=(m-n)x+k-n$, $y=(m+n)x+k-m$ се темиња на ромб.

Решение. Пресечната точка на правите $y=2x-5$ и $y=-4x+1$ е точката $(1,-3)$. Ако $y=(m-n)x+k-n$ е паралелна со $y=2x-5$, а $y=(m+n)x+k-m$ е паралелна со $y=-4x+1$, тогаш го добиваме системот

$$\begin{cases} m-n=2 \\ m+n=-4, \end{cases}$$

кој има решение $m=-1, n=-3$. Според тоа, дадените прави го добиваат облиците $y=2x+k+3$, $y=-4x+k+1$.

Пресекот на правите $y=2x+k+3$ и $y=-4x+1$ е точката $A(-\frac{k+2}{6},\frac{2k+7}{3})$, пресекот на правите $y=2x+k+3$ и $y=-4x+k+1$ е точката $B(-\frac{1}{3},k-\frac{1}{3})$, а пресекот на $y=2x-5$ и $y=-4x+k+1$ е точката $C(\frac{k+6}{6},\frac{k-9}{3})$. Ако $D(1,-3)$, тогаш

$$d(C,D)=\sqrt{(\tfrac{k}{6})^2+(\tfrac{k}{3})^2}=|k|\tfrac{\sqrt{5}}{6}, \quad d(A,D)=\sqrt{(\tfrac{k+8}{6})^2+(\tfrac{2k+16}{3})^2}=|k+8|\tfrac{\sqrt{17}}{6}\,.$$

Од условот $d(C,D)=d(A,D)$ добиваме $|k|\frac{\sqrt{5}}{6}=|k+8|\frac{\sqrt{17}}{6}$, од каде $k=\frac{8}{-1\pm\sqrt{\frac{5}{17}}}$.

Броевите $m=-1, n=-3, k=\frac{8}{-1\pm\sqrt{\frac{5}{17}}}$ го исполнуваат условот на задачата.

5. Нека a_i, b_i, $i=1,2,...,7$ се ненегативни реални броеви за кои важи $a_i+b_i\le 2$. Докажи дека постојат $i, j,\ i\ne j$ такви што важи $|a_i-a_j|+|b_i-b_j|\le 1$.

Решение. Точките (a_i, b_i) ќе ги претставиме во координатен систем. Јасно, секоја од нив припаѓа на триаголникот ACI (види цртеж) или во неговата внатрешност. Нека

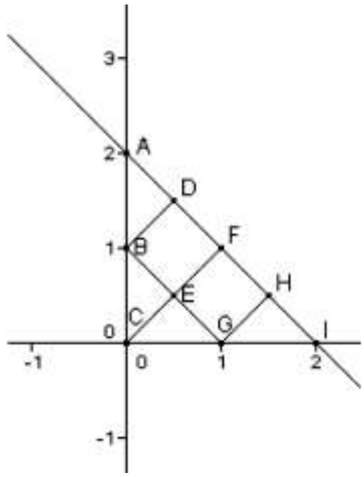
$$A(0,2), B(0,1), C(0,0), D(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}), E(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),$$
$$F(1,1), G(1,0), H(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}), I(2,0).$$

Триаголникот ACI го делиме на шест области определени со триаголниците ABD, BCE, CEG, GHI и квадратите $BDFE$ и $EFHG$. Бидејќи имаме шест области во кои се наоѓат седум точки, од принцип на Дирихле, постојат две точки (a_i, b_i) и (a_j, b_j) кои припаѓат во иста област. Бидејќи важи

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \le 1$$

за било кои две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) од иста област следува дека важи и

$$|a_i - a_j| + |b_i - b_j| \le 1.$$



6. Темињата на триаголникот се $A(-2,-5)$, $B(6,-1)$ и $C(1,4)$. На страната BC е избрана точка M таква што $\overline{BM} : \overline{MC} = 2:3$. Во кој однос правата AM ја дели висината на триаголникот ABC?

Решение. Нека точката $M(x, y)$ ја дели отсечката BC во однос $\lambda = \frac{2}{3}$, (види цртеж), тогаш

$$x = \frac{x_B + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{6+\frac{2}{3}\cdot 1}{1+\frac{2}{3}} = 4 \,,\; y = \frac{y_B + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{-1+\frac{2}{3}\cdot 4}{1+\frac{2}{3}} = 1\,.$$

Значи, $M(4, 1)$.

Равенката на правата низ A и B е $y+5 = \frac{-1+5}{6+2}(x+2)$, т.е.

$$y = \frac{1}{2}x - 4\,, \qquad (1)$$

а низ C и D е $y-4 = -2(x-1)$, т.е.

$$y = -2x+6\,. \qquad (2)$$

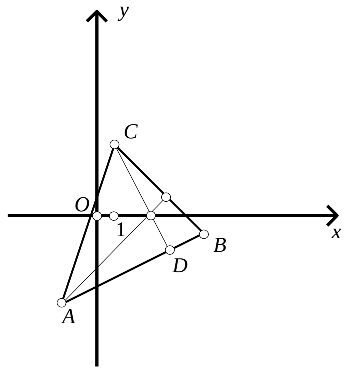
Тие се сечат во точката D чии координати ги наоѓаме како решение на системот равенки

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} - 4 \\ y = -2x+6 \end{cases},$$

т.е. $D(4,2)$. Равенката на правата низ A и M е:

$$y+5 = \frac{1+5}{2+4}(x+2)\,, \quad \text{т.е.}$$

$$y = x - 3\,. \qquad (3)$$



Пресекот на правите (2) и (3) е точката $P(3,0)$.

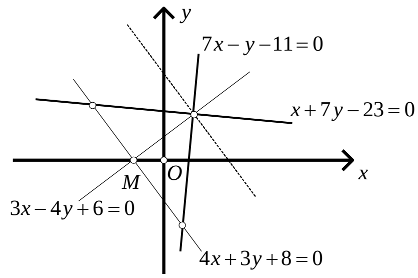
Конечно, за односот $\overline{CP} : \overline{CD}$ добиваме:

$$\lambda = \frac{x_C - x_P}{x_P - x_D} = \frac{1-3}{3-4} = 2\,, \text{ т.е. } \overline{CP} : \overline{CD} = 2:1.$$

7. Напиши равенка на права која минува низ точката $M(-2,0)$ и ги сече правите $x+7y-23=0$ и $7x-y-11=0$ под еднакви агли. Колкав е тој агол?

Решение. Бараната права минува низ точката $M(-2,0)$, што значи дека $y-0=k(x+2)$, т.е.

$$y=k(x+2)\,. \qquad (*)$$



Аголот што оваа права го зафаќа со правата $x+7y-23=0$ е даден со

$$\mathrm{tg}\alpha_1=\frac{k+\frac{1}{7}}{1-\frac{k}{7}}=\frac{7k+1}{7-k},$$

а со правата $7x-y-11=0$ е даден со

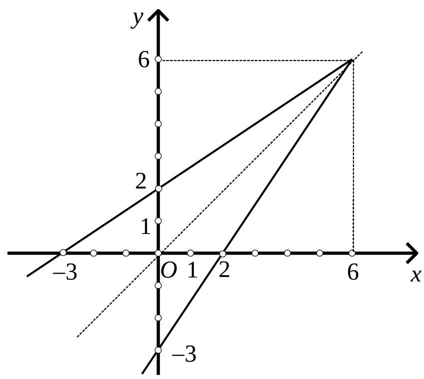
$$\mathrm{tg}\alpha_2=\frac{7-k}{1+7k}\,.$$

Од условот $\mathrm{tg}\alpha_1=\mathrm{tg}\alpha_2$, т.е. $\frac{7k+1}{7-k}=\frac{7-k}{1+7k}$ ја добиваме квадратната равенка $12k^2+7k-12=0$ чии корени се: $k_1=-\frac{4}{3}$, $k_2=\frac{3}{4}$. Заменувајќи ги овие вредности за k во (*) добиваме $4x+3y+8=0$ или $3x-4y+6=0$. Значи, постојат две прави низ M, кои дадените прави ги сечат под еднакви агли од 45° или 135° (види цртеж).

Очигледно, едната права е симетрала на аголот што го градат двете прави, а другата ($4x+3y+8=0$) е нормална на неа.

Забелешка. Ако се зададени две прави p и q што се сечат и точка M, тогаш, според условот на задачата, бараните прави низ M треба да бидат нормални на симетралите s_1 и s_2 на аглите што ги образуваат дадените прави, т.е. бараните прави секогаш се нормални меѓу себе (бидејќи $s_1 \perp s_2$).

8. Најди равенка на права p што е симетрична на правата $3x-2y-6=0$ во однос на правата $x=y$.



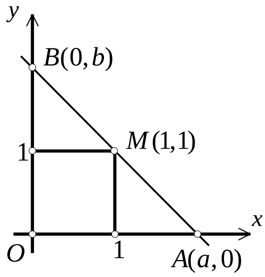
Решение. Знаеме дека графиците на две заемно инверзни функции се симетрични во однос на правата $y=x$. Значи, бараната права p е инверзна функција на функцијата

$$3x-2y-6=0,$$

а тоа е правата

$3y-2x-6=0$, т.е. $2x-3y+6=0$.

9. Низ точката $M(1,1)$ повлечи права p која ги сече координатните оски во точките $A(a>0,0)$ и $B(0,b>0)$.



а) Докажи дека $ab=a+b$.

б) Одреди ја најмалата вредност на $s=a+b$.

в) Одреди ги a и b, ако $a+b=\frac{9}{2}$.

Решение. а) Равенката на правата низ $A(a,0)$ и $B(0,b)$ е: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Оваа права минува и низ $M(1,1)$, па имаме: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, т.е. $ab=a+b$.

б) Од $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ и $a+b=ab$ следува $\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\geq 2$, т.е. $\frac{a+b}{\sqrt{a+b}}\geq 2$, $\sqrt{a+b}\geq 2$, $a+b\geq 4$. Значи, $s=a+b\geq 4$, т.е. $s_{\min}=4$, за $a=b=2$.

в) Од $a+b=\frac{9}{2}$ и $ab=\frac{9}{2}$ следува, по решавање на системот равенки, дека: $a=3$, $b=1{,}5$ и $a=1{,}5$, $b=3$.

10. Во правоаголен координатен систем се дадени точките $A(-\frac{17}{2},0)$, $B(2,0)$ и $C(-1,0)$. Определи ги сите точки од правата $y=x-3$ од кои отсечките AC и BC се гледаат по ист агол.

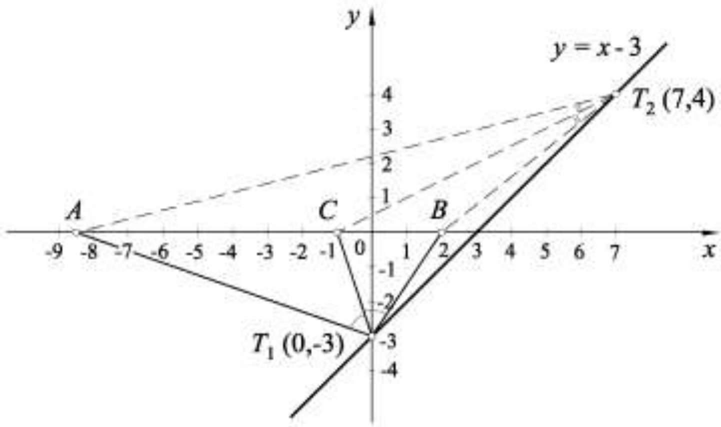
Решение. Нека T е точка од која отсечките AC и BC се гледаат по ист агол. Тогаш $T(x,x-3)$. Бидејќи $\measuredangle CTA=\measuredangle BTC$, добиваме дека отсечката CT лежи на симетралата на $\measuredangle BTA$. Од теоремата за симетрала на агол следува

$$\overline{AT}:\overline{BT}=\overline{AC}:\overline{BC},$$

па затоа

$$\sqrt{(x+\tfrac{17}{2})^2+(x-3)^2}:\sqrt{(x-2)^2+(x-3)^2}=\tfrac{15}{2}:3.$$

Последната равенка е еквивалентна на равенката $x^2-7x=0$ чии решенија се $x_1=0$ и $x_2=7$.

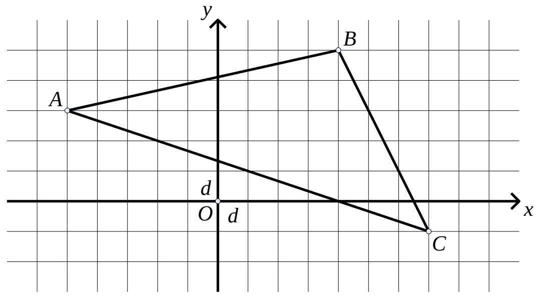


Според тоа, бараните точки се $T_1(0,-3)$ и $T_2(7,4)$.

11. Докажи дека рамностран триаголник не може да се впише во квадратна мрежа, така што темињата на триаголникот да лежат во пресеците на хоризонталните и вертикалните линии на мрежата.

Решение. Нека вертикалните линии од мрежата се паралелни со ординатната оска, а хоризонталните линии од мрежата се паралелни со апсцисната оска во еден правоаголен Декартов координатен cсcтем. Да претпоставиме дека во таа мрежа може да се впише рамностран триаголник чии темиња се во пресеците на хоризонталните И вертикалните линии во мрежата(види цртеж).

Нека $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$. Јасно е дека постојат цели броеви $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, такви што $x_i = a_i d$, $y_i = b_i d$, ($i = 1, 2, 3$) каде што d е означено растојанието меѓу хоризонталните (вертикалните) линии (види цртеж). Од познатата формула, за плоштината P на триаголникот ABC добиваме



$$P = \tfrac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)],$$

т.е.

$$P = \tfrac{d^2}{2}[a_1(b_2 - b_3) + b_2(b_3 - b_1) + a_3(b_1 - b_2)]. \quad (1)$$

Од друга страна, од $P = \frac{c^2\sqrt{3}}{4}$, каде што $c^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$, добиваме

$$P = \tfrac{d^2\sqrt{3}}{4}[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2]. \quad (2)$$

Ако ги споредиме равенствата (1) и (2), ќе добиеме

$$a_1(b_2 - b_3) + b_2(b_3 - b_1) + a_3(b_1 - b_2) = \tfrac{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}{2} \cdot \sqrt{3} \quad (3)$$

што не е можно, бидејќи левата страна од равенството (3) е рационален број, а десната страна од тоа равенство е ирационален број (производ од рационален број различен од нула и ирационален број е ирационален број).

12. Темињата на еден триаголник се точки со целобројни координати, во Декартов координатен систем. Докажи дека неговите агли се различни од 60°.

Решение. Нека $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ се темиња на триаголникот (тие се со целобројни координати).Од формулите за растојание помеѓу две точки добиваме дека квадратите на должините на страните на триаголникот a^2, b^2 и c^2 се цели броеви.

Плоштината на триаголникот е еднаква на

$$P = \tfrac{1}{2}| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|,$$

и јасно е дека P е рационален број.

Нека претпоставиме дека барем еден агол на триаголникот има 60°, односно нека $\gamma = 60^\circ$. Според косинусна теорема

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - ab,$$

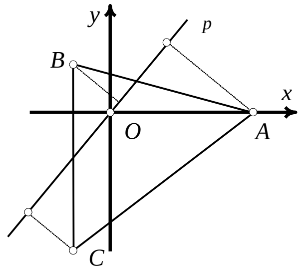
од каде добиваме $ab = a^2 + b^2 - c^2 \in \mathbb{Z}$.

Од друга страна, плоштината на триаголникот е еднаква на

$$P = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \tfrac{\sqrt{3}}{4}ab,$$

од каде добиваме $\sqrt{3}=\frac{4P}{ab}\in\mathbb{Q}$. Последното равенство не е точно, па според тоа триаголникот не може да има агол од 60°.

13. Низ тежиштето на рамностран триаголник минува произволна права. Докажи дека збирот од квадратите на растојанијата од темињата на триаголникот до таа права не зависи од изборот на правата.

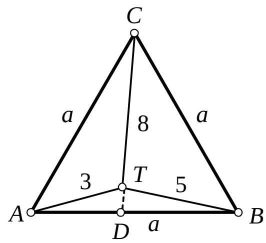


Решение. Да ставиме правоаголен координатен систем со центар O во тежиштето на триаголникот и апсциса OA. Тогаш $A(\frac{\sqrt{3}}{3}a,0)$. Точките B и C имаат прва координата $\frac{\sqrt{3}}{6}a$. Втората координата на точката B е $\frac{a}{2}$ а на C е $-\frac{a}{2}$. Според тоа $B(-\frac{a\sqrt{3}}{6},\frac{a}{2})$ и $C(-\frac{a\sqrt{3}}{6},-\frac{a}{2})$. Равенката на произволна права која минува низ координатниот почеток е $y=kx$. Треба да докажеме дека збирот на квадратите не зависи од k. Растојанијата од темињата ќе ги пресметаме со користење на формулата за растојание од точка до права. Бараниот збир е

$$(\frac{k\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{1+k^2}})^2+(\frac{(-k)(-\frac{a\sqrt{3}}{6})+\frac{a}{2}}{\sqrt{1+k^2}})^2+(\frac{(-k)(-\frac{a\sqrt{3}}{6})-\frac{a}{2}}{\sqrt{1+k^2}})^2=\frac{a^2}{2}$$

па тој е константен.

14. Даден е рамностран триаголник ABC и точка T во рамнината од триаголникот. Нека $\overline{AT}=3,\ \overline{BT}=5$ и $\overline{CT}=8$. Пресметај ја страната на триаголникот.



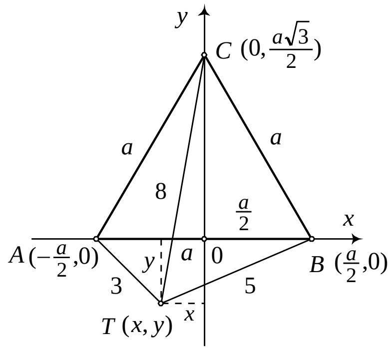
Решение. Прво ќе докажеме дека точката T не може да биде во внатрешноста на триаголникот ABC ниту на некоја од неговите страни. Да претпоставиме дека T е во внатрешноста на ΔABC. Тогаш триаголникот ATC е тапоаголен (аглите CAT и ACT се помали од 60°) па $a=\overline{AC}>\overline{TC}=8$. Од друга страна и триаголникот ABT е тапоаголен па $a=\overline{AB}<\overline{AT}+\overline{TB}=3+5=8$. Добивме противречност. Сега да претпоставиме дека T лежи на некоја од страните на триаголникот. Не се губи од општоста ако претпоставиме $T\equiv D$. Тогаш еден од триаголниците ADC ии BDC е тапоаголен (со тап агол кај темето D) или двата се правоаголни (со прав агол кај темето D), па во секој случај $a>\overline{CD}=8$. Но $a=\overline{AD}+\overline{DB}=3+5=8$, па повторно добивме противречност. Значи T се наоѓа надвор од триаголникот ABC.

Да воведеме правоаголен координатен систем со координатен почеток O во средината на страната AB, x-оска правата AB и y-оска висината на триаголникот ABC. Тогаш $A(-\frac{a}{2},0), B(\frac{a}{2},0)$ и $C(0,\frac{a\sqrt{3}}{2})$. Нека точката T има координати x и y. Според тоа имаме

$$(\tfrac{a}{2}+x)^2+y^2=5^2,\ (\tfrac{a}{2}-x)^2+y^2=3^2 \text{ и } (\tfrac{a\sqrt{3}}{2}+y)^2+x^2=8^2.$$

Од првата и втората равенка добиваме

$$(\tfrac{a}{2}+x)^2+y^2-(\tfrac{a}{2}-x)^2-y^2=16,$$



односно $x=\frac{8}{a}$. Ако ова го замениме во втората равенка добиваме $(\frac{a}{2}-\frac{8}{a})^2+y^2=3^2$ и во третата $(\frac{a\sqrt{3}}{2}+y)^2+\frac{64}{a^2}=64$. Со одземање на овие две равенки добиваме $\frac{a^2}{2}+a\sqrt{3}y+8=55$, односно $y=\frac{94-a^2}{2\sqrt{3}a}$. Сега ако $y=\frac{94-a^2}{2\sqrt{3}a}$ го замениме во равенката $(\frac{a}{2}-x)^2+y^2=3^2$ и ја средиме добиената равенка имаме

$$a^4-98a^2+2401=0, \text{ т.е. } (a^2-49)^2=0.$$

Имајќи предвид дека $a>0$ (a е должина на страната на рамностран триаголник) добиваме $a=7$.

15. Докажи дека за произволна точка P која припаѓа на впишаната кружница на рамностраниот триаголник ABC важи равенството

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\frac{5a^2}{4}, \tag{1}$$

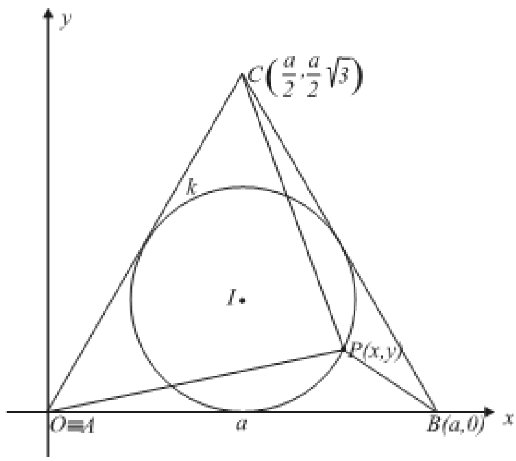
каде a е должина на страната на триаголникот.

Решение. *Прв начин.* Да воведеме правоаголен координатен систем xOy со координатен почеток во врвот A на ΔABC. Тогаш

$$A\equiv O(0,0), B(a,0), C(\tfrac{a}{2},\tfrac{a}{2}\sqrt{3})$$

и $P(x,y)\in k$ (цртеж десно). Лесно се добива дека $I(\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{6})$ и $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Сега, равенката на кружницата k гласи:

$$(x-\tfrac{a}{2})^2+(y-\tfrac{a\sqrt{3}}{6})^2=(\tfrac{a\sqrt{3}}{6})^2$$



т.е.

$$12x^2-12ax+12y^2-4ay\sqrt{3}+3a^2=0. \tag{$*$}$$

Бидејќи важи

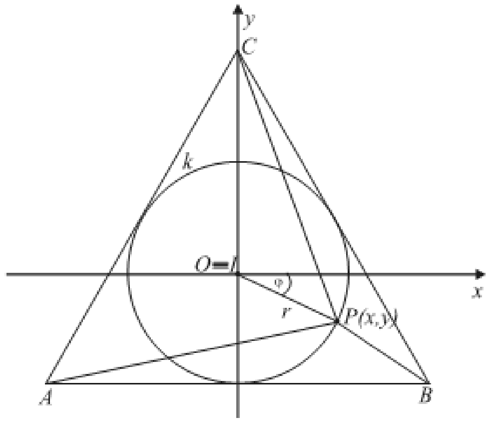
$$\overline{PA}^2=x^2+y^2,\ \overline{PB}^2=(x-a)^2+y^2,\ \overline{PC}^2=(x-\tfrac{a}{2})^2+(y-\tfrac{a\sqrt{3}}{2})^2,$$

следува

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2 = x^2+y^2+x^2-2ax+a^2+y^2+x^2-ax+\tfrac{a^2}{4}+y^2-ay\sqrt{3}+\tfrac{3a^2}{4}$$
$$=3x^2+3y^2-3ax-ay\sqrt{3}+2a^2$$
$$=\tfrac{(12x^2-12ax+12y^2-4ay\sqrt{3}+3a^2)+5a^2}{4}=\tfrac{5a^2}{4}$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Воведуваме правоаголен коррдинатен систем xOy со координатен почеток во точката I - центар на впишаната кружница k во $\triangle ABC$ (цртеж десно).



Имаме: $I\equiv O(0,0)$, $A(-\frac{a}{2},-)$,

$B(\frac{a}{2},-\frac{a\sqrt{3}}{6})$, $C(0,\frac{a\sqrt{3}}{3})$. Радиусот на k е $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, па произволна точка $P\in k$ е дадена со $P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, каде $\varphi=\measuredangle PIx$. Бидејќи

$$\overline{PA}^2=(r\cos\varphi+\tfrac{a}{2})^2+(r\sin\varphi+\tfrac{a\sqrt{3}}{6})^2$$
$$=r^2\cos^2\varphi+ar\cos\varphi+\tfrac{a^2}{4}+r^2\sin^2\varphi+\tfrac{ar\sqrt{3}}{3}\sin\varphi+\tfrac{a^2}{12}$$
$$=r^2+ar\cos\varphi+\tfrac{ar\sqrt{3}}{3}\sin\varphi+\tfrac{a^2}{3}$$
$$\overline{PB}^2=(r\cos\varphi-\tfrac{a}{2})^2+(r\sin\varphi+\tfrac{a\sqrt{3}}{6})^2=r^2-ar\cos\varphi+\tfrac{ar\sqrt{3}}{3}\sin\varphi+\tfrac{a^2}{3}$$

и

$$\overline{PC}^2=(r\cos\varphi)^2+(r\sin\varphi-\tfrac{a\sqrt{3}}{3})^2=r^2-\tfrac{2ar\sqrt{3}}{3}\sin\varphi+\tfrac{a^2}{3},$$

со собирање на горните равенства добиваме:

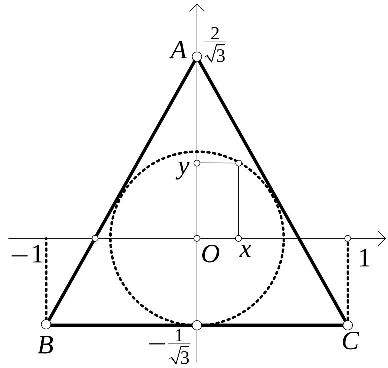
$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=3r^2+a^2=3(\tfrac{a\sqrt{3}}{6})^2+a^2=\tfrac{a^2}{4}+a^2=\tfrac{5a^2}{4},$$

што и требаше да се докаже.

16. Нека P е точка од впишаната кружница k во рамностран триаголник ABC со должина на страна 2 . Докажи дека

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=5.$$

Решение. Ќе поставиме координатен систем со координатен почеток во центарот на впишаната кружница, а x-оската да е паралелна со една страна на триаголникот.



Тогаш $A(0,\frac{2}{\sqrt{3}})$, $B(-1,-\frac{1}{\sqrt{3}})$ и $B(1,\frac{1}{\sqrt{3}})$.

Радиусот на впишаната кружница е $r=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Точката P има координати (x,y) такви што $x^2+y^2=r^2=\frac{1}{3}$.

Сега,

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=[x^2+(y-\tfrac{2}{\sqrt{3}})^2]+[(-1-x)^2+(-y-\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2]+[(1-x)^2+(-y-\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2]$$

$$=3(x^2+y^2)+4=5,$$

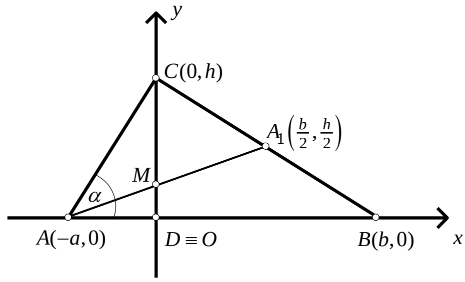
што требаше да се докаже.

17. Во правоаголниот триаголник ABC ($\measuredangle C=90^\circ$) повлечна е тежишна линија AA_1, која што ја сече висината CD во точката M. Најди ги односите $\overline{DM}:\overline{MC}$ и $\overline{AM}:\overline{MA_1}$, ако $\measuredangle A=\alpha$.

Решение. Го поставуваме триаголникот ABC како на цртеж 1, и ставаме

$\overline{CD}=h$, $\text{tg}\alpha=t$, $A(-a,0)$,

$B(b,0)$, $C(0,h)$ и $D(0,0)$.



цртеж 1

Тогаш $a=h\text{ctg}\alpha=\frac{h}{t}$, $b=h\text{tg}\alpha=h\cdot t$, од каде што $ab=h^2$. Според тоа, координатите на темињата се: $A(-\frac{h}{t},0)$, $B(ht,0)$, $C(0,h)$ и $A_1(\frac{ht}{2},\frac{h}{2})$.

Правата AA_1: $y-0=\frac{\frac{h}{2}-0}{\frac{ht}{2}-\frac{h}{t}}(x+\frac{h}{t})$, ја сече y- оската (за $x=0$), во точката $M(0,\frac{h}{2+t^2})$. Бидејќи $\overline{DM}=\frac{h}{2+t^2}$ следува дека $\overline{MC}=h-\frac{h}{2+t^2}=\frac{h(1+t^2)}{2+t^2}$, па тогаш

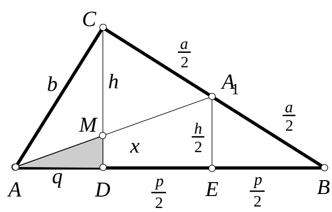
$$\overline{DM}:\overline{MC}=1:(1+\text{tg}^2\alpha).$$

Од триаголникот AOM добиваме дека

$$\overline{AM}=\frac{h^2}{t^2}+\frac{h^2}{(2+t^2)^2}=\frac{h^2(t^4+5t^2+4)}{t^2(2+t^2)^2}.$$

Понатаму, за $\overline{MA_1}$ добиваме

$$\overline{MA_1}=\frac{h^2t^2}{4}+(\frac{h}{2}-\frac{h}{2+t^2})^2=h^2t^2\frac{t^4+5t^2+4}{4(2+t^2)^2}.$$



цртеж 2

Тогаш бараниот однос $\overline{AM}:\overline{MA_1}$ е

$\overline{AM}:\overline{MA_1}=\frac{1}{t}:\frac{t}{2}$, или $\overline{AM}:\overline{MA_1}=2:\text{tg}^2\alpha$.

Забелешка. Задачата можеме да ја решиме и планиметриски, изразувајќи го $x=\overline{MD}$ преку $h=\overline{CD}$ и $\text{tg}\alpha$ и користејќи ја сличноста на триаголниците ADM и AEA_1 (види цртеж 2)

18. Точката P лежи на впишаната кружница во квадратот $ABCD$. Дали може секоја од отсечките PA, PB, PC, PD и AB да има целобројна должина?

Решение. Нека претпоставиме дека секоја од дадените отсечки има целобројна должина. Да разгледаме правоаголен координатен систем чиј координатен почеток е во центарот O на квадратот, а координатните оски се паралелни со страните на квадратот. Тогаш координатите на темињата се $A(a,a), B(-a,a)$, $C(-a,-a)$ и $D(a,-a)$. Ако координатите на точката P се (b,c), тогаш

$$\overline{AP}^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac$$

$$\overline{BP}^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac$$

$$\overline{CP}^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac$$

$$\overline{DP}^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac$$

од каде наоѓаме $\overline{BP}^2 - \overline{AP}^2 = 4ab$ и $\overline{CP}^2 - \overline{BP}^2 = 4ac$. Бидејќи $2a$ е природен број, добиваме дека b и c се рационални броеви. Тоа значи дека можеме да сметаме, дека a,b и c се природни броеви (ќе помножиме со најмалиот заеднички содржател на нивните именители). Освен тоа, ако и трите броја се парни, можеме да делиме со 2 се додека едниот број не стане непарен. Точката P лежи на впишаната кружница во квадратот, па затоа $b^2 + c^2 = a^2$ и ако разгледаме по модул 4 добиваме дека еден од броевите b или c е парен. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека b е парен, а a и c се непарни. Сега од равенствата за $\overline{CP}^2$ и $\overline{BP}^2$ следува, дека $\overline{CP}$ и $\overline{BP}$ се непарни. Бидејќи квадрат на непарен број е конгруентен со 1 по модул 8, следува дека $\overline{CP}^2 - \overline{BP}^2 = 4ac$ се дели со 8, што е противречност, бидејќи a и c се непарни.

Конечно, од добиената противречност следува дека не е можно сите отсечки PA, PB, PC, PD и AB да имаат целобројни должини.

19. На кривата со равенка $y = x^4 - 2x^2$ се избрани четири различни точки $T_k(x_k, y_k)$, $k = 1,2,3,4$. Ако T_1, T_2, T_3, T_4 лежат на една права, тогаш

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

Докажи!

Решение. Ќе претпоставиме дека T_1, T_2, T_3, T_4 лежат на правата $y = ax + b$. Тогаш од условот на задачата имаме

$$x_k^4 - 2x_k^2 = y_k = ax_k + b, \quad k = 1,2,3,4$$

односно

$$x_k^4 - 2x_k^2 - ax_k - b = 0, \quad k = 1,2,3,4$$

Од претпоставките на задачата, точките T_1, T_2, T_3 и T_4 се различни, па според тоа и броевите x_1, x_2, x_3 и x_4 се попарно различни. Значи x_1, x_2, x_3 и x_4 се корени на равенката $x^4 - 2x^2 - ax - b = 0$. Според Виетовите правила збирот $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ е еднаков на коефициентот пред x^3. Значи,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

20. Докажи дека во рамнината постои бесконечно множество точки

$$..., P_{-3}, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, P_3, ...$$

за кои важи: за секои три различни цели броеви a,b,c точките P_a, P_b, P_c лежат на една права ако и само ако $a+b+c=2014$.

Решение. Ќе докажеме, дека множеството

$$\{P_n = (n, n^3 - 2014n^2) \mid n \in \mathbf{Z}\}$$

го има саканото својство.

Како што знаеме, точките $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ и (x_3, y_3) лежат на една права ако и само ако

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

За точките

$$P_a = (a, a^3 - 2014a^2),\ P_b = (b, b^3 - 2014b^2),\ P_c = (c, c^3 - 2014c^2)$$

$a \neq b \neq c \neq a$ важи

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & a^3 - 2014a^2 & 1 \\ b & b^3 - 2014b^2 & 1 \\ c & c^3 - 2014c^2 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & a^3 & 1 \\ b & b^3 & 1 \\ c & c^3 & 1 \end{vmatrix} - 2014 \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= ab^3 + bc^3 + ca^3 - ab^3 - ac^3 - ba^3 \\
&\quad - 2014(ab^2 + ca^2 + bc^2 - cb^2 - ac^2 - ba^2) \\
&= -ab(a-b)(a+b) - c^3(a-b) + c(a-b)(a^2 + ab + b^2) \\
&\quad - 2014[-ab(a-b) - c^2(a-b) + c(a-b)(a+b)] \\
&= (a-b)(-ab^2 - a^2b - c^3 + ca^2 + abc + cb^2) \\
&\quad - 2014(a-b)(-ab - c^2 + ac + bc) \\
&= (a-b)[ab(c-a) - c(c-a)(c+a) + b^2(c-a)] \\
&\quad - 2014(a-b)[-c(c-a) + b(c-a)] \\
&= (a-b)(c-a)(ab - c^2 - ac + b^2) \\
&\quad - 2014(a-b)(b-c)(c-a) \\
&= (a-b)(c-a)[a(b-c) + (b-c)(b+c)] \\
&\quad - 2014(a-b)(b-c)(c-a) \\
&= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) - 2014(a-b)(b-c)(c-a) \\
&= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c-2014).
\end{aligned}$$

Бидејќи $a \neq b \neq c \neq a$, од претходно изнесеното следува дека нашата детерминанта се анулира ако и само ако $a+b+c=2014$.

21. Докажи дека во координатната рамнина не може да се нацрта конвексен четириаголник кај кој едната дијагонала е двапати поголема од другата, аголот меѓу дијагоналите е $45°$, а координатите на сите темиња се цели броеви.

Решение. Да претпоставиме дека четириаголникот $ABCD$ ги задоволува бараните услови и важи $\overline{AC}=2\overline{BD}$. Тогаш,

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}\cdot\cos 45°=\overline{BD}^2\cdot\sqrt{2}\,.$$

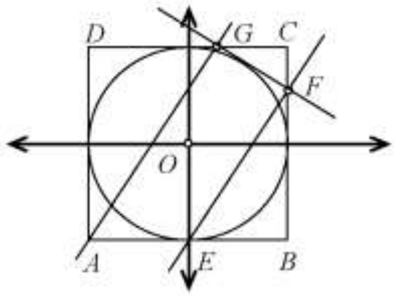
Меѓутоа, ова равенство е невозможно, затоа што

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}&=(x_c-x_a,y_c-y_a)\cdot(x_d-x_b,y_d-y_b)\\&=(x_c-x_a)(x_d-x_b)+(y_c-y_a)(y_d-y_b)\end{aligned}$$

и $\overline{BD}^2=(x_d-x_b)^2+(y_d-y_b)^2$ се цели броеви, $\overline{BD}^2\neq 0$, па би добиле дека $\sqrt{2}$ е рационален број.

22. Нека E е средината на страната AB на квадратот $ABCD$, а F и G се точки на страните BC и CD соодветно, такви што $EF \parallel AG$. Докажи дека FG е тангента на кружницата впишана во квадратот $ABCD$.

Решение. Воведуваме координатен систем така што координатниот почеток да е во центарот на квадратот $ABCD$, тогаш точката A има координати $A(-a,-a)$, а точката $B(a,-a)$, каде $a>0$ и $2a$ е страната на квадратот $ABCD$. Нека $k>0$ е коефициентот на правец на правата AG. Тогаш, равенката на таа права е $y=k(x+a)-a$, и бидејќи G лежи и на правата $y=a$, добиваме дека нејзините координати се $D(\frac{2a}{k}-a,\,a)$.

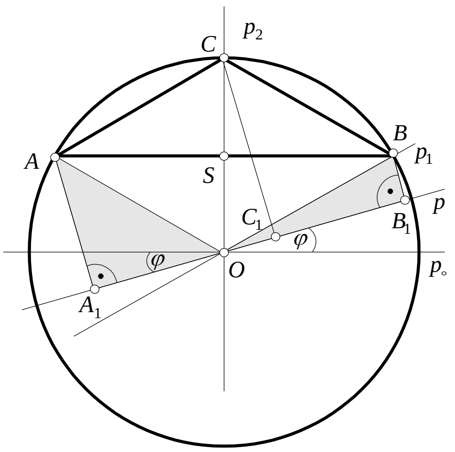


Слично, се добива дека $E(0,-a)$, $EF: y=kx-a$, $F(a,ka-a)$, од каде равенката на правата GF е $y=\frac{k(k-2)}{2(1-k)}(x-a)+a(k-1)$. Растојанието од точката $O(0,0)$ до правата GF е $d(O,GF)=\frac{|a\frac{k(k-2)}{2(1-k)}-a(k-1)|}{\sqrt{1+\frac{k^2(k-2)^2}{4(1-k)^2}}}=a$, од каде следува тврдењето на задачата.

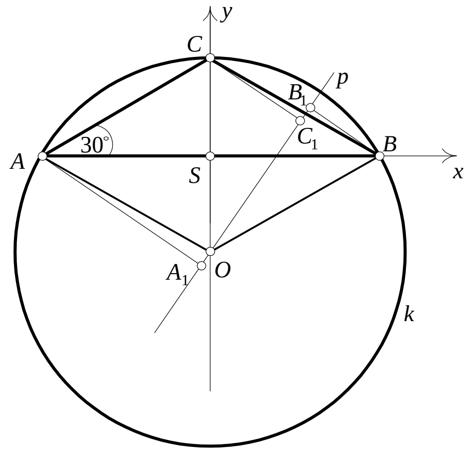
23. Низ центарот O на опишаната кружница околу рамнокракиот триаголник ABC, со агол $\gamma=120^\circ$, е повлечена произволна права p. Докажи дека најголемото од растојанијата од темињата на триаголникот до правата p е еднаков на збирот од другите две растојанија.

Решение. *Прв начин.* Нека $k(O,R)$ е опишаната кружница околу триаголникот ABC и нека A_1,B_1,C_1 се соодветните ортогонални проекции на темињата A,B,C врз правата p, која минува низ центарот на кружницата. Можни се повеќе случаи за изборот на правата p (види цртеж 1).

1) Правата p е паралелна со AB, т.е. ја има положбата на $p_\circ$. Во овој случај лесно докажуваме дека $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}=\overline{CC_1}$ бидејќи $\overline{CS}=\overline{SO}=\overline{AA_1}=\overline{BB_1}$.



цртеж 1



цртеж 2

2) Правата p минува низ темето B , т.е. ја има положбата p_1. Во овој случај $\overline{AA_1}=\overline{CC_1}$, $\overline{BB_1}=0$, па следува: $\overline{AA_1}=\overline{BB_1}+\overline{CC_1}$ или $\overline{CC_1}=\overline{BB_1}+\overline{AA_1}$.

3) Правата p минува низ темето C , т.е. ја има положбата p_2; тогаш $\overline{CC_1}=0$, $\overline{AA_1}=\overline{AS}=\overline{SB}=\overline{BB_1}$, па тврдењето очигледно важи.

4) Да го разгледаме случајот кога правата p нема пресек со основата AB на триаголникот ABC (види цртеж 1). Во овој случај очигледно важи: $\overline{CC_1}>\overline{AA_1}$ и $\overline{CC_1}>\overline{BB_1}$. Значи, треба да се докаже равенството $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}=\overline{CC_1}$.

Нека со φ го означиме аголот меѓу правите p и $p_\circ$, тогаш:

$$\measuredangle AOA_1=30^\circ+\varphi, \qquad \measuredangle BOB_1=30^\circ-\varphi, \qquad \measuredangle COC_1=90^\circ-\varphi;$$

$$\overline{AA_1}=R\sin(30^\circ+\varphi), \qquad \overline{BB_1}=R\sin(30^\circ-\varphi), \qquad \overline{CC_1}=R\cos\varphi,$$

$$\begin{aligned}\overline{AA_1}+\overline{BB_1}&=R(\sin 30^\circ\cos\varphi+\cos 30^\circ\sin\varphi+\sin 30^\circ\cos\varphi-\cos 30^\circ\sin\varphi)\\&=R\cdot 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\cos\varphi=R\cos\varphi=\overline{CC_1}\end{aligned}.$$

5) На сличен начин докажуваме дека $\overline{AA_1}+\overline{BB_1}=\overline{CC_1}$, во случај кога правата p е “меѓу” правите p_1 и p_2, т.е. кога p го сече кракот BC , односно дека $\overline{BB_1}=\overline{AA_1}+\overline{CC_1}$ кога правата p го сече кракот AC .

Втор начин. Да го поставиме триаголникот во координатна рамнина xSy како што е прикажано на цртеж 2 и нека $R=2$; тогаш $A(-\sqrt{3},0)$, $B(\sqrt{3},0)$, $C(0,1)$, $O(-1,0)$. Равенката на правата p низ центарот O на кружницата е $y+1=kx$, т.е. $kx-y-1=0$. За растојанијата $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ и CC_1 наоѓаме:

$$\overline{AA_1}=\frac{|-k\sqrt{3}-1|}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \overline{BB_1}=\frac{|k\sqrt{3}-1|}{\sqrt{1+k^2}}, \qquad \overline{CC_1}=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Разгледуваме три можности, во зависност од коефициентот k.

1) $k=0 \Rightarrow \overline{AA_1}=1, \quad \overline{BB_1}=1, \quad \Rightarrow \quad \overline{AA_1}+\overline{BB_1}=\overline{CC_1}$.

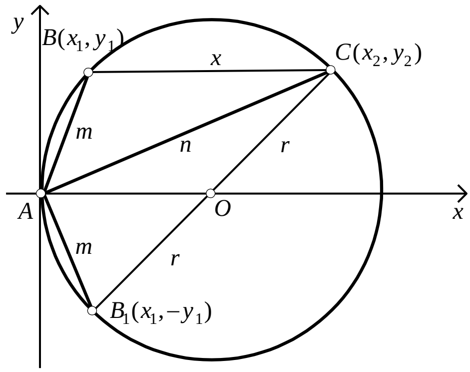
2) $k>0 \Rightarrow \overline{AA_1}=\frac{k\sqrt{3}+1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \overline{BB_1}=\frac{k\sqrt{3}-1}{\sqrt{1+k^2}}, \Rightarrow \quad \overline{AA_1}=\overline{BB_1}+\overline{CC_1}$.

3° $k>0 \Rightarrow \overline{AA_1}=\frac{k\sqrt{3}-1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \overline{BB_1}=\frac{k\sqrt{3}+1}{\sqrt{1+k^2}}, \Rightarrow \quad \overline{BB_1}=\overline{AA_1}+\overline{CC_1}$.

24. Во кружница со радиус r се повлечени две тетиви: $\overline{AB}=m$ и $\overline{AC}=n$, при што $m^2+n^2=4r^2$. Пресметај ја должината на тетивата BC.

Решение. Да ја поставиме кружницата во координатен систем, со центар на x-оската и да ја допира y-оската, така што точката A да биде во координатниот почеток (види цртеж 3).

Првото решение $\overline{B_1C}=2r$ е очигледно. Да го побараме второто решение.



цртеж 3

Од равнствата

$$\overline{AB}^2=x_1^2+y_1^2=m^2,$$

$$\overline{AC}^2=x_2^2+y_2^2=n^2$$

добиваме

$$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=m^2+n^2=4r^2.$$

Од условот, пак, точките B и C да лежат на кружницата

$$(x-r)^2+y^2=r^2, \; x^2+y^2=2rx$$

следуваат равенствата

$$x_1^2+y_1^2=2rx_1, \quad \text{т.е.} \quad x_1=\frac{m^2}{2r}$$

$$x_2^2+y_2^2=2rx_2, \quad \text{т.е.} \quad x_2=\frac{n^2}{2r}.$$

Тогаш

$$y_1^2=m^2-x_1^2=m^2-\frac{m^4}{4r^2}=\frac{m^2}{4r^2}(4r^2-m^2)=\frac{m^2}{4r^2}(m^2+n^2-m^2)=\frac{m^2n^2}{4r^2}, \quad y_1=\frac{mn}{2r}.$$

Аналогно добиваме $y_2=\frac{mn}{2r}$. За растојанието $\overline{BC}$ наоѓаме

$$\overline{BC}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2-2x_1x_2-2y_1y_2$$

$$=4r^2-2(x_1x_2+y_1y_2)=4r^2-2\left(\frac{m^2n^2}{4r^2}+\frac{m^2n^2}{4r^2}\right)$$

$$=4r^2-\frac{4m^2n^2}{4r^2}=\frac{16r^4-4m^2n^2}{4r^2}=\frac{(m^2+n^2)^2-4m^2n^2}{4r^2}=\left(\frac{m^2-n^2}{2r}\right)^2$$

па затоа $\overline{BC}=\frac{m^2-n^2}{2r}$, (за $n>m$).

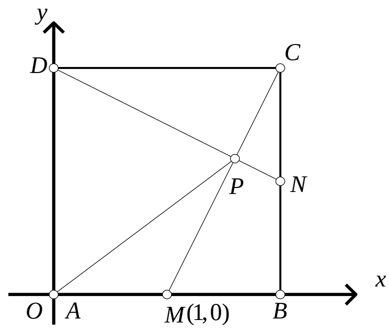
25. Точките M и N се средини на страните AB и BC на квадратот $ABCD$. Отсечките CM и DN се сечат во точка P. Докажи дека $\overline{AP} = \overline{AB}$.

Решение. Го поставуваме квадратот во координатниот систем како на цртеж десно и притоа, не губејќи од општоста ставаме $\overline{AB} = a = 2$. Тогаш неговите темиња се $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(0,2)$ и уште $M(1,0)$, $N(2,1)$. Треба да докажеме дека $\overline{AP} = 2$. Равеката на правата MC е:

$$y = \tfrac{2-0}{2-1}(x-1)\text{, т.е. } y = 2x - 2,$$

а на правата DN е:

$$y - 1 = \tfrac{2-1}{0-2}(x-2)\text{, т.е. } y = -\tfrac{1}{2}x + 2.$$



цртеж 3

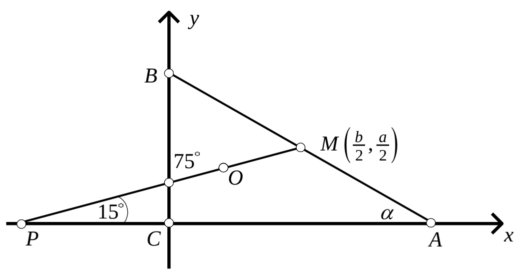
Решавајќи го системот равенки

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 2 \text{ и } y = 2x - 2$$

ги добиваме кориднатите на нивниот пресек P. Наоѓаме: $x = \frac{8}{5}$, $y = \frac{5}{5}$. Значи, $P(\frac{8}{5}, \frac{6}{5})$. Тогаш за $\overline{AP}$ добиваме: $\overline{AP} = \sqrt{(\frac{8}{5})^2 + (\frac{6}{5})^2} = 2$, т.е. $\overline{AP} = \overline{AB}$

26. Во правоаголен триаголник правата што минува низ средината на хипотенузата и низ центарот на впишаната кружница, ја сече катетата под агол од 75°. Одреди ги острите агли на триаголникот.

Решение. Го поставуваме правоаголниот ΔABC во координатен систем, како што е покажано на цртежот. Нека $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$. Тогаш $A(b,0)$, $B(0,b)$, $C(0,0)$, $M\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$, $O(r,r)$, каде $r = \frac{a+b-c}{2}$. Очигледно правата OM зафаќа агол од 15° со Ox оската, па нејзиниот коефициент на правец е $k = \operatorname{tg} 15^\circ$. Но, од друга страна имаме



$$k = \frac{y_M - y_0}{x_M - x_0} = \frac{\frac{a}{2} - r}{\frac{b}{2} - r} = \frac{c-b}{c-a} = \frac{1-\frac{b}{c}}{1-\frac{a}{c}} = \frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}.$$

Тогаш, од $\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$, добиваме:

$$\sin 15^\circ - \cos 15^\circ = \cos\alpha\cos 15^\circ - \sin\alpha\sin 15^\circ - 2\sin 30^\circ \sin(-45^\circ) = \cos(\alpha + 15^\circ)$$

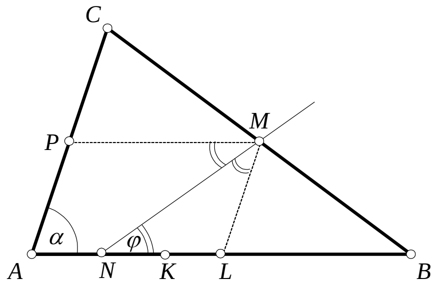
$$\cos(\alpha + 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

од што следува $\alpha + 15^\circ = 45^\circ$, т.е. $\alpha = 30^\circ$.

Значи, бараните агли на правоаголниот триаголник се: $\beta = 60^\circ, \alpha = 30^\circ$.

27. На страната AB на $\triangle ABC$ е избрана точка K, таква што $\overline{BK} = \overline{AC}$, ($\overline{AC} < \overline{AB}$). Низ средините на отсечките BC и AK е повлечена права p. Одреди го аголот меѓу правите p и AB, ако $\measuredangle BAC = \alpha$.

Решение. *Прв начин.* Нека $\overline{BK} = \overline{AC}$ и нека M и N се средини на BC и AK. Ги повлекуваме средните линии PM и LM на ΔABC. Да го одредиме аголот $\phi = \measuredangle LMN$ (види цртеж 1). Ако $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, тогаш:



цртеж 1

$$\overline{AK} = c - b,\ \overline{AN} = \frac{c-b}{2},$$

па имаме:

$$\overline{NL} = \overline{AL} - \overline{AN} = \frac{c}{2} - \frac{c-b}{2} = \frac{b}{2}.$$

Но, и $\overline{ML} = \frac{b}{2}$, па следува дека $\triangle MNL$ е рамнокрак, односно $\varphi = \measuredangle LMN$, (како наизменични), следува дека $\varphi = \frac{\measuredangle LMN}{2} = \frac{\alpha}{2}$, бидејќи $ALMP$ е паралелограм.

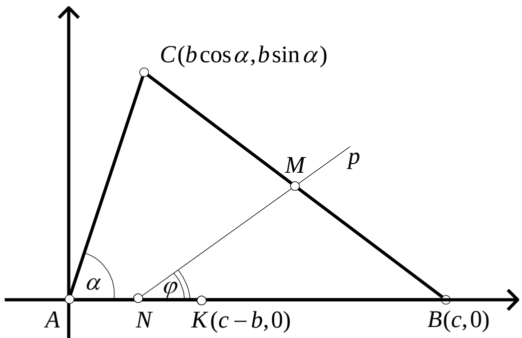
Втор начин. Според ознаките на цртеж 2, имаме:

$M(\frac{c+b\cos\alpha}{2}, \frac{b\sin\alpha}{2})$, $N(\frac{c-b}{2}, 0)$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{\frac{b\sin\alpha}{2}}{\frac{c+b\sin\alpha}{2} - \frac{c-b}{2}}$$

$$= \frac{b\sin\alpha}{b(1+\cos\alpha)} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

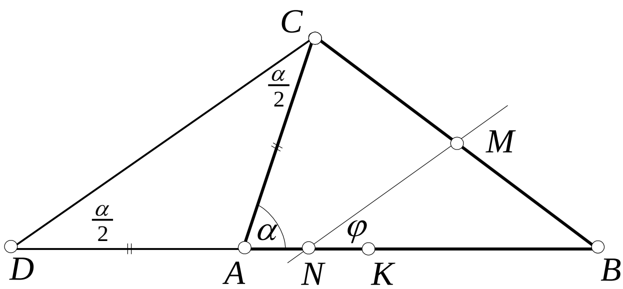
од каде што $\varphi = \frac{\alpha}{2}$.



цртеж 2

*Трет начин***.** На правата AB одредуваме точка D, таква што $\overline{AD} = \overline{AC}$ и A е меѓу B и D, (цртеж 3). Аголот α е надворешен за рамнокракиот $\triangle CDA$ па следува

$$\measuredangle C = \measuredangle D = \frac{\alpha}{2}.$$



цртеж 3

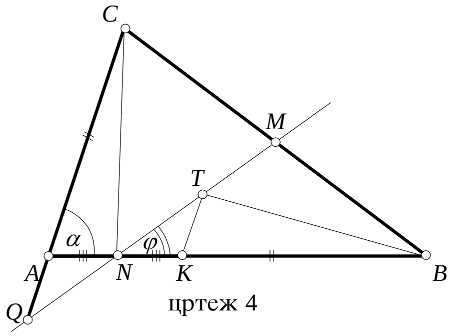
Бидејќи $\overline{BM} = \overline{MC}$ (по услов) и $\overline{BN} = \overline{ND}$ (N е средина на AK, но и на BD), следува дека $p \parallel CD$, па тогаш $\varphi = \frac{\alpha}{2}$.

Четврт начин. Нека правата $p \equiv MN$ ја сече правата AC во точката Q (цртеж 4). На правата p конструираме точка T, таква што $\overline{QN} = \overline{NT}$. Очигледно, четириагоникот $AQKT$ е паралелограм (дијагоналите му се преполовуваат). Значи, $KT \parallel AQ$ и $\angle BKT = \alpha$.

Триаголниците QNC и NTB се еднаквоплоштни, бидејќи имаат еднакви основи ($\overline{QN} = \overline{NT}$) и еднакви висини на тие основи (M е средина на BC). Ако од нив ги одземеме плоштините на складните триаголници ANQ и ΔKNT, добиваме дека $P_{ANC} = P_{KTB}$, т.е.

$$\tfrac{1}{2}\overline{AN}\cdot\overline{AC}\sin\alpha = \tfrac{1}{2}\overline{KT}\cdot\overline{KB}\sin\alpha,$$

од каде што следува дека $\overline{AN} = \overline{KT}$.



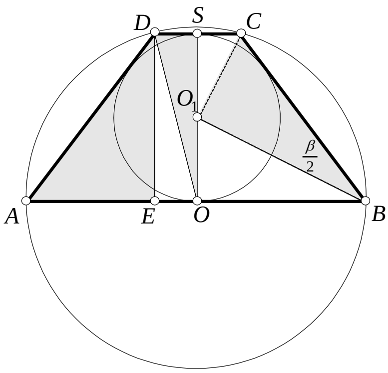
цртеж 4

Од ова следува дека $\overline{AN} = \overline{AQ}$, т.е. $\triangle QNA$ е рамнокрак. Според тоа, $\measuredangle AQN = \measuredangle ANQ = \frac{\alpha}{2}$ (α е надворешен агол за ΔQNA). Аглите ANQ и φ се накрсни, па конечно добиваме дека $\varphi = \frac{\alpha}{2}$.

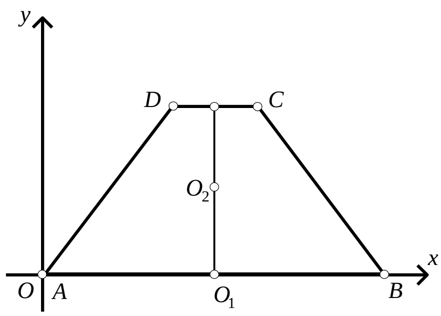
28. Најди го односот меѓу радиусот на опишаната и впишаната кружница во рамнокрак трапез, ако центарот на опишаната кружница лежи на основата на трапезот.

Решение. *Прв начин.* Да означиме $\overline{AD} = \overline{BC} = c$, $\overline{AB} = a = 2R$, $\overline{CD} = 2b$ и $\overline{DE} = h = 2r$ (види цртеж 1). Бидејќи трапезот $ABCD$ е тангентен следува

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}, \text{ т.е. } c = R + b.$$



цртеж 1



цртеж 2

Бидејќи $DE \perp AB$, имаме $\overline{AE} = r - b$. Од правоаголниот триаголник AED наоѓаме

$$\overline{AD}^2 = \overline{DE} + \overline{ED}^2,\ (R+b)^2 = (R-b)^2 + (2r)^2,\ \ b = \frac{r^2}{R}.$$

Од правоаголниот триаголник OSD наоѓаме

$$R^2 = b^2 + 4r^2, \quad R^2 = \tfrac{r^4}{R^2} + 4r^2, \quad (\tfrac{R}{r})^4 - 4(\tfrac{R}{r})^2 - 1 = 0,$$

од каде што $(\tfrac{R}{r})^2 = 2 \pm \sqrt{5}$. Но $2 - \sqrt{5} < 0$, па затоа $(\tfrac{R}{r})^2 = 2 + \sqrt{5}$, т.е. $\tfrac{R}{r} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

Втор начин. Бидејќи $\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$, следува $\measuredangle BO_1C = 90^\circ$. Од сличноста на триаголниците O_1OB и CO_1B следува

$$\tfrac{R^2}{r^2} = \tfrac{\overline{O_1B}^2}{\overline{CO_1}^2} = \tfrac{\overline{O_1O}^2 + \overline{OB}^2}{\overline{CS}^2 + \overline{SO_1}^2} = \tfrac{r^2 + R^2}{b^2 + r^2}.$$

Но, од $\triangle OSC$ наоѓаме: $b^2 = R^2 - 4r^2$, па добиваме

$$\tfrac{R^2}{r^2} = \tfrac{r^2 + R^2}{R^2 - 3r^2}$$

$$(\tfrac{R}{r})^4 - 4(\tfrac{R}{r})^2 - 1 = 0,,$$

од каде што наоѓаме $\tfrac{R}{r} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

Трет начин. Нека трапезот $ABCD$ го поставиме во координатен систем како што е покажано на цртеж 2. Тогаш $A(0,0)$, $O_1(R,0)$, $B(2r,0)$. Темињата C и D лежат на кружницата

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2$$

$$x^2 - 2rx + y^2 = 0,$$

а нивната ордината е $2r$, па затоа

$$x^2 - 2rx + 4r^2 = 0. \tag{1}$$

Бидејќи трапезот $ABCD$ е тангентен, за него важи условот

$$\overline{AB} + \overline{CD} = 2\overline{AD} \tag{2}$$

Ако ставиме $D(x, 2r)$, $x < R$, тогаш $C(2R - x, 2r)$, па имаме:

$$\overline{AB} = 2R,\ \overline{CD} = 2R - 2x,\ \overline{AD} = \sqrt{x^2 + 4r^2}.$$

Заменувајќи ги овие вредности во (2) добиваме

$$2R + 2R - 2x = 2\sqrt{x^2 + 4r^2}$$

од каде што $x = \tfrac{R^2 - r^2}{R}$. Со замена на x во (1) добиваме

$$(\tfrac{R^2 - r^2}{R})^2 - 2Rr\tfrac{R^2 - r^2}{R} + 4r^2 = 0,$$

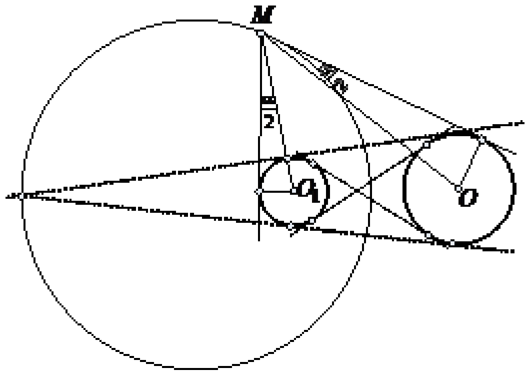
или по средувањето

$$(\tfrac{R}{r})^4 - 4(\tfrac{R}{r})^2 - 1 = 0,$$

од каде што наоѓаме $\tfrac{R}{r} = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$.

29. Нека се дадени две кружници кои не се сечат и ниедна од нив не ја содржи другата кружница. Да се најде геометриското место на точки од кои што двете кружници се гледаат под ист агол.

Решение. Нека радиусите на кружинците се R_1 и R_2. Координатниот cѕстем го бираме така што центрите O_1 и O_2 имаат координати $(-a,0)$ и $(a,0)$ соодветно. Нека $M(x,y)$ припаѓа на бараното геометриско место на точки, а со α да го означиме аголот под кој се гледаат двете кружници од M. Тогаш



$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R_1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} \text{ и}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{R_2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}},$$

од каде добиваме

$$\frac{(x+a)^2+y^2}{R_1^2}=\frac{(x-a)^2+y^2}{R_2^2}$$

$$(R_2^2-R_1^2)(x^2+y^2)+2ax(R_2^2+R_1^2)+a^2(R_2^2-R_1^2)=0.$$

Затоа, ако $R_1=R_2$ тогаш бараното геометриско место на точки ќе биде y-оската, т.е. симетралата на отсечката O_1O_2, а ако $R_1\neq R_2$, тогаш геометриското место на точки е кружница со центар на правата O_1O_2 (Аполониева кружница за точките O_1 и O_2).

30. Во рамнина е дадена отсечка AB и една нејзина внатрешна точка M. Над отсечките AM и MB како страни конструирани се квадрати $AMCD$ и $MBEF$ кои се наоѓаат на иста страна од правата AB. Кружниците опишани околу овие квадрати, со центри P и Q, се сечат во точки M и N, соодветно.

а) Докажи дека правите AF и BC се сечат во точката N.

б) Докажи дека правата MN минува низ една иста точка S, независно од изборот на точката M.

в) Најди го геометриското место на средините на отсечките PQ.

Решение. Поставуваме координатен систем така што правата AB е $x-$оска, а правата AD е $y-$оска. Точката A има координати $(0,0)$ и нека точките B и M имаат координати $B(b,0)$ и $M(m,0)$.

(a) Точките F, C, P и Q имаат координати $F(m,b-m)$, $C(m,m)$, $P(\frac{m}{2},\frac{m}{2})$ и $Q(\frac{b+m}{2},\frac{b-m}{2})$. Равенките на правите AF и BC се

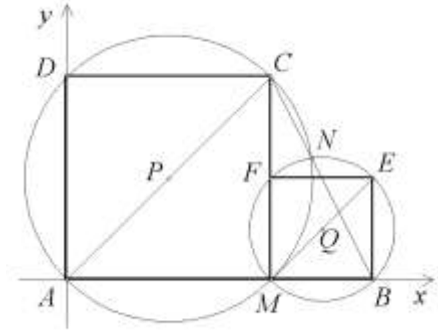
$$AF:\quad y=\frac{b-m}{m}x \quad\text{и}\quad BC:\quad y=\frac{m}{m-b}(x-b).$$

Равенките на кружниците опишани околу квадратите $AMCD$ и $MBEF$ се

$$(x-\tfrac{m}{2})^2+(y-\tfrac{m}{2})^2=\tfrac{m^2}{2} \quad\text{и}\quad (x-\tfrac{b+m}{2})^2+(y-\tfrac{b-m}{2})^2=\tfrac{(b-m)^2}{2}.$$

Втората пресечна точка на овие кружници е точката

$N(\frac{m^2b}{b^2-2mb+2m^2}, \frac{mb(b-m}{b^2-2mb+2m^2})$.



Лесно се проверува дека оваа точка лежи на правите AF и BC.

(b) Равенката на правата која минува низ точките M и N е

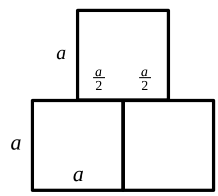
$$y = \frac{b}{2m-b}(x-m).$$

Ако точката M_1 има координати $(m_1, 0)$, тогаш равенката на правата M_1N_1 е

$$y = \frac{b}{2m_1-b}(x-m_1).$$

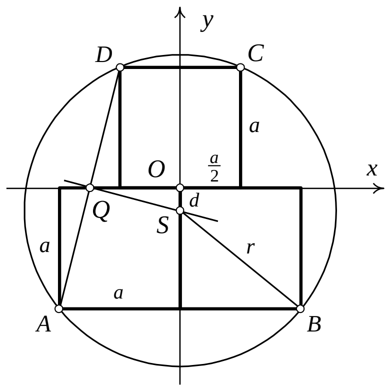
Правите MN и M_1N_1 се сечат во точката $S(\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$. Координатите на S не зависат од m и m_1, па според тоа сите прави MN минуваат низ иста точка S.

(c) Координатите на средината на отсечката PQ се $(\frac{b+2m}{4}, \frac{b}{4})$, т.е. $x = \frac{b+2m}{4}$ и $y = \frac{b}{4}$. Бидејќи $0 \leq m \leq b$, бараното геометриско место на точки е отсечка со крајни точки $(\frac{b}{4}, \frac{b}{4})$ и $(\frac{3b}{4}, \frac{b}{4})$.



31. Најди го центарот и радиусот на кружницата опишана околу квадратите на цртежот.

Решение. Да поставиме координатен систем со центар во O и апсциса правата EF. Тогаш $A(-a,-a)$, $D(-\frac{a}{2}, a)$,



па правата AD ќе има равенка $y = 4x+3$. Средината на AD има координати $Q(-\frac{3a}{4}, 0)$. Симетралата на AD ќе ја сече правата MO во точката S. Равенката на произволна права нормална на AD е $y = -\frac{1}{4}x + b$. Но точката Q лежи на симетралата па добиваме $b = -\frac{3}{16}a$. Значи равенката на симетралата е $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}a$. Ставајќи $x = 0$ ја добиваме точката $S(0, -\frac{3}{16}a)$.

Сега радиусот на кружницата е

$$r = \sqrt{a^2 + (\frac{13a}{16})^2} = \frac{5\sqrt{17}}{16}a.$$

32. Докажи дека за секој природен број $n \geq 3$ во рамнината постојат n точки такви што

(a) растојанието меѓу било кои две од нив е ирационален број,

(b) секои три точки определуваат недегенериран триаголник (т.е. се неколинеарни) и тој триаголник има рационална плоштина.

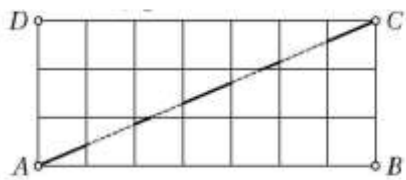
Решение. Произволно избираме n точки во јазлите на целобројна решетка, такви што било кои три од нив не се колинеарни, кои ги означуваме со $T_i=(x_i,y_i)$, $i=1,2,3,...,n$. Тогаш, сите плоштини на триаголниците $T_iT_jT_k$ се рационални броеви. Навистина, секоја од нив е разлика на плоштина на правоаголник и плоштини на правоаголни триаголници чии должини на катети се природни броеви.

Нека $S=\{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2 \mid i\neq j; i,j=1,2,...,n\}$. Избираме прост број $p>\max S$. Земаме хомотетија со центар во еден од јазлите на решетката и коефициент $k=\sqrt{p}$, и го пресликуваме множеството од избраните точки. Плоштините на новодобиените триаголници се рационални, бидејќи старите плоштини се зголемуваат p пати, а должини на страните се ирационални броеви. Имено, должините на страните се од облик $\sqrt{ps}$, за некој $s\in S$ и ps не е полн квадрат, бидејќи е делив со p, а не е делив со p^2.

Јасно, сликите при разгледуваната хомотетија на вака избраните n точки ги задоволуваат условите на задачата.

33. Нека m и n се заемно прости непарни природни броеви. Правоаголникот $ABCD$ е таков што $\overline{AB}=m, \overline{AD}=n$ и е поделен на mn единечни квадрати. Со $A_1,A_2,...,A_k$ да ги означиме последователните пресечни точки на дијагоналата AC со страните на делбените единечни квадрати ($A_1=A, A_k=C$). Докажи, дека

$$\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\overline{A_iA_{i+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}.$$



Решение. Да поставиме координатни оски x и y соодветно на правите AB и AD. Со B_x да ја означиме точката $(\frac{x}{n},\frac{x}{m})$. Сите точки припаѓаат на множеството

$$\{B_x \mid x=1,2,...,mn\}.$$

Притоа бројот на пресеците на полуотворените отсечки $(A,B_x]$ со страните на единичните квадратие еднаков на $i(x)=[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]$, па затоа отсечката B_xB_{x+1} лежи на отсечката $A_{i(x)+1}A_{i(x)+2}$. Според тоа,

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\overline{A_jA_{j+1}}=\sum_{x=0}^{mn-1}(-1)^{i(x)}\overline{B_xB_{x+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}\sum_{x=0}^{mn-1}(-1)^{[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]}.$$

Нека r_x и s_x се соодветно остатоците од делењето на x со m и n. Тогаш $[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]$ има иста парност како и r_x+s_x, па како паровите (r_x,s_x), $x=0,1,...,mn-1$ всушност се паровите $(a,b), 0\leq a<m, 0\leq b<n$, добиваме

$$\sum_{x=0}^{mn-1}(-1)^{[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]}=\sum_{x=0}^{mn-1}(-1)^{r_x+s_x}=\sum_{a=0}^{m-1}(-1)^a\sum_{b=0}^{n-1}(-1)^b .$$

34. Отсечка AB со должина a се движи така што темето A се лизга по апсцисната оска, а точката B се лизга по ординатната оска. Да се определат сите точки $M(x,y)$ кои ја делат отсечката AB во однос $1:2$ сметајќи од точката A.

Решение. Ако точката A се лизга по апсцисната оска, тогаш нејзините координати се од вид $A(m,0)$, а ако точката B се лизга по y оската, тогаш нејзините координати се од облик $B(0,n)$. Притоа $(m-0)^2+(0-n)^2=a^2$, т.е.

$$m^2+n^2=a^2. \tag{1}$$

За координатите x и y на делбената точка M имаме

$$x=\frac{m+0\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2m}{3},\ y=\frac{0+\frac{1}{2}n}{1+\frac{1}{2}}=\frac{n}{3},$$

$$m=\frac{3}{2}x,\ n=3y. \tag{2}$$

Ако од (2) замениме во (1) добиваме

$$(\tfrac{3}{2}x)^2+(3y)^2=a^2,\text{ т.е. } 9x^2+36y^2=4a^2.$$

Значи, точките M лежат на елипсата $9x^2+36y^2=4a^2$.

35. Дадена е права l и точка $O\in l$. Нека $\overrightarrow{OP_1},\overrightarrow{OP_2},...,\overrightarrow{OP_n}$ се единечни вектори такви што точките $P_1,P_2,...,P_n$ се наоѓаат на иста страна од правата l. Докажи дека, ако n е непарен број, тогаш

$$|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+...+\overrightarrow{OP_n}|\geq 1.$$

Решение. Тврдењето на задачата ќе го докажеме со индукција по n. За $n=1$ тврдењето очигледно е точно.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за некој непарен број точки n. Нека се дадени $n+2$ точки. Точките можеме да ги означиме така што

$$\measuredangle(l,\overrightarrow{OP_1})<\measuredangle(l,\overrightarrow{OP_2})<\measuredangle(l,\overrightarrow{OP_3})<...<\measuredangle(l,\overrightarrow{OP_{n+2}}).$$

Во рамнината во која се наоѓаат точките поставуваме координатен систем на следниот начин: $y-$оската е симетрала на аголот $\measuredangle P_{n+2}OP_1$, а $x-$оската минува низ точката O. Ако (x_i,y_i) се координати на точките P_i, во избраниот координатен систем, тогаш $y_i\geq 0$ и $x_1=-x_{n+2}$, $y_1=y_{n+2}$, па според тоа

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+...+\overrightarrow{OP_{n+2}}|^2&=(x_1+x_2+...+x_{n+2})^2+(y_1+y_2+...+y_{n+2})^2\\&=(x_2+x_3+...+x_{n+1})^2+(y_1+y_2+...+y_{n+2})^2\\&\geq(x_2+x_3+...+x_{n+1})^2+(y_2+y_3+...+y_{n+1})^2\\&=|\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+...+\overrightarrow{OP_{n+1}}|^2.\end{aligned}$$

Од индуктивната претпоставка имаме

$$|\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}+...+\overrightarrow{OP_{n+1}}|\geq 1,\text{ па затоа } |\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+...+\overrightarrow{OP_{n+2}}|\geq 1.$$

36. Нека $A=\{0,1,2,...,p-1\}$, каде што p е непарен прост број.

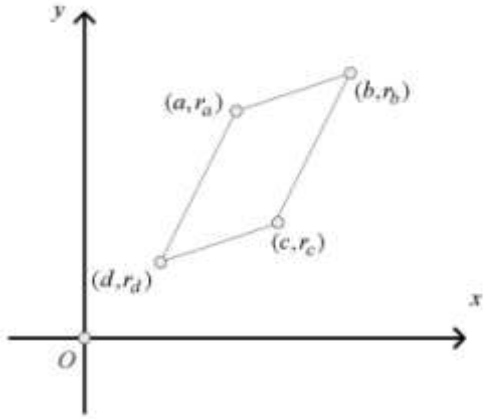
а) Дали може да се изберат четири точки од рамнината чии координати се од множеството A кои се темиња на паралелограм

б) Дали може да се изберат три точки од рамнината чии координати се од множеството A кои лежат на една права.

Решение. Ќе го разгледаме множеството точки

$$\{(a,r_a)\,|\,a^2\equiv r_a(\text{mod } p), 0\le r_a\le p-1\}.$$

Ова множество точки припаѓа на множеството точки кое го разгледуваме.



а) Нека (a,r_a), (b,r_b), (c,r_c) и (d,r_d) се четири точки кои формираат паралелограм. Тогаш

$$a-d=b-c\text{, т.е. } a+c=b+d.$$

Од друга страна

$$r_a-r_d=r_b-r_c,$$

т.е. $r_a+r_c=r_b+r_d$. Од последното равенство не е тешко да се провери дека

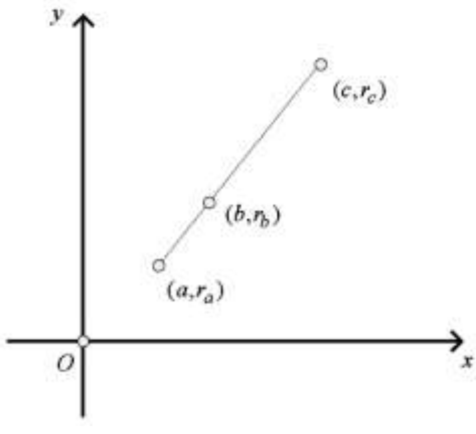
$$a^2+c^2\equiv b^2+d^2 \ (\text{mod } p).$$

Понатаму доказот во задачата е потполно ист како и решението во претходната задача, со тоа што ќе добиеме дека $\{a,c\}=\{b,d\}$, што не е можно, бидејќи точките

$$(a,r_a), (b,r_b), (c,r_c) \text{ и } (d,r_d)$$

се точки на паралелограм е не на отсечка.

б) Нека претпоставиме дека три точки (a,r_a), (b,r_b) и (c,r_c) леажт на една права. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a<b<c$. Бидејќи точките се колинеарни, добиваме дека



$$\tfrac{a-b}{a-c}=\tfrac{r_a-r_b}{r_a-r_c}=\lambda,$$

каде λ е рационален број помал од 1. Тој може да се претстави во облик $\lambda=\frac{t}{r}$, каде $(t,r)=1$ и $t<r$. Бидејќи $\frac{a-b}{a-c}=\frac{t}{r}$, добиваме дека

$$a-b=\tfrac{t}{r}(a-c).$$

Значи, $r\,|\,(a-c)$, односно постои природен број n таков што $a-c=rn$. Значи, $a-b=tn$. Според тоа $t\,|\,(a-b)$ и $a-b=tm$. При тоа, јасно е дека $\frac{t}{r}=\frac{a-b}{a-c}=\frac{tm}{tn}$, од каде добиваме $m=n$. Од равенствата

$$a-c=rn$$
$$a-b=tn,$$

имаме

$$\frac{a-b}{n}=t<r=\frac{a-c}{n},$$

т.е. $b>c$, што е во спротивност со претпоставката.

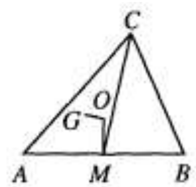
Заради добиената контрадикција, добиваме дека такви точки не постојат.

37. На страните AB, AC и BC на триаголникот ABC земени се точки M, X и Y, соодветно, такви што $\overline{AX}=\overline{MX}$ и $\overline{BY}=\overline{MY}$. Нека K и L се средините на отсечките AY и BX, соодветно, а O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Ако O_1 и O_2 се симетричните точки на точката O во однос на точките K и L, соодветно, докажи дека точките X, Y, O_1 и O_2 лежат на иста кружница.

Решение. Поставуваме координатен систем со координатен почеток во точката M и $x-$оска на правата AB. Нека точките X и Y имаат координати (a,b) и (c,d), соодветно. Од $\overline{AX}=\overline{MX}$ и $\overline{BY}=\overline{MY}$ следува дека координатите на точките A и B се $(2a,0)$ и $(2c,0)$, а координатите на точките K и L се $(a+\frac{c}{2},\frac{d}{2})$ и $(c+\frac{a}{2},\frac{b}{2})$, соодветно. Точката O има координати $(a+c,e)$ за некој e, од каде добиваме $O_1(a,d-e)$ и $O_2(c,b-e)$. Според тоа, точките O_1 и O_2 се симетрични на точките X и Y во однос на правата $y=\frac{b+d-e}{2}$, па затоа X, Y, O_1 и O_2 се темиња на рамнокрак трапез (може да е и дегенериран), па затоа лежат на иста кружница.

38. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, M е средината на страната AB и G е тежиштето на $\triangle ACM$. Ако $OG\perp CM$, докажи дека $\triangle ABC$ е рамнокрак.

Решение. Нека означиме $\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}, \vec{c}=\overrightarrow{OC}$. Тогаш имаме $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$, па затоа $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{6}(3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$. Од друга страна $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})$. Тогаш



$$\begin{aligned}0=\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{CM}&=(3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})\\&=3R^2+3\vec{a}\vec{b}-6\vec{a}\vec{c}+\vec{a}\vec{b}+R^2-2\vec{b}\vec{c}+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}-4R^2.\end{aligned}$$

Според тоа, $0=4\vec{a}(\vec{b}-\vec{c})$, па затоа $OA\perp BC$, т.е. $\overline{AB}=\overline{AC}$.

39. Во внатрешноста на квадрат $ABCD$ се конструирани рамнострани триаголници ABK, BCL, CDM и DAN. Докажи дека средините на отсечките KL, LM, MN, NK, $AK, BK, BL, CL, CM, DM, DN, AN$ се темиња на правилен дванаесетаголник.

Решение. Поставуваме координатен систем така што координатниот почеток да биде во центарот на квадратот, со оски паралелни на неговите страни. Нека должините на страните на квадратот се еднакви на 2. Тогаш координатите на точките се:

$A(-1,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,1)$,

$K(0,\sqrt{3}-1)$, $L(-\sqrt{3}+1,0)$, $M(0,-\sqrt{3}+1)$, $N(\sqrt{3}-1,0)$,

$X_1(\frac{-\sqrt{3}+1}{2},\frac{-\sqrt{3}+1}{2})$, $X_4(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{-\sqrt{3}+1}{2})$, $X_7(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2})$, $X_{10}(\frac{-\sqrt{3}+1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2})$,

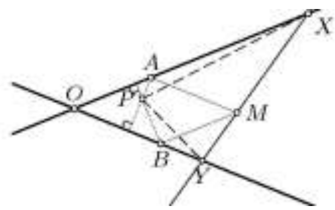
$X_2(-1+\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$, $X_3(1-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$, $X_5(\frac{1}{2},-1+\frac{\sqrt{3}}{2})$, $X_6(\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2})$,

$X_8(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$, $X_{11}(-\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2})$, $X_9(-1+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$, $X_{12}(-\frac{1}{2},-1+\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Јасно, $\overline{OX_i}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $i=1,2,3,...,12$, т.е. темињата на дванаесетаголникот лежат на иста кружница. Понатаму, $\overline{X_iX_{i+1}}^2=7-4\sqrt{3}$, т.е. $\overline{X_iX_{i+1}}=2-\sqrt{3}$, ($X_{13}=X_1$).

Значи, сите точки се на иста кружница и растојанието меѓу две соседни темиња е исто, па затоа тие се темиња на правилен дванаесетаголник.

40. Даден е конвексен агол xOy и точка M во неговата внатрешност. Докажи, дека во рамнината на аголот постои единствена точка P таква што за секоја права низ M која ги сече краците на аголот (или нивните продолженија) во некои точки X и Y, аголот XPY не е тап.



Решение. Нека точките A и B се соодветно на краците Ox и OY такви што важи $MA\,||\,Oy$ и $MB\,||\,Ox$. Нека $X\in Ox, Y\in Oy$. Ако точката X се приближува кон точката A од страна на точката O, тогаш точката Y оди во бесконечност долж полуправата комплементна на кракот Oy, па $\measuredangle XPY$ тежи кон $\measuredangle MAP$. Ако X се приближува кон A од другата страна, тогаш точката Y оди во бесконечност долж кракот Oy, па $\measuredangle XPY$ тежи кон аголот $180^\circ-\measuredangle MAP$. Според тоа, ниту еден од аглите $\measuredangle MAP$ и $180^\circ-\measuredangle MAP$ не смее да биде тап, па затоа $\measuredangle MAP=90^\circ$. Аналогно $\measuredangle MBP=90^\circ$, што значи дека P мора да биде ортоцентарот на $\triangle OAB$.

Од друга страна, ако P е ортоцентраот на $\triangle OAB$, тогаш според Талесовата теорема важи $\frac{\overline{AX}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{BY}}$, т.е. $\overline{AX}\cdot\overline{BY}=\overline{AO}\cdot\overline{BO}$, па затоа добиваме

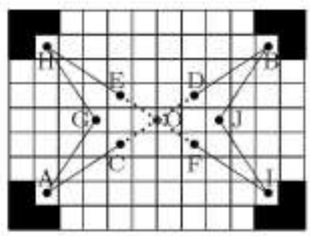
$$\begin{aligned}\overrightarrow{PX}\cdot\overrightarrow{PY}&=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AX})\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BY})\\&=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{BY}+\overrightarrow{AX}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{BY}\\&=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}\\&=(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AO})\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BO})\\&=\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{PO}=\overline{PO}^2\geq 0\end{aligned}$$

па од својствата на скаларниот производ следува тврдењето на задачата.

41. Правоаголник со димензии 9×12 е поделен на единични квадрати. Со црвена боја се обоени центрите на сите единични квадрати, освен на четирите аголни и осумте квадрати кои имаат заедничка страна со некој од аголните квадрати. Дали е можно црвените центри да се означат со $C_1,C_2,...,C_{96}$, но така да се исполнети следниве услови:

1) $\overline{C_1C_2} = \overline{C_2C_3} = ... = \overline{C_{95}C_{96}} = \overline{C_{96}C_1} = \sqrt{13}$, и

2) затворената искршена линија $C_1C_2...C_{96}C_1$ е централно симетрична.



Решение. Правоаголникот да го поставиме во координатна рамнина така што центарот на полето во $i-$тата колона и $j-$тата редица има координати (i,j). Точките (i,j) и (i',j') се соседни на патеката $\mathbf{C}=C_1C_2...C_{96}C_1$ ако и само ако $\{|i-i'|,|j-j'|\}=\{2,3\}$.

Центарот на симетрија на патеката $\mathbf{C}$ е точката $O(6\frac{1}{2},5)$. Точките $A(2,2)$ и $B(11,8)$ се симетрични во однос на O и ја делат $\mathbf{C}$ на два дела $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$. Единичните квадрати ќе ги обоиме стандардно како шаховска табла. Тогаш точките A и B се различно обоени, па како секои две соседни точки се различно обоени, секој од деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ се состои од непарен број отсечки. Затоа овие делови се со различни должини, па затоа не се симетрични еден на друг. Според тоа, секој од деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ мора да биде централно симетричен.

Деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ се со непарна должина, па затоа секој од нив треба да содржи отсечка која е централно симетрична во однос на O. Единствени такви отсечки се отсечките кои ги поврзуваат точките $C(5,4)$ и $D(8,6)$, односно $E(5,6)$ и $F(8,4)$, што значи дека отсечките CD и EF се содржани во $\mathbf{C}$. Понатаму, точката A може да се поврзи само со точките C и $G(4,5)$, па затоа отсечките CA и AG се содржани во $\mathbf{C}$. Аналогно, разгледувајќи ги точките B, $H(2,8)$, $I(11,2)$ и $J(9,5)$, добиваме дека патеката $AGHEFIJBDCA$ целосно се содржи во $\mathbf{C}$, што е противречност.

42. Дадена е рамнина ε и три неколинеарни точки $A,\ B,\ C$ кои лежат на иста страна од рамнината, такви што рамнината определена со овие точки не е паралелна со рамнината ε. Нека A',B' и C' се произволни точки во рамнината ε и $L,\ M$ и N се средините на отсечките $AA',\ BB'$ и CC', соодветно. Најди го геометриското место на тежиштето G на триаголникот LMN (ако тој не е дегенериран), кога точките $A',\ B'$ и C' независно се менуваат во рамнината ε.

Решение. Во просторот поставуваме координатен систем така што оските OX и OY лежат во рамнината ε, а оската OZ е нормална на XOY. Точките A, B и C имаат координати $A(x_1,y_1,2a)$, $B(x_2,y_2,2b)$, $C(x_3,y_3,2c)$ соодветно, и барем два од броевите a, b и c се различни меѓу себе. Координатите на тежиштето на триаголникот ABC се

$$S\,(\tfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\tfrac{y_1+y_2+y_3}{3},\tfrac{2(a+b+c)}{3}).$$

Точките A', B' и C' имаат координати $A'(x_1',y_1',0)$, $B'(x_2',y_2',0)$, $C'(x_3',y_3',0)$, а средини на отсечките AA',BB',CC' се точките L, M, N соодветно,

$$L(\frac{x_1+x_1'}{2},\frac{y_1+y_1'}{2},a),\quad M(\frac{x_2+x_2'}{2},\frac{y_2+y_2'}{2},b),\quad N(\frac{x_3+x_3'}{2},\frac{y_3+y_3'}{2},c).$$

Тежиштето G на триаголникот LMN има координати

$$S(\frac{x_1+x_2+x_3+x_1'+x_2'+x_3'}{3},\frac{y_1+y_2+y_3+y_1'+y_2'+y_3'}{3},\frac{a+b+c}{3}).$$

Бараното геометриско место на точки е во рамнината

$$z=\frac{a+b+c}{3} \qquad (*),$$

која е паралелна со рамнината ε и која го полови нормалата повлечена од тежиштето на триаголникот ABC и рамнината ε. Ќе докажеме дека секоја точка од оваа рамнина припаѓа на бараното множество точки. Нека $G\left(\overline{x},\overline{y},\frac{a+b+c}{3}\right)$ е точка од рамнината (*). Координатите (x_1,y_1), (x_2,y_2) и (x_3,y_3) се дадени. Секогаш кога ќе избереме x_2', x_3', според горната релација за тежиште G можеме да го одредиме x_1', а исто така, секогаш кога ќе избереме y_2', y_3' можеме да го одредиме y_1'.

Забелешка. Условот рамнината која минува низ точките A,B и C да не е паралелна со рамнината ε не е важен за решавање на задачата.

43. Докажи дека збирот на растојанијата од центарот на сферата опишана околу правилен тетраедар до неговите темиња е помал од збирот на растојанијата од било која друга точка до темињата на тетраедарот.

Решение. Поставуваме координатен систем $Oxyz$ така што врвовите на тетраедарот, за некој $a>0$ се точките $A(-a,-a,-a)$, $B(a,a,-a)$, $C(a,-a,a)$ и $D(-a,a,a)$. (Лесно се проверува дека $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{BC}=\overline{BD}=\overline{DC}$). Збирот на растојанијата од точка (x,y,z) до темињата A, B, C, D е

$$\begin{aligned}f(x,y,z)=&\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2+(z+a)^2}\\&+\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2+(z+a)^2}\\&+\sqrt{(x-a)^2+(y+a)^2+(z-a)^2}\\&+\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2}.\end{aligned}$$

Од неравенството меѓу квадратна и аритметичка средина следува

$$\begin{aligned}f(x,y,z)\geq\frac{1}{\sqrt{3}}[&(x+a)+(y+a)+(z+a)+(a-x)+(a-y)+(a+z)\\&+(a-x)+(a+y)+(a-z)+(a+x)+(a-y)+(a-z)]=4a\sqrt{3}\end{aligned}$$

Равенство важи ако и само ако $x=y=z=0$, т.е. ако и само ако точката (x,y,z) е центар на опишаната сфера околу тетраедарот.

44. Во правоаголен координатен систем е дадена затворена конвексна линија L чии темиња се со целобројни координати и чии страни се со еднаква должина. Докажи дека L има парен број страни.

Решение. Нека L има n страни и нека x_i и y_i се проекциите на должината на $i-$тата страна на L на координатните оски x и y соодветно, земени со запазување на знакот. Тогаш

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 0,\ x_i^2 + y_i^2 = c \text{, за } i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (1)$$

Можеме да сметаме дека барем едена од броевите $x_i, y_i, i = 1, 2, \ldots, n$ е непарен, бидејќи во спротивно равенствата во (1) можеме да ги поделиме со заедничкиот степен на бројот 2. Бројот c е збир на два точни квадрати, па затоа единствени остатоци при делење со 4 на бројот c се 0, 2 или 1. Можни се два случаи.

1) Сите броеви $x_i, y_i, i = 1, 2, \ldots, n$ се непарни и тогаш очигледно n мора да е парен број.
2) За секој $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ еден од броевите е парен, а другиот е непарен, па од равенството $\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$ повторно ќе следува дека n е парен број.

Друга случај освен 1) и 2) не е можен. На пример, ако x_i, y_i се парни, а x_k, y_k се непарни, тогаш $c = x_i^2 + y_i^2 \equiv 0 (\text{mod}\, 4)$ и $c = x_i^2 + y_i^2 \equiv 2 (\text{mod}\, 4)$, што е противречност. На потполно ист начин, разгледувајќи конгруенции по модул 4 се покажува дека и останатите случаи доведуваат до противречност.

45. Дадени се природни броеви M и N. Иван се наоѓа во точката $(0, N)$ и се движи со чекори до точката $(M, 0)$, при што ги почитува следниве две правила:

1) Секој чекор е со должина 1 и е паралелен на некоја од координатните оски.
2) За секоја точка (x, y) на неговиот пат важи $x \geq 0,\ y \geq 0$.

При секој чекор тој го запишува растојанието до оската која е паралелна на тој чекор, при што ако чекорот го оддалечува од координатниот почеток, тој тоа растојание го запишува со позитивен знак, а во спротивен случај го запишува со негативен знак.

Докажи дека кога Иван ќе стигне во точката $(M, 0)$, збирот на сите запишани броеви ќе биде еднаков на нула.

Решение. Нека Иван прави k чекори и на $i-$тиот чекор преминал од точката (x_{i-1}, y_{i-1}) во точката (x_i, y_i). Ако овој чекор е паралелен со $x-$оската, тогаш $y_i = y_{i-1}$ и запишаниот број е $y_{i-1}(x_i - x_{i-1})$. Ако чекорот е паралелен со $y-$оската, тогаш $x_i = x_{i-1}$ и запишаниот број е $x_i(y_i - y_{i-1})$. Според тоа, независно од насоката, бројот кој се запишува е еднаков на $y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + x_i(y_i - y_{i-1})$. Значи, збирот на сите запишани броеви е

$$\sum_{i=1}^{k} y_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + x_i(y_i - y_{i-1}) = \sum_{i=1}^{k} (x_i y_i - x_{i-1} y_{i-1}) = x_k y_k - x_0 y_0 = M \cdot 0 - 0 \cdot N = 0.$$

VI СТЕРЕОМЕТРИЈА

1. РАБЕСТИ ТЕЛА

1. Во триаголна пирамида $SABC$ сите рабни агли кај темето S се прави. Нека O е подножјето на висината кај темето S. Ако $P_{\Delta AOB}=P_{\Delta BOC}$, да се најде $P_{\Delta ASB}:P_{\Delta BSC}$.

Решение. Нека α и β се диедарските агли на рабовите AB и BC. Бидејќи, $CS\perp ASB$ и $AS\perp BSC$, следи дека $P_{ASB}=P_{ABC}\cos\alpha$ и $P_{BSC}=P_{ABC}\cos\beta$, па

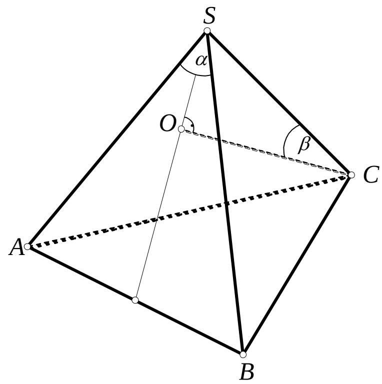
$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{P_{ASB}}{P_{BSC}}=\frac{P_{AOB}\cos\beta}{P_{BOC}\cos\alpha}=4\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},$$

од каде $(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta})^2=4$, односно $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=2$, односно $\frac{P_{ASB}}{P_{BSC}}=2$.

2. Бочните рабови на правилна триаголна пирамида се еднакви на a. Докажи дека нејзиниот волумен не е поголем од $\frac{a^3}{6}$.

Решение. Ако за основа на пирамидата го избереме бочниот ѕид SAB (види цртеж), тогаш

$$V=\frac{1}{3}P_{SAB}\cdot\overline{CO}.$$



Да ставиме $\alpha=\angle ASB$, $\beta=\angle SCO$, тогаш

$$P_{SAB}=\frac{1}{2}\overline{SA}\cdot\overline{SB}\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$$

$$\frac{\overline{CO}}{\overline{SC}}=\cos\beta\Rightarrow\overline{CO}=\overline{SC}\cos\beta=a\cos\beta$$

па за волуменот на пирамидата $SABC$ добиваме

$$V=\frac{1}{6}a^3\sin\alpha\cos\beta.$$

Бидејќи $\sin\alpha\le1$ и $\cos\beta\le1$, следува дека $V\le\frac{a^3}{6}$. Најголемата вредност на волуменот е $\frac{a^3}{6}$ и се добива за $\alpha=90^\circ$, $\beta=0^\circ$ т.е. ако трите боени раба се меѓусебно нормални.

3. Низ тежиштето на рамностран триаголник, со страна a, повлечна е права p, паралелна со една од страните.

а) Најди го односот на плоштините на двата дела на триаголникот.

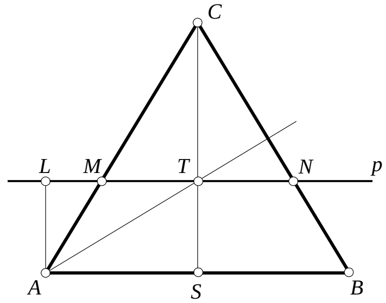
б) Секој од двата дела на триаголникот посебно ротира околу повлечената права p. Докажи дека телата што настануваат со ротацијата имаат еднакви плоштини и еднакви волумени.

Решение. а) Воведуваме ознаки:

$$\overline{AS}=\frac{a}{2},\ \overline{CS}=h,\ \overline{TS}=r,\ \overline{CT}=R,\ P_{ABC}=P,\ P_{ABNM}=P_1,\ P_{MNC}=P_2.$$

Бидејќи $\triangle ABC \sim \triangle MNC$ добиваме $P : P_2 = h^2 : R^2$. Бидејќи, пак, во рамностраниот триаголник е $h : R = 3 : 2$, имаме:

$$P : P_2 = 9 : 4$$
$$(P_1 + P_2) : P_2 = 9 : 4$$
$$(P_1 + P_2 - P_2) : P_2 = (9-4) : 4$$
$$P_1 : P_2 = 5 : 4 .$$



б) При ротација на рамностраниот $\triangle MNC$ околу правата p се добиваат два "споени" конуси. Плоштината на тоа тело се состои од две (меѓу себе еднакви) обвивки на конус, па ќе имаме

$$P'' = 2\pi \cdot R \cdot \overline{CM} = 2\pi \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{4\pi a^2\sqrt{3}}{9} \tag{1}$$

$$V'' = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot R^2 \cdot \pi \cdot \overline{TM} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{3a^2}{9} \cdot \frac{a}{3} = \frac{2a^3\pi}{27} . \tag{2}$$

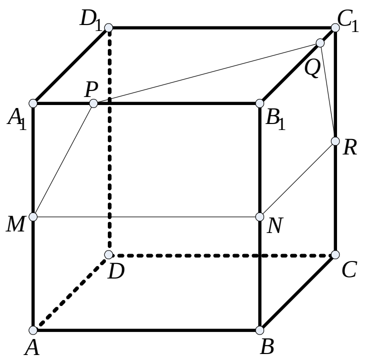
При ротација на рамностраниот трапез $ABNM$ околу правата p, се добива цилиндер од кој се извадени два конуса. Затоа важи

$$P' = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \overline{AM} + 2\pi \cdot r \cdot \overline{AB} = 2\pi \frac{a\sqrt{3}}{6}\left(\frac{a}{3} + a\right) = \frac{4a^2\pi\sqrt{3}}{9} , \tag{3}$$

$$V' = r^2\pi \cdot a - 2 \cdot \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot \frac{a}{6} = \frac{a^2 \cdot 3}{36} \cdot \pi a\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{2a^3\pi}{27} , \tag{4}$$

што значи дека $V' = V''$ и $P' = P''$.

4. Во средината на еден од бочните рабови на една коцка се наоѓа мравка. Ако мравката по бочните ѕидови се движи со брзина 6, а по основите $5\sqrt{2}$, да се најде бројот на различните патишта (до симетрија) за мравката најбргу да стигне до средината на спротивниот раб.



Решение. Нека мравката се наоѓа во средината M на работ AA_1, а треба да стигне во средината R на работ CC_1 (види цртеж). Очигледно, еден од најкратките патишта од M до R е патот MNR, каде што N е средина на работ BB_1. По овој пат мравката ќе стигне до R за време $t = \frac{2a}{6} = \frac{a}{3}$. Но мравката може да се движи и по основните ѕидови. Нека $MPQR$ е еден таков пат(види цртеж). Поради симетрија имаме $\overline{MP} = \overline{QR}$ и $\overline{PB_1} = \overline{B_1Q}$. Да ставиме $x = \overline{A_1P}$; тогаш имаме: $\overline{MP} = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$, $\overline{PQ} = (a-x)\sqrt{2}$.

Ако t_2 е времето за кое мравката ќе го помине патот $MPQR$, тогаш

$$t_2 = \frac{\overline{MP}}{6} + \frac{\overline{PQ}}{5\sqrt{2}} + \frac{\overline{QR}}{6} = \frac{\sqrt{4x^2+a^2}}{6} + \frac{a-x}{5} .$$

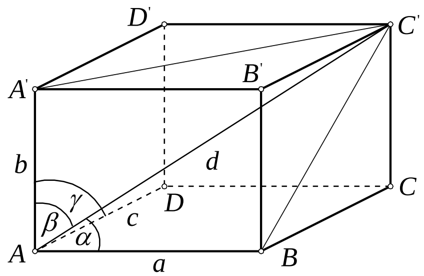
Од $t_2 \le t_1$ добиваме $\frac{\sqrt{4x^2+a^2}}{6} + \frac{a-x}{5} \le \frac{a}{3}$, т.е. $5\sqrt{4x^2+a^2} \le 4a+6x$. Последната неравенка е еквивалентна на неравенката $(8x-3a)^2 \le 0$, т.е. $8x-3a=0$, од каде што добиваме $x=\frac{3a}{8}$. Соодветното време е $t_2=t_1=\frac{a}{3}$.

Следствено, постојат (до симетрија) два такви патишта.

5. Во даден квадар α,β,γ се аглите кои просторната дијагонала ги зафаќа со неговите рабови. Докажи дека

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

Решение. Нека $ABCDA'B'C'D'$ е дадениот квадар и AC' е една негова просторна дијагонала која со страните AB, AA', AD зафаќа агли α,β,γ соодветно. Тогаш од триаголниците ABC', $AC'A'$ и ADC' кои се правоаголни имаме



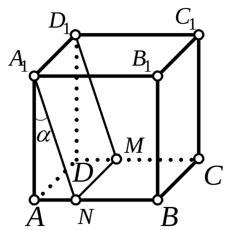
$$\cos\alpha=\frac{a}{d},\ \cos\beta=\frac{b}{d}\ \text{и}\ \cos\gamma=\frac{c}{d},$$

од каде, заради условот $a^2+b^2+c^2=d^2$ го добиваме бараното равенство

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1\ .$$

6. Низ еден раб на коцка е повлечена рамнина која со страната која го содржи работ низ кој минува зафаќа агол α. Плоштината на пресекот е m. Да се пресмета односот на волумените на деловите на кои е разделена коцката со повлечената рамнина.

Решение. Нека должината на работ на коцката е $\overline{AA_1}=x$, а должините на отсечките AN и A_1N нека се еднакви на $\overline{AN}=z$ и $\overline{A_1N}=y$. Бидејќи плоштината на правоаголникот A_1NMD_1 е днаква на m, добиваме дека $xy=m$. Од правоаголниот триаголник A_1AN, според воведените ознаки, имаме $\frac{z}{y}=\sin\alpha$, $\frac{x}{y}=\cos\alpha$, односно $z=y\sin\alpha, x=y\cos\alpha$. Бидејќи $xy=m$, добиваме дека $y(y\cos\alpha)=m$, т.е. $y^2=\frac{m}{\cos\alpha}$. Од последното равенство имаме $y=\sqrt{\frac{m}{\cos\alpha}}$ и $x=y\cos\alpha=\sqrt{m\cos\alpha}$, $z=y\sin\alpha=\sin\alpha\sqrt{\frac{m}{\cos\alpha}}$. Пресекот A_1NMB_1 на рамнината со коцката ја дели коцката на два дела, од кои еден е тртиаголна призма а другиот е четириаголна призма.



Волуменот на триаголната призма е

$$V_1=\frac{x^2z}{2}=\frac{1}{2}\sin\alpha\sqrt{m^3\cos\alpha}\ .$$

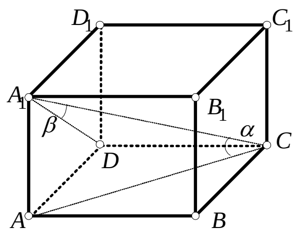
Волуменот на четириаголната призма е $V_2=x^3-V_1$, т.е.

$$V_2=\frac{2\cos\alpha-\sin\alpha}{2}\sqrt{m^3\cos\alpha}\ .$$

Конечно, $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha-\sin\alpha}$.

7. Дијагоналата на правоаголен паралелопипед со рамнината на основата зафаќа агол α, а со бочниот ѕид зафаќа агол β. Ако висината на паралелопипедот е еднаква на H , определи го неговиот волумен.

Решение. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е правоаголниот паралелопипед во кој



$$\measuredangle ACA_1=\alpha\,,\ \measuredangle CA_1D=\beta\,,\ \overline{AA_1}=H\ .$$

Од правоаголниот триаголник CAA_1, добиваме

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AA_1}}=\operatorname{ctg}\alpha$, т.е.

$\overline{AC}=H\operatorname{ctg}\alpha$ и $\overline{A_1C}=\frac{H}{\sin\alpha}$

Од правоаголниот триаголник CDA_1 добиваме

$$\overline{CD}=\overline{A_1C}\sin\beta=\frac{H\sin\beta}{\sin\alpha}$$

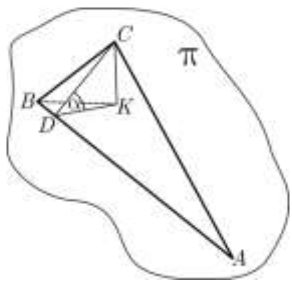
а од правоаголниот триаголник ACD, добиваме

$$\begin{aligned}\overline{AD}&=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{(\tfrac{H\cos\alpha}{\sin\alpha})^2-(\tfrac{H\sin\beta}{\sin\alpha})^2}=\frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}\\
&=\frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta}\\
&=\frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-\sin^2\beta(1-\cos^2\alpha)}\\
&=\frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta}=\\
&=\frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)}\\
&=\frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}V=BH=\overline{AD}\cdot\overline{CD}\cdot H&=\frac{H}{\sin\alpha}\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}\cdot\frac{H\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot H\\
&=\frac{H^3\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\sin^2\alpha}.\end{aligned}$$

8. Рамнината на правоаголен триаголник со катети 3 и 4 со рамнината π формира агол α. Хипотенузата на триаголникот лежи во π. Најди го аголот меѓу помалата катета и рамнината π.



Решение. Нека темињата на триаголникот се A, B и C. Притоа темето кај правиот агол е C и BC е помалата катета. Низ C повлекуваме рамнина нормална на AB и нека D е пресечната точка на таа рамнина со AB а K - проекцијата на C врз рамнината π. Триаголникот CKD е правоаголен (бидејќи $CK \perp \pi$ и $DK \in \pi$). Бидејќи $CD \perp AB$ и $DK \perp AB$ добиваме дека аголот CDK е агол меѓу рамнината π и рамнината на триаголникот ABC. Според тоа $\measuredangle CDK = \alpha$ и треба да се пресмета аголот CBK. Од сличноста на триаголниците CDA и ABC следува $\frac{\overline{CD}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$ и оттука $\overline{CD} = \frac{12}{5}$.

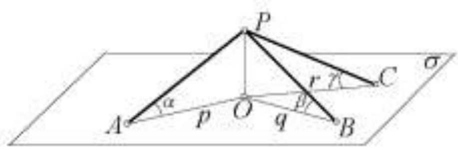
Од правоаголниот триаголник CDK добиваме $\overline{CK} = \overline{CD}\sin\alpha = \frac{12}{5}\sin\alpha$, а од правоаголниот триаголник CBK имаме $\frac{\overline{CK}}{3} = \sin\measuredangle CBK = \frac{4}{5}\sin\alpha$.

Конечно, $\measuredangle CBK = \arcsin(\frac{4}{5}\sin\alpha)$.

9. Дадена е точка P која не лежи на рамнината σ. Низ точката P се повлечени прави a,b и c кои ја сечат рамнината σ во точките A,B,C, и со неа зафаќаат агли α,β и γ, соодветно, чиј збир е еднаков на 90°. Проекциите на отсечките PA,PB и PC врз рамнината σ имаат должини еднакви на p,q и r, соодветно. Определи го растојанието од точката P до рамнината σ.

Решение. Нека O е проекција на точката P врз рамнината σ. Според претпоставките од задачата $\measuredangle PAO = \alpha$, $\measuredangle PBO = \beta$ и $\measuredangle PCO = \gamma$. Триаголниците $AOP, BOP\ COP$ се правоаголни, па затоа

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} = \operatorname{tg}\alpha,\ \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \operatorname{tg}\beta \text{ и } \frac{\overline{OP}}{\overline{OC}} = \operatorname{tg}\gamma$$



Бидејќи $\overline{OA} = p, \overline{OB} = q$ и $\overline{OC} = r$, и ако $\overline{OP} = H$, тогаш

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{p},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{H}{q},\ \operatorname{tg}\gamma = \frac{H}{r}. \qquad (1)$$

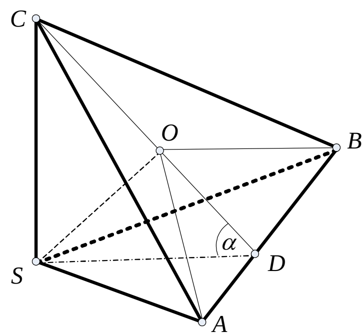
Од условот на задачата $\alpha+\beta+\gamma = 90^\circ$, добиваме $\gamma = 90^\circ - \alpha - \beta$, па според тоа

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha - \beta) = \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме дека $\frac{H}{r} = \frac{1-\frac{H}{p}\frac{H}{q}}{\frac{H}{p}+\frac{H}{q}}$, т.е. $H = \sqrt{\frac{pqr}{p+q+r}}$.

10. Во триаголна пирамида $SABC$ рамнинските агли при врвот S се прави, а точката O е проекција на врвот S врз рамнината на основата ABC. Докажи дека плоштината на триаголникот ASB е геометриска средина на плоштините на триаголниците ABC и OAB.

Решение. Од условот на задачата $CS \perp AS$, $CS \perp BS$ и $AS \perp BS$ а точката O е подножје на нормалата спуштена од врвот S на рамнината на основата ABC. Нека α е аголот меѓу рамнините на триаголниците SAB и ABC (види цртеж). Триаголниците OAB, SAB и CAB имаат една заедничка страна AB и имаат различни висини спуштени врз таа страна.



При тоа за висините OD, SD и CD имаме, $\overline{OD}=\overline{SD}\cos\alpha$, $\overline{SD}=\overline{CD}\cos\alpha$, од каде што ги добиваме следните равенства

$$P_{OAB}=P_{SAB}\cos\alpha, \qquad P_{SAB}=P_{ABC}\cos\alpha.$$

Од првото равенство добиваме $\cos\alpha=\frac{P_{OAB}}{P_{SAB}}$, и ако замениме во второто равенство,

$$P_{SAB}=P_{ABC}\frac{P_{OAB}}{P_{SAB}},$$

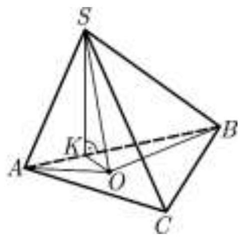
односно $P_{SAB}^2=P_{ABC}\cdot P_{OAB}$.

Значи, $P_{SAB}=\sqrt{P_{ABC}\cdot P_{OAB}}$, што и требаше да се докаже.

11. Основата на пирамидата $SABC$ е рамностран триаголник со страна $\sqrt{3}$. Проекцијата на врвот S на рамнината на основата е точката O, која лежи во внатрешноста на триаголникот ABC и е на растојание 1 од страната AC. Пресметај го волуменот на пирамидата $SABC$, ако $\sin\measuredangle OBA:\sin\measuredangle OBC=2:1$.

Решение. Нека $\alpha=\measuredangle ABO$. Тогаш

$$\measuredangle OBC=\measuredangle ABC-\measuredangle ABO=\tfrac{\pi}{3}-\alpha.$$



Од условот $\frac{\sin\alpha}{\sin(\frac{\pi}{3}-\alpha)}=2$, односно $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Бидејќи $\alpha\in(0,\frac{\pi}{3})$ следува дека $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Нека K е подножјето на висината на ΔABS спуштена од S. Тогаш $P_{\vartriangle ABS}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{SK}=\sqrt{\frac{5}{6}}$ (во условот на задачата треба да стои и $P_{\vartriangle SAB}=\sqrt{\frac{5}{6}}$), па добиваме дека $\overline{SK}=\frac{\sqrt{10}}{3}$. Бидејќи

$$P_{\vartriangle AOB}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{OB}\cdot\sin\alpha=\tfrac{3}{2\sqrt{7}}\overline{OB},$$

$$P_{\vartriangle OBC}=\tfrac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{OB}\cdot\sin(\tfrac{\pi}{3}-\alpha)=\tfrac{3}{4\sqrt{7}}\overline{OB} \text{ и } P_{\vartriangle AOC}=\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha=\tfrac{\sqrt{3}}{2} \text{ и}$$

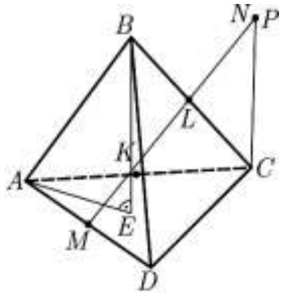
$$P_{\vartriangle AOB}+P_{\vartriangle AOC}+P_{\vartriangle BOC}=P_{\vartriangle ABC}=\tfrac{3\sqrt{3}}{4}$$

добиваме $\frac{3}{2\sqrt{7}}\overline{OB}+\frac{3}{4\sqrt{7}}\overline{OB}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, т.е. $\overline{OB}=\frac{\sqrt{21}}{9}$. Од $OK\perp AB$ следува $\overline{OK}=\overline{OB}\sin\alpha=\frac{1}{3}$. Од правоаголниот триаголник SOK добиваме

$$\overline{SO}=\sqrt{\overline{SK}^2-\overline{OK}^2}=1.$$

Конечно, $V=\frac{1}{3}P_{\vartriangle ABC}\cdot\overline{SO}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

12. Во триаголна пирамида $ABCD$ должината на сите рабови е еднаква. Точката P е еднакво оддалечена од темињата A и D, а од темињата B и C се наоѓа на растојание $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Пресметај го волуменот на пирамидата ако е познато дека правата PC е нормална на висината на триаголникот ACD спуштена од темето D.



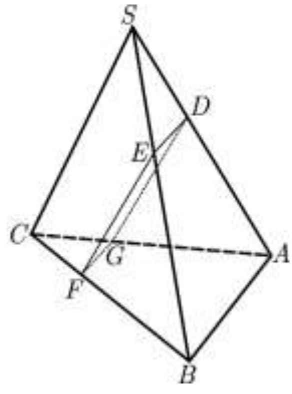
Решение. Нека E е проекцијата на точката B на рамнината ACD и нека K, L и M се средините на AC, BC и AD, соодветно. Триаголниците BCD и ABC се рамнострани, па следува дека $DL \perp BC$ и $AL \perp BC$. Значи BC е нормална на рамнината ALD. Бидејќи P е еднакво оддалечена од A и D и од B и C следува дека P лежи во рамнината ALD. Аналогно, $AD \perp BMC$ и $P \in BMC$. Значи $P \in ALD \cap BMC = LM$. Отсечката DK е висина на ΔACD. Триаголникот ACD е рамностран па неговиот центар E лежи на CM. Правата BE лежи во рамнината MBC и BE е нормална на рамнината ACD, па следува дека $MBC \perp ACD$. Значи нормалата на ACD која минува низ C лежи во рамнината MBC. Нека пресекот на таа нормала со правата ML е точката N. Ќе докажеме дека $P \equiv N$. Од изборот на N следува дека $CN \perp KDC$ па следува дека и $CN \perp KD$. Од условот на задачата имаме $PC \perp KD$. Ако P и N се различни, би добиле дека $KD \perp CPN$. Но, тогаш $KD \perp CM$ што е контрадикција. Значи $P \equiv N$.

Со a да ја означиме должината на работ на пирамидата. Тогаш $\overline{BC} = a$, $\overline{CM} = \overline{BM} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Од ΔCLM имаме $\overline{LM} = \sqrt{\overline{CM}^2 - \overline{CL}^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Следува

$$\operatorname{tg}\measuredangle CML = \frac{\overline{CL}}{\overline{LM}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. } \overline{PC} = \overline{CM}\operatorname{tg}\measuredangle CML = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Но $\overline{PC} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Значи $a = 2$. Натаму $\overline{ME} = \frac{1}{3}\overline{MC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, па од правоголниот триаголник BME добиваме $\overline{BE} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Конечно, $V = \frac{1}{3}P_{ACD}\overline{BE} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

13. Дадена е пирамида со врв S и основа ABC. Точките D и E лежат на рабовите SA и SB, соодветно, и важи $\overline{SD}:\overline{DA} = 1:2 = \overline{SE}:\overline{EB}$. Низ точките D и E повлечена е рамнина α паралелна со работ SC. Во каков однос α го дели волуменот на пирамидата?



Решение. Да ги означиме со F и G точките во кои α ги сече правите BC и AC, соодветно. Правите DG и CS лежат во рамнината ACS. Заради $\alpha \| SC$ добиваме $DG \| SC$ и $FE \| CS$. Значи, $\triangle BFE \sim \triangle BCS$ и $\triangle AGD \sim \triangle ACS$. Оттука следува дека

$$\overline{FE}:\overline{CS} = \overline{BE}:\overline{BS} = 2:3 = \overline{AD}:\overline{AS} = \overline{GD}:\overline{CS},$$

т.е. $\overline{FE} = \overline{GD}$. Уште и $FE \| CS$ и $DG \| SC$, па следува дека $FE \| GD$. Значи четириаголникот $DEFG$ е паралелограм. Нека волуменот на $ABFGDE$ е V_1. Тогаш $V_1 = V_{EGFB} + V_{EGDB} + V_{AGBD}$. Пирамидите $EGFB$ и $EGDB$ имаат заеднички врв B и плоштините на нивните основи EGF и EGD се еднакви (EG е дијагонала на паралелограмот $EDGF$). Затоа $V_{EGFB} = V_{EGDB}$. Значи $V_1 = 2V_{EGFB} + V_{AGBD}$. Нека V е волуменот на пирамидата $ABCS$, и h_S и h_D се растојанијата од S и D до рамнината ABC, соодветно. Бидејќи $\overline{AD}:\overline{AS}=2:3=h_D:h_S$, добиваме дека $h_D=\frac{2}{3}h_S$. Оттука

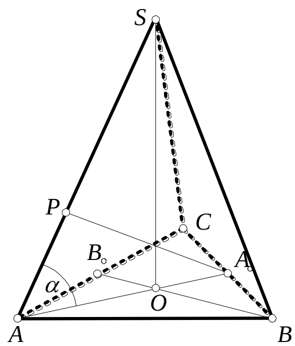
$$V_{AGBD}=\frac{1}{3}P_{AGB}h_D=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AG}\sin\measuredangle GAB\cdot\frac{2}{3}h_S=\frac{1}{9}\overline{AB}\cdot\frac{2}{3}\overline{AC}\sin\measuredangle BAC\cdot h_S$$
$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\measuredangle BAC\cdot h_S=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}P_{ABC}h_S=\frac{4}{9}V$$

Нека h_A и h_G се растојанијата од точките A и G до рамнината BCS, соодветно. Заради $\overline{CG}:\overline{CA}=1:3=h_G:h_A$, добиваме $h_G=\frac{1}{3}h_a$, па за волуменот на $EGFB$ имаме

$$V_{EGFB}=\frac{1}{3}P_{EFB}h_G=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{32}\overline{BE}\cdot\overline{BF}\sin\measuredangle FBE\cdot\frac{1}{3}h_A$$
$$=\frac{4}{27}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{BS}\sin\measuredangle CBS\cdot h_A=\frac{4}{27}V$$

Тогаш $V_1=2\frac{4}{27}V+\frac{4}{9}V=\frac{20}{27}V$. Оттука следува дека волуменот на пирамидата е поделен во однос $20:7$.

14. Бочниот раб на права правилна триаголна пирамида со нејзината основа зафаќа агол α, а од средината на спротивниот раб на основата е оддалечен на растојание k. Пресметај го нејзиниот волумен.



Решение. Нека основа на пирамидата е рамностраниот триаголник ABC. Бидејќи пирамидата е правилна, подножје на висината спуштена од врвот S на пирамидата е центарот O на триаголникот ABC. Нека AA_0 е висина на триаголникот ABC (види цртеж). Ако $P\in AS$ и $A_0P\perp AS$, тогаш $\overline{A_0P}=k$.

Од правоаголниот триаголник APA_0 имаме

$$\frac{\overline{A_0P}}{\overline{A_0A}}=\sin\alpha,$$

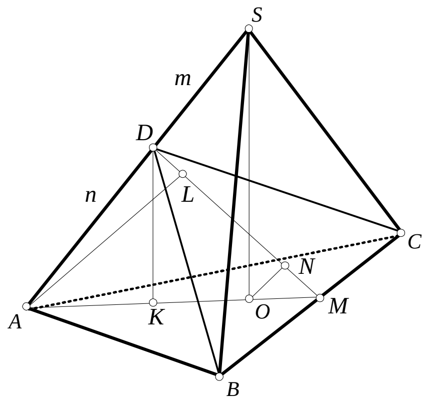
па затоа $\overline{A_0A}=\frac{k}{\sin\alpha}$. Од равенството $\overline{A_0A}=\frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2}$, добиваме $\frac{k}{\sin\alpha}=\frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2}$, па според тоа должината на страната на основата на пирамидата е еднаква на $a=\overline{AB}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{k}{\sin\alpha}$.

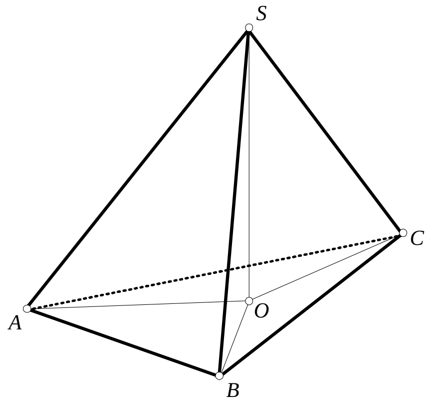
Триаголникот AOS е правоаголен, во кој $\measuredangle SAO=\alpha$ и $\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AA_0}=\frac{2}{3}\frac{k}{\sin\alpha}$. Според тоа $H=\overline{SO}=\overline{AO}\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2}{3}\frac{k}{\sin\alpha}\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2}{3}\frac{k}{\cos\alpha}$, од каде добиваме дека

$$V=\frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{k}{\sin\alpha}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{2}{3}\frac{k}{\cos\alpha}=\frac{2\sqrt{3}}{27}\frac{k^3}{\sin^2\alpha\cos\alpha}.$$

15. Во триаголна пирамида $SABC$, сите рамнински агли при врвот S се прави, а SO е висина на пирамидата. Односот на плоштината на триаголникот AOB кон плоштината на триаголникот BOC е еднаква на k. Да се пресмета односот на плоштината на триаголникот ASB кон плоштината на триаголникот BSC.

Решение. Со α и β ќе ги означиме аглите кои ги зафаќаат бочните страни ASB и BSC со рамнината на основата ABC, соодветно.





Бидејќи $CS \perp ASB$ и $AS \perp BSC$, триаголниците ASB и BSC се ортогонални проекции на триаголникот ABC врз рамнините на триаголниците ASB и BSC соодветно. Заради воведените агли α и β имаме $\frac{P_{ASB}}{P_{ABC}} = \cos\alpha$, $\frac{P_{BSC}}{P_{ABC}} = \cos\beta$. Заради последните равенства важи

$$\frac{P_{ASB}}{P_{BSC}} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}. \tag{1}$$

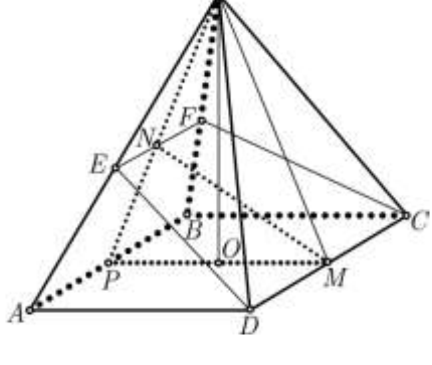
Од друга страна триаголниците AOB и BOC се проекции на ASB и BSC врз рамнината на основата ABC. Затоа $\frac{P_{AOB}}{P_{ASB}} = \cos\alpha$, $\frac{P_{BOC}}{P_{BSC}} = \cos\beta$. Тогаш

$$\frac{P_{ASB}}{P_{BSC}} = \frac{\frac{P_{BOC}}{P_{BSC}}\frac{1}{P_{BOC}}}{\frac{P_{AOB}}{P_{ASC}}\frac{1}{P_{AOB}}} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\frac{P_{AOB}}{P_{BOC}} = k\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме $k\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, па според тоа $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \sqrt{k}$. Конечно, од (1), добиваме $\frac{P_{ASB}}{P_{BSC}} = \sqrt{k}$.

16. Најди го аголот меѓу основата и бочниот ѕид на правилна четиристрана пирамида, ако рамнината која го дели тој агол на половина ја дели бочната површина на призмата на два дела со еднакви плоштини.

Решение. Нека $SABCD$ е правилна пирамида со раб на основата $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$ и $\measuredangle SMO = \varphi$. Нека $\measuredangle OMN = \measuredangle NMS$ и нека α е рамнината во која лежат точките E, D, C, F, т.е. $\alpha = EDCF$, и која ги дели аголот φ и бочната површина на пирамидата на еднакви делови. Нека $\overline{SP} = \overline{SM} = h$ е апотема на пирамидата. Бидејќи MN е



симетрала на аголот φ, рамнината α ги дели рабовите SA и SB и апотемата SP во однос

$$\frac{a}{h}=\frac{\overline{MP}}{\overline{MS}}=\frac{\overline{PN}}{\overline{NS}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{ES}}.$$

Плоштините на бочните страни SAD и SBC со рамнината α исто така се поделени во однос $a:h$. Затоа, ако со P ја означиме плоштината на бочната страна, тогаш

$$P_{DAE}=P_{CBF}=\frac{Pa}{a+h},\ P_{DES}=P_{CFS}=\frac{Ph}{a+h}.$$

Од сличноста на триаголниците SEF и SAB добиваме

$$P_{SEF}:P_{SAB}=\frac{\overline{SN}^2}{\overline{SP}^2}=\frac{h^2}{(a+h)^2},$$

т.е.

$$P_{SEF}=\frac{Ph^2}{(a+h)^2}\ \text{ и }\ P_{ABFE}=P-P_{SEF}=P-\frac{Ph^2}{(a+h)^2}=\frac{P(a^2+2ah)}{(a+h)^2}.$$

Од условот на задачата имаме

$$P+2\frac{Ph}{a+h}+\frac{Ph^2}{(a+h)^2}=2\frac{Pa}{a+h}+\frac{P(a^2+2ah)}{(a+h)^2},$$

од каде добиваме $a=h\sqrt{2}$. Бидејќи $a=2h\cos\varphi$ (од триаголникот SMO) добиваме $\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$, па затоа $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

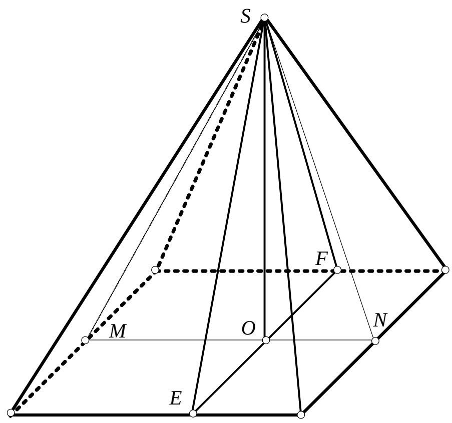
17. Основата на пирамида е квадрат, при што рамнините на бочните ѕидови со рамнините на основата зафаќаат агли кои се однесуваат како $1:2:4:2$.Пресметај ги тие агли.

Решение. Низ врвот на пирамидата S (види цртеж 5.) ќе повлечеме две рамнини кои се нормални на рабовите на основата и нека пресечни точки со нив се E,F,M,N (како на цртеж 5). Нека пресекот на EF и MN е точката O, која е и подножје на норамалата спуштена од врвот S. Ако $\measuredangle SMO=\varphi$, тогаш од условот на задачата $\measuredangle SEO=\measuredangle SFO=2\varphi$ и $\measuredangle SNO=4\varphi$. Од правоаголните триаголници ΔMOS, ΔONS, ΔEOS и ΔFOS добиваме

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\overline{OM}}{h}, \qquad (1)$$

$$\operatorname{ctg}2\varphi=\frac{\frac{a}{2}}{h}=\frac{a}{2h}, \qquad (2)$$

$$\operatorname{ctg}4\varphi=\frac{\overline{ON}}{h}. \qquad (3)$$



Од равенствата (1), (2) и (3) добиваме

$\overline{OM}=h\operatorname{ctg}\varphi$, $\overline{ON}=h\operatorname{ctg}4\varphi$ и

$a=2h\operatorname{ctg}2\varphi$.

Ако добиените вредности за $\overline{OM},\overline{ON}$ и a ги замениме во равенството $\overline{OM}+\overline{ON}=a$, добиваме

$h\operatorname{ctg}\varphi+h\operatorname{ctg}4\varphi=2h\operatorname{ctg}2\varphi$, т.е.

$\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}4\varphi=\operatorname{ctg}2\varphi$.

Од последната равенка имаме $\operatorname{ctg}\varphi-\operatorname{ctg}2\varphi=\operatorname{ctg}2\varphi-\operatorname{ctg}4\varphi$,

$$\frac{\sin(2\varphi-\varphi)}{\sin\varphi\sin2\varphi}=\frac{\sin(4\varphi-2\varphi)}{\sin2\varphi\sin4\varphi},$$

$$\sin2\varphi=\sin4\varphi=2\sin2\varphi\cos2\varphi,$$

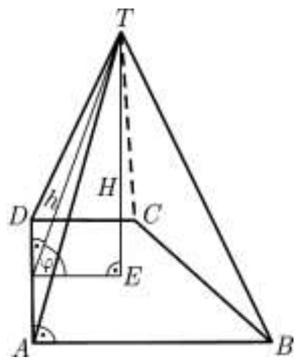
$$\cos2\varphi=\tfrac{1}{2}.$$

Значи, $\varphi=30^\circ$.

18. Основата на една пирамида е правоаголен трапез со агол 30° и подолг крак со должина 12. Бочните ѕидови на пирамидата зафаќаат еднакви агли со основата. Определи ја висината на пирамидата, ако збирот на плоштините на бочните ѕидови е 90.

Решение. Нека $ABCD$ е основата на пирамидата со врв T, при што

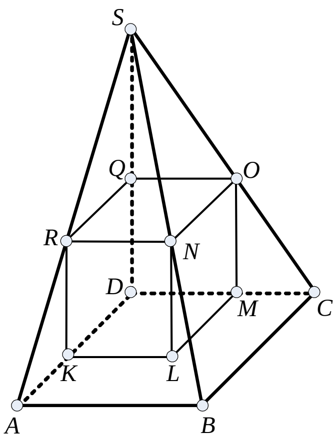
$$AB\,||\,DC,\ \overline{BC}=12, \measuredangle BAD=90^\circ, \measuredangle ABC=30^\circ.$$



Веднаш се добива дека $\overline{AD}=\overline{BC}\sin30^\circ=6$. Нека H е висината на пирамидата спуштена од темето T, а E нејзината подножна точка. Ако аголот што секој од ѕидовите го зафаќа со основата е φ, тогаш $\Delta ABT, \Delta BCT, \Delta CDT, \Delta DAT$ имаат еднакви висини спуштени од темето T, $h=\frac{H}{\sin\varphi}$. Од условот на задачата $P_{ABT}+P_{BCT}+P_{CDT}+P_{DAT}=90$, следува $\frac{h}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA})=90$. Од друга страна, растојанието на точката E до секоја од страните на $ABCD$ изнесува $r=H\operatorname{ctg}\varphi$, па $ABCD$ е тангентен трапез со центар на впишана кружница E. Тогаш $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DA}=18$. Со замена во горното равенство се добива $h=5$ и уште заклучуваме дека $r=\frac{\overline{AD}}{2}=3$. Конечно, $H=\sqrt{h^2-r^2}=4$.

19. Четириаголна пирамида има за основа квадрат, а еден нејзин бочен раб е нормален на рамнината на основата. Две бочни страни со рамнината на основата зафаќаат агол α. Во пирамидата е впишана коцка со раб a, така што долната основа лежи во рамнината на основата на пирамидата, а темињата на горната основа лежат на бочните рабови на пирамидата. Пресметај го волуменот на пирамидата.

Решение. Нека $SABCD$ е пирамида во која основа е квадратот $ABCD$, SD е бочен раб кој е нормален на рамнината на основата $ABCD$ а бочните рабови SA и SC со рамнината на основата зафаќаат агол α. Должината на работ на основата ќе ја означме со b, а должината на висината спуштена од врвот S кон рамнината на основата $\overline{SD}=H$.



Нека $KLMDNOQR$ е коцка со страна a, која е вписана во пирамидата, така што долната основа $KLMD$ лежи во рамнината на основата на пирамидата, а темињата N, O, Q, R припаѓаат на рабовите SB, SC, SD и SA соодветно (види цртеж).

Од правоаголниот триаголник OMC, имаме $\frac{\overline{MC}}{\overline{MO}} = \text{ctg}\alpha$, т.е. $\frac{b-a}{a} = \text{ctg}\alpha$, па затоа

$$b = a(1+\text{ctg}\alpha).$$

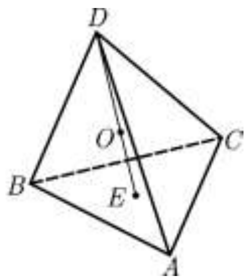
Од правоаголниот триаголник SDC имаме $\frac{\overline{DC}}{\overline{SD}} = \text{ctg}\alpha$, т.е. $\frac{b}{H} = \text{ctg}\alpha$, па затоа

$$H = b\,\text{tg}\alpha = a(1+\text{ctg}\alpha)\text{tg}\alpha = a(1+\text{tg}\alpha).$$

Според тоа,

$$V = \tfrac{1}{3}b^2H = \tfrac{1}{3}a^3(1+\text{ctg}\,\alpha)^2(1+\text{tg}\alpha).$$

20. Правилна триаголна пирмида има раб на основата b и агол меѓу бочните рабови α. Најди го радиусот на опишаната сфера околу пирамидата.



Решение. Нека ΔABC е основата на пирамидата а D е нејзиниот врв. Нека O е центарот на сферата опишана околу неа и E - проекцијата на O на рамнината ABC. Од $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = r$ следува $\overline{AE} = \overline{BE} = \overline{CE}$. Триаголникот ABC е рамностран, па следува дека E е центарот на опишаната кружница околу него. Бидејќи пирамидата е правилна, точката D исто така се проектира во E. Значи точките E, D и O се колинеарни. Од триаголникот ABC имаме $\overline{CE} = \frac{b\sqrt{3}}{3}$, а од рамнокракиот триаголник ADC имаме $\overline{CD} = \frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Триаголникот DEC е правоаголен, па $\sin\measuredangle CDE = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$. Од рамнокракиот триаголник DOC имаме $\overline{DO} = \overline{OC} = r$, па

$$r = \overline{DO} = \frac{\overline{CD}}{2\cos\measuredangle CDE} = \frac{b}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

21. Две правилни триаголни пирамиди имаат заедничка висина. Врвот на едната пирамида е центарот на основата на другата пирамида и бочните рабови на едната пирамида ги сечат бочните рабови на другата пирамида. Бочниот раб со должина l на едната пирамида со нејзината висина зафаќа агол α, а бочниот раб на другата пирамида со нејзината висина зафаќа агол β. Пресметај го волуменот на заедничкиот дел на двете пирамиди.

Решение. Нека $S_1A_1B_1C_1$ и $S_2A_2B_2C_2$ се две правилни триаголни пирамиди со врвови S_1 и S_2 соодветно, кај кои врвот на едната пирамида е центар на основата на другата пирамида. Со други зборови двете пирамиди имаат заедничка висина S_1S_2. Бочните рабови на пирамидите се сечат во точките A, B, C за кои без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $S_1A_1 \cap SA_2 = \{A\}$, $S_1B_1 \cap SB_2 = \{B\}$ и $S_1C_1 \cap SC_2 = \{C\}$. Од причини на симетрија триаголникот ABC е рамностран триаголник и висината S_1S_2 минува низ центарот O на триаголникот ABC.

Со R ќе ја означиме должината на радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Од правоаголниот триаголник AOS_1 имаме $\frac{\overline{OS_1}}{\overline{OA}} = \operatorname{ctg}\alpha$, од каде добиваме

$$\overline{OS_1} = R\operatorname{ctg}\alpha . \tag{1}$$

Од исти причини

$$\overline{OS_2} = R\operatorname{ctg}\beta . \tag{2}$$

Според тоа, за висината на пирамидите имаме

$$H = \overline{S_1S_2} = \overline{S_1O} + \overline{OS_2} = R\operatorname{ctg}\alpha + R\operatorname{ctg}\beta = R\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} .$$

Од пирамидата $S_1A_1B_1C_1$ кај која должината на бочниот раб е l и со висината на пирамидата зафаќа агол α, имаме $H = l\cos\alpha$, па од равенството

$$R\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = l\cos\alpha ,$$

добиваме

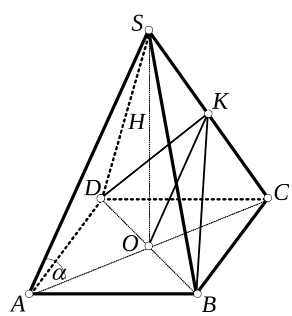
$$R = l\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} .$$

Должината на страната на триаголникот ABC е $a = R\sqrt{3} = l\frac{\sin\alpha\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{3}$, па според тоа

$$V = \frac{1}{3}\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}H = \frac{R^2H\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}R^3\cos\alpha\sin^2 2\alpha\sin^2\beta}{16\sin^2(\alpha+\beta)} .$$

22. Во правилна четириаголна пирамида бочните рабови со должина b зафаќаат агол α со рамнината на основата. Низ дијагоналата на основата е повлечена рамнина паралелна со бочниот раб. Да се пресмета плоштината на пресекот на пирамидата со рамнината.

Решение. Нека $ABCDS$ е четиристрана пирамида во која бочните рабови AS, BS, CS, DS со рамнината на четириаголникот $ABCD$ зафаќаат агол α. Нека пресекот на рамнината, што минува низ дијагоналата на основата BD и е паралелна со AS, со работ SC е точката K. Триаголникот BKC е рамнокрак а негова висина спуштена од точката K кон основата BD е точката O која е пресек на дијагоналите на основата AC и BD. Отсечката OK е средна линија на

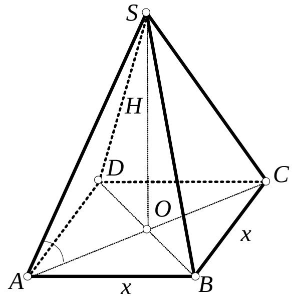


триаголникот ACS која е паралелна со AS, и бидејќи $\overline{AS}=b$ добиваме $\overline{OK}=\frac{1}{2}\overline{AS}=\frac{1}{2}b$.

Триаголникот AOS е правоаголен во кој едниот остар агол е α а хипотенузата е $\overline{AS}=b$. Според тоа $\overline{BD}=\overline{AC}=2\overline{AO}=2\overline{AS}\cos\alpha=2b\cos\alpha$. Според тоа, плоштината на пресекот е

$$P=\frac{1}{2}\frac{b}{2}2b\cos\alpha=\frac{1}{2}b^2\cos\alpha.$$

23. Бочните рабови на правилна четириаголна пирамида се еднакви на a и со рамнината на основата зафаќаат агол α. Определи ја бочната површина и волуменот на пирамидата.



Решение. Нека $ABCDS$ е чеириаголна пирамида во која бочните рабови AB, BS, CS, DS имаат иста должина a и со рамнината на основата зафаќаат агол α. Нека пресекот на дијагоналите на основата AC и BD е точката O. Од правоаголниот триаголник AOS во кој еден остар агол е $\sphericalangle SAO=\alpha$, добиваме

$$H=\overline{OS}=\overline{AS}\sin\alpha=a\sin\alpha$$
$$\frac{d}{2}=\overline{AO}=\overline{AS}\cos\alpha=a\cos\alpha,$$

каде H е должина на висината на пирамидата, а d е должина на дијагоналата на основата на пирамидата $ABCD$.

Ако x е должина на страната на основата, тогаш според Питагорина теорема $x=\sqrt{2}a\cos\alpha$. Должината на апотемата на пирамидата е еднаква на

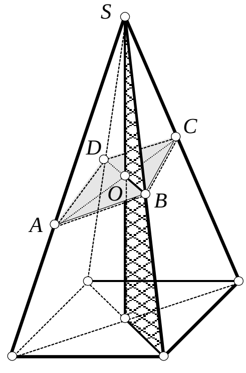
$$h_x=\sqrt{a^2-\left(\frac{\sqrt{2}a\cos\alpha}{2}\right)^2}=a\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\alpha}=a\sqrt{\frac{1+\sin^2\alpha}{2}}.$$

Конечно,

$$M=4\frac{xh_x}{2}=2\sqrt{2}a\cos\alpha\cdot a\sqrt{\frac{1+\sin^2\alpha}{2}}=2a^2\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha},$$
$$V=\frac{BH}{3}=\frac{2a^2\cos^2\alpha\cdot a\sin\alpha}{3}=\frac{1}{3}a^3\sin 2\alpha\cos\alpha.$$

24. Рамнината ги сече бочните рабови на правилна четириаголна пирамида во точки, чии растојанија до врвот на пирамидата се a, b, c и d. Докажи дека

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$



Решение. Да го означиме со α аголот што висината го зафаќа со бочните рабови на пирамидата и пресечните точки на рамнината со бочните рабови и висината на пирамидата (види цртеж). Тогаш:

$$\overline{SA}=a,\ \overline{SB}=b,\ \overline{SC}=c,\ \overline{SD}=d.$$

Од $\triangle ACS$ имаме:

$$P_{ASC}=P_{AOS}+P_{OSC},$$
$$\frac{1}{2}a\sin 2\alpha=\frac{1}{2}a\cdot\overline{SO}\sin\alpha+\frac{1}{2}c\cdot\overline{SO}\sin\alpha,$$

$$2ac\sin\alpha\cos\alpha = (a+c)\cdot\overline{SO}\cdot\sin\alpha$$

$$\frac{2\cos\alpha}{\overline{SO}} = \frac{1}{a}+\frac{1}{c}\,. \qquad (1)$$

Аналогно, од $\triangle BDS$, добиваме:

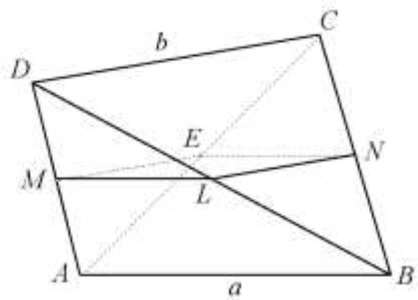
$$\frac{2\cos\alpha}{\overline{SO}} = \frac{1}{b}+\frac{1}{d}\,. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) следува дека $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

25. Даден е тетраедар $ABCD$. Работ AB има должина a, CD има должина b, растојанието меѓу разминувачките прави AB и CD е d и аголот меѓу нив е еднаков на ω. Нека рамнина π, која е паралелна со правите AB и CD, го дели тетраедарот на два дела. Пресметај го односот на нивните волумени ако се знае дека односот на растојанието од AB до π и растојанието од CD до π е еднаков на k .

Решение. Нека растојанието меѓу рамнината π и правата CD е x. Тогаш нејзиниот пресек со тетраедарот е паралелограм ($MN \| AB \| EN$ и $NL \| CD \| ME$) и неговата плоштина е

$$\overline{MN}\cdot\overline{ME}\cdot\sin\omega = \frac{ax}{d}\cdot\frac{b(d-x)}{d}\cdot\sin\omega\,.$$



Според тоа

$$V_1 = \int_0^x \frac{at}{d}\cdot\frac{b(d-t)}{d}\sin\omega\,dt = \left(\frac{abx^2}{2d}-\frac{abx^3}{3d^2}\right)\sin\omega\,.$$

Аналогно се добива

$$V_2 = \left(\frac{aby^2}{2d}-\frac{aby^3}{3d^2}\right)\sin\omega$$

каде y е растојание меѓу AB и π.

Значи, односот на волумените е $\frac{V_2}{V_1}=\frac{3dy^2-2y^3}{3dx^2-2x^3}$, и бидејќи $x=\frac{d}{k+1}$, $y=\frac{dk}{k+1}$ добиваме $\frac{V_2}{V_1}=k^2\,\frac{k+3}{3k+1}$.

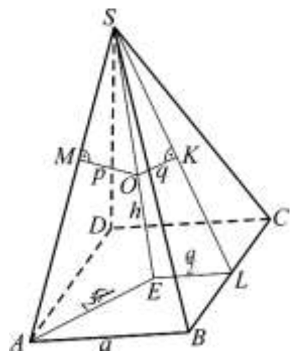
26. Од средината O на висината SE на правилна четиристрана пирамида, со врв S, повлечена е нормала OM на бочниот раб и нормала OK на бочниот ѕид на пирамидата. Ако должините на тие нормали се $\overline{OM}=p$ и $\overline{OK}=q$, пресметај го волуменот на пирамидата (т.е. волуменот изрази го преку p и q).

Решение. Нека основниот раб на пирамидата има должина a, дијагоналата на основата d и нека $h=\overline{SE}$. Имаме $\triangle MOS \sim \triangle EAS$ **и** затоа $\frac{p}{\frac{d}{2}}=\frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{(\frac{d}{2})^2+h^2}}$. Со средување на ова равенство, и земајќи предвид дека $d=a\sqrt{2}$ добиваме

$$\frac{4}{h^2}+\frac{8}{a^2}=\frac{1}{p^2} \qquad (1)$$

Од друга страна $\triangle KOS \sim \triangle ELS$ (L е средина на основниот раб), па имаме $\frac{q}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{(\frac{a}{2})^2+h^2}}$. Средувајќи го и ова равенство добиваме

$$\frac{16}{a^2}+\frac{4}{h^2}=\frac{1}{q^2}. \quad (2)$$



Со одземање на (1) од (2) добиваме

$$\frac{8}{a^2}=\frac{1}{q^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{p^2-q^2}{p^2q^2}$$

и оттука $a^2 = \frac{8p^2q^2}{p^2-q^2}$. Заменувајќи во (1) добиваме $h^2 = \frac{4p^2q^2}{2q^2+p^2}$. Сега да го пресметаме волуменот на пирамидата

$$V=\frac{B\cdot h}{3}=\frac{a^2h}{3}=\frac{16p^3q^3}{3(p^2-q^2)\sqrt{2q^2+p^2}}.$$

27. Од средината на висината на правилна четириаголна пирамида повлечени се нормали на еден бочен ѕид и на еден бочен раб, чии должини соодветно се $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата.

Решение. Нека M е средина на висината SO на пирамидата $SABCD$ (види цртеж) и нека $MP \perp SK$, а $MQ \perp SA$. Според условот на задачата важие: $\overline{MP}=\sqrt{2}$, $\overline{MQ}=\sqrt{3}$.

За да ги пресметаме плоштината P и волуменот V на пирамидата, треба да ги најдеме основниот раб $\overline{AB}=a$ и висината $\overline{SO}=H$. Ќе ги користиме ознаките:

$$\overline{SA}=s,\ \overline{SK}=h,\ \overline{AO}=\frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$\overline{SM}=\frac{H}{2},\ \overline{OK}=\frac{a}{2},\ \measuredangle SBK=\phi.$$

Очигледно, триаголниците SQM и SOA се слични, па имаме: $\overline{SM}:\overline{MQ}=\overline{SA}:\overline{AO}$, т.е. $\frac{H}{2}:\sqrt{3}=s:\frac{a\sqrt{2}}{2}$, од каде следува

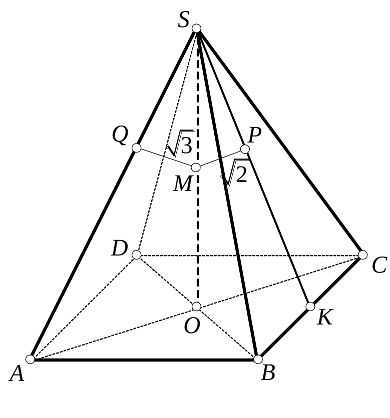
$$s\sqrt{3}=\frac{aH}{2\sqrt{2}} \quad (1)$$

Аналогно од сличноста на $\triangle SPM$ и $\triangle SOK$ добиваме: $\overline{SM}:\overline{MP}=\overline{SK}:\overline{KO}$, т.е. $\frac{H}{2}:\sqrt{2}=h:\frac{a}{2}$, па затоа

$$2h=\frac{aH}{2\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува $S\sqrt{3}=2h$, т.е. $\frac{h}{s}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Според тоа, $\sin\phi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $\phi=60^\circ$, а тоа значи дека $\triangle BCS$ е рамностран, т.е. $a=s$.



Тогаш од (1) и (2) добиваме: $H = 2\sqrt{6}$ и $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Применувајќи ја Питагоровата теорема за $\triangle SOK$, наоѓаме:

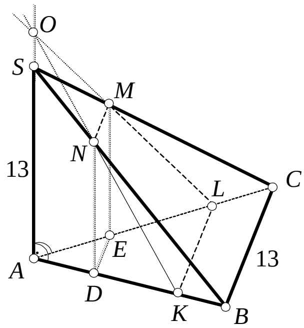
$$H^2 = h^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2},\ a^2 = 2H^2 = 2\cdot 24 = 48,\ a = 4\sqrt{3},\ h = 6.$$

Конечно:

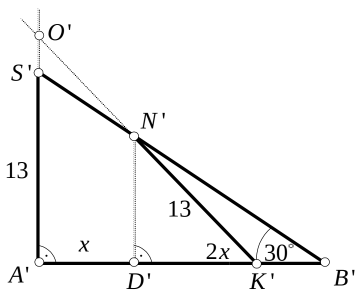
$$P = B + M = a^2 + 2ah = 48(1+\sqrt{3}), \qquad V = \frac{BH}{3} = \frac{48\cdot 2\sqrt{6}}{3} = 32\sqrt{6}.$$

28. Бочниот раб SA е нормален на основата ABC на пирамидата $SABC$, а страната BCS зафаќа агол од 30° со основата. Една рамнина ги сече рабовите AB, AC, SC и SB во точките K, L, M и N соодветно, при што четириаголникот $KLMN$ е трапез, чија основа MN е трипати помала од основата KL. Пресметај ја плоштината на тој трапез, ако неговата висина е 13 и $\overline{AS} = \overline{BC} = 13$.

Решение. Од условот работ SA да е нормален на основата ABC на пирамидата $SABC$, следува дека и бочните ѕидови SAB и SAC се нормални на основата на пирамидата (види цртеж 1).



цртеж 1



цртеж 2

Ја проектираме пирамидата $SABC$ на рамнината нормална на работ BC, па го добиваме триаголникот $A'B'S'$ (види цртеж 2), кај кој е

$$\measuredangle B' = 30^\circ,\ \overline{SA'} = \overline{SA} = 13,\ \measuredangle A' = 90^\circ$$

бидејќи $SA \perp BC$.

Од условот $KL \parallel MN$ и $MN \parallel ABC$ следува дека и $MN \parallel BC$, односно $KL \parallel BC$, па затоа трапезот $KLMN$ ќе се проектира во отсечката $K'N'$, која е еднаква на неговата висина, т.е. $\overline{K'N'} = 13$.

На крајот, отсечката DE, која е проекција на отсечката NM врз рамнината ABC, се проектира во точката D'.

Да ги одредиме сега должините на основите KL и NM на трапезот $KLMN$.

Да означиме $\overline{A'D'} = x$, па од сличноста на триаголниците AKL и ADE, имајќи предвид дека при паралелна проекција односот се запазува, добиваме:

$$\overline{A'K'} : \overline{A'D'} = \overline{AK} : \overline{AD} = \overline{KL} : \overline{DE} = \overline{KL} : \overline{MN} = 3:1$$

Оттука :

$$\overline{A'K'} = 3\overline{AD} = 3x,\ \text{т.е. } \overline{D'K'} = 2x.$$

Од правоаголните триаголници $S'A'B',\ N'D'B',\ N'D'K'$ имаме:

$$\overline{A'B'} = \overline{S'A'}\ \mathrm{ctg}\,30^\circ = 13\sqrt{3},$$

$$\overline{N'D'} = \overline{D'B'}\ \mathrm{tg}\,30^\circ = (\overline{A'B'} - x)\tfrac{\sqrt{3}}{3} = 13 - \tfrac{x\sqrt{3}}{3}$$

$$\overline{K'N'}^2 = \overline{N'D'}^2 + \overline{D'K'}^2$$

$$13^2 = (13 - \tfrac{x\sqrt{3}}{3})^2 + (2x)^2$$

$$13x^2 = 26x\sqrt{3},\ x = 2\sqrt{3}\ \ (x \neq 0).$$

Од сличноста на триаголниците AKL и ABC имаме:

$$\overline{KL} : \overline{BC} = \overline{AK} : \overline{AB} = \overline{A'K'} : \overline{A'B'}$$

$$\overline{KL} = \frac{\overline{A'K'}}{\overline{A'B'}}\overline{BC} = \frac{3x}{13\sqrt{3}}13 = \frac{3 \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 6,$$

$$\overline{MN} = \tfrac{1}{3}\overline{KL} = 2.$$

Конечно, плоштината P на трапезот $KLMN$ е:

$$P = \frac{\overline{KL} + \overline{MN}}{2} \cdot 13 = \frac{6+2}{2} \cdot 13 = 52.$$

Значи, плоштината на трапезот $KLMN$ е 52 кв. единици.

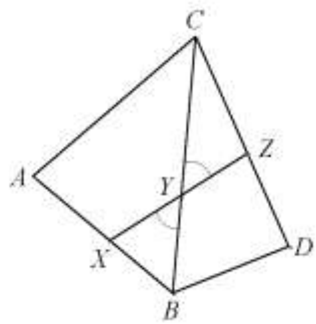
29. Секоја страна на тетраедарот $ABCD$ е остроаголен триаголник. Ги разгледуваме затворените полигонални линии $XYZTZX$ определени на следниот начин: точката X е на работ AB и е различна од A и B. Аналогно Y, Z и T се на рабовите BC, CD и AD, соодветно.

Докажи дека:

а) Ако $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD \neq \measuredangle ABC + \measuredangle CDA$, тогаш меѓу полигоналните линии нема најкратка.

б) Ако $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = \measuredangle ABC + \measuredangle CDA$, тогаш постојат бесконечно многу полигонални линии со минимална должина и таа е еднаква на $2\overline{AC}\sin\frac{\alpha}{2}$, каде $\alpha = \measuredangle CAB + \measuredangle DAC + \measuredangle DAB$.

Решение. (a) Да претпоставиме дека постои најкратка искршена линија $XYZTX$ (цртеж лево). Триаголниците ABC и BCD ги поставуваме во една рамнина. Со тоа добиваме четириаголник $ABCD$ (цртеж десно). За линијата да има минимална должина, мора да е исполнето $\measuredangle BYX = \measuredangle CYZ$, бидејќи во спротивен случај би добиле помала должина на линијата со поместување на точката Y. Аналогно се покажува дека мора да е исполнето



$\measuredangle CZY = \measuredangle TZD$, $\measuredangle DTZ = \measuredangle XTA$, $\measuredangle AXT = \measuredangle YXB$.

На тој начин добиваме

$$\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = 180^\circ - \measuredangle AXT - \measuredangle XTA + 180^\circ - \measuredangle CZY - \measuredangle CYZ$$

$$= 180^\circ - \measuredangle YXB - \measuredangle BYX + 180^\circ - \measuredangle DTZ - \measuredangle TZD = \measuredangle ABC + \measuredangle ADC.$$

што противречи на претпоставката.

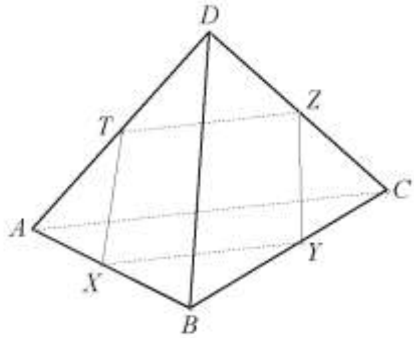
(b) Нека претпоставиме дека е исполнет условот

$$\measuredangle DAB+\measuredangle BCD=\measuredangle ABC+\measuredangle ADC \qquad (1)$$

Со $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ги означуваме збировите на аглите помеѓу рабовите во темињата A,B,C,D. Тогаш

$$\alpha+\gamma=\measuredangle DAB+\measuredangle CAB+\measuredangle DAC+\measuredangle BCA+\measuredangle ACD+\measuredangle BCD$$

$$=(\measuredangle ABC+\measuredangle CAB+\measuredangle BCA)+(\measuredangle CDA+\measuredangle DAC+\measuredangle ACD)=360^\circ.$$

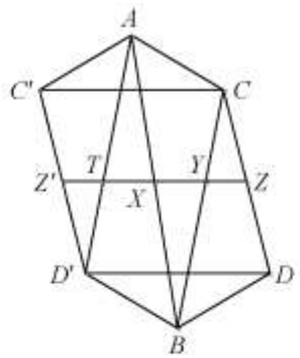


т.е. $\alpha+\gamma=360^\circ$. Аналогно се докажува дека $\beta+\delta=360^\circ$. Затоа, барем еден од аглите α,γ или од аглите β,δ не може да биде поголем од 180°. Нека тоа се аглите α и γ. Обвивката на тетраедарот $ABCD$ ја расекуваме по рабовите AC, CD, DB. (овој избор на рабови зависи од изборот на аглите кои се помали или еднакви на 180°). Во рамнина формираме фигура $AC'D'BDC$ (цртеж десно.) која се состои од триаголници $AC'D'$, $AD'B$, ABC и BDC. Од равенството (1) добиваме

$$\measuredangle C'D'A+\measuredangle ABC=\measuredangle CDA+\measuredangle ABC,\ \measuredangle D'AB+\measuredangle BCD=\measuredangle DAB+\measuredangle BCD$$

од каде што следува

$$\measuredangle C'D'A+\measuredangle ABC=\measuredangle D'AB+\measuredangle BCD \qquad (2)$$



За да од отсечката $C'D'$ дојдеме до отсечката CD, прво треба отсечката $C'D'$ да ја ротираме за агол $\measuredangle C'D'A$ околу точката D' во негативна насока, потоа отсечката $D'A$ да ја ротираме за $\angle D'AB$ околу точката A во позитивна насока, потоа отсечката AB за $\measuredangle ABC$ околу точката B, и конечно отсечката BC за агол $\angle DCB$ околу точката C. Според (2) исполнето е $CD \| C'D'$ и отсечките CD и $C'D'$ се еднакво ориентирани. Затоа $DCD'C'$ е паралелограм. Од рамнокракиот триаголник ACC' добиваме

$$\overline{CC'}=2\overline{AC}\sin\tfrac{\alpha}{2}=\overline{DD'}.$$

Бидејќи аголот α не е поголем од 180°, целиот паралелограм $DCC'D'$ е содржан во ликот $AC'D'BDC$ и на секоја отсечка ZZ' која е паралелна со CC', и е придружена искршена линија $XYZTX$ која има минимална должина.

30. Дадени се четири различни паралелни рамнини. Докажи дека постои правилен тетраедар кој има по едно теме во секоја од дадените рамнини.

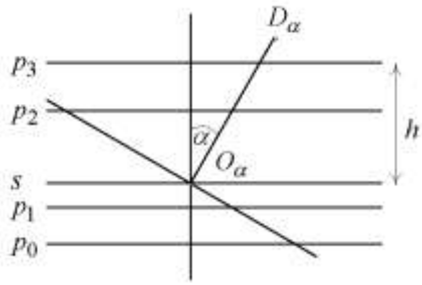
Решение. *Лема.* Нека во рамнина се дадени три паралелни прави. Тогаш постои единствен рамностран триаголник, таков што на секоја од правите се наоѓа по едно негово теме. При тоа должината на страната на рамностраниот триаголник зависи само од растојанието меѓу правите.

Доказ. Доволно е на една од правите да земеме произволна точка и една од другите две прави да ја ротираме за агол $\alpha = 60^0$. Во пресекот со третата права го наоѓаме второто теме на рамностраниот триаголник. Сега лесно се конструира третото теме и се докажува тврдењето за должината на страната. ♦

Нека π_o, π_1, π_2 и π_3 се дадени паралелни рамнини, при што претпоставуваме дека π_1, π_2 и π_3 се од иста страна на рамнината π_o, а нивните растојанија до π_o ги означуваме со d_1, d_2 и d_3; ($0 < d_1 < d_2 < d_3$). Земаме произволна рамнина ρ_α, таква што аголот меѓу нејзината нормала и нормалата на рамнината π_o е α. Нејзините пресеци со рамнините π_o, π_1 и π_2 се паралелните прави $l_o^\alpha, l_1^\alpha, l_2^\alpha$. Ја применуваме лемата. Да забележиме дека растојанието од l_o^α до l_1^α и l_2^α е $\frac{d_1}{\sin\alpha}$ и $\frac{d_2}{\sin\alpha}$, соодветно. Нека $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ е рамностран триаголник чии темиња лежат на l_o^α, l_1^α и l_2^α, а должината на неговата страна со a_α. Со хомотетија во рамнината ρ_α, со центар во точката A_α и коефициент $k = \sin\alpha$ триаголникот $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ се пресликува во рамностран триаголник со должина на страната $a_\alpha \sin\alpha$ и со темиња на паралелни прави, од кои две се на растојание d_1 и d_2, од третата права. Должината на страните на добиениот триаголник е еднозначно определена со големините d_1 и d_2 и таа е константна ако е фиксирана положбата на разгледуваните рамнини. Таа должина ќе ја означиме со a.

Значи, $a = a_\alpha \sin\alpha$ или $a_\alpha = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Ќе го пресметаме растојанието на тежиштето O_α на триаголникот $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$ до рамнината π_o. Нека E_α е средина на страната $B_\alpha C_\alpha$. Ја разгледуваме рамнината која ја содржи правата $B_\alpha C_\alpha$ и е нормална на рамнината π_o. Растојанието меѓу точката E_α и рамнината π_o е $\frac{d_1+d_2}{2}$. Ако низ правата $A_\alpha E_\alpha$ поставиме рамнина која е нормална на π_o, и земеме во предвид дека $\overline{A_\alpha O_\alpha} = \frac{2}{3}\overline{A_\alpha E_\alpha}$, добиваме дека растојанието од O_α до π_o е $\frac{2}{3}\frac{d_1+d_2}{2} = \frac{d_1+d_2}{3}$, т.е. тоа не зависи од α. Тоа значи, дека тежиштата на сите можни рамнострани триаголници со темиња во рамнините π_o, π_1 и π_2 лежат во една рамнина σ која е на константно растојание од π_o, што значи и од π_3. Нека растојанието од σ до π_3 е h.



Конструираме правилен тетраедар $A_\alpha B_\alpha C_\alpha D_\alpha$, чија основа е конструираниот триаголник $A_\alpha B_\alpha C_\alpha$, при што од двете можности за D_α ја бираме онаа за која D_α е подалеку од π_o. Должината на висината $D_\alpha O_\alpha$ на конструираниот тетраедар е $a_\alpha \sqrt{\frac{2}{3}}$. Разгледуваме рамнина низ правата $D_\alpha O_\alpha$ која е нормална на π_o.

Тогаш (види цртеж) p_o, p_1, p_2, p_3 и s се пресеците на таа рамнина со рамнините $\pi_o, \pi_1, \pi_2, \pi_3$ и σ, од каде D_α е растојанието од оддалечена од σ за $a_\alpha \cos\alpha\sqrt{\frac{2}{3}} = a\mathrm{ctg}\,\alpha\sqrt{\frac{2}{3}}$. За да точката D_α припаѓа на рамнината π_3 потребно и доволно е најденото растојание да е еднакво на h, т.е. $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{h}{a}\sqrt{\frac{3}{2}}$. Бидејќи таков агол α постои, доказот на тврдењето е завршен.

31. Дадена е рамнина π, точка P во таа рамнина и точка Q надвор од неа. Најди ги сите точки R од π за кои количникот $\frac{\overline{PQ}+\overline{PR}}{\overline{QR}}$ е најголем.

Решение. Нека R е точка во рамнината π, различна од P и $\measuredangle RPQ = \alpha$, $\measuredangle PQR = \beta$. Од триаголникот PQR добиваме

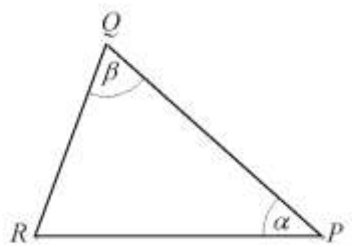
$$\frac{\overline{QR}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{PQ}}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\overline{PR}}{\sin\beta},$$

од каде што

$$\frac{\overline{PQ}+\overline{PR}}{\overline{QR}} = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha+\frac{\beta}{2})}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

За даден агол α, овој количник е најголем ако $\sin(\beta+\frac{\alpha}{2}) = 1$ т.е. $\beta + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ$. Последното равенство е исполнето ако и само ако ΔQRP е рамнокрак , т.е. $\overline{PR} = \overline{PQ}$.

Бидејќи $0 < \alpha < 180^\circ$, т.е. $0 < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, а функцијата $\sin$ е растечка на $(0, 90^\circ)$, дадениот однос има најголема вредност кога α е најмал.

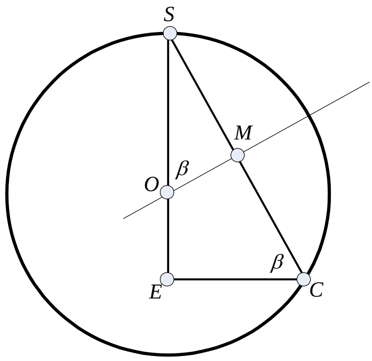


Ако правата PQ е нормална на рамнината π, множеството точки кои ги задоволуваат условите на задачата е кружница со центар во P и радиус $\overline{PQ}$. Ако правата PQ не е нормална на π, тогаш постои само една точка која ги задоволува условите од задачата и тоа е точката која припаѓа на рамнината нормална на π, што ја содржи правата PQ, при што растојанието меѓу точките R и P е еднакво на $\overline{PQ}$, а $\measuredangle RPQ$ е остар. Со овие услови точката R е еднозначно определена.

2. ВАЛЧЕСТИ ТЕЛА

1. Во сфера е впишана пирамида чија основа е правоаголник со дијагонала d. Бочните рабови на пирамидата се наклонети кон рамнината на основата под агол β. Најди го радиусот на сферата.

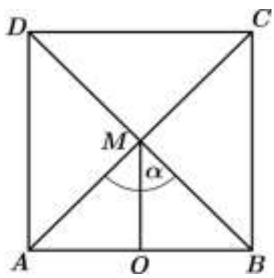
Решение. Нека O е центарот на сферата опишана околу пирамидата $SABCD$ со основа правоаголникот $ABCD$, нека R е радиусот на сферата, нека E е пресекот на дијагоналите на правоаголникот $ABCD$ и нека M е средината на работ CS. Тогаш, триаголникот SEC е правоаголен со остар агол $\beta = \measuredangle SCE$, а точката O лежи на правата SE и е еднакво оддалечена од точките S и C, па затоа $OM \perp CS$. Бидејќи $\measuredangle SOM = \measuredangle SCE = \beta$, како агли со заемно нормални краци, имаме



$$R = \overline{OS} = \frac{\overline{SM}}{\sin\beta} = \frac{\frac{1}{2}\overline{SC}}{\sin\beta} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\overline{CE}}{\cos\beta}}{\sin\beta} = \frac{\frac{1}{2}d}{\sin 2\beta} = \frac{d}{2\sin 2\beta} .$$

2. Плоштината на основата на цилиндарот и плоштината на неговиот оскин пресек се однесуваат како $m:n$. Определи го остриот агол меѓу дијагоналите на оскиниот пресек.

Решение. Нека темињата на еден оскин пресек се A, B, C, D, при што A и B припаѓаат на едната основа на цилиндерот а C и D припаѓаат на другата основа на цилиндарот (види цртеж). Нека пресекот на неговите дијагонали AC и BD е точката M. Ако MO е висина во триаголникот ABM, тогаш $\overline{MO} = \frac{h}{2}$ а $\overline{AO} = r$, каде r и h се радиус и висина на цилиндерот. Ако $\measuredangle AMB = \alpha$ е еден од аглите меѓу дијагоналите, тогаш $\pi - \alpha$ е другиот агол меѓу дијагоналите.



Од правоаголниот триаголник AOM имаме

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\frac{h}{2}} . \tag{1}$$

Од условот на задачата имаме $\frac{r^2\pi}{2rh} = \frac{m}{n}$, од каде добиваме

$$h = \frac{r\pi n}{2m} . \tag{2}$$

Ако од (2) замениме во (1), добиваме

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\frac{1}{2}\frac{r\pi n}{2m}} = \frac{4m}{\pi n} . \tag{3}$$

Според тоа, $\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\frac{4m}{n\pi}$ а другиот агол е $\pi - 2\,\mathrm{arctg}\frac{4m}{n\pi}$. Од (3) е јасно дека α е помалиот агол ако $\frac{4m}{\pi n} < 1$.

3. Во конус е впишана сфера, при што плоштината на сферата и плоштината на основата на конусот се еднакви. Пресметај го косинусот од аголот на оскиниот пресек на конусот во темето што е и врв на конусот.

Решение. Оскиниот пресек на конусот и впишаната сфера е рамнокрак триаголник ABC, со должина на основата еднаква на $2R$, каде R е радиус на основата на конусот, во кој е впишана кружница k со радиус r. При тоа r е радиусот на впишаната сфера. Нека центар на k е точката O, а допирните точки со страните AB, BC и CA се точките K, L и M соодветно (види цртеж).

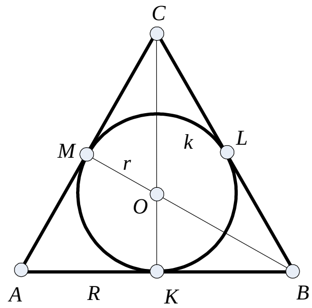
Од равенството $4r^2\pi = R^2\pi$ добиваме $R = 2r$.

Триаголниците AKC и OMC се слични. Ако воведеме стандардни ознаки

$$\overline{AK} = R,\ \overline{OK} = \overline{OM} = r,\ \overline{CK} = H \text{ и } \overline{AC} = s$$

добиваме:

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{CK}},\quad \frac{r}{H-r} = \frac{R}{s} = \frac{R}{\sqrt{H^2+R^2}} = \frac{2r}{\sqrt{H^2+4r^2}}.$$



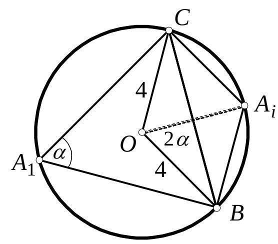
Од равенството $\frac{r}{H-r} = \frac{2r}{\sqrt{H^2+4r^2}}$ добиваме $H = \frac{8}{3}r$, па според тоа

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\frac{8}{3}r - r} = \frac{3}{5}.$$

Сега, користејќи го идентитетот $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ не е тешко да се пресмета дека $\cos\alpha = \frac{7}{25}$.

4. Зададена е сфера со центар во O и радиус 4. Три паралелни прави ја допираат сферата во точките A, B и C. Најди го аголот BAC, ако се знае дека плоштината на триаголникот OBC е 4, а плоштината на триаголникот ABC е 16.

Решение. Да го разгледаме пресекот на сферата со рамнината што минува низ центарот O на сферата и е нормален на трите паралелни прави. Радиусите OA, OB и OC се нормални на тие прави, а точките A, B и C лежат во таа рамнина (види цртеж)



Ако $\alpha = \measuredangle BAC$, тогаш $\measuredangle BOC = 2\alpha$, па од равенството

$$P_{BOC} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\cdot \sin 2\alpha = 4$$

добиваме $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$, од каде што $2\alpha = 30^\circ$ или $2\alpha = 150^\circ$.

Првата вредност не е можна, бидејќи тогаш $\alpha = 15^\circ$ или $\alpha = 165^\circ$, а оттука

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha < \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\frac{1}{2} = 16.$$

Значи, $2\alpha = 150^\circ$, т.е. $\alpha = 75^\circ$ (кога $A \equiv A_1$) или $\alpha = 105^\circ$ (кога $A \equiv A_2$). Но и последното равенство не е можно, бидејќи тогаш

$$P_{ABC} < \frac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{OA} < \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4 = 16.$$

Следствено, за големината на аголот α останува единствено вредноста 75°.

5. Основата на кружен конус лежи во рамнината π, а врвот S во рамнината $\Sigma \parallel \pi$. Аголот при врвот на конусот е 2α. Низ средината M на неговата висина OS е повлечена права p, која со OS зафаќа агол β. Одреди ја должината на отсечката AB, од правата p, која минува низ конусот, ако отсечката CD од правата p, зафатена меѓу рамнините π и Σ, има должина d.

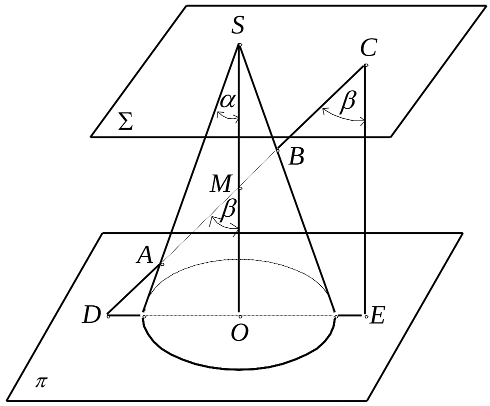
Решение. Според ознаките на цртежот имаме:

$\overline{CD} = d$, $\measuredangle OSA = \alpha$, $\measuredangle OMA = \beta$.

Нека $CE \perp \pi$, тогаш $\angle DCE = \beta$, па

$\overline{CE} = d \cdot \cos\beta$.

$\overline{SM} = \frac{1}{2}\overline{SO} = \frac{1}{2}\overline{CE} = \frac{1}{2} d\cos\beta$.



Според синусната теорема за $\triangle ASM$ наоѓаме:

$$\overline{AS} = \frac{\overline{SM}\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d}{2}\cdot\frac{\cos\beta\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{d\sin 2\beta}{4\sin(\beta-\alpha)}$$

Слично, од $\triangle ABS$ добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\sin 2\alpha} = \frac{\overline{AS}}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

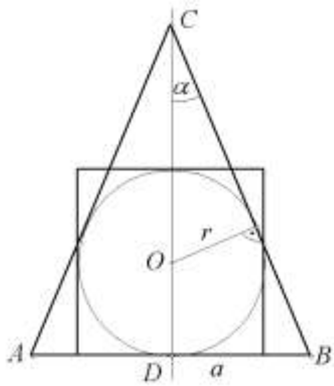
Конечно $\overline{AB} = \dfrac{d\sin 2\alpha\,\sin 2\beta}{4\sin(\alpha+\beta)\,\sin(\beta-\alpha)}$.

6. Даден е правилен конус во кој е впишана топка. Околу топката е опишан цилиндар чија основа лежи во рамнината на основата на конусот. Нека V_1 е волуменот на конусот, а V_2 волуменот на цилиндарот.

а) Докажи дека $V_1 \neq V_2$.

б) Најди го најмалиот број k за кој $V_1 = kV_2$, и за вака најденото k конструирај го аголот при темето на оскиниот пресек на конусот.

Решение. Го разгледуваме осниот пресек на конусот, цилиндарот и топката. Нека 2α е аголот при врвот на осниот пресек на конусот, а r е радиусот на топката. Волуменот на конусот е $V_1 = \frac{\pi h a^2}{3}$, каде $a = \overline{BD}$ и $h = \overline{CD}$. Бидејќи



$$\overline{CD} = \overline{OC} + \overline{OD} = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha} \quad \text{и}$$

$$\overline{BD} = \frac{r(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha} tg\alpha$$

добиваме

$$V_1 = \frac{\pi r^3(1+\sin\alpha)^2}{3\sin\alpha(1-\sin\alpha)}.$$

Волуменот на цилиндарот е $V_2 = 2\pi r^3$ (висината на цилиндарот е $2r$). Нека $k = \frac{V_1}{V_2}$. Тогаш $k = \frac{(1+\sin\alpha)^2}{6\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$, па според тоа

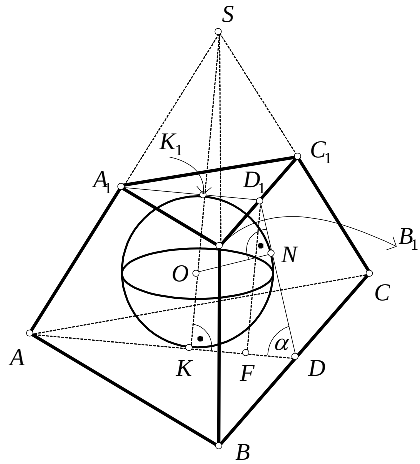
$$(1+6k)\sin^2\alpha + 2(1-3k)\sin\alpha + 1 = 0.$$

Оваа равенка има решение (по $\sin\alpha$) само во случај кога нејзината дискриминанта $D\geq 0$, т.е. кога $(1-3k)^2-(1+6k)\geq 0$. Од овде $k\geq\frac{4}{3}$.

Според тоа, равенство $V_1=V_2$ не е можно. За $k=\frac{4}{3}$, добиваме $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\overline{OC}=3r$. Од претходно изнесеното непосредно следува конструкција.

7. Плоштините на основите на правилна тристрана потсечена пирамида се однесуваат како $4:1$, Најди го аголот меѓу бочната страна и основата, ако се знае дека во пресечената пирамида може да се впише топка.

Решение. Нека $ABCA_1B_1C_1$ (види цртеж) е дадена пирамида. Бидејќи пирамидата е правилна, центарот на впишаната топка е средина на висината KK_1, и топката ги допира основите во точките K и K_1, а бочните страни на апотемите на пирамидата.



Рамнината ADD_1A_1 е нормална на работ BC ($BC\perp AD$ и $BC\perp DD_1$), па $\measuredangle ADD_1=\alpha$ е бараниот агол.

Бидејќи $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$, следува дека нивните плоштини P и P_1 се однесуваат како квадратите на радиусите $\overline{KD}=r$ и $\overline{K_1D_1}=r_1$ на впишаните кружници во нив, т.е. $\frac{r^2}{r_1^2}=\frac{P}{P_1}=\frac{4}{1}$. Значи, $\frac{r}{r_1}=2$, т.е. $r=2r_1$. Од

$$\cos\alpha=\frac{\overline{FD}}{\overline{DD_1}}=\frac{\overline{KD}-\overline{K_1D_1}}{\overline{DN}+\overline{ND_1}}=\frac{r-r}{\overline{DK}+\overline{D_1K_1}}=\frac{2r_1-r}{r+r_1}=\frac{r_1}{3r_1}=\frac{1}{3},$$

следува дека $\alpha=\arccos\frac{1}{3}$.

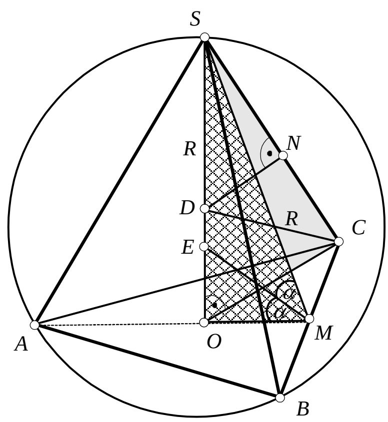
8. Во правилна триаголна пирамида важи $R\geq 3r$, каде што R и r се радиусите на опишаната и впишаната сфера. Докажи!

Решение. Нека $SABC$ е правилна триаголна пирамида и нека O е центарот на опишаната кружница околу основата ABC, D е центарот на опишаната сфера, а E ценатарот на впишаната сфера околу пирамидата (види цртеж), тогаш:

$$\overline{DS}=\overline{DC}=R,\ \overline{EO}=r.$$

Да го означиме со 2α аголот на диедарот образуван од основата и бочниот ѕид на пирамидата, тогаш:

$$\measuredangle OME=\measuredangle EMS=\alpha.$$



Повлекуваме нормала DN на бочниот раб SC, па имаме $\triangle SND \sim \triangle SOC$, од каде следува $\overline{SN}=\overline{NC}=\frac{1}{2}\overline{SC}$, $\overline{SD}:\overline{SN}=\overline{SC}:\overline{SO}$ и затоа $2\cdot\overline{SD}\cdot\overline{SO}=\overline{SC}^2$, т.е. $2\overline{SD}\cdot\overline{SO}=\overline{SC}^2+\overline{OC}^2$, односно

$$2R\cdot\overline{SO}=\overline{SO}^2+\overline{OC}^2. \qquad (1)$$

Да ги изразиме $\overline{SO}$ и $\overline{OC}$ преку $r=\overline{EO}$ и $\alpha=\measuredangle OME$, имајќи предвид дека $\overline{OC}=2\cdot\overline{OM}$. Од правоаголните триаголници EOM и SOM имаме:

$$\overline{OM}=\overline{OE}\cdot\mathrm{ctg}\alpha=r\cdot\mathrm{ctg}\alpha,\ \overline{OC}=2r\,\mathrm{ctg}\alpha,\ \overline{SO}=\overline{OM}\cdot\mathrm{tg}2\alpha=r\,\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{tg}2\alpha.$$

Заменувајќи ги овие вредности во (1), добиваме:

$$2R\cdot r\,\mathrm{ctg}\alpha\,\mathrm{tg}2\alpha=r^2\mathrm{ctg}^2\alpha\,\mathrm{tg}^2 2\alpha+4r^2\mathrm{ctg}^2\alpha$$

и ако ставиме $t=\mathrm{tg}\alpha$ последователно добиваме

$$2R\frac{2t}{1-t^2}=r\frac{1}{t}\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}+4r\frac{1}{t},$$

$$Rt^2(1-t^2)=rt^2+r(1-t^2)^2$$

$$R(t^2-t^4)+r(t^2-t^4)=r$$

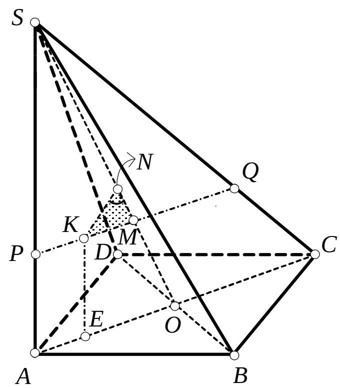
$$\frac{r}{r+R}=t^2-t^4=\frac{1}{4}-(t^2-\frac{1}{2})^2\le\frac{1}{4}.$$

Оттука $4r\le R+r$, т.е. $R\ge 3r$.

9. Основата на пирамидата $SABCD$ е квадратот $ABCD$ со страна a. Бочниот раб SA е нормален на основата, а два бочни ѕида со основата зафаќаат агол ϕ. Пресметај го:

а) радиусот на впишаната сфера во пирамидата,

б) радиусот на кружницата што се добива како пресек на впишаната сфера и рамнината SBD.



Решение. Од условот на задачата е $SA\perp AB$ и $SA\perp AD$, па следува дека: $\angle ABS=\measuredangle ADS=\phi$ (види цртеж). Затоа

$$\overline{SA}=a\,tg\phi,\quad \overline{SB}=\frac{a}{\cos\phi}.$$

а) Да забележиме дека (ACS) е рамнина на симетрија на пирамидата; значи $K\in(ACS)$, каде што K е центарот на впишаната сфера со радиус r.

Конструираме $KE\perp(ABC)$ и $PQ\parallel AC$, при што $K\in PQ$. Очигледно $\overline{KE}=r$ и $\overline{PK}=r\sqrt{2}$. Да го пресметаме волуменот на пирамидата

$$V=\frac{1}{3}\overline{SA}\cdot P_{ABCD}=\frac{1}{3}a^3tg\phi. \qquad (1)$$

Од друга страна, волуменот на пирамидата е збир на волумените на петте пирамиди, чија висина е r, т.е.

$$V = 2V_{KADS} + 2V_{KBCS} + V_{KABCD} = \frac{r}{3}(2P_{ADS} + 2P_{BCS} + P_{ABCD})$$
$$= \frac{r}{3}(a \cdot a\,tg\phi + a \cdot \frac{a}{\cos\phi} + a^2) = \frac{a^2 r}{3}\,\frac{\sin\phi+\cos\phi+1}{\cos\phi}. \quad (2)$$

Од (1) и (2) го одредуваме радиусот r:

$$r = \frac{a\sin\phi}{1+\sin\phi+\cos\phi}. \quad (3)$$

б) Од сличноста на триаголниците SAO и SPM, каде што M е пресекот на SO и PQ, добиваме: $\overline{SA}:\overline{AO} = \overline{SP}:\overline{PM}$. Притоа:

$$\overline{AO} = \frac{a}{\sqrt{2}},\ \overline{SP} = a\,\mathrm{tg}\,\phi - r,\ \ \overline{PM} = \frac{\overline{AO}\cdot\overline{SP}}{\overline{SA}} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}(a\,\mathrm{tg}\,\phi - \phi)}{a\,\mathrm{tg}\,\phi} = \frac{a\frac{\sin\phi}{\cos\phi} - \frac{a\sin\phi}{1+\sin\phi+\cos\phi}}{\sqrt{2}\frac{\sin\phi}{\cos\phi}},$$

т.е. $\overline{PM} = \frac{a(1+\sin\phi)}{(1+\sin\phi+\cos\phi)}$.

Конструираме $KN \perp SO$, тогаш $KN \perp (BDS)$. Од сличноста на триаголниците KNM и SAO имаме $\overline{KN}:\overline{KM} = \overline{SA}:\overline{SO}$, т.е. $\overline{KN} = \frac{\overline{KM}\cdot\overline{SA}}{\overline{SO}}$. Притоа:

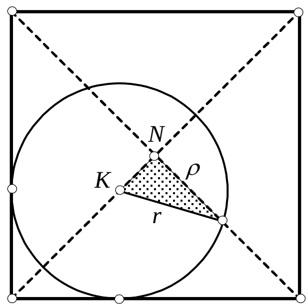
$$\overline{KM} = \overline{PM} - \overline{PK} = \frac{a(1+\sin\phi)}{\sqrt{2}(1+\sin\phi+\cos\phi)} - \frac{a\sqrt{2}\sin\phi}{1+\sin\phi+\cos\phi},\ \text{т.е.}\ \ \overline{KM} = \frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi+\cos\phi}$$

$$\overline{SO}^2 = \overline{SA}^2 + \overline{AO}^2 = a^2 tg^2\phi + \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{SO} = \frac{a\sqrt{1+\sin^2\phi}}{\sqrt{2}}\cos\phi,$$

па по средувањето добиваме:

$$\overline{KN} = \frac{a\sin\phi(1-\sin\phi)}{(1+\sin\phi+\cos\phi)\sqrt{1+\sin^2\phi}}. \quad (4)$$

Нека со ρ го означеме радиусот на кружницата што се добива како пресек на впишана сфера, со радиус r, и рамнината SBD, тогаш (види цртеж):



$$\rho^2 = r^2 - \overline{KN}^2.$$

Имајќи ги предвид (3) и (4) добиваме

$$\rho^2 = \frac{a^2\sin^2\phi}{(1+\sin\phi+\cos\phi)^2} - \frac{a^2\sin^2\phi\ (1-\sin\phi)^2}{(1+\sin\phi+\cos\phi)^2\ (1+\sin^2\phi)}$$

или:

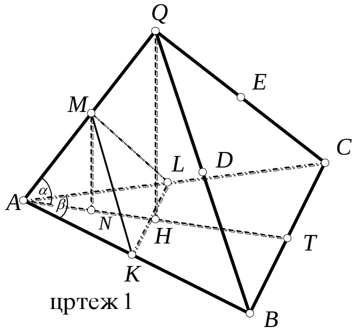
$$\rho = \frac{a\sin\phi}{1+\sin\phi+\cos\phi}\cdot\sqrt{\frac{2\sin\phi}{1+\sin^2\phi}}.$$

10. Нека $ABCQ$ е правилна тристрана пирамида со врв Q. Сфера S минува низ A, ги допира рабовите BQ и CQ во нивните средини, и ги сече AB, AC и AQ во внатрешните точки K, L и M, соодветно. Волуменот на пирамидата $AKLM$ е $\frac{1}{3}$ од волуменот на пирамидата $ABCQ$.

а) Пресметај го аголот меѓу работ и рамнината на основата на пирамидата $ABCQ$.

б) Ако $\overline{AB} = 3$, пресметај го радиусот R на сферата S.

Решение. а) Нека D, E и T се средините на QB, QC и BC, соодветно, и нека $\overline{AB}=a$, $\overline{AQ}=b$. Со H да ја означиме ортогоналната проекција на врвот Q на рамнината на основата, а со N проекцијата на точката M на основата. (цртеж 1). Сферата ја сече рамнината ABQ во кружница низ A,K,D и M (цртеж 2). Од степенот на Q во однос на таа кружница имаме $\overline{QD}^2=\overline{QM}\cdot\overline{QA}$, т.е. $\frac{b^2}{4}=\overline{QM}\cdot b$ па $\overline{QM}=\frac{b}{4}$.



цртеж 1

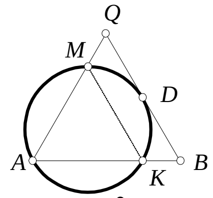
Според тоа, $\overline{AM}=\frac{3}{4}b$. Аналогно од степенот на B во однос на кружницата име $\overline{BD}^2=\overline{BA}\cdot\overline{BK}$, т.е. $\frac{b^2}{4}=\overline{BK}\cdot a$, па $\overline{BK}=\frac{b^2}{4a}$. Имаме

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AQ}}=\frac{3}{4} \text{ и } \frac{\overline{AK}}{\overline{AB}}=\frac{a-\overline{KB}}{a}=1-\frac{b^2}{4a^2}.$$

На сличен начин добиваме $\frac{\overline{AL}}{\overline{AC}}=1-\frac{b^2}{4a^2}$. За волумените на двете пирамиди имаме

$$V_{ABCQ}=\frac{1}{3}P_{\triangle ABC}\cdot\overline{QH}=\frac{1}{3}\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\beta}{2}\overline{AQ}\sin\alpha \text{ и}$$

$$V_{AKLM}=\frac{1}{3}P_{\triangle AKL}\cdot\overline{MN}=\frac{1}{3}\frac{\overline{AK}\cdot\overline{AL}\sin\beta}{2}\overline{AM}\sin\alpha$$



цртеж 2

па затоа

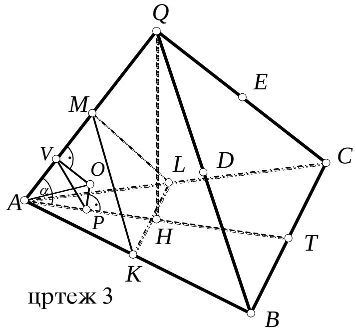
$$\frac{V_{AKLM}}{V_{ABCQ}}=\frac{\overline{AK}\cdot\overline{AL}\cdot\overline{AM}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AQ}}=\frac{3}{4}\left(1-\frac{b^2}{4a^2}\right)^2.$$

Од условот на задачата имаме $\frac{V_{AKLM}}{V_{ABCD}}=\frac{1}{3}$ па добиваме $\frac{3}{4}\left(1-\frac{b^2}{4a^2}\right)^2=\frac{1}{3}$ и оттука $\left(1-\frac{b^2}{4a^2}\right)^2=\frac{4}{9}$. Значи $\left|1-\frac{b^2}{4a^2}\right|=\frac{2}{3}$. Но заради $\frac{\overline{AL}}{\overline{AC}}=1-\frac{b^2}{4a^2}$ имаме $1-\frac{b^2}{4a^2}>0$, па $1-\frac{b^2}{4a^2}=\frac{2}{3}$ од каде добиваме $b=\frac{2a}{\sqrt{3}}$. Точката T е средина на BC, па AT е тежишна линија во рамностраниот триаголник ABC па $\overline{AT}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Пирамидата е правилна па H е и тежиште на $\triangle ABC$. Според тоа $\overline{AH}=\frac{2}{3}\overline{AT}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Аголот α е бараниот агол и тој е аголот меѓу AQ и AT. Сега

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AH}}{\overline{AQ}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2a}=\frac{1}{2}.$$

Значи $\alpha=60^\circ$.

б) Бидејќи $a=3$ добиваме дека $b=\frac{2a}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$ и $\overline{AK}=a\left(1-\frac{b^2}{4a^2}\right)=2$. Претходно добивме дека и $\overline{AL}=a\left(1-\frac{b^2}{4a^2}\right)=2$. Триаголникот ABC е рамностран и $\triangle AKL \sim \triangle ABC$. Значи и $\triangle AKL$ е рамностран. Нека P е ортогоналната проекција на центарот O на сферата врз рамнината ABC, а V е ортогоналната проекција на O врз правата AM (цртеж 3). Отсечката AM е тетива на кружницата низ A, L и M (кружницата е пресек на сферата со рамнината ALM) па V е средина на AM. Натаму $\triangle AOP \cong \triangle KOP$ (двата се правоаголни, имаат заедничка катета OP и $\overline{OA} = \overline{OK}$), па затоа $\overline{AP} = \overline{PK}$. Слично добиваме $\overline{PK} = \overline{PL}$. Значи P е центарот на опишаната кружница околу рамностраниот $\triangle AKL$. Натаму



цртеж 3

$$\overline{AV} = \tfrac{1}{2}\overline{AM} = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}b = \tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{2a}{\sqrt{3}} = \tfrac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Бидејќи AP е радиус на опишаната кружница околу рамностраниот триаголник AKL со страна 2 имаме $\overline{AP} = \frac{2}{3}\sqrt{2^2 - 1^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Сега ќе ја пресметаме $\overline{VP}$. Да ја примениме косинусната теорема за триаголникот AVP. Имаме

$$\overline{VP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AV}^2 - 2\overline{AP}\cdot\overline{AV}\cos 60^\circ = (\tfrac{2}{\sqrt{3}})^2 + (\tfrac{3\sqrt{3}}{4})^2 - 2\tfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\tfrac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{73}{48},$$

па затоа $\overline{VP} = \frac{\sqrt{73}}{4\sqrt{3}}$.

Аглите AVO и APO се прави па четириаголникот $APOV$ е тетивен и AO е дијаметар на кружницата опишана околу четриаголникот $APOV$. Нека r е радиусот на таа кружница. Тогаш $\overline{AO} = R = 2r$. Ако ја примениме синусната теорема за триаголникот AVP добиваме $\frac{\overline{VP}}{\sin 60^\circ} = 2r$, па затоа

$$R = \overline{OA} = 2r = \frac{1}{\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sqrt{73}}{4\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{73}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{73}}{6}.$$

VII НЕРАВЕНСТВА

1. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ И ЛОГАРИТАМСКИ НЕРАВЕНСТВА

1. Докажи дека за $p \geq 0$ важи неравенството

$$(2003^{p})^{1-2003^{p}} + (2003^{2p})^{1-2003^{2p}} + \ldots + (2003^{2003p})^{1-2003^{2003p}} \leq 2003 .$$

Решение. Бидејќи $p \geq 0$, за $k > 0$ важи $kp \geq 0$, па затоа $2003^{kp} \geq 1$, односно $1-2003^{kp} \leq 0$, од каде $(2003^{kp})^{1-2003^{kp}} \leq 1$. Со собирање на последните неравенства за $k = 1, 2, \ldots, 2003$, се добива

$$(2003^{p})^{1-2003^{p}} + (2003^{2p})^{1-2003^{2p}} + \ldots + (2003^{2003p})^{1-2003^{2003p}} \leq 2003 ,$$

што требаше и да се докаже. Равенство важи акко $p = 0$.

2. Знаејќи дека $\pi^2 < 10$, докажи дека

$$2 < \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} .$$

Решение. *Прв начин.* Ако го логаритмираме неравенството $\pi^2 < 10$, за основа $\pi > 1$, добиваме:

$$2 < \log_\pi 10 = \log_\pi (2 \cdot 5) = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} .$$

Втор начин. Имаме

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \log_\pi 2 + \log_\pi 5 = \log_\pi (2 \cdot 5) = \log_\pi 10 > \log_\pi \pi^2 = 2$$

3. Докажи дека $\log_{17} 71 > \sqrt[7]{17}$.

Решение. Нека $\log_{17} 71 = x$, т.е. $17^x = 71$. Од $17^3 = 4913 < 5041 = 71^2$ следува дека $17^3 < 71^2$, $17^{3/2} < 71$, т.е. $x > 1{,}5 = \frac{3}{2}$, односно

$$\log_{17} 71 > 1{,}5 . \tag{1}$$

Од друга страна: $3^7 = 2187 > 2176 = 17 \cdot 2^7$, т.е. $3^7 > 17 \cdot 2^7$, па затоа $(\frac{3}{2})^7 > 17$, односно

$$\sqrt[7]{17} < \frac{3}{2} . \tag{2}$$

Конечно, од (1) и (2) следува дека $\log_{17} 71 > 1{,}5 > \sqrt[7]{17}$, т.е. $\log_{17} 71 > \sqrt[7]{17}$.

4. Докажи дека за секој позитивен реален број x важи

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$$

Решение. Ако $a, b > 0$, тогаш $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, па затоа

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot \sqrt{2^{\sqrt[12]{x}} 2^{\sqrt[6]{x}}} = 2 \cdot 2^{\frac{\sqrt[12]{x} + \sqrt[6]{x}}{2}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$$

5. Нека $0<x<1$ и $a,b>0$. Докажи дека

$$a^x b^{1-x} < a+b. \tag{1}$$

Решение. Нека препоставиме дека $b \le a$. Ако го поделиме неравенството (1) со a, добиваме $(\frac{b}{a})^{1-x} < 1+\frac{b}{a}$, односно

$$(\tfrac{b}{a})^{1-x}(1-(\tfrac{b}{a})^x) < 1. \tag{2}$$

Бидејќи $0<\frac{b}{a}\le 1$ и $0 \le 1-(\frac{b}{a})^x < 1$, неравенството (2) е точно, а со тоа и еквивалентното неравенство (1) во случај кога $b \le a$. Нека сега $a<b$. Го делиме неравенството (1) со b и добиваме $(\frac{a}{b})^x < 1+\frac{a}{b}$. Нека $y=1-x$. Тогаш $0<y<1$ и последното неравенство го добива видот $(\frac{a}{b})^{1-y} < 1+\frac{a}{b}$, каде $a<b$, за кое веќе докажавме дека е точно.

6. Определи ја најмалата вредност на изразот $2^{x^2}-1+\frac{1}{2^{x^2}+2}$, каде $x \in \mathbb{R}$.

Решение. Изразот ќе го запишеме во облик

$$2^{x^2}-1+\frac{1}{2^{x^2}+2} = 2^{x^2}+2+\frac{1}{2^{x^2}+2}-3.$$

Ќе воведеме смена $2^{x^2}+2=t$. Сега изразот го добива обликот $t+\frac{1}{t}-3$. Да забележиме дека од $x^2 \ge 0$ имаме $2^{x^2} \ge 1$, па според тоа $t=2^{x^2}+2 \ge 3$. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, за $t>0$ имаме

$$t+\tfrac{1}{t} \ge 2\sqrt{t\cdot\tfrac{1}{t}} = 2.$$

Равенство се достигнува за $t=\frac{1}{t}$, т.е. $t=1$.

Нека $t_1,t_2 \ge 3$ и $t_1<t_2$. Тогаш

$$(t_2+\tfrac{1}{t_2})-(t_1+\tfrac{1}{t_1}) = (t_2-t_1)+(\tfrac{1}{t_2}-\tfrac{1}{t_1}) = (t_2-t_1)(1-\tfrac{1}{t_1t_2}) > 0.$$

Значи, $t_2+\frac{1}{t_2} > t_1+\frac{1}{t_1}$, од каде што добиваме $\frac{1}{3}=3+\frac{1}{3}-3 < t+\frac{1}{t}-3$, за $t>3$. Според тоа, $2^{x^2}-1+\frac{1}{2^{x^2}+2} \ge \frac{1}{3}$, и равенство се достигнува за $x=0$.

7. Докажи, дека ако $x<0$, тогаш $2^x+2^{\frac{1}{x}} \le 1$.

Решение. Ќе го користиме неравенството на Бернули: ако $-1<t\ne 0$, тогаш $(1+t)^r > 1+rt$, кога $r>1$ и $(1+t)^r < 1+rt$ кога $0<r<1$.

Ставаме $y=-x$. Можеме да сметаме дека $y>1$. За $y \ge 2$ неравенството ќе го запишеме во видот

$$(1-2^x)^y \ge \tfrac{1}{2}. \tag{1}$$

Од неравенството на Бернули следува дека $(1-2^x)^y > 1-y2^x$ и $2^{y-1} \ge y$, т.е.

$1-y2^x \geq \frac{1}{2}$, со што е докажано неравенството (1). Ако $1<y<2$, тогаш неравенството го запишуваме во видот

$$z=\frac{(1+(2^{1-\frac{1}{y}}-1))^y-1}{2^{1-\frac{1}{y}}-1} \geq 2^{y-1}$$

и останува согласно неравенството на Бернули да забележиме дека $z>y>2^{y-1}$.

8. Без користење на калкулатор, докажи дека важи неравенството

$$\log_2 \pi+\log_4 \pi<\frac{5}{2}.$$

Решение. Бидејќи

$$\log_2 \pi+\log_4 \pi=\log_2 \pi+\frac{1}{\log_\pi 4}=\log_2 \pi+\frac{1}{2\log_\pi 2}=\log_2 \pi+\frac{\log_2 \pi}{2}=\frac{3\log_2 \pi}{2},$$

доволно е да докажеме дека $3\log_2 \pi<5$, т.е. $\pi^3<2^5$.

Точноста на последното неравенство лесно се докажува со користење на тривијалното неравенство $\pi<3{,}15$. Имено, $\pi^3<3{,}15^2\cdot 3{,}15<10\cdot 3{,}2=2^5$. Со тоа задачата е решена.

9. За кои цели броеви важи неравенството

$$\lg(2^x+71x-1988)<x-x\lg 5\,?$$

Решение. Десната страна на неравенството ја трансформираме во видот

$$x-x\lg 5=\lg 10^x-\lg 5^x=\lg\frac{10^x}{5^x}=\lg 2^x,$$

па неравенството $\lg(2^x+71x-1988)<\lg 2^x$ е еквивалентно со неравенството

$$0<2^x+71x-1988<2^x,$$

од што следува дека $71x-1988<0$, т.е. $x<28$. Бидејќи $2^{10}=1024$, за $x\leq 10$ добиваме

$$2^x+71x-1988<2^{10}+71\cdot 10-1988=-254<0,$$

а за $x\geq 11$ добиваме

$$2^x+71x-1988\geq 2^{11}+71\cdot 11-1988=841>0.$$

Според тоа, бараните цели броеви се $11,12,13,14,15,....,25,26,27$.

10. Докажи дека за секој $a>0$ важи неравенството

$$\log_3^2 a+2\log_3 a\cdot\log_3\frac{3}{a}\leq 1.$$

Решение. Даденото неравенство е точно за $a>0$, бидејќи последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\log_3^2 a+2\log_3 a(1-\log_3 a)\leq 1,$$

$$2\log_3 a-\log_3^2 a\leq 1,$$

$$\log_3^2 a-2\log_3 a+1\geq 0,$$

$$(\log_3 a-1)^2\geq 0,$$

при што последното неравенство очигледно е точно.

11. Ако $a>1$, $b>1$, $c>1$ докажи дека важи неравенството

$$\log_{abc}^3 a\cdot\log_a b\cdot\log_a c\leq\frac{1}{27}.$$

Решение. Имаме $\log_a a=1$, $\log_a b>0$, $\log_a c>0$. Оттука

$$\frac{\log_a a+\log_a b+\log_a c}{3}\geq\sqrt[3]{\log_a a\cdot\log_a b\cdot\log_a c}$$

од каде што $\log_a^3 abc\geq 27\log_a b\cdot\log_a c$ т.е. $\log_{abc}^3 a\cdot\log_a b\cdot\log_a c\leq\frac{1}{27}$.

12. Докажи дека ако $b>a>1$ и $t>0$, тогаш $\log_a b>\log_{a+t}(b+t)$.

Решение. Лесно се проверува дека важи неравенството $\frac{b}{a}>\frac{b+t}{a+t}$. Сега, од својствата на логаритамската функција, следува

$$\log_a\frac{b}{a}>\log_a\frac{b+t}{a+t}>\log_{a+t}\frac{b+t}{a+t},\ \text{т.е.}\ \log_a b-1>\log_{a+t}(b+t)-1.$$

13. Нека a е позитивен реален број и x_1,x_2,x_3 се реачни броеви такви што $x_1+x_2+x_3=0$. Докажи, дека

$$\log_2(1+a^{x_1})+\log_2(1+a^{x_2})+\log_2(1+a^{x_3})\geq 3.$$

Решение. Од својствата на логаритмите, нераveството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот $x_1+x_2+x_3=0$ последователно добиваме

$$\begin{aligned}\log_2(1+a^{x_1})+\log_2(1+a^{x_2})+\log_2(1+a^{x_3})&=\log_2(1+a^{x_1})(1+a^{x_2})(1+a^{x_3})\\&\geq\log_2 2\sqrt{a^{x_1}}\cdot 2\sqrt{a^{x_2}}\cdot\sqrt{a^{x_3}}\\&=\log_2 2^3\sqrt{a^{x_1+x_2+x_3}}\\&=3\log_2 2=3.\end{aligned}$$

14. Нека a,b,c се речлни броеви поголеми од 1. Докажи, дека

$$\log_a(\frac{b^2}{ac}-b+ac)\log_b(\frac{c^2}{ab}-c+ab)\log_c(\frac{a^2}{bc}-a+bc)\geq 1.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{a^2}{bc}+bc\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{bc}bc}=2a.$$

Бидејќи $c>1$ и $\frac{a^2}{bc}-a+bc\geq a$, добиваме дека $\log_c(\frac{a^2}{bc}-a+bc)\geq\log_c a$. Аналогно, од $a>1$ и $b>1$ следува

$$\log_a(\frac{b^2}{ac}-b+ac)\geq\log_a,\quad \log_b(\frac{c^2}{ab}-c+ab)\geq\log_b c.$$

Множејќи ги овие неравенства добиваме

$$\begin{aligned}\log_a(\frac{b^2}{ac}-b+ac)\cdot\log_b(\frac{c^2}{ab}-c+ab)\cdot\log_c(\frac{a^2}{bc}-a+bc)&\geq\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a\\&=\frac{\lg b\cdot\lg c\cdot\lg a}{\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c}=1.\end{aligned}$$

15. Дадени се реални броеви a,b,c кои се поголеми од 1. Докажи дека

$$\log_a bc+\log_b ca+\log_c ab\ge 4(\log_{ab} c+\log_{bc} a+\log_{ca} b)\,.$$

Решение. За било кои реални броеви $m,n>1$ е исполнето равенството

$$\log_n m=\frac{\log m}{\log n}\,. \qquad (1)$$

Воведуваме ознаки $x=\log a, y=\log b, z=\log c$. Бидејќи $a,b,c>1$ имаме $x,y,z>0$. Почетното неравенство, заради (1) може да се запише во еквивалентен облик

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge\frac{4x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{4z}{x+y}\,. \qquad (2)$$

Доволно е да докажеме дека

$$\frac{z}{x}+\frac{z}{y}\ge\frac{4z}{x+y}\,. \qquad (3)$$

Бидејќи $x,y,x+y>0$, ако последното неравенство го помножиме со $xy(x+y)$ добиваме

$$zy(x+y)+zx(x+y)\ge 4zxy$$
$$z(x+y)(x+y)\ge 4zxy$$
$$z(x-y)^2\ge 0\,.$$

Последната низа од неравенства е еквивалентна, па според тоа неравенството (3) е точно. Од неравенството (3) непосредно следува неравенството (2), кое е пак еквивалентно со почетното неравенство.

16. Нека a,b,c се реални броеви поголеми од 1. Докажи, дека за секој реален број r важи

$$(\log_a bc)^r+(\log_b ca)^r+(\log_c ab)^r\ge 3\cdot 2^r\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометрската средина последователно следува

$$\begin{aligned}(\log_a bc)^r+(\log_b ca)^r+(\log_c ab)^r &\ge 3\sqrt[3]{(\log_a bc)^r(\log_b ca)^r(\log_c ab)^r}\\ &=3[(\log_a b+\log_a c)(\log_b c+\log_b a)(\log_c a+\log_c b)]^{\frac{r}{3}}\\ &\ge 3\cdot(2\sqrt{\log_a b\cdot\log_a c}\cdot 2\sqrt{\log_b c\cdot\log_b a}\cdot 2\sqrt{\log_c a\cdot\log_c b})^{\frac{r}{3}}\\ &=3\cdot 2^r(\log_a b\cdot\log_b a\cdot\log_a c\cdot\log_c a\cdot\log_b c\cdot\log_c b)^{\frac{r}{6}}\\ &=3\cdot 2^r.\end{aligned}$$

17. Докажи дека $\lg^3 9>\lg 7$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\lg^3 9=\lg^3(10\cdot 0{,}9)&=\left(\lg 10+\lg 0{,}9\right)^3=\left(1+\lg 0{,}9\right)^3\\ &=1+3\lg 0{,}9+3\lg^2 0{,}9+\lg^3 0{,}9\end{aligned}$$

Бидејќи $0{,}1<0{,}9<1$ имаме дека $-1<\lg 0{,}9<0$ од каде следува дека $\lg^2 0{,}9+\lg^3 0{,}9>0$ и уште повеќе $3\lg^2 0{,}9+\lg^3 0{,}9>0$.

Сега имаме

$$\begin{aligned}\lg^3 9 &= 1+3\lg 0.9+3\lg^2 0.9+\lg^3 0.9\\ &> 1+3\lg 0.9 = 1+\lg 0.729\\ &= \lg 10+\lg 0.729\\ &= \lg 7.29 > \lg 7.\end{aligned}$$

18. Докажи го неравенството

$$\log_6 7+\log_7 8+\log_8 9<3,3 .$$

Решение. Да ставиме $\log_6 7=x$, $\log_7 8=y$, $\log_8 9=z$; за да го докажеме неравенството доволно е да докажеме дека $x\le 1,1;\ y\le 1,1;\ z\le 1,1$. Бидејќи

$$6^{11}=362\cdot 797\cdot 056>282\cdot 475\cdot 249=7^{10},$$
$$7^{11}=1\cdot 997\cdot 326\cdot 743>1\cdot 073\cdot 741\cdot 824=8^{10},$$
$$8^{11}=8\cdot 589\cdot 934\cdot 592>3\cdot 486\cdot 784\cdot 401=9^{10},$$

следува дека $x,y,z<1,1$, т.е. $x+y+z<3,3$.

19. Докажи дека

$$\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8>4,4 .$$

Решение. Преминувајќи на заедничка основа, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина последователно добиваме

$$\begin{aligned}\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8 &= \tfrac{\log 5}{\log 4}+\tfrac{\log 6}{\log 5}+\tfrac{\log 7}{\log 6}+\tfrac{\log 8}{\log 7}\\ &> 4\sqrt[4]{\tfrac{\log 5}{\log 4}\cdot\tfrac{\log 6}{\log 5}\cdot\tfrac{\log 7}{\log 6}\cdot\tfrac{\log 8}{\log 7}}\\ &= 4\sqrt[4]{\log_4 8}=4\sqrt[4]{\log_4 4^{3/2}}\\ &= 4(\tfrac{3}{2})^{1/4}>4\cdot 1,1=4,4\end{aligned}$$

бидејќи $(\frac{3}{2})^{1/4}>1,1$.

20. Докажи go неравенcтвoto

$$\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8+\log_8 4>5 .$$

Решение. *Прв начин.* Најпрво ќе докажеме дека $\log_7 8\ne\log_8 4$. Навистина, ако $\log_7 8=\log_8 4$, тогаш $\frac{\log_4 8}{\log_4 7}=\frac{\log_4 4}{\log_4 8}$, односно $(\log_4(2\cdot 4))^2=\log_4 7$. Оттука $(\log_4 2^{\frac{1}{2}}+\log_4 4)^2=\log_4 7$, односно $(\frac{3}{2})^2=\log_4 7$. Од последното равенство добиваме $4^{\frac{9}{4}}=4^{\log_4 7}$ т.е. $4^2\cdot\sqrt[4]{4}=7$ што не е можно бидејќи $\sqrt[4]{4}>1$ и $4^2>7$.

Аналогно се докажува дека сите броеви $\log_4 5,\log_5 6,\log_6 7,\log_7 8,\log_8 4$ не се еднакви меѓу себе, па ако за нив го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8+\log_8 4}{5}>\sqrt[5]{\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8\cdot\log_8 4} .$$

Според тоа

$$\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8+\log_8 4 > 5\cdot\sqrt[5]{\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8\cdot\log_8 4}$$
$$=5\cdot\sqrt[5]{\frac{\lg 5}{\lg 4}\cdot\frac{\lg 6}{\lg 5}\cdot\frac{\lg 7}{\lg 6}\cdot\frac{\lg 8}{\lg 7}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 8}}=5,$$

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Од $5^7=78125>65536=>4^8$ следува $5>4^{\frac{8}{7}}$, односно $\log_4 5>\frac{8}{7}$. Аналогно докажуваме дека $\log_5 6>\frac{10}{9}$, $\log_6 7>\frac{13}{12}$ и $\log_7 8>\frac{16}{15}$, додека $\log_8 4=\frac{2}{3}$. Според тоа

$$\log_4 5+\log_5 6+\log_6 7+\log_7 8+\log_8 4>\frac{8}{7}+\frac{10}{9}+\frac{13}{12}+\frac{16}{15}+\frac{2}{3}=\frac{6389}{1260}>5.$$

21. Дадени се броевите $a,b,c\in(0,1)$. Докажи дека

$$\log_a^4 b+\log_b^4 c+\log_c^4 a\ge\log_a b+\log_b c+\log_c a.$$

Решение. За било кои реални броеви x,y и z е исполнето неравенството

$$x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx. \qquad (1)$$

Ако ставиме $x=\log_a^2 b$, $y=\log_b^2 c$ и $z=\log_c^2 a$, добиваме

$$\begin{aligned}\log_a^4 b+\log_b^4 c+\log_c^4 a &\ge \log_a^2 b\log_b^2 c+\log_b^2 c\log_c^2 a+\log_c^2 a\log_a^2 b\\ &=(\log_a b\cdot\log_b c)^2+(\log_b c\cdot\log_c a)^2+(\log_c a\cdot\log_a b)^2\\ &=\log_a^2 c+\log_b^2 a+\log_c^2 b\\ &\overset{(1)}{\ge}\log_a c\cdot\log_b a+\log_b a\cdot\log_c b+\log_c b\cdot\log_a c\\ &=\log_b c+\log_c a+\log_a b\end{aligned}$$

22. Докажи дека за секој $n\ge 2$ важи

$$\log_n 2\cdot\log_n 4\cdot\ldots\cdot\log_n(2n-2)\le 1.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и од својствата на логаритмите следува

$$\begin{aligned}\sqrt{\log_n k\cdot\log_n(2n-k)} &\le\tfrac{1}{2}[\log_n k+\log_n(2n-k)]\\ &=\tfrac{1}{2}\log_n k(2n-k)\\ &\le\tfrac{1}{2}\log_n[\tfrac{k+2n-k}{2}]^2=\tfrac{1}{2}\log_n n^2=1,\end{aligned}$$

за $k=1,2,...,n$. Според тоа, производите на паровите кои се еднакво оддалечени од краевите на изразот

$$A=\log_n 2\cdot\log_n 4\cdot\ldots\cdot\log_n(2n-2)$$

не надминуваат единица, па значи $A\le 1$, за $n=2k+1$. Но, $A\le 1$ и за $n=2k$, бидејќи

$$\log_n(2n-n)=\log_n n=1.$$

23. Нека $a,b,c>1$ се реални броеви. Докажи, дека

$$\log_a(\tfrac{b^2}{ac}-b+ac)\cdot\log_b(\tfrac{c^2}{ab}-c+ab)\cdot\log_c(\tfrac{a^2}{bc}-a+bc)\ge 1.$$

Решение. Со примена на неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{a^2}{bc}+bc \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{bc}\cdot bc}=2a.$$

Значи, $\frac{a^2}{bc}-a+bc \geq a>1$ и како $c>1$, добиваме дека

$$\log_c(\frac{a^2}{bc}-a+bc) \geq \log_c a>0\,.$$

Аналогно, се докажува дека

$$\log_a(\frac{b^2}{ac}-b+ac) \geq \log_a b>0 \text{ и } \log_b \log_c(\frac{c^2}{ab}-c+ab) \geq \log_b c>0.$$

Конечно,

$$\log_a(\frac{b^2}{ac}-b+ac)\cdot\log_b(\frac{c^2}{ab}-c+ab)\cdot\log_c(\frac{a^2}{bc}-a+bc) \geq \log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a$$

$$=\frac{\lg b\cdot\lg c\cdot\lg a}{\lg a\cdot\lg b\cdot\lg c}=1.$$

24. Нека $a,b\in(0,1)$. Докажи дека

$$\log_a\frac{2ab}{a+b}\log_b\frac{2ab}{a+b} \geq 1\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $(\frac{2ab}{a+b})^2 \leq ab$. За $a,b\in(0,1)$ важи $ab<1$, па затоа $\frac{2ab}{a+b}<1$. Од својствата на логаритамска функција со основа помала од 1 следува

$$\log_{\frac{2ab}{a+b}} ab \leq \log_{\frac{2ab}{a+b}}(\frac{2ab}{a+b})^2=2\,.$$

Понатаму, повторно од неравеството межу аритметичката и геометриската средина следува

$$1 \geq (\tfrac{1}{2}\log_{\frac{2ab}{a+b}} ab)^2=(\tfrac{1}{2}\log_{\frac{2ab}{a+b}} a+\tfrac{1}{2}\log_{\frac{2ab}{a+b}} b)^2 \geq \log_{\frac{2ab}{a+b}} a\log_{\frac{2ab}{a+b}} b\,,$$

па затоа $\log_a\frac{2ab}{a+b}\log_b\frac{2ab}{a+b} \geq 1$.

25. Ако $a,b,c>1$ или $0<a,b,c<1$, тогаш

$$\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a} \geq \frac{9}{a+b+c}\,.$$

Докажи!

Решение. Бидејќи $a,b,c>1$ или $0<a,b,c<1$ важи $\log_b a,\log_c b,\log_a c>0$, па сите собироци во неравенството се позитивни. Ако два пати го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a}=2(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}) \geq 2\cdot 3\sqrt[3]{\frac{\log_b a}{a+b}\cdot\frac{\log_c b}{b+c}\cdot\frac{\log_a c}{c+a}}$$

$$=6\frac{\sqrt[3]{\frac{\lg a}{\lg b}\cdot\frac{\lg b}{\lg c}\cdot\frac{\lg c}{\lg a}}}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}=\frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

$$\geq 6\frac{3}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}=\frac{9}{a+b+c}.$$

26. Докажи го неравенството

$$\frac{\log(k+1)!}{k+1} > \frac{\log k!}{k},\ k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

Решение. Неравенството (1) е еквивалентно со низата неравенства

$$\frac{\log(k+1)!}{k+1} > \frac{\log k!}{k} \quad \Leftrightarrow \quad k\log(k+1)! > (k+1)\log k! \quad \Leftrightarrow \quad \log[(k+1)!]^k > \log(k!)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow \quad [(k+1)!]^k > (k!)^{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad (k+1)^k (k!)^k > (k!)^k k! \quad \Leftrightarrow$$

$$(k+1)^k > k!. \tag{2}$$

Последното неравенство ќе го докажеме со помош на математичка индукција.

i) За $k=1$ имаме $(1+1)^1 > 1 = 1!$, т.е. неравенството (2) важи.

ii) Нека претпоставиме дека неравенството (2) важи за $k=m$, т.е. дека

$$(m+1)^m > m!.$$

Ако последното неравенство го помножиме со $m+1$ и земеме предвид дека $(m+2)^{m+1} > (m+1)^{m+1}$ добиваме

$$(m+2)^{m+1} > (m+1)^{m+1} > (m+1)\cdot m! = (m+1)!,$$

т.е. неравенството (2) важи и за $k=m+1$. Од принципот на математичка индукција следува дека неравенството (2) важи за секој природен број k, што значи дека неравенството (1) важи за секој природен број n.

27. Нека n е природен број и k е бројот на различните прости делители на n. Тогаш важи $\lg n \ge k \cdot \lg 2$. Докажи!

Решение. Нека различните прости делители на n се $p_1, p_2, ..., p_k$. Тогаш $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, каде $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, ..., k$. Притоа $p_i \ge 2$, $i = 1, 2, ..., k$. Оттука

$$\lg n = \lg(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}) = \alpha_1 \lg p_1 + \alpha_2 \lg p_2 + ... + \alpha_k \lg p_k$$

$$\ge 1 \cdot \lg p_1 + 1 \cdot \lg p_2 + ... + 1 \cdot \lg p_k \ge \lg 2 + \lg 2 + ... + \lg 2 = k \lg 2$$

28. Докажи го неравенството

$$\log \tfrac{n+1}{2} \ge \tfrac{\log n!}{n},\ n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме дека за секој $k = 1, 2, ..., n$ важи

$$k(n-k+1) \le [\tfrac{k+(n-k+1)}{2}]^2 = (\tfrac{n+1}{2})^2.$$

Ако во последното неравенство последователно ставиме $k = 1, 2, ..., n$ добиваме

$$1 \cdot n \le (\tfrac{n+1}{2})^2$$

$$2 \cdot (n-1) \le (\tfrac{n+1}{2})^2$$

....

$$(n-1) \cdot 2 \le (\tfrac{n+1}{2})^2$$

$$n \cdot 1 \le (\tfrac{n+1}{2})^2$$

и ако ги помножиме горните неравенства добиваме

$$(n!)^2 \leq (\tfrac{n+1}{2})^{2n} \text{, т.е. } (n!)^{\frac{1}{n}} \leq \tfrac{n+1}{2}.$$

Конечно, ако го логаритмираме последното неравенство го добиваме неравенството (1).

29. Нека a и b се реални броеви поголеми од 1. Определи ја најголемата вредност на реалниот број c за кој е точно неравенството

$$\frac{1}{3+\log_a b}+\frac{1}{3+\log_b a}\geq c.$$

Решение. Нека $A=\frac{1}{3+\log_a b}+\frac{1}{3+\log_b a}$ и $x=\log_a b$. Тогаш $\log_b a=\frac{1}{x}$, па затоа $x>0$ и

$$A=\frac{1}{3+x}+\frac{x}{1+3x}=\frac{x^2+6x+1}{(x+3)(3x+1)}=\frac{8x+\frac{1}{3}(x+3)(3x+1)}{(x+3)(3x+1)}=\frac{8x}{(x+3)(3x+1)}+\frac{1}{3}>\frac{1}{3}. \quad (1)$$

Нека $\varepsilon>0$ е произволно мал број. Тогаш за $x>\frac{4-5\varepsilon+2\sqrt{(2-4\varepsilon)(2-\varepsilon)}}{3\varepsilon}$ важи $\frac{8x}{(x+3)(3x+1)}<\varepsilon$. Според тоа, за доволно голем x изразот $\frac{8x}{(x+3)(3x+1)}$ може да се направи произволно мал број, па затоа најголемата можна вредност на c е $\frac{1}{3}$.

2. НЕРАВЕНСТВА НА ШУР И МЈУРХЕД

1. Нека a,b се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи дека

$$(a-1+\tfrac{1}{b})(b-1+\tfrac{1}{c})(c-1+\tfrac{1}{a})\leq 1.$$

Решение. Заради условот $abc=1$ даденото неравенство може да се трансформира така, што ќе се искористат смените $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$, каде $x,y,z>0$ и притоа ќе се добие неравенството

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\leq xyz.$$

Добиеното неравенство е парцијален случај на неравенството на Шур при $\lambda=1$, кое за секои $x,y,z>0$ и секој реален број λ гласи

$$(x-y)(x-z)x^\lambda+(y-z)(y-x)y^\lambda++(z-x)(z-y)z^\lambda\geq 0.$$

2. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$a^3b^6+b^3c^6+c^3a^6+3a^3b^3c^3\geq abc(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+a^2b^2c^2(a^3+b^3+c^3).$$

Решение. Со смената $x=ab^2$, $y=bc^2$ и $z=ca^2$ бараното неравенство се сведува на неравенството на Шур

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geq xy^2+yz^2+zx^2+x^2y+y^2z+z^2x.$$

3. Реалните броеви $a,b,c>1$ го задоволуваат условот $a+b+c=9$. Докажи дека важи

$$\sqrt{ab+ac+bc} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \le \sqrt{a^2+b^2+c^2}\ .$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина имаме

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{3} \le \sqrt{\frac{a+b+c}{3}} = \sqrt{3} \text{ и } 3 = \frac{a+b+c}{3} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ .$$

Според тоа

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \ge 3\sqrt{3} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ ,$$

и со тоа десното неравенство е докажано. За левото неравенство имаме

$$\sqrt{ab+bc+ca} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \le \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}\ .$$

Нека $a=\frac{1}{m^2}$, $b=\frac{1}{n^2}$ и $c=\frac{1}{p^2}$, каде m, n и p се позитивни реални броеви. Бидејќи $a,b,c>1$ и

$$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}} \ge \frac{4}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \ge \frac{4}{\sqrt{2(a+b)}} = \frac{4}{\sqrt{2(9-c)}} = \sqrt{\frac{8}{9-c}} > \frac{1}{\sqrt{c}}\ ,$$

следува дека $m+n>p$. Заради симетрија заклучуваме дека m,n,p се страни на триаголник. Значи постојат позитивни реални броеви x,y,z такви што $2m=y+z$, $2n=x+z$, $2p=x+y$ и

$$\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(y+z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{4}(a+b+c) = \frac{9}{4}\ . \qquad (1)$$

Ќе докажеме дека $xy+xz+yz \ge 1$. За секои позитивни реални броеви x,y,z важи

$$(xy+xz+yz)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x+z)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}\right) \ge \frac{9}{4}\ . \qquad (2)$$

За да го докажеме (2) ќе ставиме

$$A = xy+xz+yz\ ,\ C = 9(x+y)^2(x+z)^2(y+z)^2$$

$$B = 4(y+z)^2(z+x)^2+4(x+y)^2(x+z)^2+4(x+y)^2(y+z)^2$$

и да го развиеме изразот $AB-C$. Добиваме

$$AB-C = 3\sum_{\text{cik}} xy(x^2-y^2)^2 + \sum_{\text{cik}} xy(x^2+xy+y^2)(x-y)^2 + 2xyz\sum_{\text{cik}} x(x-y)(x-z)$$

Првите два собироци во последниот израз се ненегативни, а од неравенството на Шур добиваме дека и третиот собирок е ненегативен. Од (1) и (2) го добиваме неравенството $xy+xz+yz \ge 1$. Во тоа неравенство да ставиме $x=n+p-m$, $y=m+p-n$ и $z=m+n-p$. Тогаш добиваме

$$2(mn+mp+np) \ge 1+m^2+n^2+p^2 \ge 2\sqrt{m^2+n^2+p^2}\ .$$

Конечно, имаме

$$mn+mp+np \ge \sqrt{m^2+n^2+p^2} \Leftrightarrow \sqrt{ab+ac+bc} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ .$$

Со тоа неравенствата се докажани.

4. Докажи, дека за позитивни реални броеви a,b,c такви што $a+b+c=1$ важи неравенството

$$\frac{1}{bc+a+\frac{1}{a}}+\frac{1}{ca+b+\frac{1}{b}}+\frac{1}{ab+c+\frac{1}{c}} \le \frac{27}{31}\ .$$

Решение. После хомогенизацијата, сведување на заеднички именител и скратувањето неравенството се сведува на симетричното неравенство, кое се докажува со помош на неравенството на Мјурхед:

$$\frac{23}{2}T_{9,0,0}+122T_{8,1,0}+260T_{7,2,0}+282T_{6,3,0}+193T_{5,4,0}+\frac{547}{2}T_{7,1,1}+807T_{6,2,0}$$
$$+284T_{5,3,1}+91T_{5,2,2}-98T_{4,4,1}-1669T_{4,3,2}-557T_{3,3,3}\geq 0$$

каде

$$T_{a,b,c}=x^ay^bz^c+y^az^bx^c+z^ax^by^c+x^az^by^c+z^ay^bx^c+y^ax^bz^c .$$

5. Нека x,y,z се позитивни реални броеви такви што $xyz\geq 1$. Докажи, дека

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0 . \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и условот $xyz\geq 1$ следува

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)\geq(x^{\frac{5}{2}}(yz)^{\frac{1}{2}}+y^2+z^2)^2\geq(x^2+y^2+z^2),$$

т.е.

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\leq\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} .$$

Ако го собереме ова неравенства со аналогните неравенства за

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2} \text{ и } \frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2},$$

го добиваме неравенството

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{x^2+y^2+z^2}{z^5+x^2+y^2}\leq\frac{2(x^2+y^2+z^2)\leq xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\leq 3$$

кое е еквивалентно со неравенство (1).

Втор начин. При вообичаената ознака

$$T_{a,b,c}=x^ay^bz^c+y^az^bx^c+z^ax^by^c+x^az^by^c+z^ay^bx^c+y^ax^bz^c,$$

по сведувањето на заеднички именител неравенството (1) се сведува на неравенството

$$T_{5,5,5}+4T_{7,5,0}+T_{9,0,0}+T_{5,2,2}\geq T_{5,2,2}+2T_{5,4,0}+T_{6,0,0}+2T_{4,2,0}+T_{2,2,2} . \qquad (2)$$

Од неравенствата на Шур и Мјурхед и условот $xyz\geq 1$ следуваат нераветвста

$$T_{9,0,0}+T_{5,2,2}\geq 2T_{7,2,0}\geq 2T_{7,1,1}\geq 2T_{6,0,0}\geq T_{6,0,0}+T_{4,2,0},\quad T_{7,5,0}\geq T_{5,5,2}$$
$$2T_{7,5,0}\geq 2T_{6,5,1}\geq 2T_{5,4,0},\qquad T_{7,5,0}\geq T_{6,4,2}\geq T_{4,2,2},\qquad T_{5,5,5}\geq T_{2,2,2}.$$

Конечно, ако ги собереме горните неравенства го добиваме неравенството (2).

3. ТРИГОНОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

1. Докажи го неравенството $|\sin x|+|\cos x|\geq 1$.

Решение. Ако на основниот тригонометриски идентите додадеме од двете стани $2|\sin x|\cdot|\cos x|$ добиваме

$$\sin^2 x + 2|\sin x|\cdot|\cos x| + \cos^2 x = 1 + 2|\sin x|\cdot|\cos x| \Leftrightarrow$$
$$(|\sin x| + |\cos x|)^2 = 1 + 2|\sin x|\cdot|\cos x| \geq 1 \Leftrightarrow$$

Бидејќи $|\sin x| + |\cos x| \geq 0$, од неравенството $(|\sin x| + |\cos x|)^2 \geq 1$, кое е исполнето за секој реален број x, добиваме $|\sin x| + |\cos x| \geq 1$.

2. Нека се a и b реални броеви такви што $a\cos x + b\cos 3x \leq 1$, $\forall x \in R$. Докажи дека $|b| \leq 1$.

Решение. За $x = 0$ и $x = \frac{2\pi}{3}$ добиваме $a + b \leq 1$ и $-\frac{a}{2} + b \leq 1$, од каде

$$(a+b) + 2(-\tfrac{a}{2} + b) \leq 1 + 2\cdot 1,$$

односно $b \leq 1$. За $x = \pi$ и $x = \frac{\pi}{3}$ добиваме $-a - b \leq 1$ и $\frac{a}{2} - b \leq 1$, односно $(-a-b) + 2(\frac{a}{2} - b) \leq 1 + 2\cdot 1$, па $b \geq -1$, што требаше и да се докаже.

3. Нека x, y и z се реални броеви такви што $x + y + z = 0$. Докажи дека

$$|\cos x| + |\cos y| + |\cos z| \geq 1.$$

Решение. Од $x + y + z = 0$, добиваме $\cos(x + y + z) = 1$. Од адиционите теореми, својствата на апсолутната вредност и неравенствата $|\cos\alpha| \leq 1$ и $|\sin\alpha| \leq 1$, за секој $\alpha \in \mathbb{R}$, добиваме

$$\begin{aligned}
1 &= |\cos(x+y+z)| = |\cos x\cos(y+z) - \sin x\sin(y+z)| \\
&\leq |\cos x||\cos(y+z)| + |\sin x||\sin(y+z)| \\
&\leq |\cos x| + |\sin(y+z)| = |\cos x| + |\sin y\cos z + \cos y\sin z| \\
&\leq |\cos x| + |\sin y||\cos z| + |\cos y||\sin z| \\
&\leq |\cos x| + |\cos y| + |\cos z|.
\end{aligned}$$

4. Нека n е ненегативен цел број и x е реален број. Докажи, дека

$$|\sin nx| \leq n|\sin x|.$$

Дали неравенството е точно ако n е позитивен реален број?

Решение. Неравенството ќе го докажеме индукција по n. За $n = 0$ и $n = 1$ очигледно е точно. Нека претпоставиме дека за природниот број $n = k - 1$ важи

$$|\sin(k-1)x| \leq (k-1)|\sin x|.$$

Тогаш за $n = k$ имаме

$$\begin{aligned}
|\sin kx| &= |\sin((k-1)x + x)| = |\sin(k-1)x\cos x + \cos(k-1)x\sin x| \\
&\leq |\sin(k-1)x|\cdot|\cos x| + |\cos(k-1)x|\cdot|\sin x| \\
&\leq (k-1)|\sin x|\cdot 1 + 1\cdot|\sin x| = k|\sin x|,
\end{aligned}$$

па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број n.

Ако n е позитивен реален број неравенството не мора да важи. На пример, не важи за $x = \pi$ и $n = \frac{1}{3}$.

5. Нака a,b и c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=\frac{\pi}{2}$. Докажи, дека

$$\cos a+\cos b+\cos c>\sin a+\sin b+\sin c .$$

Решение. Од условот следува $a+b<\frac{\pi}{2}$, $b+c<\frac{\pi}{2}$, $a+c<\frac{\pi}{2}$, односно

$$0<a<\tfrac{\pi}{2}-b<\tfrac{\pi}{2},\ 0<b<\tfrac{\pi}{2}-c<\tfrac{\pi}{2},\ 0<c<\tfrac{\pi}{2}-a<\tfrac{\pi}{2}.$$

Од својствата на функцијата $\cos$ имаме,

$$\cos a>\cos(\tfrac{\pi}{2}-b)=\sin b,\ \cos b>\cos(\tfrac{\pi}{2}-c)=\sin c,\ \cos c>\cos(\tfrac{\pi}{2}-a)=\sin a .$$

Конечно, бараното неравенство го добиваме ако ги собереме неравенствата

$$\cos a>\sin b,\ \cos b>\sin c,\ \cos c>\sin a .$$

6. Нека $0<x,y<\frac{\pi}{2}$. Докажи дека

$$x\cos x+y\cos y\le x\cos y+y\cos x . \qquad (1)$$

Решение. Неравенството (1) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$x\cos x+y\cos y-x\cos y-y\cos x\le 0$$

$$x(\cos x-\cos y)-y(\cos x-\cos y)\le 0 .$$

$$(x-y)(\cos x-\cos y)\le 0.$$

Последното неравенство е симетрично, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\le y$. Но, на интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$ функцијата $\cos$ монотоно опаѓа, па затоа $\cos y\le\cos x$. Според тоа, $x-y\le 0$ и $\cos x-\cos y\ge 0$, што значи дека $(x-y)(\cos x-\cos y)\le 0$, т.е. точно е неравенството (1).

7. Докажи, дека за секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x\le 2 .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^4 x&\le\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^4 x=2\sin^4 x+(1-\sin^2 x)^2\\&=3\sin^4 x-2\sin^2 x+1=3(\sin^2 x-\tfrac{1}{3})^2+\tfrac{2}{3}\\&\le 3(1-\tfrac{1}{3})^2+\tfrac{2}{3}=2.\end{aligned}$$

За да важи знак за равенство потребно и доволно е да

$$\sin^5 x=\sin^4 x,\ \cos^5 x=\cos^4 x \text{ и } \sin^2 x=1 .$$

Од

$$\sin^4 x(\sin x-1)=0 \text{ и } \sin^2 x=1$$

следува $\sin x=1$. Значи, знак за равенство важи ако и само ако $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

8. Дали постои позитивен реален број a таков, што за секој реален број x е исполнето неравенството

$$|\cos x|+|\cos ax|>\sin x+\sin ax ?$$

Решение. Нека претпоставиме, дека $0 < a \le 1$. Тогаш за $x = \frac{\pi}{2}$ левата страна на неравенството е еднаква на $|\cos\frac{a\pi}{2}|$, т.е. е помала од 1, а десната страна е $1+\sin\frac{a\pi}{2} > 1$. Ако $a > 1$, тогаш со смените $ax = t$ и $b = \frac{1}{a}$, неравенството го добива обликот

$$|\cos bt| + |\cos t| > \sin bt + \sin t,$$

и како $0 < b < 1$, разгледувањата се сведуваат на претходниот случај.

Значи, не постои позитивен реален број a со саканото својство.

9. Нека x и y се реални броеви такви што $\sin x + \sin y = \frac{1}{3}$. Докажи, дека

$$\sin 3x + \sin 3y \le \frac{26}{27}.$$

Решение. Од познатиот идентитет $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, следува

$$\sin 3x + \sin 3y = 3(\sin x + \sin y) - 4(\sin^3 x + \sin^3 y).$$

Воведуваме смени, $\sin x = a, \sin y = b$, при што важи $b = \frac{1}{3} - a$. Според тоа, треба да го докажеме неравенството

$$3(a+b) - 4(a^3 + b^3) \le \frac{26}{27}.$$

Но, $b = \frac{1}{3} - a$, па затоа треба да докажеме дека

$$1 - 4(a^2 - \tfrac{1}{3}a + \tfrac{1}{27}) \le \frac{26}{27}.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството $(6a-1)^2 \ge 0$, кое очигледно е точно, па затоа е точно и бараното неравенство.

10. Докажи, дека за секои реални броеви $x > 0$ и $y > 0$ и за секој $\alpha \in \mathbb{R}$ важи:

$$x^{\sin^2\alpha} y^{\cos^2\alpha} \le y + x$$

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x < y$ (зошто?). Тогаш

$$x^{\sin^2\alpha} y^{\cos^2\alpha} \le y^{\sin^2\alpha} y^{\cos^2\alpha} = y < x + y$$

11. Нека $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$. Докажи го неравенството $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2} \ge \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Решение. Од $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ следува

$$0 < 2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \le \cos(\alpha+\beta) + 1 \text{ и } \sin(\alpha+\beta) > 0,$$

па затоа

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta} \ge \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+1} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

12. Без употреба на таблица или калкулатор, докажи дека $\operatorname{tg} 11^\circ < 0,2$.

Решение. Ако α е остар агол и ако $\operatorname{tg}\alpha = 0,2$, тогаш:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{5}{12},\ \operatorname{tg}4\alpha=\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\frac{120}{119}.$$

Бидејќи $\operatorname{tg}45^\circ=1$, и од монотоноста на tg следува $\operatorname{tg}4\alpha>\operatorname{tg}45^\circ$, т.е. $4\alpha>45^\circ$, односно $\alpha>11^\circ$. Тогаш $\operatorname{tg}11^\circ<\operatorname{tg}\alpha=0,2$.

13. Ако $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$, $\alpha>0$ и $\beta>0$, докажи дека $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\le\frac{1}{3}$. Кода важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин.* Имајќи предвид дека

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\tfrac{\pi}{3}=\tfrac{1}{2}\ \text{и}\ \cos(\alpha-\beta)\le 1$$

за $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$ добиваме:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\frac12(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))}{\frac12(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))}=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\frac12}{\cos(\alpha-\beta)+\frac12}=1-\frac{1}{\cos(\alpha-\beta)+\frac12}\le 1-\frac{1}{1+\frac12}=\frac13.$$

Притоа $\alpha-\beta\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$, па $\cos(\alpha-\beta)\ge 0$, односно $\cos(\alpha-\beta)\ne-\frac12$. Равенство ќе важи ако и само ако $\cos(\alpha-\beta)=1$, осносно $\alpha-\beta=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Но, $\alpha-\beta\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$, па $\alpha-\beta=0$. Имајќи предвид дека $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$ добиваме $\alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$.

Втор начин. Од $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$, $\alpha>0$ и $\beta>0$ следува $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{3})$ па $\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{tg}\beta\ge 0$. Според тоа на броевите $\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{tg}\beta$ можеме да го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Исто така ќе ја користиме и тригонометриската формула $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$, односно

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\sqrt{3}(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta).$$

Притоа $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\sqrt3>0,\operatorname{tg}\alpha>0,\operatorname{tg}\beta>0$ па $0<\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta<1$. Според тоа имаме $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\le\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}=\frac{\sqrt3}{2}(1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta)$. Да ставиме $y=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$. Значи важи неравенството $\sqrt{y}\le\frac{\sqrt3}{2}(1-y)$. Со квадрирање на двете страни и средување на добиениот израз го добиваме неравенството $3y^2-10y+3\ge 0$. Последниве две неравенства се еквивалентни заради $0<y<1$. Натаму $0\le 3y^2-10y+3=3((y-\frac53)^2-\frac{16}{9})$, па $y-\frac54\ge\frac45$ или $y-\frac53\le-\frac43$, односно $y\ge 3$ или $y\le\frac13$. Но $\mathrm{y}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta<\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=3$, па останува $\mathrm{y}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\le\frac13$. Равенство ќе важи ако и само ако важи равенство во $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}\le\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2}$, а тоа важи ако и само ако $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$. Бидејќи $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{3})$ следува $\alpha=\beta$. Имајќи предвид дека $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$ добиваме $\alpha=\beta=\frac{\pi}{6}$.

Трет начин. Заради $0<\alpha\le\frac{\pi}{2}$ важи $\operatorname{tg}\alpha>0$ па и $1+\sqrt3\operatorname{tg}\alpha>0$. Сега $\beta=\frac{\pi}{3}-\alpha$ па затоа

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}(-\alpha)}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\operatorname{tg}(-\alpha)}=\operatorname{tg}\alpha\frac{\sqrt3-\operatorname{tg}\alpha}{1+\sqrt3\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sqrt3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\sqrt3\operatorname{tg}\alpha}.$$

Затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}^2\,\alpha}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}\leq\frac{1}{3}.$$

Заради $1+\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha>0$ го добиваме еквивалентното на него неравенство $3(\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha)\leq 1+\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha$, односно $3\mathrm{tg}^2\alpha-2\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha+1\geq 0$. Ова неравенство е секогаш точно бидејќи е еквивалентно со $(\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha-1)^2\geq 0$ па точно е и даденото неравенство. Знак за равенство ќе важи кога $\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha-1=0$, односно кога $\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Оттука $\alpha=\frac{\pi}{6}$ и $\beta=\frac{\pi}{6}$.

14. Нека аглите α и β во триаголник се остри. Тогаш третиот агол γ е тап ако и само ако $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta<1$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Нека $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta<1$. Заради $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ важи $\mathrm{tg}\,\alpha,\mathrm{tg}\,\beta>0$, па имаме $\mathrm{tg}\,\alpha<\frac{1}{\mathrm{tg}\beta}=\mathrm{ctg}\,\beta=\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{2}-\beta)$. Функцијата $\mathrm{tg}\,\alpha$ е растечка на интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$, па следува $\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta$, односно $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. Оттука $\gamma>\frac{\pi}{2}$.

Обратно, нека $\gamma>\frac{\pi}{2}$. Тогаш $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$, односно $\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta$. Функцијата $\mathrm{tg}\,\alpha$ е растечка на интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$, па $\mathrm{tg}\,\alpha<\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{2}-\beta)$, односно $\mathrm{tg}\,\alpha<\mathrm{ctg}\,\beta=\frac{1}{\mathrm{tg}\beta}$. Од последново неравенство добиваме $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta<1$.

Втор начин. Нека $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta<1$. Тогаш $1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta>0$. Аглите α и β се остри, па $\mathrm{tg}\,\alpha>0$ и $\mathrm{tg}\,\beta>0$. Според тоа и $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}>0$, односно $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)>0$. Оттука

$$\mathrm{tg}\,\gamma=\mathrm{tg}(\pi-(\alpha+\beta))=-\mathrm{tg}(\alpha+\beta)<0.$$

Бидејќи γ е агол во триаголник следува дека $\gamma\in(\frac{\pi}{2},\pi)$, односно γ е тап. Обратно, нека аголот γ е тап. Тогаш $\mathrm{tg}\,\gamma<0$, па $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\mathrm{tg}(\pi-\gamma)=-\mathrm{tg}\,\gamma>0$. Значи $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}>0$. Важи $\mathrm{tg}\,\alpha>0$ и $\mathrm{tg}\,\beta>0$, па мора и $1-\mathrm{tg}\,\alpha\;\;\mathrm{tg}\,\beta>0$, односно $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta\;<\;1$.

Трет начин. Нека $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta\;<\;1$. Тогаш $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}<1$. Бидејќи аглите α и β се остри, важи $\cos\alpha,\cos\beta>0$, па неравенството $\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}<1$ е еквивалентно со неравенството $\sin\alpha\sin\beta<\cos\alpha\cos\beta$. Двете страни на неравенството ќе ги трансформираме според формулите

$\sin\alpha\,\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ и $\cos\alpha\,\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

и добиваме

$$-\cos(\alpha+\beta)<\cos(\alpha+\beta),$$

односно $\cos(\alpha+\beta)>0$. Но α и β се агли во триаголник, па мора . Значи $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)>\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$.

Обратно, ако $\gamma > \frac{\pi}{2}$, тогаш , па $\cos(\alpha+\beta) > 0$. Оттука

$$-\cos(\alpha+\beta) < \cos(\alpha+\beta).$$

Ако на ова неравенство додадеме од двете страни $\cos(\alpha-\beta)$ и го помножиме со $\frac{1}{2}$ добиваме $\sin\alpha\sin\beta < \cos\alpha\cos\beta$. Бидејќи $\cos\alpha, \cos\beta > 0$ последното неравенство е еквивалентно со $\frac{\sin\alpha\,\sin\beta}{\cos\alpha\,\cos\beta} < 1$, односно со $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta < 1$.

15. Ако $\operatorname{tg}^5 x - \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x = 2$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, докажи дека $3 < \operatorname{tg}^6 x < 4$.

Решение. На почеток ќе воведеме смена $\operatorname{tg} x = y$. Тогаш е доволно да покажеме дека, ако $y^5 - y^3 + y = 2,$ за y реален број, тогаш важи $3 < y^6 < 4$.

Од $y^5 - y^3 + y = y(y^4 - y^2 + 1) = y((y^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}) = 2$ и од $(y^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$, јасно е дека $y > 0$. Исто така важи и $y \neq 1$.

Ќе го трансформираме изразот $y^6 + 1$ во облик

$$y^6 + 1 = (y^2+1)(y^4 - y^2 + 1) = y(y + \tfrac{1}{y})(y^4 - y^2 + 1) = (y + \tfrac{1}{y})(y^5 - y^3 + y) = 2(y + \tfrac{1}{y})$$

Од $y > 0$, користејќи неравенство меѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме $y + \frac{1}{y} \geq 2$, а од тоа што $y \neq 1$, ќе важи строго неравенство $y + \frac{1}{y} > 2$. Сега, конечно $y^6 + 1 = 2(y + \frac{1}{y}) > 4$, од каде $y^6 > 3$. Од друга страна, трансформирајќи го условот $y^5 - y^3 + y = 2,$ во $y^5 + y = y^3 + 2$, делејќи со $y^3 \neq 0$, добиваме $y^2 + \frac{1}{y^2} = 1 + \frac{2}{y^3}$. Сега $y^2 + \frac{1}{y^2} > 2$, па затоа $1 + \frac{2}{y^3} = y^2 + \frac{1}{y^2} > 2$. Добиваме $y^3 < 2,$ односно $y^6 < 4$. Значи, $3 < y^6 < 4$.

16. Докажи дека од произволни четири броја од интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$ може да се изберат два (x и y) такви што

$$8\cos x \cos y \cos(x-y) + 1 > 4(\cos^2 x + \cos^2 y).$$

Решение. Даденото неравенство последователно е еквивалентно на неравенствата

$$8\cos x \cos y(\cos x \cos y + \sin x \sin y) - 4\cos^2 y - 4\cos^2 x + 1 > 0$$

$$2(2\cos^2 x - 1)(2\cos^2 y - 1) + 2\sin 2x \sin 2y - 1 > 0$$

$$2\cos 2x \cos 2y + 2\sin 2x \sin 2y - 1 > 0$$

$$2\cos(2x - 2y) > 1$$

$$\cos(2x - 2y) > \tfrac{1}{2}.$$

Сега интервалот $(0, \frac{\pi}{2})$ ќе го разделиме на три дела со еднаква должина, т.е. на интервалите $(0, \frac{\pi}{6}], (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}], (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$. Според Принципот на Дирихле, два од четирите броја припаѓаат на еден од овие интервали. Нека тие броеви се x и y. Тогаш

$|x-y|<\frac{\pi}{6}$, т.е. $|2x-2y|<2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, па сега од парноста и монотоноста на функцијата $y=\cos x$, добиваме дека

$$\cos(2x-2y)>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

17. Нека α,β,γ се позитивни реални броеви такви што $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Докажи, дека

$$2004\cos\alpha\leq 2005-2\sqrt{1002}(\cos\beta+\cos\gamma). \tag{1}$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Јасно,

$$(\cos\beta+\cos\gamma-\tfrac{1}{\sqrt{1002}})^2+(\sin\beta-\sin\gamma)^2\geq 0 \tag{2}$$

и ова неравенство е последователно еквивалентно со неравенствата

$$\cos^2\beta+\cos^2\gamma+\tfrac{1}{1002}+2\cos\beta\cos\gamma-\tfrac{2}{\sqrt{1002}}(\cos\beta+\cos\gamma)+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2\sin\beta\sin\gamma\geq 0$$

$$2+\tfrac{1}{1002}+2(\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma)-\tfrac{2}{\sqrt{1002}}(\cos\beta+\cos\gamma)\geq 0$$

$$\tfrac{2005}{1002}+2\cos(\beta+\gamma)\geq\tfrac{2}{\sqrt{1002}}(\cos\beta+\cos\gamma)$$

$$2005-2\sqrt{1002}(\cos\beta+\cos\gamma)\geq -2004\cos(\pi-\alpha)$$

$$2005-2\sqrt{1002}(\cos\beta+\cos\gamma)\geq 2004\cos\alpha,$$

т.е. точно е неравенството (1).

Во неравенството (1) знак за равенство важи ако и само ако важи знак за равенство во неравенството (2), што значи ако и само ако

$$\sin\beta=\sin\gamma \text{ и } \cos\beta+\cos\gamma=\tfrac{1}{\sqrt{1002}}.$$

Од $\beta,\gamma\in(0,\pi)$ и $\sin\beta=\sin\gamma$ следува дека $\beta=\gamma$ или $\beta=\pi-\gamma$.

Ако $\beta=\gamma$, тогаш

$$\beta=\gamma=\arccos\tfrac{1}{2\sqrt{1002}} \text{ и } \alpha=\pi-2\beta.$$

Ако, $\beta=\pi-\gamma$, тогаш

$$\cos\beta+\cos(\pi-\beta)=\tfrac{1}{\sqrt{1002}} \text{ т.е. } \cos\beta-\cos\beta=\tfrac{1}{\sqrt{1002}},$$

што не е можно.

18. Докажи дека за секои $x,y,z\in\mathbb{R}$ важи

$$\sin^2 x\cos y+\sin^2 y\cos z+\sin^2 z\cos x<\tfrac{3}{2}.$$

Решение. За секои реални броеви a и b важи

$$ab\leq\tfrac{1}{2}(a^2+b^2), \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$.

За секој $t\in\mathbb{R}$, од $\sin^2 t\in[0,1]$ следува

$$\sin^4 t\leq\sin^2 t, \tag{2}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\sin^2 t=0$ или $\sin^2 t=1$.

Од (1) и (2) следува

$$\sin^2 x\cos y+\sin^2 y\cos z+\sin^2 z\cos x \le$$

$$\le \tfrac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^2 y)+\tfrac{1}{2}(\sin^4 y+\cos^2 z)+\tfrac{1}{2}(\sin^4 z+\cos^2 x)$$

$$=\tfrac{1}{2}(\sin^4 x+\cos^2 x)+\tfrac{1}{2}(\sin^4 y+\cos^2 y)+\tfrac{1}{2}(\sin^4 z+\cos^2 z)$$

$$\le \tfrac{1}{2}(\sin^2 x+\cos^2 x)+\tfrac{1}{2}(\sin^2 y+\cos^2 y)+\tfrac{1}{2}(\sin^2 z+\cos^2 z)\le \tfrac{3}{2}$$

Останува уште да докажеме дека во последното неравенство не важи знак равенство. Нека претпоставиме постојат реални броеви x,y,z за кои важи знак за равенство. Тоа значи дека во (1) и (2) важи знак за равенство, па затоа заради (1) имаме

$$\sin^4 x=\cos^2 y,\ \ \sin^4 y=\cos^2 z,\ \ \sin^4 z=\cos^2 x$$

и заради (2) имаме

$$\sin^2 t=0 \text{ или } \sin^2 t=1, \text{ за } t=x,y,z\,.$$

Од $\sin^2 x=0$ следува

$$\sin^2 x=0 \Rightarrow \cos^2 x=1 \Rightarrow \sin^4 z=1 \Rightarrow \sin^2 z=1 \Rightarrow \cos^2 z=0 \Rightarrow$$

$$\sin^4 y=0 \Rightarrow \sin^2 y=0 \Rightarrow \cos^2 y=1 \Rightarrow \sin^4 x=1 \Rightarrow \sin^2 x=1,$$

што е противречност. На потполно ист начи и случајот $\sin^2 x=1$ доведува до противречност, со што тврдењето е докажано.

19. Ако $0<x_1<x_2<...<x_n<\frac{\pi}{2}$, докажи дека

$$\operatorname{tg} x_1<\frac{\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_n}{\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n}<\operatorname{tg} x_n\,.$$

Решение. Од условот на задачата имаме

$$0<\sin x_1<\sin x_2<...<\sin x_n \text{ и } \cos x_1>\cos x_2>...>\cos x_n>0\,,$$

па затоа

$$n\sin x_1<\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_n<n\sin x_n\,, \text{ и} \tag{1}$$

$$n\cos x_1>\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n>n\cos x_n\,,$$

т.е.

$$\frac{1}{n\cos x_1}<\frac{1}{\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n}<\frac{1}{n\cos x_n}\,. \tag{2}$$

Конечно, од (1) и (2) следува

$$\operatorname{tg} x_1=\frac{n\sin x_1}{n\cos x_1}<\frac{\sin x_1+\sin x_2+...+\sin x_n}{\cos x_1+\cos x_2+...+\cos x_n}<\frac{n\sin x_n}{n\cos x_n}=\operatorname{tg} x_n\,.$$

20. Нека $n\ge 1$ и $x_i\in[0,\pi]$, $i=1,2,...,2n+1$. Докажи дека важи неравенството

$$\left(\sum_{k=1}^{2n+1}\cos x_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{2n+1}\sin x_k\right)^2\ge 1\,.$$

Решение. Еден од интервалите $[0,\frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{\pi}{2},\pi]$ содржи најмалку $n+1$ од броевите $x_i, i=1,2,...,2n+1$. Може да претпоставиме дека тоа е интервалот $[0,\frac{\pi}{2}]$, бидејќи во спротивно со смената $y_i = \pi - x_i$, $i = 1, 2, ..., 2n+1$, задачата ја сведуваме на претходниот случај.

Нека претпоставиме дека $x_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $i = 1, 2, ..., n+1$. Ако $\sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k \geq 1$, тогаш важи

$$(\sum_{k=1}^{2n+1} \cos x_k)^2 + (\sum_{k=1}^{2n+1} \sin x_k)^2 \geq (\sum_{k=1}^{2n+1} \sin x_k)^2 \geq (\sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k)^2 \geq 1,$$

и доказот е завршен. Во спротивно, од $\sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k < 1$ следува

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos x_k + \sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k \geq \sum_{k=1}^{n+1} \cos^2 x_k + \sum_{k=1}^{n+1} \sin^2 x_k \geq n+1,$$

па затоа $\sum_{k=1}^{n+1} \cos x_k \geq n$. Од последното неравенство следува

$$(\sum_{k=1}^{2n+1} \cos x_k)^2 + (\sum_{k=1}^{2n+1} \sin x_k)^2 \geq (\sum_{k=1}^{n+1} \cos x_k - n)^2 + (\sum_{k=1}^{n+1} \sin x_k)^2 . \qquad (1)$$

Да означиме

$$A_m = (\sum_{k=1}^{m} \cos x_k - m + 1)^2 + (\sum_{k=1}^{m} \sin x_k)^2, \; m = 1, 2, ..., n+1 .$$

Според (1) важи

$$(\sum_{k=1}^{2n+1} \cos x_k)^2 + (\sum_{k=1}^{2n+1} \sin x_k)^2 \geq A_{n+1}$$

и како $\cos^2 x_1 + \sin^2 x_1 \geq A_1$, доволно е да докажеме дека $A_{n+1} \geq A_n \geq A_{n-1} \geq ... \geq A_1$. За секој $m \in \{1, 2, ..., n\}$ имаме

$$\begin{aligned}
A_{m+1} - A_m &= (\sum_{k=1}^{m+1} \cos x_k - m)^2 + (\sum_{k=1}^{m+1} \sin x_k)^2 - (\sum_{k=1}^{m} \cos x_k - m + 1)^2 - (\sum_{k=1}^{m} \sin x_k)^2 \\
&= 2(\cos x_{m+1} - 1)(\sum_{k=1}^{m} \cos x_k - m + 1) + (\cos x_{m+1} - 1)^2 + \\
&\quad + 2 \sin x_{m+1} \sum_{k=1}^{m} \sin x_k + \sin^2 x_{m+1} \\
&= 2(\cos x_{m+1} - 1)(\sum_{k=1}^{m} \cos x_k - m) + 2 \sin x_{m+1} \sum_{k=1}^{m} \sin x_k + \\
&\quad + 2(\cos x_{m+1} - 1) + (\cos x_{m+1} - 1)^2 + \sin^2 x_{m+1} \\
&= 2(1 - \cos x_{m+1})(m - \sum_{k=1}^{m} \cos x_k) + 2 \sin x_{m+1} \sum_{k=1}^{m} \sin x_k \geq 0
\end{aligned}$$

т.е. $A_{m+1} - A_m \geq 0$, со што доказот е завршен.

21. Докажи дека $\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \geq 8$, за секој $x \neq k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}\geq\frac{2}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{8}{(2\sin x\cos x)^2}=\frac{8}{\sin^2 2x}\geq 0\,,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

22. Нека $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Докажи дека

$$(1+\frac{1}{\sin x})(1+\frac{1}{\cos x})\geq 3+2\sqrt{2}\,.$$

Решение. Бидејќи $\sin x>0$ и $\cos x>0$, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{\sin x})(1+\frac{1}{\cos x})&=1+(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x})+\frac{1}{\sin x\cos x}=1+\frac{2}{\sqrt{\sin x\cos x}}+\frac{1}{\sin x\cos x}\\&\geq(1+\frac{1}{\sqrt{\sin x\cos x}})^2=(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sin 2x}})^2\geq(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

Обопштување. Докажи го неравенството

$$(1+\frac{1}{\sin^n\alpha})(1+\frac{1}{\cos^n\alpha})\geq(1+2^{n/2})^2\,,$$

каде што α е остар агол, а n - природен број.

Упатство. Исползувај го неравенството

$$a^n+b^n\geq 2(ab)^{n/2}\,.$$

23. Докажи, дека ако n е произволен природен број и α е реален број таков што $0<\alpha<\frac{\pi}{n}$, тогаш

$$\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\ldots\cdot\sin n\alpha<\frac{1}{n^n}\frac{1}{\sin^n\frac{\alpha}{2}}\,. \qquad (1)$$

Докажи!

Решение. Ако искористиме дека за $0<\alpha<\frac{\pi}{n}$ важи

$$0<\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}<1,$$

формулата

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha\cdot\ldots\cdot\sin n\alpha&<(\frac{\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha}{n})^n\\&=(\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{n\sin\frac{\alpha}{2}})^n=\frac{1}{n^n}\frac{1}{\sin^n\frac{\alpha}{2}}\,,\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

24. Нека $x,y,z\in\mathbb{R}$. Определи ја најголемата можна вредност

$$\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\,.$$

Решение. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z)^2 \le ((\sin x \sin y)^2 + (\cos x \cos y)^2)(\sin^2 z + \cos^2 z) .$$

Бидејќи $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ и

$$\sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y \le \sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \cos^2 y + \cos^2 x \sin^2 y$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 y + \cos^2 y)$$

од горното неравенство следува дека

$$| \sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z | \le \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}\sqrt{\sin^2 y + \cos^2 y} = 1 .$$

Во добиените неравенства знак за равенство важи, на пример, за $x = y = z = 0$, што значи дека најголемата можна вредност на разгледуваниот израз е 1.

25. Докажи, дека за секој $x \in [0,1)$ важи $\operatorname{tg} x \le \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Од познатото неравенство $\sin x \le x$, за $0 \le x < 1$ следува неравенството $\operatorname{tg} x \le \frac{x}{\cos x}$. Затоа

$$\operatorname{tg}^2 x \le \frac{x^2}{\cos^2 x} = \frac{x^2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x} = x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 x, \text{ т.е. } (1-x^2)\operatorname{tg}^2 x \le x^2$$

и оттука следува бараното неравенство.

26. Нека $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ е таков што $\alpha - \sin\alpha \le \frac{\alpha^3}{4}$. Докажи дека

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} \le \cos\alpha \le 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{16} . \qquad (1)$$

Решение. Ако $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, тогаш $0 < \sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{\alpha}{2}$, односно $\sin^2\frac{\alpha}{2} \le \frac{\alpha^2}{4}$, па затоа

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \ge 1 - \frac{\alpha^2}{4} ,$$

т.е. точно е левото неравенство во (1).

Понатаму, од $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ следува $\frac{\alpha}{2} \in (0, \frac{\pi}{2})$, па од условот на задачата имаме $\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \le \frac{\alpha^3}{32}$, односно $\sin\frac{\alpha}{2} \ge \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{32} > 0$. Затоа,

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} \ge 2(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{32})^2 = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{16} + \frac{\alpha^6}{648} \ge \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{16} ,$$

од каде добиваме

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^4}{16} ,$$

т.е. точо е десното неравенство во (1).

27. Нека $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ при што важи

$$\operatorname{tg}(a_0 - \frac{\pi}{4}) + \operatorname{tg}(a_1 - \frac{\pi}{4}) + ... + \operatorname{tg}(a_n - \frac{\pi}{4}) \ge n - 1 \qquad (1)$$

Докажи, дека $\operatorname{tg} a_0 \operatorname{tg} a_1 ... \operatorname{tg} a_n \ge n^{n+1}$.

Решение. Нека $b_k = \operatorname{tg}(a_k - \frac{\pi}{4}), k = 0,1,2,...,n$, односно $\frac{1+b_k}{1-b_k} = \operatorname{tg} a_k > 0$. Според тоа, $-1 < b_k < 1,$ за секој $k = 1,2,...,n$. Заменуваме во (1) и добиваме дека за секој $k = 0,1,2,...,n$ важи

$$1+b_k \geq \sum_{0\leq i\neq k\leq n}(1-b_i)\,.$$

Сега, од неравенството меѓу аритметичката и геометриска средина за позитивните броеви $1-b_i$, $0\leq l\neq k\leq n$ следува

$$\sum_{0\leq i\neq k\leq n}^{n}(1-b_i)\geq n(\prod_{0\leq i\neq k\leq n}(1-b_i))^{\frac{1}{n}}\,,$$

па затоа за секој $k=0,1,2,...,n$ важи

$$1+b_k\geq n(\prod_{0\leq i\neq k\leq n}(1-b_i))^{\frac{1}{n}}\,.$$

Ако ги помножиме последните неравенства добиваме

$$\prod_{k=0}^{n}(1+b_k)\geq n^{n+1}(\prod_{k=0}^{n}\left(1-b_k\right)^{n})^{\frac{1}{n}}=n^{n+1}\prod_{k=0}^{n}(1-b_k)\text{, т.е. }\prod_{k=0}^{n}\tfrac{1+b_k}{1-b_k}\geq n^{n+1}.$$

Конечно,

$$\prod_{k=0}^{n}\operatorname{tg}a_k=\prod_{k=0}^{n}\tfrac{1+b_k}{1-b_k}\geq n^{n+1}\,,$$

што и требаше да се докаже.

28. Нека $n\geq 2$. Најди ја најголемата можна вредност на изразот

$$v_n=\sin x_1\cos x_2+\sin x_2\cos x_3+...+\sin x_{n-1}\cos x_n+\sin x_n\cos x_1\,,$$

каде $x_i\in\mathbb{R}$, за $i=1,2,...,n$.

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и од основниот тригонометриски идентитет $\sin^2 t+\cos^2 t=1$, за секој $t\in\mathbb{R}$ добиваме

$$v_n\leq\tfrac{\sin^2 x_1+\cos^2 x_2}{2}+\tfrac{\sin^2 x_2+\cos^2 x_3}{2}+...+\tfrac{\sin^2 x_{n-1}+\cos^2 x_n}{2}+\tfrac{\sin^2 x_n+\cos^2 x_1}{2}=\tfrac{n}{2}\,.$$

Знак за равенство се достигнува за $x_i=\frac{\pi}{4}$, за $i=1,2,...,n$.

29. Определи ја максималната вредност на изразот:

$$\tfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta}\,.$$

Решение. Користејќи ги идентитетите

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\,,\ a,b\in\mathbb{R}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos(\alpha-\beta)=2\cos^2\tfrac{\alpha-\beta}{2}-1\,;\ \cos(\alpha+\beta)=2\cos^2\tfrac{\alpha+\beta}{2}-1\,,$$

изразот можеме да го запишеме во облик

$$\tfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta}=\tfrac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\frac{1}{2}[2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1]}=\tfrac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\tfrac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}\,.$$

Ако воведеме ознаки (смени) $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=a$, $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=b$, тогаш

$$\tfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta}=\tfrac{2ab}{a^2+b^2}\,.$$

Ако $a^2+b^2\neq 0$, тогаш $\frac{2ab}{a^2+b^2}\leq 1$, од каде што добиваме дека

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta}\leq 1\,. \qquad (1)$$

За $\sin\alpha=1$ и $\sin\beta=0$ во неравенството (1) се достигнува знак за равенство.

30. Докажи, дека за секој $x\in\mathbb{R}$ и за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$|\cos x|+|\cos 2x|+|\cos 2^2 x|+...+|\cos 2^n x|\geq \frac{n}{2\sqrt{2}}\,.$$

Решение. Прво ќе докажеме дека за секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$|\cos x|+|\cos 2x|\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Заради парноста на функцијата $\cos$ доволно е тврдењето да го докажеме на интервалот $[0,\pi]$.

За $x\in[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{3\pi}{4},\pi]$ е исполнето $|\cos x|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$, па значи тврдењето важи.

За $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ имаме $|\cos x|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ставаме $t=\cos x$ и добиваме

$$|\cos x|+|\cos 2x|=|t|+|2t^2-1|=t-2t^2+1\,.$$

Ќе докажеме дека $t-2t^2+1\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$ за $t\in[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]$. Да ја разгледува квадратната функција $p(t)=-2t^2+t+1$. Нулите на оваа функција се $t_1=-\frac{1}{2}$ и $t_2=1$, па затоа на интервалот $[0,\frac{1}{\sqrt{2}}]\subseteq[-\frac{1}{2},1]$ важи

$$p(t)\geq\min\{p(0),p(\tfrac{1}{\sqrt{2}})\}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$

што значи дека

$$|\cos x|+|\cos 2x|\geq\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ за } x\in[\tfrac{\pi}{4},\tfrac{\pi}{2}]\,.$$

Аналогно се докажува дека за $x\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}]$ важи $|\cos x|+|\cos 2x|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Од досега изнесеното следува дека

$$|\cos z|+|\cos 2z|\geq\frac{1}{\sqrt{2}}\,. \qquad (1)$$

Ако во неравенството (1) ставиме $z=x,\ z=4x,\ z=16x,\ ...,\ z=2^{2k}x$ и ги собереме добиените неравенства наоѓаме

$$|\cos x|+|\cos 2x|+|\cos 2^2 x|+...+|\cos 2^{2k} x|+|\cos 2^{2k+1}x|\geq\frac{k+1}{\sqrt{2}}\,. \qquad (2)$$

Сега, ако $n=2k+1$, тогаш од (2) следува

$$|\cos x|+|\cos 2x|+|\cos 2^2 x|+...+|\cos 2^{n-1}x|+|\cos 2^n x|\geq\frac{n+1}{2\sqrt{2}}>\frac{n}{2\sqrt{2}}\,, \qquad (3)$$

а ако $n=2k+2$, тогаш од (3) следува

$$|\cos x|+|\cos 2x|+|\cos 2^2 x|+...+|\cos 2^{n-1}x|+|\cos 2^n x|\geq$$
$$\geq|\cos x|+|\cos 2x|+|\cos 2^2 x|+...+|\cos 2^{n-1}x|$$
$$\geq\frac{(n-1)+1}{2\sqrt{2}}=\frac{n}{2\sqrt{2}}.$$

31. Нека $n \geq 3$ и $a_1, a_2, ..., a_n$ се позитивни реални броеви за кои што важи $\frac{1}{1+a_1^4} + \frac{1}{1+a_2^4} + ... + \frac{1}{1+a_n^4} = 1$. Докажи го неравенството $a_1 a_2 \cdot ... \cdot a_n \geq (n-1)^{\frac{n}{4}}$.

Решение. Нека $a_i^2 = \operatorname{tg} x_i, x_i \in [0, \frac{\pi}{2}), i = 1, 2, ..., n.$ Тогаш $\sum_{i=1}^{n} \cos^2 x_i = 1$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\sin^2 x_i = 1 - \cos^2 x_i \geq (n-1)(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \cos x_j)^{\frac{2}{n-1}}, i = 1, 2, ..., n .$$

Множејќи ги горните n неравенства, добиваме

$$\prod_{i=1}^{n} \sin^2 x_i \geq (n-1)^n \prod_{i=1}^{n} \cos^2 x_i .$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\prod_{i=1}^{n} \operatorname{tg} x_i \geq (n-1)^{\frac{n}{2}} .$$

Конечно, $\prod_{i=1}^{n} a_i = (\prod_{i=1}^{n} \operatorname{tg} x_i)^{\frac{1}{2}} \geq (n-1)^{\frac{n}{4}}$, што требаше и да се докаже.

32. Нека α, β и γ се агли на еден триаголник ABC. Да се докаже дека:

а) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 2$ ако и само ако триаголникот ABC е остроаголен,

б) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma < 2$ ако и само ако триаголникот ABC е тапоаголен,

в) $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$ ако и само ако триаголникот ABC е правоаголен.

Решение. За изразот $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$ имаме:

$$\begin{aligned}
\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &= \tfrac{1-\cos^2 \alpha}{2} + \tfrac{1-\cos^2 \beta}{1} + \sin^2(\alpha + \beta) \\
&= 1 - \tfrac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + 1 - \cos^2(\alpha + \beta\ ) \\
&= 2 - \cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - \cos^2(\alpha + \beta) \\
&= 2 - [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]\cos(\alpha + \beta) = \\
&= 2 - \cos\alpha \cos\beta \cos(\alpha + \beta) = 2 + \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.
\end{aligned}$$

Според тоа $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma > 2$ ако и само ако $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma > 0$, т.е. ако и само ако триаголникот ABC е остроаголен; $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma < 2$ ако и само ако $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma < 0$, т.е. ако и само ако триаголникот ABC е тапоаголен; $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$ ако и само ако $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = 0$, т.е. ако и само ако еден од аглите α, β, γ е прав.

33. Да се докаже дека од произволни четири реални броја секогаш може да се одберат два броја x и y такви што

$$0 \le \frac{x-y}{1+xy} \le 1.$$

Решение. Нека произволните четири броја се a,b,c,d подредени по големина. Тогаш постојат агли $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ така што $\mathrm{tg}\alpha = a$, $\mathrm{tg}\beta = b$, $\mathrm{tg}\gamma = c$, $\mathrm{tg}\delta = d$. Аглите $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ можеме да ги одбереме така што:

$$-\frac{\pi}{2} < \alpha \le \beta \le \gamma \le \delta < \frac{\pi}{2} < \alpha + \pi .$$

Значи, β,γ,δ ја разделуваат отсечката $[\alpha,\alpha+\pi]$ нма четири дела, од кои што барем еден не е поголем од $\frac{\pi}{4}$. Нека тоа е на пример интервалот $[\alpha,\beta]$. Бидејќи $0 \le \beta - \alpha \le \frac{\pi}{4}$ имаме дека и $0 \le \mathrm{tg}(\beta-\alpha) \le 1$, т.е.

$$0 \le \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \le 1 .$$

Ако ставиме $x = \mathrm{tg}\beta$ и $y = \mathrm{tg}\beta$ имаме $0 \le \frac{x-y}{1+xy} \le 1$ што требаше да се докаже.

За $\alpha + \pi - \delta \le \frac{\pi}{4}$, дискусијата е иста бидејќи $\mathrm{tg}(\alpha+\pi-\delta) = \mathrm{tg}(\alpha-\delta)$.

4. ГЕОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

1. Нека a,b,c се должини на страни во триаголник. Докажи дека

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+2ca}{c^2+a^2} + \frac{c^2+2ab}{a^2+b^2} > 3 .$$

Решение. Од неравенството на триаголник имаме $a > |b-c|$, од каде со квадрирање добиваме $a^2 > (b-c)^2$, т.е. $a^2 + 2bc > b^2 + c^2$. Делејќи во последното неравенство со $b^2 + c^2 \ne 0$, добиваме $\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2} > 1$. По аналогија, ако ги искористиме неравенствата $b > |c-a|$ и $c > |a-b|$ добиваме $\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2} > 1$ и $\frac{c^2+2ab}{} > 1$, соодветно.

Сега јасно е дека даденото неравенство е точно.

2. Нека A, B и C се центрите на три кружници со радиуси r_a, r_b и r_c, соодветно, кои две по две се допираат однадвор. Ако r е радисуот на впишаната кружница во триаголникот ABC, докажи дека

$$r^2 \le \frac{1}{9}(r_a^2 + r_b^2 + r_c^2) .$$

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за страните на $\triangle ABC$. Јасно,

$$s = \frac{a+b+c}{2} = r_a + r_b + r_c .$$

Имаме $P = sr$, $s-a = r_a$, $s-b = r_b$, $s-c = r_c$, па од Хероновата формула следува

$$r^2 = \frac{P^2}{s^2} = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} = \frac{r_a r_b r_c}{r_a+r_b+r_c} .$$

Конечно, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$r^2 = \frac{r_a r_b r_c}{r_a+r_b+r_c} \le \frac{r_a^2+r_b^2+r_c^2}{9} .$$

3. Кружници со радиуси r_1, r_2, r_3 се допираат меѓу себе и ја допираат заедничката тангента во точките A, B, C соодветно, B е меѓу A и C. Докажи дека

$$16(r_1 + r_2 + r_3) \geq 9(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) .$$

Решение. Нека $O_i, i = 1,2,3$ е центрите на кружниците со радиуси $r_i, i = 1,2,3$, соодветно. Нека A' е подножјето на нормалата повлечена од O_2 на AO_1 (направи цртеж). Четириаголникот $A'O_2BA$ е правоаголник, па затоа $\overline{A'O_2} = AB$. Освен тоа, $\overline{O_1A'} = |r_1 - r_2|$ и $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$, па од Питагоровата теорема следува

$$\overline{AB}^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2 .$$

Аналогно се докажува дека $\overline{AC}^2 = 4r_1r_3$ и $\overline{BC}^2 = 4r_2r_3$. Понатаму, од $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ следува $\sqrt{r_1r_3} = \sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3}$. Ставаме $a = \sqrt{r_1}$ и $b = \sqrt{r_3}$, па од последното равенство добиваме

$$\sqrt{r_2} = \frac{\sqrt{r_1}\sqrt{r_3}}{\sqrt{r_1}+\sqrt{r_3}} = \frac{ab}{a+b} .$$

Според тоа, треба да докажеме дека

$$16(a^2 + b^2 + (\tfrac{ab}{a+b})^2) \geq 9(2ab + \tfrac{2a^2b}{a+b} + \tfrac{2ab^2}{a+b}) = 18(ab + \tfrac{ab(a+b)}{a+b}) = 36ab$$

т.е.

$$4((a^2 + b^2)(a+b)^2 + a^2b^2) \geq 9ab(a+b)^2 .$$

Понатаму, имаме

$$\begin{aligned} 4((a^2 + b^2)(a+b)^2 + a^2b^2) - 9ab(a+b)^2 &= 4(a^2 + b^2 - 2ab)(a+b)^2 - ab((a+b)^2 - 4ab \\ &= (a-b)^2(4(a+b)^2 - ab) \\ &= (a-b)^2(4a^2 + 7ab + 4b^2) \geq 0 \end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

4. Многуаголник кој е опишан околу круг со радиус r, е разложен на конечно многу триаголници. Докажи дека збирот на радиусите на впишаните кружници во овие триаголници е поголем од r.

Решение. За секој тангентен многуаголник со периметар L, плоштина P и радиус r на впишаниот круг, важи $2P = rL$. Нека, P, L, r и P_i, L_i, r_i, за $1 \leq i \leq n$, се плоштините, периметрите и радиусите на впишаните кругови во дадениот многуаголник, односно во дадените триаголници. Тогаш важи $L_i < L$, па затоа

$$r_1 + \ldots + r_n = \frac{2P_1}{L_1} + \ldots + \frac{2P_n}{L_n} > \frac{2P_1}{L} + \ldots + \frac{2P_n}{L} = 2\frac{P_1 + \ldots + P_n}{L} = \frac{2P}{L} = r ,$$

што требаше да се докаже.

5. Нека $n \geq 3$ е природен број. Ако $t_1, t_2, ..., t_n$ се позитивни реални броеви такви што

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + ... + t_n)(\tfrac{1}{t_1} + \tfrac{1}{t_2} + ... + \tfrac{1}{t_n}) ,$$

тогаш за секои i, j, k такви што $1 \leq i < j < k \leq n$ броевите t_i, t_j, t_k се должини на страни на триаголник. Докажи!

Решение. Заради симетрија доволно е да докажеме дека $t_1+t_2>t_3$. Бидејќи $\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}\ge 2$ за секои i,j добиваме

$$S=\sum_{i=1}^{n}t_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}=n^2+\sum_{i<j}(\frac{t_i}{t_j}+\frac{t_j}{t_i}-2)\ge n^2+\frac{t_1}{t_3}+\frac{t_3}{t_1}+\frac{t_2}{t_3}+\frac{t_3}{t_2}-4=n^2+c-4\,.$$

Нека претпоставиме дека $t_3=t_1+t_2+\varepsilon, \varepsilon\ge 0$. Тогаш

$$c=\frac{t_1+t_2}{t_3}+\frac{t_3(t_1+t_2)}{t_1t_2}=\frac{t_3}{t_3}+\frac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}+\varepsilon(\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}-\frac{1}{t_3})\ge 1+\frac{(t_1+t_2)^2}{t_1t_2}\ge 5\,,$$

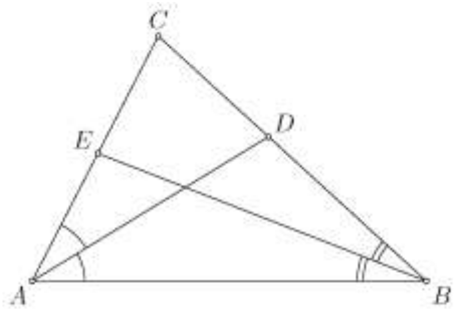
па затоа $S\ge n^2+1$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $t_1+t_2>t_3$.

Забелешка. Тврдењето на задачата е точно ако n^2+1 се замени со $(n+\sqrt{10}-3)^2$. Ова е најдобрата можна апроксимација.

6. Даден е триаголник ABC. Симетралата на $\measuredangle CAB$ ја сече страната BC во точката D, а симетралата на $\measuredangle ABC$ ја сече страната AC во точката E. Ако $\measuredangle ACB\ge 60^\circ$, докажи дека $\overline{AE}+\overline{BD}\le\overline{AB}$.

Решение. Ќе ги користиме вообичаените ознаки за должините на страните и аглите на триаголникот. Од својствата на симетралата следува

$$\overline{AE}=\frac{bc}{a+c} \text{ и } \overline{BD}=\frac{ac}{b+c},$$



па затоа

$$\overline{AE}+\overline{BD}=\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{b+c}=\frac{(a^2+b^2+ac+bc)c}{(a+c)(b+c)}\,.$$

Неравенството кое сакаме да го докажеме е еквивалентно со неравенството

$$\frac{(a^2+b^2+ac+bc)c}{(a+c)(b+c)}\le c\,,$$

т.е. последователно со неравенствата

$$a^2+b^2+ac+bc\le(a+c)(b+c)$$

$$a^2+b^2+ac+bc\le ab+ac+bc+c^2$$

$$a^2+b^2-c^2\le ab$$

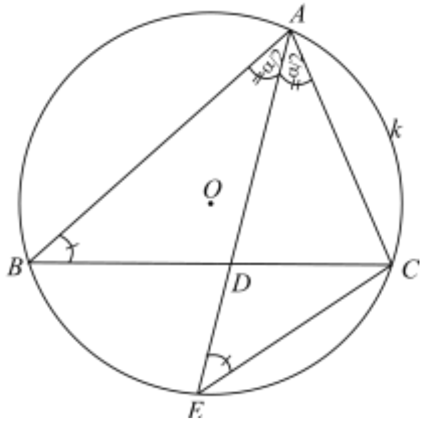
$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\le\frac{1}{2}.$$

Од друга страна, бидејќи $\gamma=\measuredangle ACB\ge 60^\circ$ имаме $\cos\gamma\le\frac{1}{2}$, па затоа од косинусната теорема следува

$$\frac{1}{2}\ge\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\,,$$

што и требаше да се докаже.

7. Нека $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ се должини на симетралите на аглите α,β,γ во $\triangle ABC$. Докажи, дека



$$s_\alpha < \sqrt{bc}\ . \qquad (1)$$

$$s_\beta < \sqrt{ac}\ , \qquad (2)$$

$$s_\gamma < \sqrt{ab}\ . \qquad (3)$$

$$s_\alpha s_\beta s_\gamma < abc\ . \qquad (4)$$

$$s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\alpha < ab+bc+ca\ . \qquad (5)$$

$$s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 < ab+ba+ca \qquad (6)$$

Решение. *Прв начин.* Нека симетралата на аголот α ја сече опишаната кружница k на $\triangle ABC$ во точката E (види цртеж). Следува дека

$$\measuredangle ABC = \measuredangle AEC\,, \qquad (7)$$

како периферни агли над ист лак AC на кружницата k . Понатаму,

$$\measuredangle BAE = \measuredangle EAC = \tfrac{\alpha}{2}\,,$$

т.е.

$$\measuredangle BAD = \measuredangle EAC = \tfrac{\alpha}{2}\,. \qquad (8)$$

Од (7) и (8) добиваме дека $\triangle ABD \sim \triangle AEC$, а одовде $\frac{c}{\overline{AE}} = \frac{s_\alpha}{b}$ т.е. $bc = s_\alpha \cdot \overline{AE}$, односно заради $s_\alpha < \overline{AE}$ следува

$$s_\alpha^2 < s_\alpha \cdot \overline{AE} = bc\,, \text{ т.е. } s_\alpha < \sqrt{bc}\,.$$

Втор начин. Ќе ја користиме познатата формула за должината на симетралата s_α на внатрешниот агол α на $\triangle ABC$: $s_\alpha = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{b+cs(s-a)}$. Ако во последната формула замениме $s = \frac{a+b+c}{2}$, последователно добиваме

$$s_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}} = \frac{\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{(b+c)^2-a^2} = \sqrt{bc(1-(\frac{a}{b+c})^2} < \sqrt{bc}\,.$$

Неравенствата (2) и (3) се докажуваат аналогно.

Ако ги помножиме неравенствата (1), (2) и (3), го добиваме неравенството (4).

Од неравенствата (1), (2) и (3) и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$s_\alpha s_\beta + s_\beta s_\gamma + s_\gamma s_\alpha < c\sqrt{ab} + a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} \le c\,\frac{a+b}{2} + a\,\frac{b+c}{2} + b\,\frac{a+c}{2} = ab+bc+ca$$

т.е. точно е неравенството (5).

Неравенството (6) се добива со квадрирање на неравенствата (1), (2) и (3), и собирање на добиените неравенства.

8. Докажи го неравенството:

$$\frac{s_\alpha}{a} + \frac{s_\beta}{b} + \frac{s_\gamma}{c} \le \frac{s}{2r}$$

каде a,b,c се должините на страните, $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ се должините на симетралите на аглите α,β,γ, s полупериметарот и r радиусот на впишаната кружница во триаголникот.

Решение. Нека D е пресекот на симетралата на аголот α со страната BC и со P_1 и P_2 да ги означиме плоштините на триаголниците ADC и ABD, соодветно. Имаме,

$$2P_1 = cs_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$2P_2 = bs_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$2P = (b+c)s_\alpha \sin\frac{\alpha}{2}$$

па затоа

$$\begin{aligned} s_\alpha &= \frac{2P}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{bc\sin\alpha}{(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\cdot\frac{2bc}{b+c} \\ &= \sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}\cdot\frac{2bc}{b+c} = \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}}\cdot\frac{2bc}{b+c} = \frac{\sqrt{s(s-a)}}{\sqrt{bc}}\frac{2bc}{b+c} \\ &= \frac{2\sqrt{bc}\sqrt{s(s-a)}}{b+c} \le \sqrt{s(s-a)}. \end{aligned}$$

Нека е $x = \frac{s_\alpha}{a} + \frac{s_\beta}{b} + \frac{s_\gamma}{c}$. Тогаш,

$$\begin{aligned} 2Px &= ah_a\frac{s_\alpha}{a} + bh_b\frac{s_\beta}{b} + ch_c\frac{s_\gamma}{c} = h_as_\alpha + h_bs_\beta + h_cs_\gamma \le s_\alpha^2 + s_\beta^2 + s_\gamma^2 \\ &\le s(s-a) + s(s-b) + s(s-c) = 3s^2 - 2s^2 = s^2, \end{aligned}$$

т.е. $x \le \frac{s^2}{2P} = \frac{s}{2r}$, што и требаше да се докаже.

9. Докажи, дека за аглите на остроаголен триаголник се точни неравенствата:

1) $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2} \ge 1$,

2) $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} \ge \sqrt{3}$.

Решение. Од теоремата на Бабилиер имаме $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ и уште важи $R \ge 2r$, $r_a = s\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, $r_b = s\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$, $r_c = s\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$ (Докажи!). Нека

$$S_1 = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} \text{ и } S_2 = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}.$$

Од претходните равенства и неравенството, следува

$$S_1 = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r_a}{s} + \frac{r_b}{s} + \frac{r_c}{s} = \frac{r_a + r_b + r_c}{s} = \frac{4R+r}{s} \ge \frac{9s}{r} \qquad (1)$$

Знак за равенство важи ако и само ако триаголникот е рамностран и заради тоа

$$r = \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{2}{3}s = \frac{\sqrt{3}}{9}s,$$

па заради тоа, ако замениме во (1), добиваме:

$$S_1 \ge \frac{9\frac{\sqrt{3}}{9}s}{s} = \sqrt{3}.$$

Но, $S_1 = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$, па ако квадрирање добиваме

$$S_1^2 = S_2 + 2(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}),$$

и заради точноста равенството

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1$$

(Докажи!) добиваме $S_1^2=S_2+2$. Според тоа,

$$S_2=S_1^2-2\geq(\sqrt{3})^2-2=1.$$

10. Во триаголникот ABC важи равенството $b+c=2R\sqrt{3}$. Докажи дека $\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}<\frac{2}{3}$.

Решение. Да забележиме дека M бидејќи за $b=c$ би имале $\sin\beta=\sin\gamma$, па равенството

$$b+c=2R\sqrt{3}$$

би го добило видот:

$$2R\sin\beta+2R\sin\gamma=2R\sqrt{3}$$

$$\sin\beta+\sin\gamma=\sqrt{3} \qquad (*)$$

или $\sin\beta=\sin\gamma=\frac{\sqrt{3}}{2}$, од каде што следува дека $\beta=\gamma=60^\circ$, па тогаш и $\alpha=60^\circ$. Но тогаш односот

$$\sin 2\alpha:\sin 3\alpha=\sin 120^\circ:\sin 180^\circ$$

нема смисла.

Значи, $SABC$ и $\alpha\neq 60^\circ$. Според синусната теорема имаме (*):

$$\sin\beta+\sin\gamma=\sqrt{3}$$

$$2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\sqrt{3}.$$

Бидејќи $b\neq c$, следува K, L, M па имаме дека N а тогаш

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\frac{\alpha}{2}>\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ и } \sin(90^\circ-\frac{\alpha}{2})>\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Оттука $\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{6}$, т.е. $\overline{AS}=\overline{BC}=13$ па $\frac{1}{2}<\cos\alpha<1$.

Сега да докажеме дека $\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}<\frac{2}{3}$. Имаме:

$$y=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)}=\frac{2\cos\alpha}{3-4\sin^2\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{3-4(1-\cos^2\alpha)}=\frac{2\cos\alpha}{4\cos^2\alpha-1}.$$

Да ставиме $2\cos\alpha=x$, тогаш $y=\frac{x}{x^2-1}$ и уште $1<x<2$ (заради $\frac{1}{2}<\cos\alpha<1$). Но функцијата $y=\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{x-\frac{1}{x}}$, за $x>1$ монотоно опаѓа, па затоа $y<\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$.

Значи, $\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}<\frac{2}{3}$.

11. Ако тежишните линии од темињата B и C на триаголникот ABC се заемно нормални, тогаш $\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C\geq\frac{2}{3}$. Докажи!

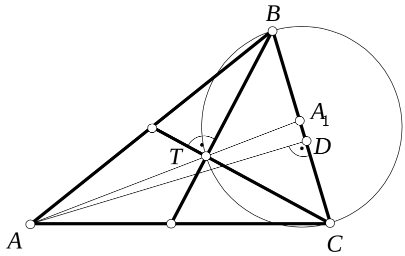
Решение. Бидејќи тежишните линии BB_1 и CC_1 во триаголникот ABC се заемно нормални, следува дека тежиштето T ќе припаѓа на кружницата $k(A_1,\overline{A_1B})$ (види цртеж). Тогаш

$$\overline{BC} = 2\overline{A_1T} \qquad (1)$$

Ако AD е висина на страната BC, тогаш од правоаголните триаголници ABD и ACD имаме $\operatorname{ctg} B = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}, \operatorname{ctg} C = \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}$, од каде што, имајќи предвид (1), добиваме

$$\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} + \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$$

$$= 2\frac{\overline{A_1T}}{\overline{AD}} \geq 2\frac{\overline{A_1T}}{\overline{A_1A}} = \frac{2}{3}.$$



12. Ако тежишните линии AM и BN на триаголникот ABC се заемно нормални, тогаш $\cos\gamma \geq 0.8$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Бидејќи, триаголникот ABT е правоаголен (види цртеж):

$$c^2 = (\tfrac{2}{3}t_a)^2 + (\tfrac{2}{3}t_b)^2. \qquad (*)$$

Имајќи предвид дека

$$t_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \; t_b^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$$

од (*) добиваме:

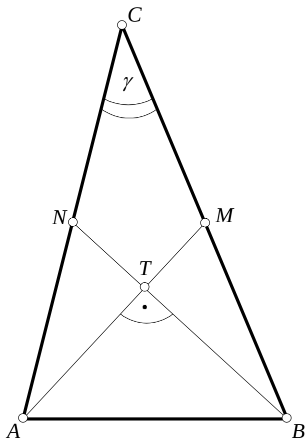
$$c^2 = \frac{4}{9}\left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right),$$

т.е.

$$5c^2 = a^2 + b^2.$$

Од косинусна теорема за триаголникот ABC имаме:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{4c^2}{2ab} \geq \frac{4c^2}{a^2+b^2} = \frac{4c^2}{5c^2} = 0{,}8.$$



Притоа, знакот за еднаквост важи ако $a = b$ (користевме $a^2 + b^2 \geq 2ab$).

Втор начин. Нека $\overline{AT} = 2x$, $\overline{BT} = 2y$, тогаш $\overline{TM} = x$, $\overline{TN} = y$ (види цртеж). Од правоаголните триаголници ATN, BTM и TMN имаме:

$$\overline{AT}^2 = 4x^2 + y^2, \quad \overline{BM}^2 = x^2 + 4y^2, \quad \overline{MN} = x^2 + y^2.$$

Според косинусната теорема за триаголникот MNC имаме

$$\overline{MN}^2 = \overline{NC}^2 + \overline{MC}^2 - 2\overline{MC} \cdot \overline{NC} \cdot \cos\gamma,$$

па бидејќи $\overline{NC} = \overline{AN}$ и $\overline{MC} = \overline{BM}$, добиваме:

$$x^2 + y^2 = 4x^2 + y^2 + x^2 + 4y^2 - 2\sqrt{4x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + 4y^2} \cdot \cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{4x^2+y^2}\sqrt{x^2+4y^2}} \geq \frac{2(x^2+y^2)}{\frac{4x^2+y^2+x^2+4y^2}{2}} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

13. Во рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AC} = \overline{BC} = 1$. За која вредност на $\gamma = \measuredangle ACB$, изразот $g = \frac{\overline{AB}^2+2}{P_{\triangle ABC}}$ достигнува најмала вредност.

Решение. Од косинусната теорема имаме $\overline{AB}^2 = 2-2\cos\gamma$, а за плоштината на триаголникот важи $P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\sin\gamma = \frac{\sin\gamma}{2}$. Тогаш добиваме

$$g(\gamma) = \frac{2(4-2\cos\gamma)}{\sin\gamma} = \frac{4(2-\cos\gamma)}{\sin\gamma}.$$

Ќе воведеме смена $x = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, со помош на која $\sin\gamma = \frac{2x}{1+x^2}$, $\cos\gamma = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, од каде $g = g(x) = \frac{2(1+3x^2)}{x}$. Имајќи предвид дека $\gamma\in(0,\pi)$, односно $\frac{\gamma}{2}\in(0,\frac{\pi}{2})$, јасно е дека $x>0$ и истовремено и $g>0$.

Ќе ја одредиме најмалата вредност која ја достигнува функцијата $g(x), x\in(0,\infty)$. Нека $g_{\min} = y$. Ќе определиме за која вредност на x истата се достигнува. Ја решаваме равенката $y = g(x) = \frac{2(1+3x^2)}{x}$, односно $6x^2 - yx + 2 = 0$. Равенката треба да има реални корени, па потребно е дискриминантата $D\geq 0$. Тогаш $y^2 - 48 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -4\sqrt{3}$ или $y \geq 4\sqrt{3}$. Бидејќи $g>0$ го разгледуваме само случајот $y\geq 4\sqrt{3}$, а тогаш најмалата вредност која функцијата може да ја достигне е $y = 4\sqrt{3}$ и истата се достигнува кога $6x^2 - 4x\sqrt{3} + 2 = 0$, односно за $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Тогаш соодветниот агол на триаголникот е $\gamma = \frac{\pi}{3}$. Бидејќи триаголникот е рамнокрак, добиваме дека тој е и рамностран.

14. Во паралелограмот $ABCD$ триаголникот ABD е остроаголен. Нека $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = 1$ и $\measuredangle DAB = \alpha$. Докажи дека кружниците K_A, K_B, K_C и K_D со радиус 1 и центри во A, B, C и D соодветно, го покриваат паралелограмот ако и само ако $a \leq \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$.

Решение. Околу остроаголниот триаголник ABD опишуваме кружница, со центар во точката O која е во внатрешноста на триаголникот.

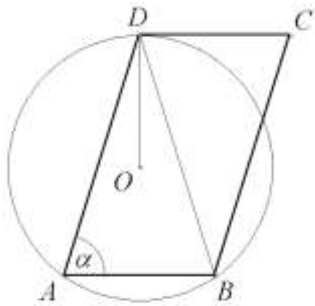
Ако точката C е внатре во кружницата, на спротивната страна на правата BD од точката A, тогаш $\measuredangle BCD \geq \pi - \alpha > \frac{\pi}{2}$, што противречи на претпоставката дека $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD < \frac{\pi}{2}$. Значи, темето C е надвор од кружницата.

Сега ќе докажеме дека ако кружниците K_A, K_B, K_C и K_D го покриваат целиот паралелограм, тогаш радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABD не е поголем од 1. Нека претпоставиме дека $R = \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OD} > 1$. Тогаш, кружниците K_A, K_B и K_D не ја покриваат точката O. Кружницата K_C исто така не ја покрива точката O, бидејќи $\overline{OC} > R > 1$. Затоа $R \leq 1$.

Нека $R\leq 1$. Од точката O спуштаме нормали на страните на ΔABD кои го делат $\triangle ABD$ на шест правоаголни триаголници, со должини на хипотенузи R. Оддалеченоста на секоја точка од триаголникот до најблиското негово теме не е поголема од должината на хипотенузата на шесте правоаголни триаголници на кој е разбиен триаголникот. Значи, за секоја точка $M \in \triangle ABD$, постои теме на триаголникот кое е оддалечено од неа на растојание помало или еднакво на R. Затоа кружницата со центар во тоа теме и радиус R ја покрива точката M. Според тоа $\triangle ABD$ е покриен со кружниците K_A, K_B и K_D. На ист начин се покажува дека ΔBCD е покриен со кружниците K_B, K_C и K_D.

Значи, кружниците K_A, K_B, K_C и K_D го покриваат целиот триаголник ако и само ако $R \le 1$.

Ќе докажеме дека потребен и доволен услов за да кружниците K_A, K_B, K_C и K_D го покриваат паралелограмот е да е́ исполнето неравенството од условот на задачата.



Од $\overline{AD} = 1$, $\overline{AB} = a$, $\measuredangle DAB = \alpha$, со примена на косинусната теорема добиваме

$$\overline{BD} = \sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\alpha}.$$

Понатаму, од $R = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}}{4P} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BD}}{2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\alpha}$ и $R \le 1$ добиваме $\frac{\sqrt{1+a^2-2a\cos\alpha}}{2\sin\alpha} \le 1$. Решението на последната неравенка е

$$\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha \le a \le \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha.$$

Левата страна на неравенството е исполнета бидејќи

$$a = \overline{AB} > \overline{AD}\cos\alpha = \cos\alpha,$$

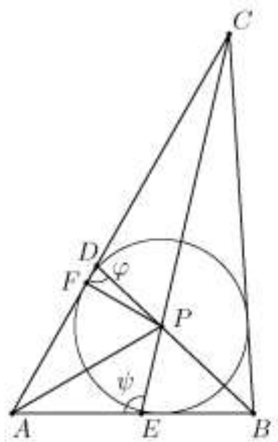
$\overline{AD} = 1$ и $\triangle ABD$ е остроаголен. Според тоа, $\triangle ABD$ можеме да го покриеме со кружници K_A, K_B, K_D ако и само ако

$$a \le \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha.$$

15. Даден е $\triangle ABC$, за кој $\measuredangle ABC > \measuredangle BCA$ и $\measuredangle BCA \ge 30^\circ$. Симетралите на $\measuredangle ABC$ и $\measuredangle BCA$ соодветно ги сечат спротивните страни во точките D и E. Правата BD ја сече правата CE во точката P. Ако $\overline{PD} = \overline{PE}$ и радиусот на впишаната кружница на $\triangle ABC$ има должина 1, определи ја најголемата можна должина на страната BC.

Решение. Нека $\varphi = \measuredangle BDA$ и $\psi = \measuredangle AEC$. Тогаш

$$\varphi = \gamma + \frac{\beta}{2}, \quad \psi = \beta + \frac{\gamma}{2}. \qquad (1)$$



Од $\beta > \gamma$ следува $\varphi < \psi$. Сега од синусната теорема за $\triangle APD$ и $\triangle APE$ имаме

$$\frac{\overline{AP}}{\sin\varphi} = \frac{\overline{PD}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\overline{PE}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\overline{AP}}{\sin\psi},$$

па затоа $\sin\varphi = \sin\psi$. Но, $0 < \varphi, \psi < 180^\circ$ и $\varphi < \psi$, повлекува $\psi = 180^\circ - \varphi$. Сега, од (1) имаме $\beta + \gamma = 120^\circ$ и $\alpha = 60^\circ$.

Од синусната теорема за $\triangle ABC$ следува

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b+c-a}{\sin\beta + \sin\gamma - \sin 60^\circ}.$$

Ако F е допирната точка на впишаната кружница со страната CA, добиваме $\operatorname{tg}\measuredangle FAP = \frac{1}{\frac{b+c-a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, па затоа $b+c-a = 2\sqrt{3}$. Од $\beta+\gamma = 120^\circ$ наоѓаме

$$\sin\beta + \sin\gamma = \sin(120^\circ - \gamma) + \sin\gamma = \sqrt{3}\sin(60^\circ - \gamma),$$

па затоа

$$a = \frac{6}{2\sqrt{3}\cos(60^\circ-\gamma)-\sqrt{3}} \le \frac{6}{2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}} = \frac{6}{3-\sqrt{3}},$$

и знак за равенство се достигнува за $\gamma = 30^\circ$.

16. Нека a, b, c се страни во триаголник, а α, β, γ соодветните агли (изразени во радијани). Докажи дека $\frac{\pi}{3} \le \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}$.

Решение. *Прв начин.* Да претпоставиме дека во триаголникот аглите α,β,γ лежат спроти страните a,b,c соодветно. Бидејќи во триаголник спроти поголем агол лежи поголема страна и обратно, т.е. неравенството $a \ge b$ е еквивалентно со неравенството $\alpha \ge \beta$, добиваме дека $a-b$ и $\alpha-\beta$ се истовремено негативни или ненегативни па $(a-b)(\alpha-\beta) \ge 0$. На сличен начин добиваме дека $(b-c)(\beta-\gamma) \ge 0$ и $(c-a)(\gamma-\alpha) \ge 0$. Според тоа

$$(a-b)(\alpha-\beta) + (b-c)(\beta-\gamma) + (c-a)(\gamma-\alpha) \ge 0. \qquad (*)$$

Последното неравенство да го трансформираме на следниов начин

$$a(\alpha-\beta-\gamma+\alpha) + b(-\alpha+\beta+\beta-\gamma) + c(-\beta+\gamma+\gamma-\alpha) \ge 0,$$

т.е.

$$a(2\alpha-\beta-\gamma) + b(-\alpha+2\beta-\gamma) + c(-\alpha-\beta+2\gamma) \ge 0.$$

Заменувајќи во последново неравенство $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ добиваме

$$a(3\alpha-\pi) + b(3\beta-\pi) + c(3\gamma-\pi) \ge 0,$$

односно

$$3(a\alpha+b\beta+c\gamma) - \pi(a+b+c) \ge 0$$

и оттука $\frac{\pi}{3} \le \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}$. Да забележиме дека еднаквост важи само во случајот $a=b=c$. Останува уште да се докаже дека $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}$. Бидејќи збирот на две страни од триаголникот е поголем од третата имаме

$$(b+c-a)\alpha + (c+a-b)\beta + (a+b-c)\gamma > 0.$$

Со трансформирање на ова неравенство добиваме

$$a(-\alpha+\beta+\gamma) + b(\alpha-\beta+\gamma) + c(\alpha+\beta-\gamma) > 0.$$

Заменувајќи $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ добиваме

$$a(-2\alpha+\pi) + b(-2\beta+\pi) + c(-2\gamma+\pi) > 0,$$

т.е.

$$-2(a\alpha+b\beta+c\gamma) + \pi(a+b+c) > 0$$

кое е еквивалентно со неравенството $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c} < \frac{\pi}{2}$.

Втор начин. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a \le b \le c$. Бидејќи спроти поголема страна во триаголник лежи поголем агол добиваме

$\alpha \le \beta \le \gamma$. Од неравенството на Чебишев $n=3$ и $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, добиваме

$$a\alpha+b\beta+c\gamma \ge \tfrac{1}{3}(a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma)=\tfrac{1}{3}(a+b+c)\pi$$

од што следува $\frac{\pi}{3} \le \frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}$. Со тоа едното неравенство од задачата е докажано.

Натаму, во триаголник збирот на две страни е поголем од третата, па имаме $a+b+c>2a$, $a+b+c>2b$ и $a+b+c>2c$. Оттука имаме $\frac{a}{a+b+c}<\frac{1}{2}$, $\frac{b}{a+b+c}<\frac{1}{2}$ и $\frac{c}{a+b+c}<\frac{1}{2}$. Користејќи го ова добиваме

$$\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}=\frac{a}{a+b+c}\alpha+\frac{b}{a+b+c}\beta+\frac{c}{a+b+c}\gamma<\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\pi}{2}.$$

Трет начин. Без губање на општоста да претпоставиме дека $a \ge b \ge c$. Тогаш и $\alpha \ge \beta \ge \gamma$. Бидејќи α е најголемиот агол во триаголникот следува $\alpha \ge \frac{\pi}{3}$. Можни се два случаи:

1. $\beta \ge \frac{\pi}{3}$. Тогаш $(a-c)\alpha+(b-c)\beta \ge \big((a-c)+(b-c)\big)\beta \ge (a+b-2c)\frac{\pi}{3}$. Со трансформирање на ова неравенство добиваме $a(\alpha-\frac{\pi}{3})+b(\beta-\frac{\pi}{3})+c(\frac{2\pi}{3}-\alpha-\beta)\ge 0$, односно $a(\alpha-\frac{\pi}{3})+b(\beta-\frac{\pi}{3})+c(\frac{2\pi}{3}-(\pi-\gamma))\ge 0$. Оттука

$$a(\alpha-\tfrac{\pi}{3})+b(\beta-\tfrac{\pi}{3})+c(\gamma-\tfrac{\pi}{3})\ge 0.$$

Со средување на последното неравенство го добиваме неравенството $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\ge\frac{\pi}{3}$.

2. $\beta<\frac{\pi}{3}$. Тогаш $(a+b-2c)\frac{\pi}{3}+(c-b)\beta<\big((a+b-2c)+(c-b)\big)\frac{\pi}{3}=(a-c)\frac{\pi}{3}\le(a-c)\alpha$, односно $(a-c)\alpha+(b-c)\beta \ge (a+b-2c)\frac{\pi}{3}$ па како во случајот 1. добиваме $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}\ge\frac{\pi}{3}$.

Со тоа првото неравенство во задачата е докажано.

Сега неравенството $\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}$ го трансформираме на следниов начин

$$a\alpha+b\beta+c\gamma<a\frac{\pi}{2}+b\frac{\pi}{2}+c\frac{\pi}{2} \quad\Leftrightarrow\quad a(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)+b(\tfrac{\pi}{2}-\beta)+c(\tfrac{\pi}{2}-\gamma)>0 \quad\Leftrightarrow$$

$$a(\tfrac{\pi}{2}-\alpha)+b(\tfrac{\pi}{2}-\beta)+c(\alpha+\beta-\tfrac{\pi}{2})>0 \quad\Leftrightarrow$$

$$(a+b-c)\frac{\pi}{2}-(a-c)\alpha>(b-c)\beta \qquad (1)$$

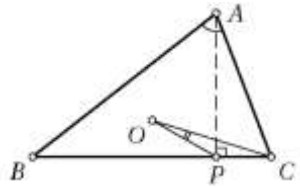
Сега ќе докажеме дека неравенството (1) важи. Навистина, имајќи го во предвид подредувањето на аглите $\alpha \ge \beta \ge \gamma$ и соодветното на нив на страните $a \ge b \ge c$, важи $\beta<\frac{\pi}{2}$ (во спротивно триаголникот би имал два тапи агли). Според тоа

$$(a+b-c)\frac{\pi}{2}-(a-c)\alpha \ge (a+b-c)\frac{\pi}{2}>(b-c)\frac{\pi}{2}>(b-c)\beta.$$

Значи важи (1) па и второто неравенство од задачата.

17. Нека ABC е остроаголен триаголник, O е центар на неговата опишана кружница и P е подножјето на висината повлечена од темето A кон страната BC. Ако $\measuredangle BCA \ge \measuredangle ABC+30^\circ$, докажи дека $\measuredangle CAB+\measuredangle COP<90^\circ$.

Решение. Бидејќи $\measuredangle OCP = 90^\circ - \measuredangle A$, треба да се докаже дека $\measuredangle OCP > \measuredangle COP$, т.е. $\overline{OP} > \overline{CP}$. Според неравенството на триаголник доволно е да се докаже дека $\overline{CP} \measuredangle \frac{1}{2}\overline{CO} = \frac{1}{2}R$. Навистина,



$$\overline{CP} = \overline{AC}\cos\gamma = 2R\sin\beta\cos\gamma \le 2R\sin\beta\cos(\beta+30^\circ)$$
$$= R(\sin(2\beta+30^\circ)-\sin 30^\circ) < \tfrac{1}{2}R.$$

18. Нека α и β се остри агли во триаголник. Третиот агол γ на триаголникот е тап ако и само ако $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta < 1$. Докажи!

Решение. Нека $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta < 1$. Од $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, следува $\mathrm{tg}\,\alpha,\ \mathrm{tg}\,\beta > 0$. Затоа

$$\mathrm{tg}\,\alpha < \tfrac{1}{\mathrm{tg}\,\beta} = \mathrm{ctg}\,\beta = \mathrm{tg}(\tfrac{\pi}{2}-\beta)\ .$$

Функцијата $f(x)=\mathrm{tg}\,x$ е растечка на интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$, па затоа $\alpha < \frac{\pi}{2}-\beta$, односно $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. Конечно, $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)>\frac{\pi}{2}$, што и требаше да се докаже.

Обратно, нека γ е тап агол. Тогаш $\mathrm{tg}\,\gamma<0$. Имаме:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\mathrm{tg}(\pi-\gamma)=-\mathrm{tg}\,\gamma>0,$$

односно $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta}>0$ и како $\mathrm{tg}\,\alpha,\ \mathrm{tg}\,\beta>0$, добиваме дека $1-\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta>0$, т.е. $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\beta<1$.

19. Нека ABC е правоаголен триаголник со остри агли α и β, соодветни должини на катети a и b и должина на хипотенуза c. Докажи, дека

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\ge\frac{2ab}{c^2}\ .$$

Решение. Бидејќи $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, важи $\sin\alpha,\sin\beta>0$), па затоа

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\ge\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}\ .$$

Според тоа,

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ge\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$$

и како $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\sin\alpha=\frac{a}{c}$ и $\sin\beta=\frac{b}{c}$, од последното неравенство добиваме

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ge\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{c}}\cdot\sqrt{\frac{b}{c}}\ ,$$

односно

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\ge\frac{2ab}{c^2}\ .$$

20. Нека α,β,γ се аглите и a,b,c должините на страните на произволен триаголник ABC. Докажи, дека

$$\frac{\cos\alpha}{a^3}+\frac{\cos\beta}{b^3}+\frac{\cos\gamma}{c^3}\geq\frac{3}{2abc}.$$

Решение. Од косинусната теорема и неравенството меѓу аритемтичката и геометриската средина следува

$$\frac{\cos\alpha}{a^3}+\frac{\cos\beta}{b^3}+\frac{\cos\gamma}{c^3}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2a^3bc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2b^3ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2c^3ab}=$$

$$=\frac{1}{2abc}[((\tfrac{a}{b})^2+(\tfrac{b}{a})^2)+((\tfrac{b}{c})^2+(\tfrac{c}{b})^2)+((\tfrac{c}{a})^2+(\tfrac{a}{c})^2)-3]$$

$$\geq\frac{1}{2abc}(2+2+2-3)=\frac{3}{2abc}.$$

21. Ако се a,b,c страни, h_a,h_b,h_c висини и α,β,γ агли во $\triangle ABC$, докажи дека

$$a+b+c<h_a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+h_b\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+h_c\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

Решение. Ќе докажеме дека

$$a+b<c+h_c\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

Имаме,

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab-2ab\cos\gamma+2ab\cos\gamma=c^2+2ab(1+\cos\gamma).$$

Од

$$P=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ch_c \quad \text{и} \quad \frac{1+\cos\gamma}{2}=\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

имаме

$$c^2+2\frac{ch_c}{\sin\gamma}\cdot 2\cos^2\frac{\gamma}{2}=c^2+2ch_c\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=(c+h_c\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})^2-(h_c\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})^2$$

$$<(c+h_c\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2})^2,$$

т.е.

$$a+b<c+h_c\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \tag{1}$$

Аналогно

$$b+c<a+h_a\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \tag{2}$$

$$c+a<b+h_b\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \tag{3}$$

Ако ги собереме неравенствата (1) , (2) и (3) го добиваме бараното неравенство.

22. Нека S е произволна точка во внатрешноста на ΔABC чии страни се a,b,c . Докажи дека

$$\overline{SA}\cos\frac{\measuredangle A}{2}+\overline{SB}\cos\frac{\measuredangle B}{2}+\overline{SC}\cos\frac{\measuredangle C}{2}\geq\frac{a+b+c}{2}.$$

Решение. Нека се D,E и F подножјата на нормалите спуштени од точката S на страните BC,CA и AB, соодветно. Ставаме $\alpha=\angle SAF$, $\beta=\angle SBD$ и $\gamma=\angle SCE$, направи цртеж.

Да забележиме дека за произволни $\varphi>0,\ \psi>0$ такви што $\varphi+\psi<\pi$ важи

$$\cos\varphi+\cos\psi=2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\leq 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\varphi=\psi$. Според тоа,

$$
\begin{aligned}
a+b+c &= (\overline{AE}+\overline{AF})+(\overline{BD}+\overline{BF})+(\overline{CD}+\overline{CE})\\
&= \overline{SB}(\cos\beta+\cos(\measuredangle B-\beta))+\overline{SA}(\cos\alpha+\cos(\measuredangle A-\alpha))+\\
&\quad +\overline{SC}(\cos\gamma+\cos(\measuredangle C-\gamma))\\
&\le 2\overline{SA}\cos\tfrac{\measuredangle A}{2}+2\overline{SB}\cos\tfrac{\measuredangle B}{2}+2\overline{SC}\cos\tfrac{\measuredangle C}{2}
\end{aligned}
$$

т.е.

$$\overline{SA}\cos\tfrac{\measuredangle A}{2}+\overline{SB}\cos\tfrac{\measuredangle B}{2}+\overline{SC}\cos\tfrac{\measuredangle C}{2}\ge\tfrac{a+b+c}{2}\ .$$

При тоа знак за равенство важи ако и само ако S е центар на впишаната кружница. Зошто?

23. Даден е ΔABC со страни $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$ и $\overline{AC}=c$. Докажете дека за секоја точка M, во просторот е исполнето неравенството

$$abc+bb_1^2+cc_1^2\ge aa_1^2$$

каде $\overline{MA}=a_1,\overline{MB}=b_1,\overline{MC}=c_1$. Кога важи зна за равенство равенството?

Решение. Од очигледното неравенство

$$(-a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC})^2\ge 0$$

добиваме

$$a^2\overrightarrow{MA}^2+b^2\overrightarrow{MB}^2+c^2\overrightarrow{MC}^2-2ab\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}-2ac\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC}+2bc\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}\ge 0 \qquad (1)$$

Од косинусната теорема за $\triangle AMB$, $\triangle BMC$ и $\triangle CMA$ наоѓаме:

$$\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}=\tfrac{1}{2}(a_1^2+b_1^2-c^2)$$

$$\overrightarrow{MB}\overrightarrow{MC}=\tfrac{1}{2}(b_1^2+c_1^2-a^2)$$

$$\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MC}=\tfrac{1}{2}(a_1^2+c_1^2-b^2)$$

Со замена во (1) и ако поделиме со $-a+b+c>0$ го добиваме бараното неравенство.

24. Точката P се наоѓа во внатрешноста на рамностраниот ΔABC. Нека $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=1$, $a=\overline{PA}, b=\overline{PB}, c=\overline{PC}$. Докажи дека

$$\tfrac{3}{4}<a^2+b^2+c^2<2\ .$$

Решение. Нека $\measuredangle BPC=\alpha, \measuredangle CPA=\beta, \measuredangle APB=\gamma$. Од косинусната теорема имаме

$$b^2+c^2=1+2bc\cos\alpha,\ a^2+b^2=1+2ab\cos\gamma,\ a^2+c^2=1+2ac\cos\beta\ . \qquad (1)$$

Да забележиме дека најмалку два од аглите α,β,γ се тапи, на пример α и β. Јасно, $\gamma>60^\circ$. Според тоа,

$$bc\cos\alpha<0,\ \ ac\cos\beta<0,\ ab\cos\gamma<1\cdot 1\cdot\tfrac{1}{2}\ .$$

Ако ги собереме овие неравенства добиваме

$$bc\cos\alpha+ac\cos\beta+ab\cos\gamma<\tfrac{1}{2}\,,$$

од што заради (1) следува $a^2+b^2+c^2<2$.

Јасно, $a+b>1$, па затоа од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}(a+b)^2 > \frac{1}{2}$. Слични, $a^2+c^2 > \frac{1}{2}$ и $b^2+c^2 > \frac{1}{2}$. Ако ги собереме последните три неравенства го добиваме неравенството

$$\frac{3}{4} < a^2+b^2+c^2 .$$

25. Нека a,b,c се должините на страните на триаголник со плоштина P. Докажи, дека

$$P < \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) .$$

Решение. Нека α е аголот на разгледуваниот триаголник наспроти страната со должина a. Од формулата $P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ следува $P \leq \frac{1}{2}bc$, т.е. $2P \leq bc$. Аналогно, $2P \leq ca$ и $2P \leq ab$. Аго ги собереме последните три неравенства добиваме $6P \leq ab+bc+ca$. Понатаму, равенството $P=\frac{1}{2}bc$ е исполнето само ако аголот α е прав, па затоа не е можно истовремено да важи $P=\frac{1}{2}bc=\frac{1}{2}ca=\frac{1}{2}ab$. Значи,

$$6P < ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2, \text{ т.е. } P < \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) .$$

26. Докажете дека за нетапоаголен триаголник $\triangle ABC$ со страни a,b,c радиус на впишаната кружница r и на опишаната кружница R важи неравенството

$$2(R+r) \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2} \tag{1}$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Да ги означиме со α,β,γ аглите на триаголникот. Според синусната теорема имаме

$$a=2R\sin\alpha,\ \ b=2R\sin\beta,\ \ c=2R\sin\gamma$$

Од друга страна

$$c=r(\operatorname{ctg}\tfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\tfrac{\beta}{2})=r\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} .$$

Значи,

$$r=\frac{2R\sin\gamma\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} .$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} R+r &= R(1+4\sin\tfrac{\alpha}{2}\sin\tfrac{\beta}{2}\sin\tfrac{\gamma}{2}) = R[1+2(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2})\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}] \\ &= R(1-2\sin^2\tfrac{\gamma}{2}+\cos\alpha+\cos\gamma) \qquad (2) \\ &= R(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma). \end{aligned}$$

Ако го искористиме равенството (2) тогаш неравенството (1) е еквивалентно на неравенството

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma) \leq 0 \tag{3}$$

Ја трансформираме левата страна на неравенството (3) и добиваме

$$\begin{aligned}
&(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2-(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)=\\
&\quad=2\cos\alpha\cos\beta+2\cos\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)+\cos^2\alpha+\cos 2\beta+2\cos^2\gamma-1\\
&\quad=\cos(\alpha-\beta)-1+\cos(\alpha+\beta)+2\cos\gamma(\cos\alpha+\cos\beta)+\\
&\quad\quad+2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+2\cos^2\gamma\\
&\quad=[\cos(\alpha-\beta)-1]-\cos\gamma(1-2\cos\alpha-2\cos\beta+2\cos(\alpha-\beta)+2\cos(\alpha+\beta))\\
&\quad=[\cos(\alpha-\beta)-1]-\cos\gamma(1-2\cos\alpha-2\cos\beta+4\cos\alpha\cos\beta)\\
&\quad=[\cos(\alpha-\beta)-1]-\cos\gamma(1-2\cos\alpha)(1-2\cos\beta).
\end{aligned}$$

Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека и двата агли не се помали од 60° или и двата агли не се поголеми од 60°, и тогаш

$$(1-2\cos\alpha)(1-2\cos\beta)\ge 0$$

Освен тоа, очигледно $\cos(\alpha-\beta)-1\le 0$, $\cos\gamma\ge 0$, т.е. добиениот израз е непозитивен, па значи неравенството (3) важи, т.е. важи неравенството (1).

Равенството се добива ако и само ако триаголникот е рамностран или рамнокрак правоаголен. Зошто?

27. Нека се α,β,γ агли на триаголникот ABC.

а) Докажи го равенството

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

б) Докажи го неравенството

$$\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+5}\le 4\sqrt{3}.$$

Решение. а) Од $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$ добиваме

$$\operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2})=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}},$$

т.е.

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}},$$

од што следува

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1$$

б) Од докажното равенство и до неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+5})^2=\\
&\quad=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+15+2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+5}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+5}+\\
&\quad\quad+2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+5}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+5}+2\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+5}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+5}\\
&\quad\le 15+3(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})+30=48.
\end{aligned}$$

т.е.

$$\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+5}\leq 4\sqrt{3}\,.$$

28. Ако r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, P е плоштината и $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ се должините на симетралите на внатрешните агли на триаголникот, докажете дека

$$rs_\alpha s_\beta s_\gamma \leq P^2$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Во претходната задача докажавме дека

$$s_\alpha^2 \leq s(s-a)$$
$$s_\beta^2 \leq s(s-b)$$
$$s_\gamma^2 \leq s(s-c)$$

каде $s=\frac{a+b+c}{2}$. Според тоа, од $P=rs$ и $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ добиваме

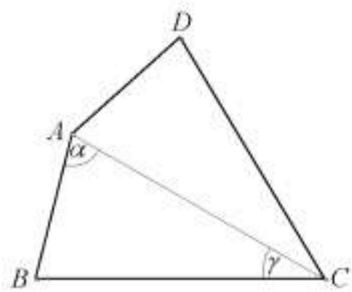
$$rs_\alpha s_\beta s_\gamma \leq rs\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=P\cdot P=P^2$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}=1$, т.е. $b=c$, $\frac{2\sqrt{ac}}{a+c}=1$, т.е. $a=c$ и $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}=1$, т.е. $a=b$, односно ако и само ако $a=b=c$.

29. Даден е конвексен четириаголник со плоштина $32\,cm^2$ и збир на должините на две негови спротивни страни и една дијагонала, кој изнесува $16\,cm$. Најди ги сите вредности кои може да ги има должината на другата дијагонала.

Решение. Нека во четириаголникот $ABCD$

$$\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{CD}=16\,. \qquad (1)$$



Неговата површина е еднаква на

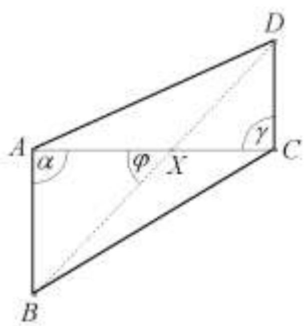
$$2P=\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\alpha+\overline{AC}\cdot\overline{CD}\sin\gamma\,,$$

каде што $\alpha=\angle CAB$ и $\gamma=\angle ACD$. Понатаму, точна е оценката

$$2P\leq\overline{AB}\cdot\overline{AC}+\overline{AC}\cdot\overline{CD}=\overline{AC}(\overline{AB}+\overline{CD})\,,$$

па од (1) имаме

$$2P\leq\overline{AC}(16-\overline{AC})\,,$$



при што знак за равенство важи ако и само ако $\alpha=\gamma=90^\circ$. Изразот $x(16-x)$ прима најголема вредност 64 (за $x=8$), па затоа

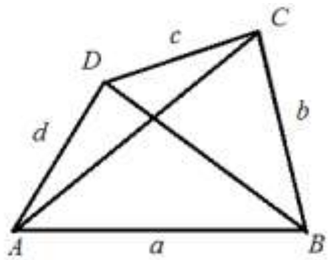
$$2P\leq 64\,. \qquad (2)$$

Според условот од задачата во (2) важи знак за равенство, па затоа $\overline{AC}=8$ и $\alpha=\gamma=90^\circ$. Понатаму, $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{CD}$, а тоа е можно ако аголот меѓу

AC и BD е еднаков на 45°. Тогаш $\overline{BD} = 8\sqrt{8}$.

30. Нека a,b,c и d се должините на последователни страни на конвексен четириаголник со плоштина P . Докажи дека важи неравенството

$$P \le \frac{1}{4}(a+c)(b+d).$$



Решение. Со $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ги означиме аглите при темињата A,B,C,D, соодветно на конвексниот четириаголникот $ABCD$ и нека $\overline{AB}=a,\ \overline{BC}=b,\ \overline{CD}=c$ и $\overline{DA}=d$. Имаме

$$P = P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{1}{2}ab\sin\beta + \frac{1}{2}cd\sin\delta$$

$$\le \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}cd = \frac{1}{2}(ab+cd).$$

Аналогно,

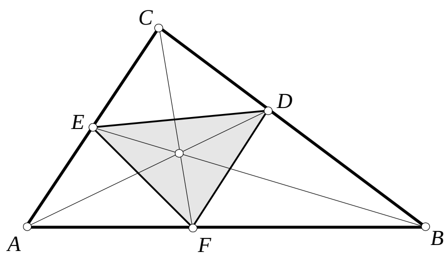
$$P = P_{ABD} + P_{BCD} = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma \le \frac{1}{2}ad + \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}(ad+bc) .$$

Ако ги собереме последните две неравенства, добиваме

$$2P \le \frac{1}{2}(ab+cd+ad+bc) = \frac{1}{2}(a+c)(b+d) ,$$

од каде што следува бараното неравенство.

31. Нека AD, BE и CF се бисектриси на аглите во триаголникот ABC. Докажи дека $4P_{DFE} \le P$, каде што P е плоштината на триаголникот ABC, а P_{DFE} е плоштината на триаголникот DFE.



Решение. Според ознаките на цртежот имаме:

$$P_{DFE} = P - (P_{AFE} + P_{BDF} + P_{CED}). \quad (*)$$

применувајќи го својството за бисектрисата на внатрешниот агол на триаголникот, наоѓаме:

$$\overline{AF} = \frac{bc}{a+b}, \qquad \overline{AE} = \frac{bc}{a+c}.$$

Тогаш:

$$P_{AFE} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AF}\cdot\overline{AE}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{b^2c^2\sin\alpha}{(a+b)(a+c)} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha\cdot\frac{bc}{(a+b)(a+c)} = \frac{bcP}{(a+b)(a+c)}.$$

Аналогно наоѓаме дека:

$$P_{BDF} = \frac{acP}{(b+a)(b+c)}, \qquad P_{CED} = \frac{abP}{(c+a)(c+b)}.$$

Заменувајќи ги овие вредности во (*), по средувањето добиваме:

$$P_{DFE} = P\left(1 - \frac{bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right) = \frac{2abcP}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Бидејќи $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$, следува:

$$P_{DFE} \le \frac{2abcP}{8abc} = \frac{P}{4}, \text{ т.е. } 4P_{DFE} \le P.$$

32. Ако T е тежиштето на $\triangle ABC$, докажи дека важи

$$\frac{1}{\sin\measuredangle TAC} + \frac{1}{\sin\measuredangle TBC} \ge 4 .$$

Решение. Нека P е плоштината на триаголникот, a,b,c се должините на страните наспроти темињата A,B,C и t_a,t_b,t_c се соодветните тежишни линии. Ако A_1 е средината на страната BC, тогаш $P=2P_{A_1AC}=bt_a\sin\measuredangle TAC$. Аналогно $P=at_b\sin\measuredangle TBC$.

Понатаму, ако $a\geq b$, тогаш $t_b\geq t_a$, па затоа $(a-b)(t_b-t_a)\geq 0$, од каде добиваме

$$at_b+bt_a\geq at_a+bt_b\geq 2P+2P=4P$$
$$\frac{P}{\sin\measuredangle TAC}+\frac{P}{\sin\measuredangle TBC}\geq 4P$$
$$\frac{1}{\sin\measuredangle TAC}+\frac{1}{\sin\measuredangle TBC}\geq 4,$$

што и требаше да се докаже.

33. Нека a,b,c се должини на страни на триаголник. Докажи, дека

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc>a^3+b^3+c^3.$$

Решение. Нека α,β,γ се аглите на триаголникот наспроти страните $a,b.c$, соодветно. Ако ја искористиме косинусната теорема, добиваме дека даденото неравенство последователно е еквивалелнтно со неравенствата

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+4abc-a^3-b^3-c^3>0$$
$$a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)+c(a^2+b^2-c^2)-2abc>0$$
$$2abc\cdot\cos\alpha+2abc\cdot\cos\beta+2abc\cdot\cos\gamma-2abc>0$$
$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1>0$$
$$2\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\tfrac{\gamma}{2}$$
$$2\cos(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\gamma}{2})\cdot\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\tfrac{\gamma}{2}>0$$
$$2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cdot\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}-2\sin^2\tfrac{\gamma}{2}>0$$
$$2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cdot(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}-\sin\tfrac{\gamma}{2})>0$$
$$2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cdot(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}-\sin(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\alpha+\beta}{2}))>0$$
$$2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cdot(\cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2})>0$$
$$2\sin\tfrac{\gamma}{2}\cdot(-2)\sin\tfrac{\alpha}{2}\cdot\sin(-\tfrac{\beta}{2})>0$$
$$4\sin\tfrac{\alpha}{2}\cdot\sin\tfrac{\beta}{2}\cdot\sin\tfrac{\gamma}{2}>0.$$

Конечно, бидејќи $\alpha,\beta,\gamma\in(0,\pi)$, важи $\sin\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\beta}{2},\sin\frac{\gamma}{2}>0$, т.е. точно е последното неравенство, од што следува дека е точно и даденото неравенство.

34. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол во темето C. Нека точката M е средина на натетата BC. Докажи, дека $\sin\measuredangle MAB\leq\frac{1}{3}$.

Кога важи знак за равенство?

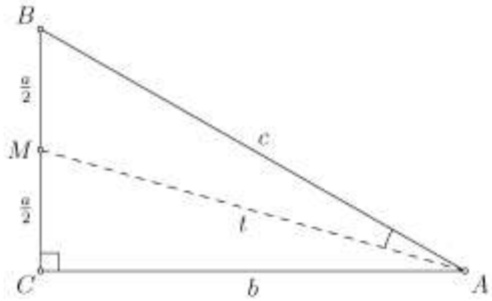
Решение. Бидејќи $\measuredangle MAB = \measuredangle CAB - \measuredangle CAM$ од адиционите формули следува

$$\sin\measuredangle MAB = \sin\measuredangle CAB \cdot \cos\measuredangle CAM - \cos\measuredangle CAB \cdot \sin\measuredangle CAM$$

Ако означиме

$$\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c, \overline{AM} = t ,$$

од правоаголните триаголници ABC и AMC добиваме



$$\sin\measuredangle MAB = \frac{a}{c}\cdot\frac{b}{t} - \frac{b}{c}\cdot\frac{\frac{a}{2}}{t} = \frac{ab}{2ct} .$$

Бидејќи $\measuredangle MAB$ е остар, неговиот синус е позитивен, па затоа доволно е да докажеме дека

$$(\sin\measuredangle MAB)^2 \le \tfrac{1}{9}, \text{ т.е. } \frac{a^2b^2}{4c^2t^2} \le \frac{1}{9} .$$

Но, $c^2 = a^2 + b^2$ и $t^2 = \frac{a^2}{4} + b^2$, па затоа последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$9a^2b^2 \le (a^2 + b^2)(a^2 + 4b^2) ,$$

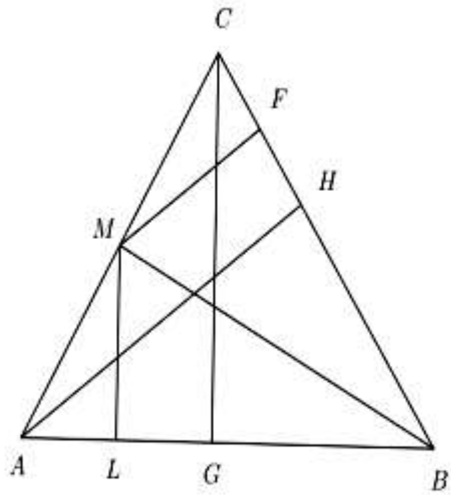
т.е. со неравенството

$$(a^2 - 2b^2)^2 \ge 0 ,$$

кое очигледно важи. Според тоа, неравенството важи во секој правоаголен триаголник, а знак за равенство важи ако и само ако $a^2 = 2b^2$, т.е. во правоаголен триаголник во кој важи $\overline{BC} = \overline{AC}\sqrt{2}$.

35. Во остроаголниот триаголник ABC, должината на најголемата висина AH е еднаква на должината на тежишната линија BM. Докажи дека $\measuredangle ABC \le 60^\circ$. Дали некогаш се достигнува знак на равенство?

Решение. Нека точката M е средина на отсечката $\overline{AC}$ и нека $\overline{CG}$ е друга висина на триаголникот ABC. Од M повлекуваме нормали кон другите две страни на триаголникот. Нека пресечните точки на нормалите со страните BC и AB се F и L, соодветно (цртеж десно). Тогаш, од триаголникот MBF имаме



$$\overline{MF} = \overline{BM}\sin\measuredangle MBF ,$$

односно

$$\overline{BM} = \overline{AH} = 2\overline{MF} = 2\overline{BM}\sin\measuredangle MBF$$

($\overline{MF}$ е средна линија за триаголникот AHC). Добиваме дека $\sin\measuredangle MBF = \frac{1}{2}$, од каде следува

$$\measuredangle MBF = 30^\circ \tag{1}$$

Од триаголникот LBM имаме

$$\overline{BM} = \overline{AH} \geq \overline{CG} = 2\overline{ML} = 2BM \sin\measuredangle ABM,$$

односно $\sin\measuredangle ABM \leq \frac{1}{2}$, од каде следува дека

$$\measuredangle ABM \leq 30^\circ \tag{2}$$

Од (1) и (2) добиваме

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABM + \measuredangle MBC \leq 60^\circ .$$

Аголот $\measuredangle ABM = 30^\circ$ ако и само ако $\overline{AH} = \overline{CG}$. Тоа е возможно само кога триаголникот ABC е рамнокрак, со агол при врвот од 60°, односно кога триаголникот ABC е рамностран.

36. Нека се a, b, c, d страните, а P плоштината на конвексен четириаголник. Докажи дека важи $P \leq \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека α и β се аглите меѓу страните $a = \overline{AB}$ и $b = \overline{BC}$, односно $c = \overline{CD}$ и $d = \overline{DA}$ соодветно. Тогаш,

$$P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta \leq \frac{1}{2}(ab+cd)$$
$$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{c^2+d^2}{2}\right) = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} .$$

Равенство во првото неравенство важи акко $\alpha = \beta = 90^\circ$, а во второто акко $a = b$ и $c = d$. Значи, равенство важи акко дадениот четириаголник е квадрат. ♦

37. Права ги сече страните AB и BC на триаголникот ABC во точките M и K, соодветно. Ако плоштината на $\triangle MBK$ е еднаква на плоштината на четириаголникот $AMKC$, докажи дека

$$\frac{\overline{MB}+\overline{BK}}{\overline{AM}+\overline{CA}+\overline{KC}} \geq \frac{1}{3} . \tag{1}$$

Решение. Да означиме $\overline{BK} = y, \overline{KC} = z, \overline{CA} = b, \overline{AM} = u$ и $\overline{MB} = x$ (направи цртеж). Бидејќи $P_{BMK} = P_{AMKC}$, важи $P_{BMK} > P_{MKC}$, т.е. $y > z$ и $P_{BMK} > P_{AMK}$, т.е. $x > u$. Нека го претпоставиме спротивното, т.е.

$$\frac{\overline{MB}+\overline{BK}}{\overline{AM}+\overline{CA}+\overline{KC}} < \frac{1}{3} .$$

Од последното неравенство следува низата неравенства

$$\frac{x+y}{u+b+z} < \frac{1}{3} \Rightarrow 3x+3y > u+b+z < x+y+b$$
$$\Rightarrow 2x+2y < b$$
$$\Rightarrow x+u+y+z < 2x+2y < b$$
$$\Rightarrow (x+u)+(y+z) < b$$
$$\Rightarrow \overline{AB}+\overline{BC} < \overline{CA},$$

што не е можно, па затоа точно е неравенството (1).

38. Даден е произволен триаголник ABC. На страните AB, BC и CA се избрани произволни точки C_1, A_1 и B_1. Нека со P_1, P_2 и P_3 се означени плоштините на триаголниците AC_1B_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 соодветно, а со P е означена плоштината на триаголникот ABC. Докажи, дека

$$\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}+\sqrt{P_3} \le \tfrac{3}{2}\sqrt{P}.$$

Решение. За плоштините на триаголниците AB_1C_1 и ABC важи:

$$P_1 = \tfrac{1}{2}\overline{AB_1}\cdot\overline{AC_1}\sin\measuredangle A \text{ и } P = \tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\measuredangle A.$$

Според тоа, $\frac{P_1}{P} = \frac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}}$. Слично се добива $\frac{P_2}{P} = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}}$ и $\frac{P_3}{P} = \frac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{CA_1}}{\overline{CB}}$. Тогаш

$$\begin{aligned}\sqrt{\tfrac{P_1}{P}}+\sqrt{\tfrac{P_2}{P}}+\sqrt{\tfrac{P_3}{P}} &= \sqrt{\tfrac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}}\cdot\tfrac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}}}+\sqrt{\tfrac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}}\cdot\tfrac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}}}+\sqrt{\tfrac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}}\cdot\tfrac{\overline{CA_1}}{\overline{CB}}}\\ &\le \tfrac{1}{2}(\tfrac{\overline{AB_1}}{\overline{AC}}+\tfrac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}})+\tfrac{1}{2}(\tfrac{\overline{BC_1}}{\overline{AB}}+\tfrac{\overline{BA_1}}{\overline{BC}})+\tfrac{1}{2}(\tfrac{\overline{CB_1}}{\overline{AC}}+\tfrac{\overline{CA_1}}{\overline{CB}})\\ &= \tfrac{1}{2}(\tfrac{\overline{AB_1}+\overline{CB_1}}{\overline{AC}})+\tfrac{1}{2}(\tfrac{\overline{BC_1}+\overline{AC_1}}{\overline{AB}})+\tfrac{1}{2}(\tfrac{\overline{BA_1}+\overline{CA_1}}{\overline{BC}}) = \tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

39. Над страните на $\triangle ABC$ со плоштина P се конструирани ромбови $ABDE$, $BCGF$ и $CAIH$ така што $\measuredangle ABE = \measuredangle BAC, \measuredangle BCG = \measuredangle CBA, \measuredangle CAI = \measuredangle ACB$. Докажи, дека збирот на плоштините на трите ромба е поголем или еднаков на $6P$ и дека знак за равенство важи ако и само ако $\triangle ABC$ е рамностран.

Решение. Со α, β, γ да ги означиме аглите на триаголникот ABC, а со P_a, P_b и P_c плоштините на ромбовите $BCGF, CAIH$ и $ABED$, соодветно. Тогаш

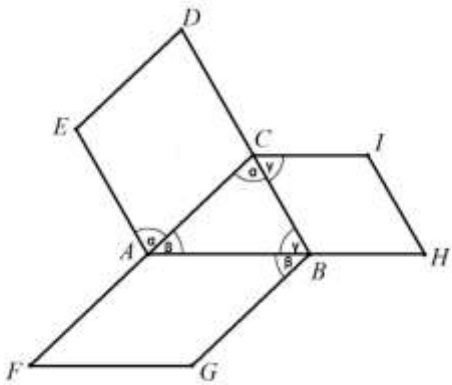
$P_a = a^2\sin\beta,\ P_b = b^2\sin\gamma,\ P_c = c^2\sin\alpha$.

Користејќи ја синусната теорема

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

каде R е радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, добиваме

$$\begin{aligned}P_a+P_b+P_c &= a^2\sin\beta + b^2\sin\gamma + c^2\sin\alpha\\ &= \tfrac{a^2b}{2R}+\tfrac{b^2c}{2R}+\tfrac{c^2a}{2R}\\ &= \tfrac{1}{2R}(a^2b+b^2c+c^2a).\end{aligned}$$



Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^2b+b^2c+c^2a \ge 3\sqrt[3]{a^2b\cdot b^2c\cdot c^2a} = 3abc,$$

па ако го искористиме претходното равенство добиваме

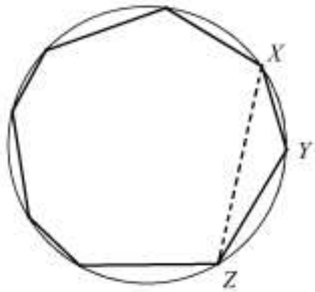
$$P_a+P_b+P_c = \tfrac{1}{2R}(a^2b+b^2c+c^2a) \ge \tfrac{1}{2R}\cdot 3abc = 6P.$$

Јасно, во неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина знак за равенство важи ако и само ако $a^2b = b^2c = c^2a$. Ако $a^2b = b^2c = c^2a$, тогаш важи $a^2 = bc$ и $ab = c^2$, од каде добиваме $a^3b = bc^3$, т.е. $a = c$, па затоа $a = b = c$.

Обратно, ако $a=b=c$, тогаш $a^2b=b^2c=c^2a$, па затоа $P_a+P_b+P_c=6P$.

40. Нека $n\geq 3$ е природен број. Во кружница е впишан $n-$аголник $A_1A_2...A_n$. Докажи, дека постојат три темиња $A,B,C\in\{A_1,A_2,...,A_n\}$ за кои важи

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2\geq\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_2A_3}^2+...+\overline{A_iA_{i+1}}^2+...+\overline{A_nA_1}^2.$$



Решение. Ако $n=3$, тогаш тврдењето е тривијално. Нека $n\geq 4$. Секој конвексен $n-$аголник има барем еден внатрешен агол кој не е помал од 90°. Навистина, збирот на внатрешните агли на $n-$аголникот е еднаков на $(n-2)\cdot 180^\circ$, па затоа постои барем еден агол кој не е помал од

$$\tfrac{n-2}{n}\cdot 180^\circ=(1-\tfrac{2}{n})\cdot 180^\circ\geq(1-\tfrac{1}{2})\cdot 180^\circ=90^\circ.$$

Нека тоа е $\measuredangle XYZ$. Тогаш дадениот $n-$аголник со поврзување на темињата X и Z, т.е. со отфрлање на $\triangle XYZ$ можеме да го редуцираме на $(n-1)-$аголник. Тврдиме дека збирот на квадратите на страните на новодобиениот $(n-1)-$аголник не е помал од збирот на квадратите на страните на почетниот $n-$аголник. Навистина, бидејќи аголот при темето Y е поголем или еднаков од 90°, од косинусната теорема следува

$$\overline{XZ}^2=\overline{XY}^2+\overline{YZ}^2-2\overline{XY}\cdot\overline{YZ}\cos\measuredangle XYZ\geq\overline{XY}^2+\overline{YZ}^2.$$

Се додека е можно, со новодобиениот многуаголник ја повторуваме постапката, притоа исфрлајќи едно теме со агол поголем или еднаков на 90°, се додека не добиеме триаголник ABC. Неговите темиња A,B,C го задоволуваат неравенството на задачата.

41. Даден е $\triangle ABC$ и точки D,E,F соодветно на неговите страни BC,CA,AB, различни од темињата на триаголникот. Докажи, ако четириаголникот $AFDE$ е тетивен, тогаш

$$\frac{4P_{DEF}}{P_{ABC}}\leq\frac{\overline{EF}^2}{\overline{AD}^2}.$$

Решение. Последователно имаме

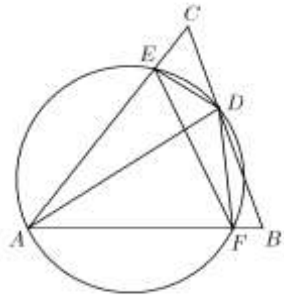
$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}}=\frac{P_{ABD}+P_{ACD}}{P_{DEF}}=\frac{P_{ABD}}{P_{DEF}}+\frac{P_{ACD}}{P_{DEF}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\measuredangle FAD}{\overline{ED}\cdot\overline{EF}\sin\measuredangle DEF}+\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}\sin\measuredangle EAD}{\overline{DF}\cdot\overline{EF}\sin\measuredangle DFE}$$

$$=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\overline{ED}\cdot\overline{EF}}+\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}}{\overline{DF}\cdot\overline{EF}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{EF}}\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}\right)\geq 2\frac{\overline{AD}}{\overline{EF}}\sqrt{\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}},$$

при што искористивме дека $\measuredangle FAD=\measuredangle DEF$ и $\measuredangle EAD=\measuredangle DFE$, бидејќи четириаголникот $AFDE$ е тетивен. Од друга страна $\measuredangle BAC+\measuredangle EDF=180^\circ$, па затоа $\sin\measuredangle BAC=\sin\measuredangle EDF$ и затоа

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\measuredangle BAC}{\overline{DE}\cdot\overline{DF}\sin\measuredangle EDF}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{DE}\cdot\overline{DF}}.$$

Според тоа,



$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} \geq 2\frac{\overline{AD}}{\overline{EF}}\sqrt{\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}}},$$

и со квадрирање на последното неравенство го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако точката D е средина на BC.

42. Нека M,N,P се подножјата на нормалите повлечени од тежиштето G на остроаголниот $\triangle ABC$ соодветно на страните AB,BC,CA. Докажи дека важи

$$\frac{4}{27} < \frac{P_{MNP}}{P_{ABC}} \leq \frac{1}{4}.$$

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки a,b,c за страните на триаголникот соодветно наспроти темињата A,B,C, α,β,γ за соодветните агли и h_a, h_b, h_c за висините. Од $\overline{GM}=\frac{1}{3}h_c=\frac{1}{3}a\cos\beta, \overline{GN}=\frac{1}{3}h_a=\frac{1}{3}c\cos\beta$ и $\measuredangle MGN=180^\circ-\beta$ следува

$$P_{GMN}=\frac{1}{18}h_c h_a\sin\beta=\frac{1}{18}ac\sin^3\beta=\frac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\beta.$$

Слично, $P_{GNP}=\frac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\gamma$ и $P_{GPM}=\frac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\alpha$. Според тоа, имаме

$$P_{MNP}=P_{GMN}+P_{GNP}+P_{GPM}=\frac{1}{9}P_{ABC}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma). \quad (2)$$

Но,

$$K=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\sin^2\alpha+1-\frac{\cos 2\beta+\cos 2\gamma}{2}=1+\sin^2\alpha+\cos\alpha\cos(\beta-\gamma),$$

па како $\cos\alpha<\cos(\beta-\gamma)\leq 1$ следува

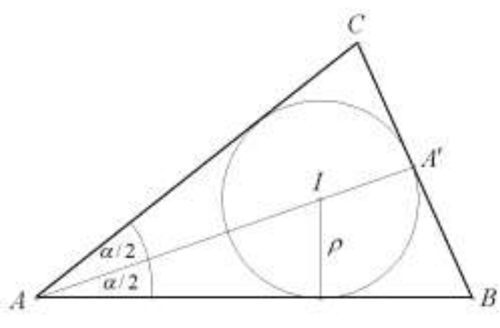
$$2=1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha<K\leq 1+\sin^2\alpha+\cos\alpha=2+\cos\alpha-\cos^2\alpha\leq\frac{9}{4}. \quad (3)$$

Конечно, неравенствата (1) следуваат од равенството (2) и неравенствата (3).

43. Даден е триаголник ABC. Нека A',B',C' се пресечните точки на симетралите на аглите CAB, ABC и BCA, со страните BC, CA и AB, соодветно, а I е центар на впишаната кружница во ΔABC. Докажи дека

$$\frac{1}{4} < \frac{\overline{AI}\cdot\overline{BI}\cdot\overline{CI}}{\overline{AA'}\,\overline{BB'}\,\overline{CC'}} \leq \frac{8}{27}.$$

Решение. Нека ρ е радиусот на впишаната кружница, а P плоштина на триаголникот ABC. Отсечката AA' го дели триаголникот на два триаголника ABA' и ACA'. Добиваме:



$$\overline{AI}=\frac{\rho}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\frac{2P}{a+b+c}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2P_{ABA'}+2P_{ACA'}}{(a+b+c)\sin\frac{\alpha}{2}}$$
$$=\frac{(b+c)\overline{AA'}}{a+b+c}.$$

Аналогно се докажува дека

$$\frac{\overline{BI}}{\overline{BB'}}=\frac{c+a}{a+b+c},\quad \frac{\overline{CI}}{\overline{CC'}}=\frac{a+b}{a+b+c}.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{3}\left(\frac{b+c}{a+b+c}+\frac{c+a}{a+b+c}+\frac{a+b}{a+b+c}\right)\geq\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3}}$$

од каде следува точноста на десната страна на неравенството.

Нека $s=a+b+c$. Тогаш

$$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{s^3}=\frac{1}{8}\left(1+\frac{b+c-a}{s}\right)\left(1+\frac{c+a-b}{s}\right)\left(1+\frac{a+b-c}{s}\right)$$

$$>\frac{1}{8}\left(1+\frac{b+c-a}{s}+\frac{c+a-b}{s}+\frac{a+b-c}{s}\right)=\frac{1}{4},$$

па важи и левата страна од неравенството.

44. Нека M,K,L се точки од страните AB,BC,CA од $\triangle ABC$, соодветно, такви што ниту една од нив не е негово теме. Докажи дека плоштината на барем еден од триаголниците AML,BKM,CLK не е поголема од $\frac{1}{4}$ од плоштината на $\triangle ABC$.

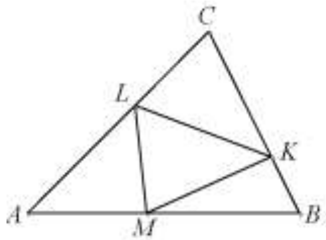
Решение. Нека $\overline{AM}:\overline{AB}=x$, $\overline{BK}:\overline{BC}=y$, $\overline{CL}:\overline{CA}=z$. Тогаш,

$$P_{AML}\cdot P_{BKM}\cdot P_{CLK}=\frac{1}{8}\overline{AB}^2\,\overline{AC}^2\,\overline{BC}^2x(1-x)y(1-y)z(1-z)\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\leq\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^3\overline{AB}^2\,\overline{AC}^2\,\overline{BC}^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\left(\frac{P}{4}\right)^3$$

Значи,

$$\frac{4P_{AML}}{P}\cdot\frac{4P_{BKM}}{P}\cdot\frac{4P_{AML}}{P}\leq 1$$



па затоа барем еден од множителите од левата страна не е поголем од 1.

Во доказот е користено неравенството

$$\lambda(1-\lambda)\leq\frac{1}{4}\text{ за }0<\lambda<1.$$

45. Нека се a,b и c должините на страните на $\triangle ABC$, кој има плоштина P. Докажи,

$$a^2+b^2+c^2\geq 4P\sqrt{3}$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Со α да го означиме аголот меѓу страните b и c. Тогаш

$$P=\frac{bc\sin\alpha}{2},\quad a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha \tag{1}$$

Од неравенството

$$(b-c)^2+2bc[1-\cos(\alpha-60^\circ)]\geq 0$$

и од (1) добиваме

$$b^2+c^2\geq 2bc\cdot\cos(\alpha-60^\circ)$$

$$b^2+c^2\geq 2bc[\sin\alpha\cos 60^\circ+\cos\alpha\cos 60^\circ]$$

$$b^2+c^2\geq 2bc\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha\right]$$

$$b^2+c^2\geq bc[\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha]$$

$$b^2+c^2-2bc\cos\alpha+b^2+c^2\geq 4\tfrac{bc\cdot\sin\alpha}{2}\sqrt{3}$$
$$b^2+c^2+a^2\geq 4P\sqrt{3}.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $(b-c)^2=0$ и $1-\cos(\alpha-60^\circ)=0$, т.е. ако и само ако $b=c$ и $\cos(\alpha-60^\circ)=1$ и бидејќи $0<\alpha<180^\circ$ добиваме $\alpha=60^\circ$, па значи $\triangle ABC$ е рамностран.

46. Низ тежиштето на $\triangle ABC$ повлечена е произволна права која ги сече страните BC и AC во точки M и N , соодветно. Докажи дека

$$P_{\triangle AMN}+P_{\triangle BMN}\geq \tfrac{4}{9}P_{\triangle ABC}$$

Решение. Од темињата A,B,C повлекуваме нормали AA_1, BB_1, CC_1 на правата l која минува низ тежиштето G , направи цртеж. Тогаш

$$P_{\triangle AMN}=\tfrac{1}{2}\overline{MN}\cdot\overline{AA_1}$$
$$P_{\triangle BMN}=\tfrac{1}{2}\overline{MN}\cdot\overline{BB_1}$$

и

$$P_{\triangle AMN}+P_{\triangle BMN}=\tfrac{1}{2}\overline{MN}(\overline{AA_1}+\overline{BB_1})$$

Нека CP е тежишната линија повлечена кон AB и $PP_1\perp l$. Тогаш PP_1 е средна линија во трапезот ABB_1A_1 и

$$\overline{PP_1}=\tfrac{1}{2}(\overline{AA_1}+\overline{BB_1}).$$

Но, $\triangle PGP_1\sim\triangle CGC_1$ и затоа

$$\frac{\overline{CC_1}}{\overline{PP_1}}=\frac{\overline{CG}}{\overline{GP}}=\frac{2}{1},$$

т.е.

$$\overline{CC_1}=2\overline{PP_1}=\overline{AA_1}+\overline{BB_1}.$$

Значи,

$$P_{\triangle AMN}+P_{\triangle BMN}=\tfrac{1}{2}\overline{MN}\cdot\overline{CC}_1=P_{\triangle CMN}$$

Останува да ги споредиме $P_{\triangle CMN}$ и $P_{\triangle ABC}$:

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle CMN}}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cdot\sin\measuredangle ACB}{\overline{NC}\cdot\overline{MC}\sin\measuredangle ABC}=\frac{\overline{AC}}{\overline{NC}}\,\frac{\overline{BC}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{AN}+\overline{NC}}{\overline{NC}}\cdot\frac{\overline{BM}+\overline{MC}}{\overline{MC}}=(\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}+1)(\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}+1).$$

Бидејќи $\triangle ANA_1\sim\triangle CNC_1$ и $\triangle BMB_1\sim\triangle CMC_1$, добиваме

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}=\frac{\overline{AA_1}}{\overline{CC_1}}\text{ и }\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}},$$

па затоа

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}+\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}=\frac{\overline{AA_1}+\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}=1$$

Тогаш од равенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle CMN}}\leq\frac{1}{4}(\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}}+1+\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}+1)=\frac{1}{4}\cdot 3^2=\frac{9}{4},$$

т.е. $P_{\triangle CMN}\geq\frac{4}{9}P_{\triangle ABC}$ и значи

$$P_{\triangle AMN} + P_{\triangle BMN} = P_{\triangle CMN} \geq \tfrac{4}{9} P_{\triangle ABC} .$$

Знак за равенството се достигнува ако и само ако $\frac{\overline{AN}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}}$.

47. Да се докаже дека за секој триаголник важи неравенството

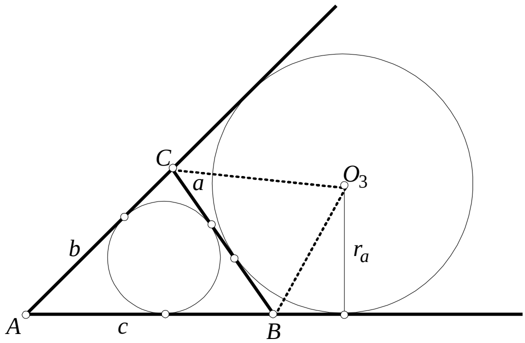
$$r^2 + r_a^{\,2} + r_b^{\,2} + r_c^{\,2} \geq 4P ,$$

каде r е радиусот на кружницата впишана во триаголникот, а r_a, r_b, r_c се радиусите на припишаните кружници на триаголникот.

Решение. Нека $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$ и $s = \frac{a+b+c}{2}$. Тогаш

$$P = P_{\triangle AO_3B} + P_{\triangle AO_3C} - P_{\triangle BO_3C}$$

$$= \tfrac{1}{2} cr_a + \tfrac{1}{2} br_a - \tfrac{1}{2} ar_a = (s-a) r_a$$



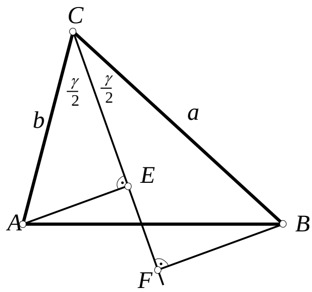
па, затоа $r_a = \frac{P}{s-a}$. Аналогно се добива дека $r_b = \frac{P}{s-b}$ и $r_c = \frac{P}{s-c}$. Од неравенството меѓу квадратна и геометриска средина имаме дека

$$r^2 + r_a^{\,2} + r_b^{\,2} + r_c^{\,2} \geq 4\sqrt{r r_a r_b r_c} = \frac{4P^2}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}} = 4P .$$

48. Докажи дека за страните a, b, c и аголот γ во триаголникот ABC важи неравенството $c \geq (a+b)\sin\frac{\gamma}{2}$.

Решение. *Прв начин.* Нека E и F се подножја на нормалите повлечени од темињата A и B на триаголникот ABC на симетралата на аголот C (цртеж 1), тогаш

$$\overline{AE} = b\sin\tfrac{\gamma}{2}, \ \overline{BF} = a\sin\tfrac{\gamma}{2} .$$



цртеж 1

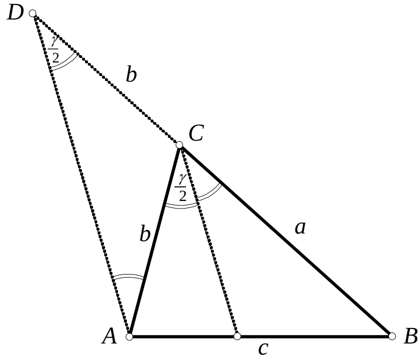
Понатаму имаме:

$$c = \overline{AB} \geq \overline{AE} + \overline{BF} = b\sin\tfrac{\gamma}{2} + a\sin\tfrac{\gamma}{2}$$

$$= (a+b)\sin\tfrac{\gamma}{2}.$$

Втор начин. Да ја продолжиме страната BC, преку C, за $\overline{CD} = \overline{CA} = b$, тогаш ΔADC е рамнокрак, со основа AD и агли при основата $\frac{\gamma}{2}$ (цртеж 2). Во $\triangle ABD$ имаме:

$$\overline{BD} = a+b , \quad \measuredangle A = \alpha + \tfrac{\gamma}{2} , \quad \measuredangle D = \tfrac{\gamma}{2}$$



цртеж 2

па од синусна теорема добиваме:

$$\frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{a+b}{\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})}$$

и оттука поради $0<\sin(\alpha+\frac{\gamma}{2})\le 1$, следува

$$c\ge(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}\,.$$

Трет начин. Од синусната теорема за $\triangle ABC$ имаме:

$$a=c\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\,,\quad b=c\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad (*)$$

Користејќи ги идентитетите $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ и $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ по собирање на равенствата (*), заради $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$ добиваме:

$$a+b=\frac{c}{\sin\gamma}(\sin\alpha+\sin\beta)=\frac{c}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}=c\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

и бидејќи $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\le 1$ каде што наоѓаме

$$c\ge(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}\,.$$

49. Докажи дека во секој триаголник ABC важи неравенството

$$\frac{ab+bc+ca}{4P}\ge \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\,,$$

каде a,b,c се должини на страните на триаголникот, а P е неговата плоштина.

Решение. *Прв начин.* Прво ќе го докажеме неравенството

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\ge\frac{3}{4}\,. \qquad (1)$$

Нека $A=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$. Имаме

$$A=\cos^2\alpha+\frac{1+\cos 2\beta}{2}+\frac{1+\cos 2\gamma}{2}=1+\cos^2\alpha+\frac{\cos 2\beta+\cos 2\gamma}{2}$$

$$=1+\cos^2\alpha+\frac{2\cos\frac{2\beta+2\gamma}{2}\cos\frac{2\beta-2\gamma}{2}}{2}=1+\cos^2\alpha+\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$$

$$=1+\cos^2\alpha+\cos(\pi-\alpha)\cos(\beta-\gamma)=1+\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos(\beta-\gamma).$$

Значи

$$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)+1-A=0\,,\quad \text{т.е.}\quad (\cos\alpha-\frac{\cos(\beta-\gamma)}{2})^2=\frac{\cos^2(\beta-\gamma)}{4}+A-1\,.$$

Левата страна е ненегетивен број па затоа $\frac{\cos^2(\beta-\gamma)}{4}+A-1\ge 0$ односно $A\ge 1-\frac{\cos^2(\beta-\gamma)}{4}\ge 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$, со што неравенството (1) е докажано. Сега нека R е радиус на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Тогаш важи $R=\frac{abc}{4P}$. Од синусната теорема $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$ добиваме $a=2R\sin\alpha, b=2R\sin\beta$ и $c=2R\sin\gamma$. Така почетното неравенство го трансформираме на следниов начин

$$\frac{ab+bc+ca}{4P}=\frac{abc}{4P}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=R\left(\frac{1}{2R\sin\alpha}+\frac{1}{2R\sin\beta}+\frac{1}{2R\sin\gamma}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

Значи добиваме еквивалентно на почетното неравенство

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geq 2\sqrt{3}\,. \tag{2}$$

Бидејќи $\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma>0$ можеме да го примениме неравенството меѓу квадратната и хармониската средина за броевите $\sin\alpha,\sin\beta,\sin\gamma$ и добиваме

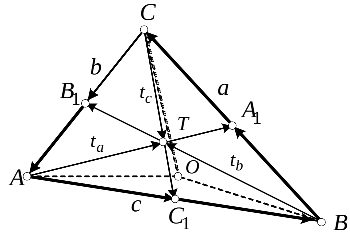
$$\sqrt{\frac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{3}}\geq\frac{3}{\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}}\,.$$

Оттука

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\geq 3\sqrt{\frac{3}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}}=3\sqrt{\frac{3}{3-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)}}\overset{(1)}{\geq}3\sqrt{\frac{3}{3-\frac{3}{4}}}=2\sqrt{3}$$

со што неравенството (2) е докажано.

Втор начин. Прво ќе ги докажеме следниве својства:



Својство 1. Во секој триаголник ABC важи

$$t_a^2+t_b^2+t_c^2\leq\frac{27}{4}R^2\,,$$

каде t_a , t_b и t_c се тежишните линии, а R е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC.

Доказ. Прво имаме

$$\vec{AT}+\vec{BT}+\vec{CT}=\frac{2}{3}(\vec{AA_1}+\vec{BB_1}+\vec{CC_1})=\frac{2}{3}(\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}+\vec{BA}+\frac{1}{2}\vec{AC}+\vec{CA}+\frac{1}{2}\vec{AB})$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA})=\vec{0}$$

Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Тогаш $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=R$. Користејќи ги својствата на скаларниот производ имаме

$$3R^2=\overline{AO}^2+\overline{BO}^2+\overline{CO}^2=\vec{AO}\cdot\vec{AO}+\vec{BO}\cdot\vec{BO}+\vec{CO}\cdot\vec{CO}$$

$$=(\vec{AT}+\vec{TO})\cdot(\vec{AT}+\vec{TO})+(\vec{BT}+\vec{TO})\cdot(\vec{AB}+\vec{TO})+(\vec{CT}+\vec{TO})\cdot(\vec{CT}+\vec{TO})$$

$$=\overline{AT}^2+\overline{BT}^2+\overline{CT}^2+3\overline{TO}^2+\vec{AT}\cdot\vec{TO}+\vec{BT}\cdot\vec{TO}+\vec{CT}\cdot\vec{TO}$$

$$=\overline{AT}^2+\overline{BT}^2+\overline{CT}^2+3\overline{TO}^2+(\vec{AT}+\vec{BT}+\vec{CT})\cdot\vec{TO}$$

$$=\overline{AT}^2+\overline{BT}^2+\overline{CT}^2+3\overline{TO}^2\geq\overline{AT}^2+\overline{BT}^2+\overline{CT}^2=\frac{4}{9}t_a^2+\frac{4}{9}t_b^2+\frac{4}{9}t_c^2$$

Оттука $t_a^2+t_b^2+t_c^2\leq 3R^2\,\frac{9}{4}=\frac{27}{4}R^2$ со што својството е докажано. ■

Својство 2. Во секој триаголник важи $t_a^2+t_b^2+t_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Доказ. Со примена на косинусната теорема за $\triangle ABA_1$ и $\triangle ABC$ добиваме

$$t_a^2=c^2+(\tfrac{a}{2})^2-2c\tfrac{a}{2}\cos\beta \text{ и } b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta\,,$$

па од овие две равенства имаме

$$t_a^2=c^2+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2-a^2-c^2}{2}=\frac{1}{4}(2c^2+2b^2-a^2)\,.$$

На сличен начин $t_b^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2)$ и $t_c^2=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$. Со собирање на овие три равенства добиваме $t_a^2+t_b^2+t_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$. ■

Својство 3. Во секој триаголник важи $S\le\frac{3\sqrt{3}R}{2}$, каде S е полупериметарот на триаголникот.

Доказ. Од својствата 1 и 2 имаме

$$a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}(t_a^2+t_b^2+t_c^2)\le\frac{4}{3}\cdot\frac{27}{4}R^2=9R^2,$$

па затоа од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$3R^2\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge(\frac{a+b+c}{3})^2=\frac{4S^2}{9},$$

т.е. $S^2\le\frac{27R^2}{4}$, од каде добиваме $S\le\frac{3\sqrt{3}R}{2}$. ■

Својство 4. Во секој триаголник важи $\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\le\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Доказ. Од својството 3, синусната теорема и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина имаме

$$\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}\le\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}=\frac{1}{3}(\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}+\frac{c}{2R})=\frac{1}{3}\frac{a+b+c}{2R}=\frac{S}{3R}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\ ■$$

Сега да преминеме на доказ на тврдењето на задачата. Од синусната теорема следува

$$\frac{ab+bc+ca}{4P}=\frac{ab+bc+ca}{\frac{abc}{R}}=\frac{R}{a}+\frac{R}{b}+\frac{R}{c}=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}).$$

Броевите $\sin\alpha,\sin\beta$ и $\sin\gamma$ се позитивни, па можеме да го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и добиваме

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma})\ge\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}.$$

Конечно, од својството (4) и последниоте две неравенства следува

$$\frac{ab+bc+ca}{4P}\ge\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt[3]{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}.$$

Трет начин. За плоштината P на триаголникот важи

$$P=\frac{ab\sin\gamma}{2}=\frac{bc\sin\alpha}{2}=\frac{ca\sin\beta}{2},$$

и како броевите $\frac{1}{\sin\alpha},\frac{1}{\sin\beta},\frac{1}{\sin\gamma}$ од претходните равенства и неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина добиваме:

$$\frac{ab+bc+ca}{4P}=\frac{1}{2}(\frac{ab}{2P}+\frac{bc}{2P}+\frac{ca}{2P})=\frac{1}{2}(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma})\ge\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}.$$

Понатаму важи

$$\begin{aligned}\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta+4\gamma}{6}\cos\frac{2\gamma-\alpha-\beta}{6}\\&\le2(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta+4\gamma}{6})\\&=2\cdot2\sin\frac{4\alpha+4\beta+4\gamma}{12}\cos\frac{4\alpha+4\beta-4\gamma}{12}\le4\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3},\end{aligned}$$

т.е.

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\le\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

Според тоа,

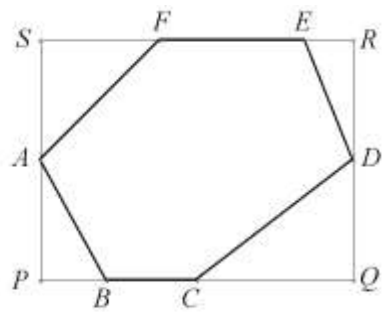
$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3} \le \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Конечно,

$$\frac{ab+bc+ca}{4P} \ge \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} \ge \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}.$$

50. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник таков што AB е паралелна со DE, BC е паралелна со FE и CD е паралелна со AF. Нека R_A, R_B и R_C се радиусите на кружниците опишани околу триаголниците ABF, BCD и DEF соодветно и p е периметар на шестаголникот. Докажи дека

$$R_A + R_B + R_C \ge \frac{p}{2}.$$



Решение. Нека $\overline{AB} = x$, $\overline{BC} = y$, $\overline{CD} = z$, $\overline{DE} = t$, $\overline{EF} = u$ и $\overline{FA} = v$. Забележуваме дека $\measuredangle A = \measuredangle D$, $\measuredangle B = \measuredangle E$ и $\measuredangle C = \measuredangle F$.

Нека точките P, Q, R и S се такви што P и Q лежат на правата определена со B и C, S и R лежат на правата определена со F и E и при тоа

$$\measuredangle ASF = \measuredangle APB = \measuredangle AQC = \measuredangle DRE = 90^\circ.$$

Тогаш

$$\overline{AP} = x\sin B,\ \overline{AS} = v\sin C,\ \overline{DQ} = z\sin C,\ \overline{DR} = t\sin B.$$

Од овде добиваме

$$2\overline{BF} \ge \overline{AP} + \overline{AS} + \overline{DQ} + \overline{DR} = x\sin B + v\sin C + z\sin C + t\sin B$$

Аналогно се докажуваат и следните две неравенства:

$$2\overline{DB} \ge z\sin A + y\sin B + u\sin B + v\sin A$$

$$2\overline{FD} \ge u\sin C + t\sin A + x\sin A + y\sin C$$

За радиусите R_A, R_C и R_E на опишаните кружници околу триаголниците FAB, BCD и DEF важи $R_A = \frac{\overline{BF}}{2\sin A}$, $R_C = \frac{\overline{DB}}{2\sin C}$ и $R_E = \frac{\overline{FD}}{2\sin B}$, односно

$$R_A + R_C + R_E \ge \frac{1}{4}x\left(\frac{\sin B}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin B}\right) + \frac{1}{4}y\left(\frac{\sin B}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin B}\right) + \dots$$

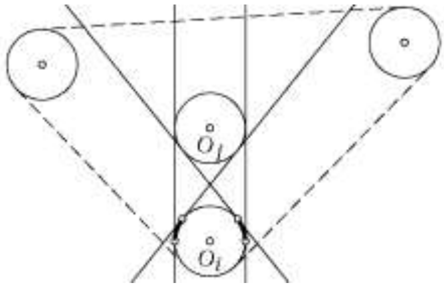
$$\ge \frac{2x}{4} + \frac{2y}{4} + \dots + \frac{2v}{4} = \frac{x+y+\dots+v}{2} = \frac{p}{2}.$$

51. Нека $k_1, k_2, \dots, k_n, (n \ge 3)$ се кружници со радиуси еднакви на 1 и центри $O_1, O_2, \dots, O_n$, соодветно. Докажете, дека ако ниту една права нема заеднички точки со повеќе од две од дадените кружници, тогаш

$$\sum_{1\le i<j\le n} \frac{1}{\overline{O_iO_j}} \le \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

Решение. Јасно, $\frac{2}{\overline{O_iO_j}} = \sin\alpha_{ij} < \alpha_{ij}$, каде $2\alpha_{ij}$ е аголот меѓу внатрешните заеднички тангенти на кружниците k_i и k_j. Затоа доволно е да се докаже дека

$$\sum_{i\neq j} \alpha_{ij} \leq (n-1)\pi .$$



За произволни $1 \leq i, j \leq n, (i \neq j)$ да го разгледаме множеството k_{ij} од сите точки на кружницата k_i во кои тангентата на k_i ја сече или ја допира кружницата k_j. Множеството k_{ij} се состои од два лака со централен агол α_{ij}. Според условот на задачата множествата k_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$сезаемно дисјунктни, па затоа важи $2\sum_{i\neq j} \alpha_{ij} \leq 2n\pi$.

Нека K е конвексната обвивка на кружниците $k_1, k_2, ..., k_n$. Нејзината граница се состои од неколку отсечки и од лаци на кружници со вкупен збир на должини 2π. Овие лаци се дисјунктни со сите множества k_{ij}, па така всушност важи $2\sum_{i\neq j} \alpha_{ij} \leq 2(n-1)\pi$, со што доказот е завршен.

52. Во тетраедарот $ABCD$, со врв A важи $\measuredangle BAC = \measuredangle CAD = \measuredangle DAB = 60^\circ$. Докажи дека важи неравенството

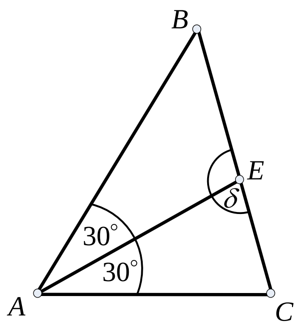
$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} \leq \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{BD} .$$

Решение. Нека AE е симетрала на аголот A, на страната ABC. Со примена на синусната теорема, на триаголниците ABE и ACE, добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(180^\circ - \delta)} = \frac{\overline{BE}}{\sin 30^\circ}; \frac{\overline{AC}}{\sin\delta} = \frac{\overline{CE}}{\sin 30^\circ} .$$

Оттука следува дека $2\overline{BE} = \frac{\overline{AB}}{\sin\delta}$; $2\overline{CE} = \frac{\overline{AC}}{\sin\delta}$. Со собирање на последните две еднаквости, добиваме

$$2(\overline{BE} + \overline{CE}) = 2\overline{BC} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\sin\delta} \geq \overline{AB} + \overline{AC} .$$



Значи

$$2\overline{BC} \geq \overline{AB} + \overline{AC} \qquad (1)$$

Аналогно се докажува дека

$$2\overline{BD} \geq \overline{AB} + \overline{AD} \qquad (2)$$

и

$$2\overline{CD} \geq \overline{AC} + \overline{AD} \qquad (3)$$

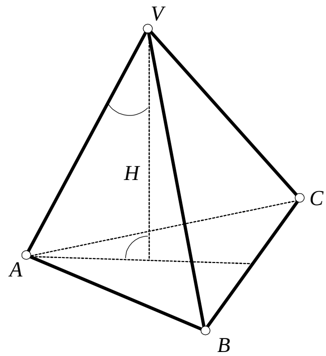
Со собирање на неравенствата (1), (2) и (3), се добива бараното неравенство.

53. Бочните рабови на тетраедарот се меѓу себе нормални. Докажи дека

$$S_1 + S_2 + S_3 \geq \tfrac{9}{2} H^2$$

каде што S_1, S_2, S_3 се плоштините на бочните страни на тетраедарот, а H е неговата висина.

Решение. Да ги означиме со a,b,c должините на бочните рабови SA,SB,SC на тетраедарот $VABC$ (види цртеж), тогаш:



$$S_1=\tfrac{1}{2}ab,\ S_2=\tfrac{1}{2}bc,\ S_3=\tfrac{1}{2}ca.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$S_1+S_2+S_3=\tfrac{ab+bc+ca}{2}\geq\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}. \qquad (1)$$

Од друга страна, правата низ трирабниот агол кај V образува агли α,β,γ за кои важи равенството:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

Во нашиот случај добиваме: $\frac{H^2}{a^2}+\frac{H^2}{b^2}+\frac{H^2}{c^2}=1$, или:

$$H^2=\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\leq\frac{a^2b^2c^2}{3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}}=\frac{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{3},$$

т.е.

$$\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geq 3H^2 \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) добиваме

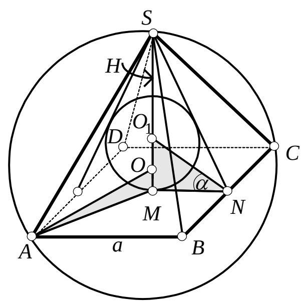
$$S_1+S_2+S_3\geq\tfrac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\geq\tfrac{9}{2}H^2.$$

54. Нека R и r се радиусите на опишаната, односно вписаната свера околу правилна четириаголна пирамида. Докажи дека $\frac{R}{r}\geq 1+\sqrt{2}$.

Решение. Нека $SABCD$ е правилна четириаголна пирамида и нека $\overline{AB}=a$, $\overline{SM}=H$, а α е аголот меѓу бочниот ѕид и основата (види цртеж), тогаш:

$$\overline{OA}=\overline{OS}=R,\ \overline{OM}=H-R,\ \overline{O_1M}=r,\ \overline{MN}=\tfrac{a}{2},\ \overline{AM}=\tfrac{d}{2}=\tfrac{a}{\sqrt{2}}.$$

Од правоаголните триаголници SMN, O_1MN и AMD имаме:



$$H=\tfrac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha,\ r=\tfrac{a}{2}\operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2},$$

$$R^2=(H-R)^2+(\tfrac{a}{\sqrt{2}})^2,$$

$$R=\frac{a^2+2H^2}{4H}=\frac{a}{4}\frac{2+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

За односот, $R:r$ наоѓаме

$$\frac{R}{r}=\frac{a}{4}\frac{2+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{2}{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{2+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Ако $\operatorname{tg}\alpha$ го изразиме преку $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=x$, добиваме:

$$\frac{R}{r}=\frac{2+(\frac{2x}{1-x^2})^2}{2x\frac{2x}{1-x^2}}=\frac{1+x^4}{2x^2(1-x^2)}.$$

Но, $0<x<1$, бидејќи $0<\frac{\alpha}{2}<45^\circ$, па доволно е да го докажеме неравенството

$$\frac{1+t^2}{2t(1-t)} \geq 1+\sqrt{2}, \qquad (*)$$

односно неравенството $(2\sqrt{2}+3)t^2-2(1+\sqrt{2})t+1\geq 0$. Но последното неравенство е еквивалентно со неравенството $[(1+\sqrt{2})t-1]^2\geq 0$, кое очигледно е точно за секе $0<t<1$, па следува дека и неравенството (*) е точно.

VIII ПОЛИНОМИ

1. ДЕЛИВОСТ НА ПОЛИНОМИ, НУЛИ НА ПОЛИНОМ

1. Определи го збирот на коефициентите на полиномот

$$p(x)=(1-3x+2x^2)^{19}(1+3x-2x^2)^{90}.$$

Решение. Вредноста на полиномот

$$f(x)=a_\circ+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n,$$

за $x=1$, всушност, претставува збир на неговите коефициенти, т.е.

$$f(1)=a_\circ+a_1+a_2+...+a_n.$$

Во конкретниот случај добиваме

$$p(1)=(1-3+2)^{19}(1+3-2)^{90}=0.$$

2. Определи го збирот на коефициентите пред непарните степени на полиномот

$$p(x)=(x^2+2x+2)^{19}+(x^2-3x-3)^{90}.$$

Решение. За полиномот $f(x)=a_\circ+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$ наоѓаме $f(1)$ и $f(-1)$:

$$f(1)=a_0+a_1+a_2+...+a_n$$

$$f(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3+...+(-1)^n a_n$$

Ако од првото равенство го одземеме второто, добиваме

$$f(1)-f(-1)=2(a_1+a_3+a_5+...)$$

$$f(1)-f(-1)=2S,$$

каде што S е збирот на коефициентите пред непарните степени на полиномот $f(x)$. Оттука

$$S=\frac{f(1)-f(-1)}{2}.$$

Во конкретниот случај имаме

$$p(1)=(1+2+2)^{101}+(1-3-3)^{101}=5^{101}+(-5)^{101}=0$$

$$p(-1)=(1-2+2)^{101}+(1+3-3)^{101}=1^{101}+1^{101}=2$$

$$S=\tfrac{1}{2}(0+2)=1.$$

Следствено, бараниот збир е 1.

3. Определи го збирот на коефициентите при непарните степени на x на полиномот

$$p(x)=(x^2+2x+2)^{1982}+(x^2-3x-3)^{1982}.$$

Решение. Ако

$$f(x)=a_\circ+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$$

е полином од n-ти степен, тогаш

$$f(1)=a_\circ+a_1+a_2+...+a_n$$
$$f(-1)=a_\circ-a_1+a_2-...+(-1)^n a_n,$$

па, значи $\frac{1}{2}(f(1)+f(-1))$ е збирот на коефициентите пред парните степени на x, а $\frac{1}{2}(f(1)-f(-1))$ е збирот на коефициентите пред непарните степени на x.

Според тоа, збирот на непарните степени на x на полиномот $p(x)$ ќе биде:

$$\tfrac{1}{2}[p(1)-p(-1)]=\tfrac{1}{2}(5^{1982}+5^{1982}-1-1)=5^{1982}-1.$$

4. Нека $a_0,a_1,...,a_n$ се реални броеви такви што

$$a_0+a_1x+...+a_nx^n=(x+1)^3(x+2)^3...(x+672)^3.$$

Определи го збирот $a_2+a_4+...+a_{2016}$.

Решение. Нека $P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n=(x+1)^3(x+2)^3...(x+672)^3$. Тогаш $\deg P=3\cdot 672=2016$, па затоа $n=2016$. Понатаму,

$$P(1)=a_0+a_1+a_2+a_3+...+a_{2014}+a_{2015}+a_{2016}$$
$$P(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3+..+a_{2014}-a_{2015}+a_{2016}$$

Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$P(1)+P(-1)=2(a_0+a_2+a_4+...+a_{2016})$$

и како $a_0=P(0)$ добиваме дека

$$a_2+a_4+...+a_{2016}=\tfrac{1}{2}(P(1)+P(-1))-P(0).$$

Сега бидејќи

$$P(0)=1^3\cdot 2^3\cdot...\cdot 672^3=(672!)^3,\quad P(1)=2^3\cdot 3^3\cdot...\cdot 673^3=(673!)^3,\quad P(-1)=0$$

добиваме дека

$$a_2+a_4+...+a_{2016}=\tfrac{1}{2}(673!)^3-(672!)^3.$$

5. Нека $p(x)$ е полином дефиниран со равенството

$$P(x)\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{2n}x^{2n}=(1\cdot x+2x^2+3x^3+...+nx^n)^2.$$

Докажи, дека

$$a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{2n}=\tfrac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}.$$

Решение. Ќе ги искористиме познатите равенства

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}k=\tfrac{n(n+1)}{2},\ S_2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ \text{ и }\ S_3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\tfrac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Тогаш $P(1)=\sum\limits_{i=0}^{2n}a_i=S_1^2$. Од друга страна, од принципот на споредување на коефициентите, следува дека за секој фиксиран $k\in\{0,1,2,...,n\}$ важи

$$a_k=\sum_{i=o}^{k}i(k-i)=k\sum_{i=0}^{k}i-\sum_{i=0}^{k}i^2=\tfrac{k^2(k+1)}{2}-\tfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\tfrac{k^3-k}{6}.$$

Според тоа,

$$a_0 + a_1 + ... + a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^3-k}{6} = \frac{S_1^2 - S_1}{6}$$

и за бараниот збир добиваме

$$a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n} = P(1) - \sum_{k=0}^{n} a_k = S_1^2 - \frac{S_1^2 - S_1}{6} = \frac{5S_1^2 + S_1}{6} = \frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24} .$$

6. Дали постои полином $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ со целобројни коефициенти таков што $f(3) = 7$ и $f(7) = 9$.

Решение. Ако ги одземеме равенствата

$$f(7) = a \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + c \cdot 7 + d \text{ и } f(3) = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d$$

добиваме:

$$f(7) - f(3) = a(7^3 - 3^3) + b(7^2 - 3^2) + c(7-3)$$
$$9 - 7 = 316a + 40b + 4c.$$

За $a, b, c \in \mathbb{Z}$ последното равенство очигледно не е можно. Значи, таков полином од трет степен со целобројни коефициенти не постои.

7. Докажи дека не постои полином $f(x)$ со цели коефициенти таков што $f(1) = 2$ и $f(3) = 5$.

Решение. Нека $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ каде што a_i, $i = 0, ..., n$ се цели броеви, така што $f(1) = 2$ и $f(3) = 5$, односно $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = 2$ и $a_n 3^n + a_{n-1} 3^{n-1} + ... + a_1 3 + a_0 = 5$. Од $f(3) - f(1) = 5 - 2 = 3$ добиваме

$$a_n(3^n - 1) + a_{n-1}(3^{n-1} - 1) + ... + a_1(3-1) = 3 ,$$

односно

$$2[a_n(3^{n-1} + 3^{n-2} + ... + 3 + 1) + a_{n-1}(3^{n-2} + 3^{n-3} + ... + 3 + 1) + ... + a_1] = 3 .$$

т.е. $2 | 3$, што е противречност, па затоа не постои таков полином.

8. Докажи дека не постои полином P со целобројни коефициенти за кој е исполнето $P(2) = 1$ и $P(5) = 6$.

Решение. Нека P е полиномот

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

каде што a_i, $i = 0, ..., n$ се цели броеви, така што $P(2) = 1$ и $P(5) = 6$, односно

$$a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + ... + a_1 2 + a_0 = 1 \text{ и } a_n 5^n + a_{n-1} 5^{n-1} + ... + a_1 5 + a_0 = 6 .$$

Од $P(5) - P(2) = 6 - 1$ добиваме

$$a_n(5^n - 2^n) + a_{n-1}(5^{n-1} - 2^{n-1}) + ... + a_1(5-2) = 5 ,$$

односно

$$3(a_n(5^{n-1} + 5^{n-2} \cdot 2 + ... + 2^{n-1}) + a_{n-1}(5^{n-2} + 5^{n-3} \cdot 2 + ... + 2^{n-2}) + ... + a_1) = 5$$

Добиваме контрадикција, па не постои таков полином.

9. Докажи дека не постои полином $p(x)$ со целобројни коефициенти, таков што $p(7)=5$ и $p(15)=9$.

Решение. Нека таков полином постои и нека тој е

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n,$$

каде a_i е цел број, за секој $i\in\{0,...,n\}$. Тогаш $p(15)=a_0 15^n+a_1 15^{n-1}+...+a_n=9$ и $p(7)=a_0 7^n+a_1 7^{n-1}+...+a_n=5$. Со одземање добиваме

$$4=a_0(15^n-7^n)+a_1(15^{n-1}-7^{n-1})+...+8a_{n-1}.$$

Тоа е контрадикција, бидејќи десната страна е делива со 8, а левата не.

10. Не постои полином $P(x)$ со целобројни коефициенти таков што $P(7)=11$ и $P(11)=13$. Докажи!

Решение. Нека претпоставиме дека полиномот

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_\circ$$

ги испонува условите од задачата. Ако ставиме $x=7$ и $x=11$ соодветно, од условите на задачата се добива

$$11=a_n 11^n+a_{n-1}11^{n-1}+...+a_1\cdot 11+a_\circ$$

$$13=a_n 13^n+a_{n-1}13^{n-1}+...+a_1\cdot 13+a_\circ.$$

Ако од второто равенство го извадиме првото равенство, се добива

$$2=a_n(13^n-7^n)+a_{n-1}(13^{n-1}-7^{n-1})+...+a_1\cdot(13-7).$$

Бидејќи за секој $n\ge 1$, 11^n-7^n е делив со 4, изразот од десната страна на последното равенство е делив со 4. Бидејќи изразот од левата страна на истото равенство не е делив со 4 добиваме противречност.

11. Нека $p(x)$ е полином со целобројни коеифициенти. Ако $p(2)$ и $p(3)$ се деливи со 6, тогаш и $p(5)$ е делив со 6. Докажи!

Решение. Нека полиномот $p(x)$ при делење со $x-2$ дава количник $q_1(x)$ и остаток $r_1=p(2)$, односно

$$p(x)=(x-2)q_1x+p(2),$$

или

$$p(x)-p(2)=(x-2)q_1(x).$$

Аналогно добиваме

$$p(x)-p(3)=(x-3)q_1(x).$$

Притоа $q_1(x)$ и $q_2(x)$ се полиноми со целобројни коефициенти и со степен $(n-1)$, ако $p(x)$ е со степен n. Ако $x=5$, тогаш од горните равенства имаме

$$p(5)-p(2)=3q_1(5)$$

од каде, поради условот $6\,|\,p(2)$, ќе следува дека $3\,|\,p(5)$. Слично, од

$$p(5)-p(2)=2q_2(5),$$

следува дека $2\,|\,p(5)$. Според тоа $6\,|\,p(5)$.

12. Нека $P(x)$ е полином од четврти степен со целобројни коефициенти. Познато е дека за секој цел број x , $P(x)$ е делив со 7. Докажи дека сите коефициенти на $P(x)$ се деливи со 7.

Решение. Нека $P(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_o$. Од $P(0)=a_0$ следува дека $a_0=7t_0$.

Од $P(1)-P(-1)=2a_1+2a_3=7t_1$ следува

$$a_1+a_3=7t_2 \qquad (1)$$

Од $P(1)+P(-1)=2a_o+2a_2+2a_4=2(a_2+a_4)+2\cdot 7t_o$ следува

$$a_2+a_4=7t_3 \qquad (2)$$

Од $P(2)-P(-2)=4a_1+16a_3=4(a_1+4a_3)=7t_4$ следува

$$a_1+4a_3=7t_5 \qquad (3)$$

Од $P(2)+P(-2)=2a_o+8(a_2+4a_4)=8(a_2+4a_4)+2\cdot 7t_o$ следува

$$a_2+4a_4=7t_6 \qquad (4)$$

Од (1) , (2), (3), (4) имаме

$$\begin{cases} a_1+a_3=7t_2 \\ a_1+4a_3=7t_5 \end{cases} \qquad (5)$$

$$\begin{cases} a_2+a_4=7t_3 \\ a_2+4a_4=7t_6 \end{cases} \qquad (6)$$

Од (5) следува дека a_1 и a_3 се делат со 7, а од (6) дека a_2 и a_4 се деливи со 7.

13. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти така што постои цел број n за кој $P(n)=0$. Докажи дека не постои природен број m така што $P(1995)P(2000)=7^m$.

Решение. Ќе го користиме фактот што ако a и b се цели броеви, тогаш $a-b$ е делител на $P(a)-P(b)$.

Да претпоставиме дека постои m така што $P(1995)P(2000)=7^m$. Тогаш $P(1995)$ и $P(2000)$ се степени на 7 (или на -7).

Користејќи го споменатитот факт, добиваме дека $1995-n$ е делител на $P(1995)$ и $2000-n$ е делител на $P(2000)$. Значи, и $1995-n$ и $2000-n$ се степени на 7 (или на -7). Ако $1995-n$ е 1 или -1, тогаш n е 1994 или 1996, па затоа $2000-n$ е 6 или 4 и не е степен на 7. Ако $2000-n$ е 1 или -1, тогаш n е 1999 или 2001, па $1995-n$ е -4 или -6, па не е степен на 7. Ако $1995-n$ и $2000-n$ се деливи со 7, тогаш и нивната разлика е делива со 7, но нивната разлика е 3 и не е делива со 7.

Значи, не постои природен број m така што $P(1995)P(2000)=7^m$.

14. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x+a_\circ .$$

Ако $P(a)=1991$, $P(b)=1992$ и $P(c)=1993$ и $a,b,c\in\mathbb{Z}$, тогаш a,b,c се последователни броеви. Докажи!

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}1&=1992-1991=P(b)-P(a)\\ &=a_n(b^n-a^n)+a_{n-1}(b^{n-1}-a^{n-1})+...+a_2(b^2-a^2)+a_1(b-a)\end{aligned}.$$

Десната страна е делива со $b-a$, па според тоа и левата страна е делива со $b-a$, т.е. $b-a$ е делив со 1. Понатаму

$$\begin{aligned}1&=1993-1992=P(c)-P(b)\\ &=a_n(c^n-b^n)+a_{n-1}(c^{n-1}-b^{n-1})+...+a_2(c^2-b^2)+a_1(c-b)\end{aligned}.$$

Десната страна е делива со $c-b$, па, значи, и левата страна е делива со $c-b$, т.е. $c-b$ е делител на 1; следствено можни се следниве четири случаи:

1° $b-a=1,\quad c-b=1$; $\qquad$ 2° $b-a=-1,\quad c-b=-1$

3° $b-a=1,\quad c-b=-1$; $\qquad$ 4° $b-a=-1,\quad c-b=1$.

Во првиот случај добиваме $a=b-1, c=b+1$, а во вториот случај $a=b+1, c=b-1$. Во Во третиот и четвртиот случај добиваме $a=c$ што не е можно, зошто $P(a)\neq P(c)$.

Од сето тоа следува дека a,b,c (или c,b,a) се последователни цели броеви.

15. Определи го остатокот при делење на полиномот

$$f(x)=100x^{100}-99x^{99}+...+2x-x$$

со полиномот $p(x)=x^2-1$.

Решение. При делење на $f(x)$ со x^2-1, ќе добиеме количник $g(x)$ (со степен 98) и остаток $q(x)$ (со степен помал од 2), односно

$$f(x)=(x^2-1)q(x)+ax+b .$$

Равенството (1) треба да важи за секој $x\in\mathbb{R}$, затоа:

- ако $x=1$, тогаш $f(1)=a+b$,
- ако $x=-1$, тогаш $f(1)=-a+b$.

Од друга страна имаме

$$f(1)=100-99+98-...+2-1=50,$$
$$f(-1)=100+99+98+...+2+1=5050 .$$

На крајот, од системот равенки

$$\begin{cases}a+b=50\\ -a+b=5050\end{cases},$$

наоѓаме дека $a=-2500$, $b=2550$, па за бараниот остаток добиваме

$$r(x)=-2500x+2550=50(51-50x) .$$

16. Определи го остатокот при делењеto на ролиномот $x^{100}-2x^{51}+1$ со x^2-1.

Решение. *Прв начин.* Остатокот е полином со степен најмногу 1, па нека

$$x^{100}-2x^{51}+1=P(x)(x^2-1)+ax+b,$$

каде $P(x)$ е количникот (тој е полином со степен 50), а $ax+b$ е остатокот при делењето. Ако во горното равенство ставиме $x=1$, добиваме $0=a+b$, а ако $x=-1$ добиваме $4=-a+b$. Решавајќи го овој систем равенки добиваме $a=-2,\ b=2$. Значи остатокот е $-2x+2$.

Втор начин.

$$\frac{x^{100}-2x^{51}+1}{x^2-1}=\frac{(x^{50}-1)^2-2x^{50}(x-1)}{x^2-1}=\frac{((x^2)^{25}-1)^2-2x^{50}(x-1)}{x^2-1}$$

$$=\frac{(x^2-1)^2A(x)-2x^{50}(x-1)}{x^2-1}=(x^2-1)A(x)-\frac{2x^{50}}{x+1}$$

$$=(x^2-1)A(x)-2\frac{x^{50}-1+1}{x+1}$$

$$=(x^2-1)A(x)-2\frac{x^{50}-1}{x+1}-2\frac{1}{x+1}$$

$$=(x^2-1)A(x)-2\frac{(x^{25})^2-1}{x+1}-\frac{2}{x+1}$$

$$=(x^2-1)A(x)-2B(x)+\frac{-2x+2}{x^2-1}.$$

Значи бараниот остаток е $-2x+2.$

17. Остатоците при делење на полиномот $f(x)$ со степен n ($n\geq 2$) со биномите $x-2$ и $x-3$ се 5 и 7 соодветно. Најди го остатокот при делење на полиномот $f(x)$ со производот $(x-2)(x-3)$.

Решение. Нека $f(x)$ е полином со степен n ($n\geq 2$), тогаш при делење на $f(x)$ со производот $(x-2)(x-3)$ ќе се добие остаток-полином со степен помал од 2, т.е. линеарен бином. Значи,

$$f(x)=(x-2)(x-3)\cdot q(x)+ax+b\,, \tag{1}$$

каде што остатокот $r(x)=ax+b$.

Бидејќи (1) е идентитет, тогаш за $x=2$, односно $x=3$ добиваме:

$$\begin{aligned} f(2)&=0\cdot q(2)+2a+b\\ f(3)&=0\cdot q(3)+3a+b \end{aligned} \tag{2}$$

Според Безуовата теорема (остатокот што се добива при делење на полиномот $p(x)$ со биномот $x-a$ е еднаков на $p(a)$) добиваме:

$$f(2)=5\,,\ \ f(3)=7\,. \tag{3}$$

Имајќи ги предвид (2) и (3) добиваме

$$\begin{cases}2a+b=5\\3a+b=7\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}.$$

Следствено, бараниот остаток е $r(x)=2x+1$.

18. Еден полином $p(x)$ при делењето со полиномот $x-1$ дава остаток 2, а при делењето со полиномот $x-2$ дава остаток 1. Да се најде остатокот што се добива при делењето на полиномот $p(x)$ со $(x-1)(x-2)$.

Решение. Според условите на задачата имаме $p(x)=q_1(x)(x-1)+2$ и $p(x)=q_2(x)(x-2)+1$, од каде што следува дека $p(1)=2$ и $p(2)=1$.

Нека $q(x)$ е количникот, а $rx+s$ остатокот што се добива при

$$p(x)=q(x)(x-1)(x-2)+rx+s\ ,$$

од каде што следува дека $p(1)=r+s$, $p(2)=2r+s$. Бидејќи $p(1)=2$, $p(2)=1$, добиваме $r+s=2$, $2r+s=1$, т.е. $r=-1,\ s=3$.

Значи, остатокот што се добива при делење на $p(x)$ со $(x-1)(x-2)$ е $-x+3$.

19. Нека a и b се реални броеви. Одреди ја најмалата вредност на

$$P(x)=(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b)\ .$$

Решение. Изразот $(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b)$, можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned}(x+a+b)(x+a-b)(x-a+b)(x-a-b)&=[x+(a+b)][x-(a+b)][x-(a-b)][x+(a-b)]\\ &=[x^2-(a+b)^2][x^2-(a-b)^2]=\\ &=x^4-[(a+b)^2+(a-b)^2]x^2+(a^2-b^2)^2=\\ &=x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2=\\ &=[x^2-(a^2+b^2)]^2-4a^2b^2\end{aligned}$$

Сега, јасно е дека најмала вредност е $-4a^2b^2$ а таа се достигнува за $x^2=a^2+b^2$, т.е. за $x=\sqrt{a^2+b^2}$ и $x=-\sqrt{a^2+b^2}$.

20. Без степенување или разложување пресметај го изразот

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(-a+b+c)^3\ .$$

Решение. Вредноста на дадениот израз е еднаква на нула за $a=0, b=0$ и $c=0$, па затоа изразот се дели со abc. Бидејќи овој израз е симетричен и хомоген полином од трет степен добиваме дека

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(-a+b+c)^3=Mabc\ , \qquad (1)$$

за секои a,b и c. Во (1) ставаме $a=b=c=1$ и добиваме $M=24$, што значи дека

$$(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(a-b+c)^3-(-a+b+c)^3=24abc\ .$$

21. Дадени се полиномите

$$P(x)=x^3+x^2-9x-9 \text{ и } Q(x)=(x-2)^2-(x-4)^2\ .$$

а) Упрости го изразот $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

б) Испитај го знакот на функцијата $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$.

в) Најди ги сите природни броеви n за кои $f(n)$ е природен број.

Решение. а) Имаме

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x^3+x^2-9x-9}{(x-2)^2-(x-4)^2}=\frac{x^2(x+1)-9(x+1)}{(x-2+x-4)(x-2-x+4)}=\frac{(x+1)(x^2-9)}{4(x-3)}=\frac{(x+1)(x-3)(x+3)}{4(x-3)}=\frac{(x+1)(x+3)}{4}.$$

б) Од својствата на квадратната функција следува $f(x)>0$, ако $x<-3$ или $x>-1$; $f(x)=0$, ако $x=-3$ или $x=-1$; и $f(x)<0$, ако $-3<x<-1$.

в) Имаме, $f(n)=\frac{(n+1)(n+3)}{4}$. Јасно, ако $n=2k$, тогаш $f(n)=\frac{(2k+1)(2k+3)}{4}$ не е природен број, а ако $n=2k+1$, тогаш $f(n)=\frac{(2k+2)(2k+4)}{4}=(k+1)(k+2)\in\mathbb{N}$.

22. Одреди го k така што полиномот $x^6+x^5+x^2+k$ да биде делив со x^3+1.

Решение. *Прв начин.* Полиномот $f(x)$ е делив со полиномот $g(x)$ само ако остатокот $r(x)=0$. Го вршиме делењето

$$
\begin{array}{l}
(x^6+x^5+x^2+k):(x^3+1)=x^3+x-1\\
\underline{\pm x^6\pm x^3}\\
\quad x^5-x^3+x^2+k\\
\quad \underline{\pm x^5\pm x^2}\\
\qquad -x^3+k\\
\qquad \underline{\mp x^3\mp 1}\\
\qquad\quad k+1
\end{array}
$$

Бидејќи остатокот треба да е еднаков на нула, следува дека $k=-1$.

Втор начин. Од $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ следува дека една нула на биномот x^3+1 е бројот -1. Потребен услов полиномот $x^6+x^5+x^2+k$ да биде делив со биномот x^3+1 е бројот -1 да биде една негова нула, т.е. да важи

$$(-1)^6+(-1)^5+(-1)+k=0,$$

од каде што $k=-1$.

23. Определи ги коефициентите a и b такви што полиномот ax^5+bx^4+1 е делив со полиномот x^2-x-1.

Решение. Не е тешко да се провери дека е исполнето равенството

$$ax^5+bx^4+1=(x^2-x-1)[ax^3+(a+b)x^2+(2a+b)x+3a+2b]$$
$$+(5a+3b)x+3a+2b+1.$$

Според тоа $x^2-x-1\,|\,ax^5+bx^4+1$ ако и само ако

$$(5a+3b)x+3a+2b+1=0$$

Последното равенство е можно ако и само ако

$$\begin{cases}5a+3b=0\\3a+2b=-1.\end{cases}.$$

Решение на последниот систем е $a=3, b=-5$.

Значи, $P(x)=3x^5-5x^4+1$.

24. Докажи дека полиномот

$$P(x)=x^{2000}+x^{1999}+1$$

е делив со полиномот

$$f(x)=x^2+x+1.$$

Решение. *Прв начин.* За полиномот $P(x)$ да е делив со полиномот $f(x)$, доволно е разликата $P(x)-f(x)$ да е делива со $f(x)$. Имаме:

$$\begin{aligned}P(x)-f(x)&=x^{2000}+x^{1999}+1-x^2-x-1\\&=x^{1999}(x+1)-x(x+1)=x(x+1)(x^{1998}-1)\\&=x(x+1)(x^{999}+1)((x^3)^{333}-1)\\&=x(x+1)(x^{999}+1)(x^3-1)((x^3)^{332}+\dots+x^3+1)\\&=(x^2+x+1)\cdot x(x^2-1)\,(x^{999}+1)(x^{996}+\dots+x^3+1).\end{aligned}$$

Значи, $P(x)-f(x)$ е делив со x^2+x+1, од што следува дека и $P(x)$ е делив со x^2+x+1.

Втор начин. Полиномот $P(x)$ е деллив со полиномот $f(x)$, ако секоја нула на полиномот $f(x)$ е нула и на полиномот $P(x)$. Нулите на полиномот $f(x)$ се:

$$\varepsilon=\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} \text{ и } \varepsilon^2=\tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

и притоа $\varepsilon^3=1$. Бидејќи:

$$P(\varepsilon)=\varepsilon^{2000}+\varepsilon^{1999}+1=(\varepsilon^3)^{666}\cdot\varepsilon^2+(\varepsilon^3)^{666}\cdot\varepsilon+1=\varepsilon^2+\varepsilon+1=0,$$

$$P(\varepsilon^2)=\varepsilon^{4000}+\varepsilon^{3998}+1=(\varepsilon^3)^{1333}\cdot\varepsilon+(\varepsilon^3)^{1332}\cdot\varepsilon^2+1=\varepsilon+\varepsilon^2+1=0,$$

заклучуваме дека $P(x)$ е делив со $f(x)$.

25. Докажи дека полиномот $x^{95}+x^{94}+x^{93}+...+x^2+x+1$ е делив со полиномот $x^{31}+x^{30}+x^{29}+...+x^2+x+1$.

Решение. *Прв начин.* Од тоа што:

$$A=x^{95}+x^{94}+x^{93}+...+x^2+x+1=\tfrac{x^{96}-1}{x-1}$$

$$B=x^{31}+x^{30}+x^{29}+...+x^2+x+1=\tfrac{x^{32}-1}{x-1},$$

следува дека

$$\tfrac{A}{B}=\tfrac{x^{96}-1}{x^{32}-1}=\tfrac{(x^{32}-1)(x^{64}+x^{32}+1)}{x^{32}-1}=x^{64}+x^{32}+1\,.$$

Втор начин. Со непосредно групирање на членовите на полиномот

$$x^{95}+x^{94}+x^{93}+...+x^2+x+1$$

добиваме

$$\begin{aligned}x^{95}+x^{94}+x^{93}+...+x+1&=(x^{31}+x^{30}+...+x+1)+x^{32}(x^{31}+x^{30}+...+x+1)+\\&\quad+x^{64}(x^{31}+x^{30}+x^{29}+...+x+1)\\&=(x^{31}+x^{30}+x^{29}+...+x+1)(x^{64}+x^{32}+1).\end{aligned}$$

26. Нека $p(x)$ е полином. Да означиме

$$p^n(x) = \underbrace{p(p(...p}_{n}(x)...)) .$$

Докажи дека полиномот $p^{2003}(x) - 2p^{2002}(x) + p^{2001}(x)$ е делив со полиномот $p(x) - x$.

Решение. Познато е дека $p(x) - x \mid k_n(x) = p^{n+1}(x) - p^n(x)$, за секој $n \in \mathbb{N}_0$. Навистина, ако запишеме $p^n(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, тогаш

$$k_n(x) = p^n(p(x)) - p^n(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i(p(x)^i - x^i),$$

при што важи $p(x) - x \mid p(x)^i - x^i$, за секој i. Затоа полиномот

$$p^{2003}(x) - 2p^{2002}(x) + p^{2001}(x) = k_{2002}(x) - k_{2001}(x)$$

е делив со $p(x) - x$.

27. Низата полиноми е определена со условите

$$P_0(x) = x^3 - 4x \text{ и } P_{n+1}(x) = P_n(1+x)P_n(1-x) - 1 .$$

Докажи, дека полиномот x^{2016} е делител на полиномот $P_{2016}(x)$.

Решение. Од рекурентната врска следува дека за $n \ge 1$ полиномот P_n е парен. Затоа

$$\begin{aligned} P_{n+2}(x) &= (P_n(2+x)P_n(-x) - 1)(P_n(2-x)P_n(x) - 1) - 1 \\ &= P_n(2+x)P_n(2-x)P_n^2(x) + (P_n(2+x) + P_n(2-x))P_n(x), \end{aligned}$$

од каде следува дека $P_n \mid P_{n+2}$. Притоа ако $x - 2 \mid P_n(x)$, тогаш полиномот $P_n(2+x) + P_n(2-x)$ е делив со x (а со тоа и со x^2, бидејќи е парен). Според тоа, ако $x^k(x-2) \mid P_n(x)$, тогаш $x^{k+2}(x-2) \mid P_{n+2}(x)$.

Понатаму, полиномот $P_0(x) = x^3 - 4x$ е непарен и

$$P_2(x) = P_0(2+x)P_0(2-x)P_0^2(x) + (P_0(2+x) + P_0(2-x))P_0(x),$$

од каде следува дека $x^2(x-2) \mid P_2(x)$. Сега, со едноставна индукција добиваме дека $x^n(x-2) \mid P_n(x)$ за $2 \mid n,\ n \in \mathbb{N}$.

28. За полиномот $P(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$ да се определи најмалата негова вредност и точките во кои таа се достигнува.

Решение. Алгебарскиот израз $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$ можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned} x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x &= x(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) = x[(x^3 + x^2) + (5x^2 + 5x) + (6x + 6)] \\ &= x[x^2(x+1) + 5x(x+1) + 6(x+1)] = x(x+1)(x^2 + 5x + 6) \end{aligned}$$

$$=x(x+1)(x+2)(x+3)=[x(x+3)][(x+1)(x+2)]$$
$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)=(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1-1$$
$$=(x^2+3x+1)^2-1.$$

Значи, $P(x)=(x^2+3x+1)^2-1$. За било кој реален број x, $(x^2+3x+1)^2\geq 0$, па според тоа $(x^2+3x+1)^2-1\geq -1$. Значи, $P(x)\geq -1$ и равенство се достигнува само ако $x^2+3x+1=0$. Решења на последната квадратна равенка, во кои P ја достигнува најмалата вредност се $x_1=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ и $x_1=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

29. Нека $Q(x)$ е квадратен полином, за кој функцијата $P(x)=x^2Q(x)$ монотоно расте во интервалот $(0,\infty)$. Докажи, дека ако $x+y+z>0$ и $xyz>0$, тогаш $P(x)+P(y)+P(z)>0$.

Решение. Ако $x,y,z>0$, тогаш неравенството е очигледно, бидејќи $P(t)>P(0)=0$, кога $t>0$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x,y<0$ и $z>0$. Тогаш $P(z)>P(-x-y)$ и доволно е да докажеме дека $P(x+y)+P(-x)+P(-y)>0$, за произволни $x,y>0$. Нека $Q(x)=ax^2+bx+c$. Бидејќи $P(x)$ е растечка функција во интервалот $(0,\infty)$, лесно се покажува дека $a>0$ и $c\geq 0$ (докажи!). Од друга страна

$$P(x+y)+P(-x)+P(-y)=2a(x^4+y^4-x^2y^2)+2c(x^2+y^2)+$$
$$+xy(4a(x+y)^2+3b(x+y)+2c)$$

и бидејќи $x^4+y^4-x^2y^2>0$, $x^2+y^2>0$ и $xy>0$, доволно е да докажеме дека $4a(x+y)^2+3b(x+y)+2c>0$, кога $x,y>0$. Последното неравенство следува од тоа што функцијата $P(x)$ е растечка, бидејќи $x+y>0$ и за растечка функција важи

$$P'(x+y)=(a(x+y)^4+b(x+y)^3+c(x+y)^2)'=4a(x+y)^3+3b(x+y)^2+2(x+y)>0.$$

30. Нека $p(x)$ е квадратен полином, за кој $|p(x)|\leq 1$ за $x\in\{-1,0,1\}$. Докажи, дека $|p(x)|\leq\frac{5}{4}$ за секој $x\in[-1,1]$.

Решение. Да забележиме дека

$$p(x)=\frac{x(x+1)}{2}p(1)+(1-x^2)p(0)+\frac{x(x-1)}{2}p(-1)$$

(бидејќи квадратните полиноми од двете страни на равенството имаат еднакви вредности во три точки). За $0\leq x\leq 1$ имаме дека

$$|p(x)|\leq\frac{x(x+1)}{2}+1-x^2+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{5}{4}-(\tfrac{1}{2}-x)^2\leq\frac{5}{4},$$

а за $-1\leq x\leq 0$ важи

$$|p(x)|\leq-\frac{x(x+1)}{2}+1-x^2+\frac{x(x-1)}{2}=\frac{5}{4}-(\tfrac{1}{2}+x)^2\leq\frac{5}{4}.$$

Конечно, $|p(x)|\leq\frac{5}{4}$ за секој $x\in[-1,1]$.

31. Полиномот $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ прима целобројни вредности за $x=-1$, $x=0$, $x=1$ и $x=2$. Докажи дека полиномот прима целобројни вредности за секој цел број x.

Решение. Полиномот ќе го запишеме во обликот

$$p(x)=6a\frac{x(x-1)(x+1)}{6}+2b\frac{x(x-1)}{2}+(a+b+c)x+d$$

Бидејќи $p(-1), p(0), p(1), p(2)\in\mathbb{Z}$, добиваме:

$$d=p(0)\in\mathbb{Z}$$
$$a+b+c=p(1)-p(0)\in\mathbb{Z}$$
$$2b=p(-1)+(a+b+c)-d=p(-1)+p(1)-2p(0)\in\mathbb{Z}$$
$$6a=p(2)-2b-2(a+b+c)-d\in\mathbb{Z}$$

Од друга страна ако $x\in\mathbb{Z}$, тогаш $\frac{x(x-1)(x+1)}{6},\frac{x(x-1)}{2}\in\mathbb{Z}$, па според тоа $p(x)\in\mathbb{Z}$, за секој $x\in\mathbb{Z}$.

32. Даден е полиномот

$$p(x)=x^5-3x^3+ax^2+bx-4.$$

Определи го коефициентите a и b така да една негова нула е $z=1-i$.

Решение. Бидејќи $z=1-i$ е нула на полиномот, кој е со реални коефициенти, негова нула е и бројот $\bar{z}=\overline{1-i}=1+i$. Според тоа

$$(1+i)^5-3(1+i)^3+a(1+i)^2+b(1+i)-4=0$$
$$(1-i)^5-3(1-i)^3+a(1-i)^2+b(1-i)-4=0.$$

Ако ги извршиме алгебарските операции го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases}-2+10i+b-2ai-bi=0\\ -2-10i+b+2ai+bi=0\end{cases}$$

Со собирање на двете равенки од системот, ја добиваме равенката $2b-4=0$, т.е. $b=2$. Ако во една равенка од системот замениме $b=2$, ја добиваме равенката $8i-2ai=0$, од каде добиваме $a=4$. Според тоа бараниот полином е

$$p(x)=x^5-3x^3+4x^2+2x-4.$$

33. Нека $a,b\in\mathbb{N}, a>b$ и $a+b$ е парен број. Докажи, дека корените на равенката

$$x^2-(a^2-a+1)(x-b^2-1)-(b^2+1)^2=0$$

се природни броеви, но ниту еден од нив не е точен квадрат.

Решение. Корените на равенката се $x_1=b^2+1$ и $x_2=a^2-b^2-a$. Јасно, тие се природни броеви и x_1 не е точен квадрат. Да претпоставиме дека постојат природни броеви $a>b$, за кои $a+b$ е парен број и x_2 е точен квадрат, на пример c^2. Тогаш $m=\frac{a+b}{2}$ и $n=\frac{a-b}{2}$ се природни броеви и важи

$$(4m-1)(4n-1)=4(4mn-m-n)+1=4(a^2-b^2-a)+1=(2c)^2+1^2.$$

Според тоа, бројот $(2c)^2+1$ има прост делител од видот $4k-1$. Од малата теорема на Ферма следува дека тој делител треба да е делител на $2c$ и 1, што е противречност.

34. Даден е полином $f(x)=(x+d_1)(x+d_2)...(x+d_9)$, каде $d_1,d_2,...,d_9$ се различни цели броеви. Докажи, дека постои природен број N таков што за секој природен број $x\geq N$ бројот $f(x)$ има прост делител поголем од 22.

Решение. Нека P е производот на осумте прости броеви помали од 20 и $N=P^2+\max\{|d_i|, i=1,2,...,9\}$. Да претпоставиме дека за некој природен број $x\geq N$ сите прости делители на бројот $f(x)$ се помали од 20. Нека p_i е прост број со максимален степен во каноничното разложување на $x+d_i$. Јасно, тој степен е барем s. Освен тоа, два од броевите $p_i, i=1,2,..., p$ се совпаѓаат. Според тоа, $p_i^s \mid d_i-d_j$ за некои i и j, што е противречност при доволно големо s.

35. Најди полином со целобројни коефициенти чиј еден корен е бројот $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

Решение. Ако $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$, тогаш $x-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}$, од каде што добиваме:

$$3=(x-\sqrt{2})^3=x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2\sqrt{2}$$

Според тоа, $\sqrt{2}(3x^2+2)=x^3+6x-3$. Конечно,

$$P(x)=x^6-6x^4-6x^3+12x^2-36x+1$$

е полином за кој $P(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3})=0$.

36. Најди полином со целобројни коефициенти, таков што $a=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ да биде негова нула.

Решение. Имаме

$$\alpha=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3} \quad /()^3$$

$$\alpha^3=3+2+3\sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})$$

$$\alpha^3-5=3\sqrt[3]{6}\alpha \quad /()^3$$

$$\alpha^9-15\alpha^6-87\alpha^3-125=0$$

Значи, бараниот полином е

$$P(x)=x^9-15x^6-87x^3-125$$

и притоа $P(\alpha)=0$.

37. Ако α е корен на полином со целобројни коефициенти, тогаш за секој природен број m бројот $\sqrt[m]{\alpha}$ исто така е корен на полином со целобројни коефициенти.

Решение. Нека α е корен на полиномот

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

Тогаш $\sqrt[m]{\alpha}$ ќе биде корен на полиномот

$$Q(x) = a_n x^{mn} + a_{n-1} x^{m(n-1)} + ... + a_1 x^m + a_0 .$$

38. Нека $f(x)$ е полином со целобројни коефициенти и

$$f(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0 .$$

Докажи дека $f(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = 0$.

Решение. Нека $x = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Тогаш $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, т.е. $x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$. Ако последното равенство го квадрираме, добиваме $x^4 - 10x^2 + 25 = 24$. Полином со најнизок степен и со целобројни коефициенти за кој што $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ е негова нула е $g(x) = x^4 - 10x^2 + 1$. Ако полиномот со целобројни коефициенти го запишеме во облик

$$f(x) = (x^4 - 10x^2 + 1)p(x) + ax^3 + bx^2 + cx + d ,$$

каде a, b, c, d се цели броеви, тогаш од равенството $f(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$, добиваме

$$a(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 + b(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + c(\sqrt{2}+\sqrt{3}) + d = 0 .$$

Последното равенство можеме да го запишеме во обликот

$$(9a+c)\sqrt{3} + (11a+c)\sqrt{2} + 2b\sqrt{6} + 5b + d = 0 ,$$

од каде што добиваме дека

$$9a + c = 0 ,\ 11a + c = 0 ,\ 2b = 0 \text{ и } 5b + d = 0 ,$$

т.е. $a = b = c = d = 0$.

Според тоа, $f(x) = (x^4 - 10x^2 + 1)p(x)$, каде $p = p(x)$ е со целобројни коефициенти. Конечно, од

$$x^4 - 10x^2 + 1 = (\ x - \sqrt{3} - \sqrt{2}\ )(\ x - \sqrt{3} + \sqrt{2}\ )(\ x + \sqrt{3} - \sqrt{2}\ )(\ x + \sqrt{3} + \sqrt{2}\ ) .$$

следува $f(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 0$

39. Нека $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ е неконстантен полином со целобројни коефициенти, за кој важи $p(-1) = 0$ и $p(\sqrt{2})$ е цел број. Докажи дека постои природен број k , таков што $p(k) + a_k$ е парен број.

Решение. Од $p(-1) = 0$, следува $a_0 + a_2 + \cdots a_r = a_1 + a_3 + \cdots a_s$, каде r и s се најголемиот парен и најголемиот непарен број не поголем од n , соодветно. Но,

$$p(\sqrt{2}) = (a_0 + 2a_2 + 2^2 a_4 + \cdots 2^{\frac{r}{2}} a_r) + (a_1 + 2a_3 + 2^2 a_5 + \cdots + 2^{\frac{s-1}{2}} a_s) \cdot \sqrt{2}$$

е цел број, па мора $a_1 + 2a_3 + 2^2 a_5 + \cdots + 2^{\frac{s-1}{2}} a_s = 0$, односно a_1 е парен број.

Од друга страна,

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 2(a_0 + a_2 + \cdots + a_r)$$

е исто така парен број. Јасно, тогаш и $p(1) + a_1$ е парен број, па за $k = 1$ е исполнето барањето на задачата.

40. Нека P е полином со целобројни коефициенти. Растојанието меѓу две точки од неговиот график кои имаат целобројни координати е цел број. Докажи дека отсечката која што ги поврзува тие две точки е паралелна со x -оската.

Решение. Нека $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+....+a_1x+a_0$, каде $a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0\in\mathbb{Z}$ и $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$, $x_1\neq x_2$ се такви што растијанието меѓу $(x_1,P(x_1))$ и $(x_2,P(x_2))$ е цел број.

Да забележиме дека

$$\frac{x_1^k-x_2^k}{x_1-x_2}=x_1^{k-1}+x_1^{k-2}x_2+...+x_1x_2^{k-2}+x_2^{k-1}\in\mathbb{Z}\text{, ако } x_1,x_2\in\mathbb{Z}\text{, } x_1\neq x_2 .$$

Значи, $b_k=a_k\frac{x_1^k-x_2^k}{x_1-x_2}\in\mathbb{Z}$, за $k=1,2,3,....,n$. Од претходната дискусија, добиваме

$$\frac{P(x_1)-P(x_2)}{x_1-x_2}=a_n\frac{x_1^n-x_2^n}{x_1-x_2}+a_{n-1}\frac{x_1^{n-1}-x_2^{n-1}}{x_1-x_2}+...+a_2\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}+a_1=b_n+b_{n-1}+...+b_2+b_1=m\in\mathbb{Z}.$$

Сега,

$$\begin{aligned}d[(x_1,P(x_1)),(x_2,P(x_2))]&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(P(x_1)-P(x_2))^2}\\&=|x_1-x_2|\sqrt{1+(\tfrac{P(x_1)-P(x_2)}{x_1-x_2})^2}=|x_1-x_2|\sqrt{1+m^2}\end{aligned}$$

Од условот на задачата $|x_1-x_2|\sqrt{1+m^2}\in\mathbb{Z}$. Значи, $\sqrt{1+m^2}\in\mathbb{Z}$, па според тоа $1+m^2$ е точен квадрат. Но, ако $m\neq 0$, тогаш

$$|m|^2<1+|m|^2<(|m|+1)^2,$$

па $1+m^2$ не е точен квадрат. Значи, $1+m^2$ е точен квадрат ако и само ако $m=0$. Тогаш $\frac{P(x_1)-P(x_2)}{x_1-x_2}=0$, т.е. $P(x_1)-P(x_2)=0$, па затоа $P(x_1)=P(x_2)$. Заради последното равенство, отсечката што ги сврзува точките $(x_1,P(x_1))$ и $(x_2,P(x_2))$ е паралелна со x -оската.

41. Докажи дека не постои полином $P(x)$ со позитивен степен и со целобројни коефициенти, таков што за секој природен број n , $P(n)$ е прост број.

Решение. Нека

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

е полином со позитивен степен, со целобројни коефициенти $a_0,a_1,...,a_n$ и нека $P(x_0)=p$ е прост број а x_0 е природен број. Тогаш за секој цел број y бројот

$$\begin{aligned}P(x_0+py)&=a_n(x_0+py)^n+a_{n-1}(x_0+py)^{n-1}+...+a_1(x_0+py)+a_0\\&=P(x_0)+pg(y)=p(1+g(y))\end{aligned},$$

каде што $g(y)$ е полином по y со цели коефициенти од $n-$ти степен, е делив со p. Равенките $g(y)=0$ и $g(y)+2=0$ имаат најмногу n цели корени, па затоа постојат бесконечно многу цели броеви y за кои $g(y)\neq 0$ и $g(y)+2\neq 0$, односно $1+g(y)\neq\pm1$ и затоа за бесконечно многу цели броеви y, бројот $P(x_0+py)$ ќе биде сложен број

42. Докажи, дека полиномот $P(x)=x^4-1994x^3+(1993+m)x^2-11x+m$, каде m е цел број, има најмногу еден целоброен корен.

Решение. Нека претпоставиме дека полиномот има барем два целобројни корени. Тогаш

$$x^4-1994x^3+(1993+m)x^2-11x+m=(x^2-ax+b)(x^2-cx+d)$$

каде a и b се цели броеви. Со споредување на коефициентите добиваме

$$a+c=1994 \tag{1}$$
$$ac+b+d=1993+m \tag{2}$$
$$ad+bc=11 \tag{3}$$
$$bd=m. \tag{4}$$

Од (1) следува дека c е цел број, а тогаш од (2) следува дека и d е цел број. Повторно од (1) следува дека a и c се со иса парност, а од (3) добиваме дека тие не може да се истовремено парни. Според тоа, a и c се непарни, па од (3) заклучувамењ дека b и d се со различна парност. Сега од (4) следува дека m е парен број. Но, тоа значи дека левата страна на (2) е парна, а десната страна е непарна што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека полиномот има најмногу еден целоброен корен.

43. Дали постои полином $P=P(x)$ со реални коеифициенти, таков што

$$P(\cos x)=\sin x\,?$$

Решение. *Прв начин.* Нека претпоставиме дека таков полином $P=P(t)$ постои.Тогаш, за $x=\frac{\pi}{2}$ добиваме $P(\cos\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}=1$, односно $P(0)=1$. Од друга страна, за $x=\frac{3\pi}{2}$, добиваме $P(\cos\frac{3\pi}{2})=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$, односно $P(0)=-1$.

Бидејќи секој полином е функција определена на множеството реални броеви, т.е. на секој реален број му е придружен еден единствен реален број, заради добиената контрадикција таков полином не постои.

Втор начин. Нека претпоставиме дека таков полином $P=P(t)$ за кој што $P(\cos x)=\sin x$ постои. Тогаш, ако го квадрираме последното равенство добиваме

$$P^2(\cos x)=(\sin x)^2=\sin^2 x=1-\cos^2 x\,.$$

Значи, полиномот $P=P(t)$ го исполнува равенството $P^2(t)=1-t^2$. Значи, P е полином од прв степен, т.е. $P(t)=at+b$, каде $a,b\in\mathbb{R}$. За секој полином од тој облик важи

$$P^2(t)=(at+b)^2=a^2t^2+2abt+b^2\,.$$

Од еднаквоста на полиномите $a^2t^2+2abt+b^2=1-t^2$, добиваме $a^2=-1$, што е противречност.

Според тоа, не постои полином со саканите својства.

44. Природните броеви a,b,c,d,e и f се такви што нивниот збир S е делител на броевите $abc+def$ и $ab+bc+ca-de-ef-fd$. Докажи дека S е сложен број.

Решение. Ќе го разгледаме полиномот

$$f(x)=(x+a)(x+b)(x+c)-(x-d)(x-e)(x-f),$$

кој е полином со целобројни коефициенти. Јасно е дека f може да се запише во вид

$$f(x)=Sx^2+(ab+bc+ca-de-ef-fd)x+abc+def\ ,$$

каде $S=a+b+c+d+e+f$. Но $S\,|\,(abc+def)$ и $S\,|\,(ab+bc+ca-de-ef-fd)$, па добиваме дека $S\,|\,f(k)$, за секој $k\in\mathbb{N}$. Според тоа,

$$S\,|\,f(d)=(d+a)(d+b)(d+c)\,.$$

Јасно е дека S не може да е прост број, тогаш тој е делител на некој од броевите $d+a,d+b,d+c$, па според тоа $S\le d+a$ или $S\le d+b$ или $S\le d+c$. Но тоа не е можно, бидејќи $S>d+a,S>d+b,S>d+c$. Според тоа, S е сложен број.

45. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ од реални броеви е зададена со

$$a_1=1\,,\ a_2=p\ \text{ и }\ a_{n+1}=pa_n-a_{n-1}\,,\ n>1\,.$$

Докажи дека за $n>1$ полиномот $x^n-a_nx+a_{n-1}$ е делив со полиномот x^2-px+1.

Решение. З а $n=2$ имаме $P_2(x)=x^2-px+1$, па според тоа $x^2-px+1\,|\,P_2(x)$. Нека претпоставиме дека

$$x^2-px+1\,|\,P_n(x)=x^n-a_nx+a_{n-1}\,. \qquad (1)$$

Користејќи го равенството $a_{n+1}+a_{n-1}=pa_n$, добиваме

$$\begin{aligned}P_{n+1}(x)&=x^{n+1}-a_{n+1}x+a_n=x^{n+1}-a_nx^2+a_{n-1}x+a_nx^2-a_{n+1}x-a_{n-1}x+a_n\\&=x(x^n-a_nx+a_{n-1})+a_n(x^2-px+1)\end{aligned}$$

Користејќи ја индуктивната претпоставка (1) и (2), добиваме

$$x^2-px+1\,|\,P_{n+1}(x)=x^n-a_{n+1}x+a_n\,.$$

Според принципот на математичка индукција, добиваме дека

$$x^2-px+1\,|\,x^n-a_{n+1}x+a_n\,,\ \ n\in\mathbb{N}\,.$$

46. За кои вредности на k полиномот $1+x^2+x^4+...+x^{2k}$ е делител на полиномот $1+x^4+x^8+...+x^{4k}$.

Решение. Ако воведеме смена $x^2=t$, тогаш полиномот $1+x^2+x^4+...+x^{2k}$ за $x\ne\pm1$ можеме да го запишеме во видот

$$1+x^2+x^4+...+x^{2k}=1+t+t^2+...+t^k=\tfrac{t^{k+1}-1}{t-1}=\tfrac{x^{2k+2}-1}{x^2-1}\,,$$

а ако воведеме смена $x^4=z$, тогаш полиномот $1+x^4+x^8+...+x^{4k}$ за $x\ne\pm1,\pm i$ можеме да го запишеме во облик

$$1+x^4+x^8+...+x^{4k}=1+z+z^2+...+z^k=\tfrac{z^{k+1}-1}{z-1}=\tfrac{x^{4k+4}-1}{x^4-1}=\tfrac{x^{2k+2}-1}{x^2-1}\tfrac{x^{2k+2}+1}{x^2+1}\,.$$

Според тоа, при делење на $1+x^4+x^8+...+x^{4k}$ со $1+x^2+x^4+...+x^{2k}$ добиваме $\frac{x^{2k+2}+1}{x^2+1}$.

Доволно е да ги определиме вредностите на k за кои $x^{2k+2}+1$ е делив со x^2+1.

Ќе разгледаме два случаи.

а) $k=2s$. Во овој случај имаме

$$x^{2k+2}+1=(x^2)^{k+1}+1=(x^2)^{2s+1}+1=(x^2+1)(x^{2k}-x^{2k-2}+...-x^2+1),$$

па заради тоа

$$\frac{x^{2k+2}+1}{x^2+1}=x^{2k}-x^{2k-2}+...-x^2+1.$$

Во овој случај полиномот $1+x^2+x^4+...+x^{2k}$ е делител на полиномот $1+x^4+x^8+...+x^{4k}$ а количникот е $x^{2k}-x^{2k-2}+...-x^2+1$.

б) $k=2s+1$. Во овој случај $x^{2k+2}+1=x^{4s+4}+1$ и $x^{2k+2}+1$ не е делив со x^2+1 (нулите на x^2+1 не се нули на $x^{4s+4}+1$), па според тоа и полиномот $1+x^4+x^8+...+x^{4k}$ не е делив со полиномот $1+x^2+x^4+...+x^{2k}$.

Конечно, вредности на k за кои полиномот $1+x^2+x^4+...+x^{2k}$ е делител на $1+x^4+x^8+...+x^{4k}$ се сите парни броеви.

47. а) Определи ја најмалата вредност која ја прима полиномот

$$p(x,y)=4+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2 \qquad (1)$$

б) Докажи дека полиномот (1) не може да се претстави како збир на квадрати на полиноми од x и y.

Решение. а) За секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$\begin{aligned}p(x,y)&=4+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2=3+1+x^2y^4+x^4y^2-3x^2y^2\\&\geq 3+3\sqrt[3]{1\cdot x^2y^4\cdot x^4y^2}-3x^2y^2=3\end{aligned}$$

Значи, најмалата вредност која p ја достигнува е 3 и таа се достигнува за $x=y=1$.

б) Нека $p(x,y)=g_1(x,y)+g_2(x,y)+...+g_n(x,y)$. Бидејќи $p(0,y)=4$ и $p(x,0)=4$, полиномите $g_i(x,y)$, $i=1,2,...,n$ не можат да содржат собирци од облик ax^k и by^l за било кои $a,b\in\mathbb{R}$ и $k,l\in\mathbb{N}$. Затоа коефициентот пред x^2y^2 е позитивен, што не е можно. Значи, полиномот (1) не може да се запише во бараниот облик.

48. Одреди ја најголемата вредност на полиномот

$$f(x,y)=-x^2+2xy-4y^2+2x+10y-3.$$

Решение. Полиномот можеме да го запишеме во видот

$$\begin{aligned}f(x,y)&=-(x^2-2xy+4y^2-2x-10y+3)\\&=-[x^2-2(y+1)x+(y+1)^2-(y+1)^2+4y^2-10y+3]\\&=-[(x-y-1)^2+3y^2-12y+2]=-[(x-y-1)^2+3(y-2)^2-10]\\&=10-(x-y-1)^2-3(y-2)^2\end{aligned}$$

Според тоа, максималната вредност на полиномот е 10 и се достигнува за $x-y-1=0, y-2=0$ односно за $x=2, y=3$.

49. Нека $n\geq 2$ е природен број и $f(x)=(x+a)(x+b)$, каде a и b се позитивни реални броеви. Определи ја најголемата вредност на

$$F=\sum_{1\leq i<j\leq n}\min\{f(x_i), f(x_j)\},$$

каде $x_1, x_2, ..., x_n$ се ненегативни реални броеви чиј збир е еднаков на 1.

Решение. Бидејќи

$$\begin{aligned}\min\{f(x_i), f(x_j)\} &= \min\{(x_i+a)(x_i+b),(x_j+a)(x_j+b)\}\\ &\leq \sqrt{(x_i+a)(x_i+b)(x_j+a)(x_j+b)}\\ &\leq \tfrac{1}{2}((x_i+a)(x_j+b)+(x_j+a)(x_i+b))\\ &= x_ix_j+\tfrac{1}{2}(x_i+x_j)(a+b)+ab,\end{aligned}$$

добиваме

$$\begin{aligned}F &\leq \sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j+\tfrac{a+b}{2}\sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i+x_j)+\tbinom{n}{2}ab\\ &= \tfrac{1}{2}[(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2]+\tfrac{a+b}{2}(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i+\tbinom{n}{2}ab\\ &= \tfrac{1}{2}(1-\sum_{i=1}^{n}x_i^2)+\tfrac{a+b}{2}(n-1)+\tbinom{n}{2}ab\\ &\leq \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2)+\tfrac{a+b}{2}(n-1)+\tbinom{n}{2}ab\\ &= \tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{n})+\tfrac{n-1}{2}(a+b)+\tfrac{n(n-1)}{2}ab\\ &= \tfrac{n-1}{2}(\tfrac{1}{n}+a+b+nab).\end{aligned}$$

Во користените неравенства знаци за равенства важат ако и само ако $x_1=x_2=...=x_n=\frac{1}{n}$, па затоа најголемата вредност на F е $\frac{n-1}{2}(\frac{1}{n}+a+b+nab)$.

50. Нека $f(x)$ е полином со цели коефициенти, за кои важи

$$f(0)=23\,,\ f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=\ldots=f(x_n)=2014\,,$$

за некои различни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Најдете ја максималната вредност на n .

Решение. Дефинираме $g(x)=f(x)-2014$. Ако $f(x_i)=2014$, тогаш x_i е нула на $g(x)$, па затоа $g(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)q(x)$ за некој полином $q(x)$ со цели коефициенти, каде n е максималниот број на x_i . Ставајќи $x=0$ во $g(x)$ добиваме

$$g(0)=-1991=-11\cdot 181=\prod_{i=1}^{n}(x_i)q(0)\,.$$

Бидејќи 11 и 181 се прости броеви, следува дека -1991 може да се запише како производ на најмногу 4 различни множители, односно бидејќи $-1991=-1\cdot 1\cdot 11\cdot 181$, добиваме дека $n\le 4$. Останува да дадеме пример кога $n=4$. Нека

$$g(x)=(x-1)(x+1)(x+11)(x+181),\; q(x)=1\,.$$

Тогаш полиномот

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x+11)(x+181)+2014$$

ги задоволува условите на задачата.

51. Ако $a+b+c=0$, тогаш $\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$. Докажи!

Решение. Формулите за степените суми за s_2,s_3 и s_5, изразени преку елементарните симетрични полиноми $\sigma_1=a+b+c$, $\sigma_2=ab+bc+ca$ и $\sigma_3=abc$ се:

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2+5\sigma_1^2\sigma_3-5\sigma_2\sigma_3$$

$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3,$$

$$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2\,.$$

Бидејќи $\sigma_1=a+b+c=0$, степените суми го добиваат обликот

$$s_5=-5\sigma_2\sigma_3=-5(ab+bc+ca)abc$$

$$s_3=3\sigma_3=3abc\,,$$

$$s_2=-2\sigma_2=-2(ab+bc+ca),$$

односно $\frac{s_5}{5}=-abc(ab+bc+ca)$, $\frac{s_3}{3}=abc$, $\frac{s_2}{2}=-(ab+bc+ca)$. Според тоа

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{s_5}{5}=-abc(ab+bc+ca)=\frac{s_3}{3}\frac{s_2}{2}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

52. Нека $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ се реални броеви при што броевите $a_1,a_2,...,$ a_n се по парови различни.

Ако изразите $(a_i+b_1)(a_i+b_2)(a_i+b_3)...(a_i+b_n)$, $i=1,2,...,n$ имаат иста вредност, тогаш и изразите $(a_1+b_j)(a_2+b_j)(a_3+b_j)...(a_n+b_j)$, $j=1,2,...,n$ имаат иста вредност.

Решение. Ќе го разгледаме полиномот $P(x)=(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3)...(x+b_n)$. Од условот на задачата имаме $P(a_1)=P(a_2)=...=P(a_n)=d$, каде d е некој реален број. Но, тогаш $a_1,a_2,...,a_n$ се корени на полиномната равенка $P(x)-d=0$. Ако го разгледаме полиномот $Q(x)=P(x)-d$ добиваме дека $a_1,a_2,...,a_n$ се нули на $Q(x)$. Според тоа, $Q(x)=c(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$. Од друга страна n-тите степени на $P(x)$ и $P(x)-d=Q(x)$ се еднакви, па според тоа $c=1$. Да забележиме дека $P(-b_j)=0$ за секој $j=1,2,...,n$, од каде што следува

$$P(-b_j)-d=(-b_j-a_1)(-b_j-a_2)...(-b_j-a_n)=(-1)^n(b_j+a_1)(b_j+a_2)...(b_j+a_n)$$

$$(b_j+a_1)(b_j+a_2)...(b_j+a_n)=(-1)^{n+1}d\,.$$

Тврдењето следува од произволноста на j.

53. Даден е полином $P(x)$ со позитивни реални коефициенти. Докажи дека

$$P(1)P(xy) \geq P(x)P(y)$$

за $x \geq 1$, $y \geq 1$.

Решение. Ќе го примениме тежинското неравенство на Чебишев:

Ако $a_1, a_2, ..., a_n > 0$, $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ и $y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n$, тогаш

$$\frac{(a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n)(a_1y_1+a_2y_2+...+a_ny_n)}{a_1+a_2+...+a_n} \leq a_1x_1y_1 + a_2x_2y_2 + ... + a_nx_ny_n . \tag{1}$$

Сега ќе го разгледаме полиномот

$$P(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + ... + a_nx^{n-1}.$$

Во неравенството (1) ќе замениме

$$x_1 = 1,\ x_2 = x, ...,\ x_i = x^{i-1}, ...,\ x_n = x^{n-1},\ y_1 = 1,\ y_2 = y, ...,\ y_i = y^{i-1}, ...,\ y_n = y^{n-1},$$

со што се добива $P(x)P(y) \leq P(1)P(xy)$.

54. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти. За кој постои природен број k и последователни k цели броеви $n, n+1, n+2, ..., n+k-1$ такви што ниту еден од броевите $P(n), P(n+1), ... , P(n+k-1)$ не е делив со k. Докажи дека корените на $P(x)$ не се цели броеви.

Решение. Нека $P(x) = a_0x^d + a\ x^{d-1} + a_2x^{d-2} + ... + a_{d-1}x + a_d$ е полином кој ги исполнува условите од задачата и нека m е целобројна нула на P. Тогаш $P(x) = (x-m)Q(x)$ каде $Q(x)$ е полином од ($d-1$)-ви степен. Ако

$$Q(x) = b_0x^{d-1} + b_1x^{d-2} + b_2x^{d-3} + ... + b_{d-2}x + b_{d-1},$$

тогаш од својствата на полиноми имаме $a_0 = b_0$ и $a_k = b_k - mb_{k-1}$, $1 \leq k \leq d-1$. Бидејќи b_0 е цел број, со помош на принципот на математичка индукција добиваме дека $b_k \in \mathbb{Z}$. Бидејќи $P(j)$, $j = n, n+1, ..., n+k-1$ не се деливи со k, добиваме дека $j-m$, $j = n, n+1, ..., n+k-1$ не се деливи со k. Но тоа не е можно, бидејќи од k последователни цели броеви барем еден е делив со k. Заради добиената контрадикција, полиномот P нема целобројни нули.

55. Нека a е реален број и $P(x)$ е неконстантен полином со реални коефициенти таков што $P(x^2+a) = (P(x))^2$ за секој $x \in \mathbb{R}$. Докажи дека $a = 0$.

Решение. Од $(P(-x))^2 = P((-x)^2 + a) = P(x^2 + a) = (P(x))^2$ следува дека P е или парна или непарна функција.

Ако P е парна функција, тогаш $P(x) = Q(x^2)$. Тогаш $Q((x^2+a)^2) = Q^2(x^2)$, па затоа $Q((x+a)^2) = Q^2(x)$, за секој x. Оттука $Q(x^2) = Q^2(x-a)$, т.е. полиномот $Q(x-a)$ исто така го задоволува дадениот услов и притоа важи $\deg P = 2\deg Q$. Продолжувајќи на истиот начин ќе стигнеме до полином со непарен степен, кој го задоволува дадениот услов. Овој полином не може да е парна функција.

Од претходно изнесеното следува дека доволно е да го разгледаме случајот кога P е непарна функција. Тогаш $P(x)=xR(x^2)$ и затоа

$$(x^2+a)R((x^2+a)^2)=x^2R^2(x^2)\ .$$

Оттука следува

$$(x+a)R((x+a)^2)=xR^2(x)\text{ , т.е. } P(x)=(x-a)R^2(x-a)$$

за секој x. Нека $R(x-a)=x^kS(x)$, каде $S(0)\neq 0$. Лесно се гледа дека

$$(x-a)R^2(x-a)=x^{2k+1}T(x)-aS(0)x^{2k},$$

Бидејќи P е непарна функција следува дека $a=0$.

56. Докажи, дека секој полином од трет степен со реални коефициенти може да се претстави како збир од кубови на три неконстантни полиноми со реални коефициенти.

Решение. Секој полином P од трети степен има барем еден реален корен. Ако тој корен е трикратен, тогаш тврдењето е очигледно. Во спротивно полиномот P има еднократен корен α. Тогаш $P(x+\alpha)=a(x^3+3bx^2+cx)$, каде $ac\neq 0$ и тврдењето треба да го докажеме за полиномот во заградите (зошто?). Доволно е да определиме реални броеви $\alpha_1,\alpha_2,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ такви што

$$x^3+3bx^2+cx=\lambda_1(x+\alpha_1)^3+\lambda_2(x+\alpha_2)^3+\lambda_3x^3.$$

Имаме, $\lambda_3=1-\lambda_1-\lambda_2$, каде λ_1 и λ_2 се решенија на преопределениот систем линеарни равенки

$$\begin{cases}\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2=b\\ \alpha_1^2\lambda_1+\alpha_2^2\lambda_2=c\\ \alpha_1^3\lambda_1+\alpha_3^3\lambda_2=0.\end{cases}$$

За $0\neq\alpha_1\neq\alpha_2\neq 0$ системот составен од првите две равенки има единствено решение. Ако првата равенка ја помножиме со $\alpha_1\alpha_2$ и до неа ја одземеме втората равенка помножена со $\alpha_1+\alpha_2$, ќе ја добиеме третата равенка при услов дека $b\alpha_1\alpha_2=c(\alpha_1+\alpha_2)$. Бидејќи $c\neq 0$ можеме да определиме различни ненулти реални броеви β_1 и β_2 такви, што $\frac{b}{c}=\beta_1+\beta_2$. Останува да ставиме $\alpha_1=\frac{1}{\beta_1}$ и $\alpha_2=\frac{1}{\beta_2}$.

57. Ја разгледуваме низата полиноми $f_1,f_2,f_3,\ldots$ таква што $f_1(x)=x^3-3x$ и $f_{n+1}(x)=\ f_1(f_n(x))$, за секој $n\geq 1$. Определи го бројот на реалните корени на равенката

а) $f_{2013}(x)=2$,

б) $f_{2013}(x)=3$.

Решение. Ако $x\in[-2,2]$, тогаш x еднозначно може да се запише во облик $x=2\cos\alpha$, за некој $\alpha\in[0,\pi]$. Ако $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$, тогаш постои единствен реален број $t<-1$ или $t>1$, таков што $x=t+\frac{1}{t}$. Со индукција лесно се покажува дека во првиот случај $f_n(x) = 2\cos 3^n \alpha$, а во вториот случај $f_n(x) = t^{3^n} + \frac{1}{t^{3^n}}$.

а) Јасно, корените се во интервалот $[-2,2]$. Имаме

$$2\cos 3^{2013}\alpha = 2$$
$$3^{2013}\alpha = 2k\pi$$
$$\alpha = \frac{2k\pi}{3^{2013}}.$$

Од условот $\alpha \in [0,\pi]$ следува $k = 0,1,2,..., \frac{3^{2013}-1}{2}$, што значи дека равенката $f_{2013}(x) = 2$ има $\frac{3^{2013}+1}{2}$ реални корени.

б) Јасно, $x \in (2,+\infty)$. За $x = t + \frac{1}{t}, t > 1$ имаме $t^{3^{2013}} + \frac{1}{t^{3^{2013}}} = 3$. Равенката $y + \frac{1}{y} = 3$ има единствен корен кој е поголем од 1 и тој корен е $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Според тоа, равенката $f_{2013}(x) = 3$ има единствен корен $x = \sqrt[2013]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[2013]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.

58. Докажи дека нулите на полиномот

$$P(x) = x^8 - 92x^6 + 134x^4 - 28x^2 + 1$$

се $x = \operatorname{tg}\frac{r\pi}{15}$, $1 \le r < 15$ и $\mathrm{NZD}(r,15) = 1$.

Решение. Доволно е да провериме дека единствениот полином чии нули се осумте броеви дадени во условот е $x^8 - 92x^6 + 134x^4 - 28x^2 + 1$. Да забележиме дека ако $\theta = \frac{r\pi}{15}$ за некој $1 \le r < 15$ и $\mathrm{NZD}(r,15) = 1$, тогаш

$$\operatorname{tg}^2 5\theta = 3 \text{ и } \operatorname{tg}^2 \theta \ne 3 \qquad (*)$$

Вредностите на $\operatorname{tg}\frac{r\pi}{15}$ за $r = 1,2,4,7,8,11,13,14$ се сите различни и го задоволуваат условот (*). Затоа, доволно е да најдеме равенка чии корени се $x = \operatorname{tg}\theta$, при што важи (*). Ако $x = \operatorname{tg}\theta$, тогаш

$$\operatorname{tg} 5\theta = \frac{\mathrm{Im}(1+ix)^5}{\mathrm{Im}(1+ix)^5} = \frac{x(x^4-10x^2+5)}{5x^4-10x^2+1}\text{, т.е. } \operatorname{tg}^2 5\theta = \frac{x^2(x^4-10x^2+5)^2}{(5x^4-10x^2+1)^2} = 3,$$

од каде добиваме

$$x^2(x^8 - 20x^6 + 110x^4 - 100x^2 + 25) = 3(25x^8 - 100x^6 + 110x^4 - 20x^2 + 1),$$

односно

$$x^{10} - 95x^8 + 410x^6 - 430x^4 + 85x^2 - 3 = 0.$$

Со делење на последната равенка со $x^2 - 3$ добиваме дека

$$P(x) = x^8 - 92x^6 + 134x^4 - 28x^2 + 1$$

е полиномот чии нули се $x = \operatorname{tg}\frac{r\pi}{15}$ за $1 \le r < 15$ и $\mathrm{NZD}(r,15) = 1$.

59. Нека $P(x), \deg P = n > 1$ е полином со целобројни коефициенти и нека $k \in \mathbb{N}$. Докажи дека за полиномот

$$Q(x)=\underbrace{P(P(...P(P}_{k\text{ пати}}(x))...)) .$$

постојат најмногу n цели броеви t такви што $Q(t)=t$.

Решение. Ќе докажеме дека ако $Q(t)=t$, тогаш $P(P(t))=t$. Нека $x_0=t$ и $x_{i+1}=P(x_i)$ за $i\geq 0$, така што $x_k=x_0$. Да означиме $d_i=x_{i+1}-x_i$. Бидејќи

$$d_i \mid P(x_{i+1})-P(x_i)=x_{i+2}-x_{i+1}=d_{i+1}$$

за секој i , од $d_k=d_0$ следува дека $|d_0|=|d_1|=...|d_k|$. Нека препоставиме дека $d_1=d_0=d\neq 0$. Тогаш $d_2=d$ (во спротивно ќе важи $x_3=x_1$, па во низата никогаш нема да се појави x_0); слично $d_3=d$ итн, па затоа $x_k=x_0+kd\neq x_0$, за секој k , што е противречност. Според тоа, $d_1=-d_0$, па затоа $x_2=x_0$, т.е. $P(P(t))=t$.

Ако секој $t\in\mathbb{Z}$ таков што $Q(t)=t$ го задоволува условот $P(t)=t$, тогаш бројот на решенијата е помал или еднаков на $\deg P=n$. Да претпоставиме дека за некој $t_1\in\mathbb{Z}$ важи $P(t_1)=t_2\neq t_1$ $P(t_2)=t_1$ и да разгледаме произволен $t_3\notin\{t_1,t_2\}$ и $P(t_3)=t_4$ со $P(t_4)=t_3$. Тогаш $t_1-t_3 \mid t_2-t_4 \mid t_1-t_3$, т.е. $|t_1-t_3|=|t_2-t_4|$, а аналогно $|t_1-t_4|=|t_2-t_3|$. Ако $t_1-t_3=t_2-t_4=k\neq 0$, другото равенство го добива обликот $|t_1-t_2+k|=|t_2-t_1+k|$, што не е можно. Затоа мора да важи $t_1-t_3=t_4-t_2$, т.е. $P(t_1)+t_1=P(t_3)+t_3=c$ за некој c . Според тоа, сите целобројни решенија на равенката $P(P(t))=t$ се нули на полиномот $P(x)+x-c$, а нив ги има најмногу n .

60. Полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ се од десетти степен и имаат водечки коефициенти еднакви на 1. Равенката $P(x)=Q(x)$ нема реални решенија. Докажи дека равенката $P(x+1)=Q(x-1)$ има барем едно реално решение.

Решение. Нека $P(x)=x^{10}+p_9x^9+...+p_0$ и $Q(x)=x^{10}+q_9x^9+...+q_0$. Тогаш полиномот $P(x)-Q(x)=(p_9-q_9)x^9+...+(p_0-q_0)$ нема реални корени. Ако $p_9\neq q_9$, тогаш степенот на $P(x)-Q(x)$ е непарен, па затоа тој има барем еден реален корен, што е противречност. Значи, $p_9=q_9$. Понатаму,

$$P(x+1)=x^{10}+(p_9+10)x^9+... \text{ и } Q(x-1)=x^{10}+(q_9-10)x^9+... ,$$

па затоа полиномот $P(x+1)-Q(x-1)=20x^9+...$ е од деветти степен, што значи дека има барем еден реален корен.

61. Определи ги сите природни броеви n , за кои постојат полиноми со целобројни коефициенти $f_1(x), f_2(x),..., f_n(x), g(x)$, не задолжително различни, такви што $x^{2013}+n$ е делител на $g(x)$ и

$$\prod_{i=1}^{n}((f_i(x))^2-1)=g(x)^2-1 . \qquad (1)$$

Решение. Од $x^{2013} \equiv x(\bmod 3)$ следува дека постои a таков што $3 \mid a^{2013}+n$, што значи дека $3 \mid g(a)$. Ако во (1) ставиме $x=a$, добиваме дека по модул 3 тоа е можно само ако $3 \mid f_i(a)$, за $i=1,2,...,n$. Според тоа, $(-1)^n \equiv -1(\bmod 3)$, од што следува дека n мора да е непарен број.

Ќе докажеме дека за секој непарен број n постојат полиноми кои го задоволуваат условот на задачата. Дефинираме низа $g_1(x), g_2(x),...$ со

$$g_1(x)=x^{2013}+n \text{ и } g_{i+1}(x)=4g_i(x)^3-3g_i(x) \text{, за } i \geq 1.$$

Јасно, $x^{2013}+n$ е делител на секој од полиномите во низата $g_1(x), g_2(x),...$ и освен тоа

$$g_{i+1}(x)^2-1=(4g_i(x)^2-1)^2(g_i(x)^2-1).$$

Според тоа,

$$\begin{aligned} g_t(x)^2-1 &= (4g_{t-1}(x)^2-1)^2(g_{t-1}(x)^2-1)=... \\ &= (4g_{t-1}(x)^2-1)^2(4g_{t-2}(x)^2-1)^2...(4g_1(x)^2-1)^2(g_1(x)^2-1) \\ &= \prod_{i=1}^{2t-1}(f_i(x)^2-1) \end{aligned}$$

каде $f_1(x)=g_1(x)^2-1$ и $f_{2i}(x)=f_{2i+1}(x)=4g_i(x)^2-1$, за $i=1,2,...,t-1$.

62. Определи ги сите природни броеви n за кои постојат полином f од $n-$ти степен со целобројни коефициенти и позитивен водечки коефициент и полином g со целобројни коефициенти такви што

$$xf^2(x)+f(x)=(x^3-x)g^2(x). \tag{1}$$

Решение. Равенката (1) е еквивалентна со равенката

$$[2xf(x)+1]^2=(x^2-1)[2xg(x)]^2+1.$$

Ќе ги опишеме сите парови полиноми (p,q) со целобројни коефициенти такви што

$$p^2(x)=(x^2-1)q^2(x)+1. \tag{2}$$

Нека (p,q) е еден таков пар, во кој степенот на q е $k \geq 1$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека p и q имаат позитивни водечки коефициенти. Да ставиме $P_0=p$ и $Q_0=q$ и да ги формираме полиномите

$$P_1(x)=xp(x)-(x^2-1)q(x) \text{ и } Q_1(x)=-p(x)+xq(x).$$

Лесно се проверува дека полиномите P_1 и Q_1 исто така ја задоволуваат равенката (2), при што $\deg Q_1 < \deg Q_0$ [*)].

Продолжувајќи ја постапката ќе добиеме решение (P_s,Q_s), во кое степенот на Q_s е еднаков на нула. Лесно се добива дека равенката има две решенија од овој вид и тоа $(x,1)$ и $(1,0)$. Бидејќи примената на операцијата врз првото од овие решенија го дава второто, без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $(P_s,Q_s)=(1,0)$.

Од досега изнесеното следува, дека сите такви парови (p,q) се зададени со рекурзија определена со почетен услов $(p_0, q_0) = (1,0)$ и рекурентна врска обратна на горната постапка

$$(p_{i+1}, q_{i+1}) = (xp_i(x) + (x^2-1)q_i(x), p_i(x) + xq_i(x)) .$$

Поточно, оваа рекурзија ги дава оние решенија во кои водечките коефициенти на p и q се позитивни.

Еден член на оваа низа ќе соодветствува на решение на (1) тогаш, кога $p(x)$ дава остаток 1 при делење со $2x$ и $q(x)$ е делив со $2x$. Бидејќи првите пет членови на низата се

$$(1,0), (x,1), (2x^2-1, 2x), (4x^3-3x, 4x^2-1) \text{ и } (8x^4-8x^2+1, 8x^3-4x)$$

и $(p_4(x), q_4(x)) \equiv (1,0) \pmod{2x}$ следува дека низата е периодична со период 4 по модул $2x$ и до решенија на (1) водат точно оние парови (p_i, q_i) за кои $4\,|\,i$. Конечно, бараните вредности на n се броевите од видот $4k+3,\ k \geq 0$.

Забелешка. Еден начин да се досетиме на конструкцијата *) е следниот. Равенката (2) можеме да ја запишеме во видот

$$1 = (p(x) - q(x)\sqrt{x^2-1})(p(x) + q(x)\sqrt{x^2-1}) .$$

Во исто време едно нејзино решение е $(p,q) = (x,1)$, па затоа

$$1 = (x - \sqrt{x^2-1})(x + \sqrt{x^2-1}) .$$

Ако ги помножиме последните две равенства и ги групираме множителите на соодветен начин точно го добиваме равенството

$$1 = (P_1(x) - Q_1(x)\sqrt{x^2-1})(P_1(x) + Q_1(x)\sqrt{x^2-1}) .$$

63. Даден е полином $P(x)$ и броеви $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ за кои $a_1a_2a_3 \neq 0$. Ако за секој реален број x е исполнето равенството

$$P(a_1x+b_1) + P(a_2x+b_2) = P(a_3x+b_3)$$

докажи, дека $P(x)$ има барем еден реален корен.

Решение. Нека претпоставиме дека $P(x)$ нема реален корен. Тогаш степенот на $P(x)$ е парен и е најмалку 2. Навистина, секој полином со непарен степен има реален корен, а ако $P(x) = \text{const}$, тогаш од условот следува дека $P(x) \equiv 0$.

Бидејќи $P(x)$ нема реален корен, следува дека вредностите на $P(x)$ се со еднакви знаци. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $P(x)$ прима само позитивни вредности, т.е. за секој x важи $P(x) > 0$. Но, степенот на $P(x)$ е парен, па затоа ќе постои точка t_0 во која $P(x)$ достигнува глобален минимум, т.е. за секој x е исполнето неравенството $P(x) \geq P(t_0) = A$. Да избереме x_0 за кој $t_0 = a_3x_0 + b_3$. Тогаш

$$P(a_1x_0+b_1) + P(a_2x_0+b_2) \geq 2A > A = P(t_0) = P(a_3x_0+b_3) ,$$

што е противречност. Според тоа, $P(x)$ има барем еден реален корен.

64. Полиномот $P(x), \deg P = n \geq 3$ има n реални корени $x_1 < x_2 < ... < x_n$ такви што $x_2 - x_1 < x_3 - x_2 < ... < x_n - x_{n-1}$. Докажи, дека максимумот на функцијата $y = |P(x)|$ во интервалот $[x_1, x_n]$ се достигнува во точка од интервалот $[x_{n-1}, x_n]$.

Решение. Јасно, од $|P(x_i)| = 0$ следува дека максимумот на $|P(x)|$ не може да се достигне во точките $x_i, i = 1,2,...,n$. Да разгледаме произволна точка $a \in (x_i, x_{i+1})$, за $i < n-1$ и да ставиме $t = a - x_i$, $b = x_n - t$. Од

$$x_n > b > x_n - (x_{i+1} - x_i) > x_n - (x_n - x_{n-1}) = x_{n-1}$$

следува $b \in (x_{n-1}, x_n)$. Ќе докажеме, дека $|P(b)| > |P(a)|$, од што следува тврдењето на задачата.

Од условот на задачата следува $x_{k+m} - x_k < x_{l+m} - x_l$, за $1 \leq k < l \leq n-m$. Имаме $P(x) = c(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$, каде c е водечкиот коефициент на $P(x)$. Понатаму, важи $|b - x_s| = x_n - x_s - t > x_{i+n-s} - x_i - t = |x_{i+n-s} - a|$, за $i+1 \leq s \leq n-1$. Освен тоа, важи $|b - x_r| = b - x_r > x_{n-1} - x_r > a - x_r = |a - x_r|$, за $1 \leq r \leq i-1$. Ако ги помножиме последните неравенства со равенството

$$c|b - x_n| \cdot |b - x_i| = ct(x_n - x_i - t) = c|a - x_i| \cdot |a - x_n|$$

добиваме

$$\begin{aligned} |P(b)| &= c|b - x_1| \cdot |b - x_2| \cdot ... \cdot |b - x_n| \\ &> c|a - x_1| \cdot |a - x_2| \cdot ... \cdot |a - x_n| = |P(a)| \end{aligned}.$$

65. Даден е полином $f(x)$ со следниве својства:

1) коефициентите на $f(x)$ се природни броеви,
2) равенката $f(x) = 0$ има барем еден рационален корен,
3) ако k е степен на $f(x)$, тогаш вредностите на $f(x)$ за некои $k+1$ различни природни броеви се прости броеви.

Докажи, дека $f(x) = ax + b$ за некои два заемно прости природни броја a и b.

Решение. Бидејќи коефициентите на $f(x)$ се природни броеви, корените на равенката $f(x) = 0$ се негативни. Од условот 2) следува дека

$$f(x) = (qx + p)R(x),$$

каде без ограничување на општоста можеме да земеме дека $p > 0$ и $q > 0$, а $R(x)$ е полином со целобројни коефциеинти и $\deg R = k-1$ (горното разложување следува од Хорнеровата шема). Нека $x_i, i = 1,2,...,k+1$ се такви природни броеви што $f(x_i) = r_i$ и r_i се прости броеви. Бидејќи $qx_i + p > 1$ е делител на $f(x_i) = r_i$, заклучуваме дека $qx_i + p = r_i$. Значи, $f(x_i) - (qx_i + p) = 0$, за $i = 1,2,...,k+1$. Според тоа, $f(x) - (qx + p)$ е полином од $k-$ти степен со најмалку $k+1$ корен (нула), па затоа $f(x) = qx + p$. Броевите q и p се заемно прости, бидејќи во спротивно $f(x_i)$ не е прост број.

66. Даден е природен број $n \geq 3$. Определи го најмалиот природен број k за кој е точно следново тврдење: за произволни n точки $A_i(x_i, y_i)$, меѓу кои не постојат три кои се колинеарни, и произволни реални броеви $c_i, 1 \le i \le n$, постои полином $P(x,y), \deg P \le k$ таков што $P(x_i, y_i) = c_i$, за $i = 1, 2, ..., n$.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. За произволни точки $A_i(x_i, y_i)$, $1 \le i \le n$ во рамнината, меѓу кои не постојат три кои се колинеарни, постои полином $P(x,y), \deg P \le [\frac{n}{2}]$ таков што $P(x_n, y_n) = 1$ и $P(x_i, y_i) = 0$, за $i = 1, 2, ..., n-1$.

Доказ. Да забележиме дека постојат $d = [\frac{n}{2}]$ прави, такви што точката A_n не лежи на ниту една од нив, а секоја од точките $A_1, ..., A_{n-1}$ лежи барем на една од тие прави (за непарен n тоа се правите $A_1A_2, A_3A_4, ..., A_{n-2}A_{n-1}$, а за n парен тоа се правите $A_1A_2, A_3A_4, ..., A_{n-3}A_{n-2}, A_{n-2}A_{n-1}$. Нека $k_i x + l_i y + m_i = 0$ е равенката на $i-$тата права ($i = 1, 2, ..., d$). Тогаш полиномот

$$Q(x,y) = \frac{(k_1 x + l_1 y + m_1)...(k_d x + l_d y + m_d)}{(k_1 x_n + l_1 y_n + m_1)...(k_d x_n + l_d y_n + m_d)},$$

го има саканото својство, со што лемата е докажана. ■

Ќе докажеме дека тврдењето од условот на задачата е исполнето за $k = [\frac{n}{2}]$. Според лемата за секој $i = 1, 2, ..., n$ да постои полином $P_i(x,y)$, $\deg P_i \le [\frac{n}{2}]$ кој се анулира во сите точки $A_1, ..., A_n$, освен во точката A_i, при што важи $P_i(x_i, y_i) = 1$. Тогаш за полиномот $P(x,y) = \sum_{i=1}^{n} c_i P_i(x,y)$ важи $\deg P \le [\frac{n}{2}]$ и $P(x_i, y_i) = c_i$, за $i = 1, 2, ..., n$.

Останува да докажеме дека тврдењето не е точно за $k < [\frac{n}{2}]$. Да ги разгледаме точките $A_i(i, i^2)$, $i = 1, 2, ..., n$ кои лежат на параболата $y = x^2$ и да ставиме $c_1 = c_2 = ... = c_{n-1} = 0$, $c_n = 1$. Бидејќи секоја права ја сече параболата во најмногу две точки, точките A_i го задоволуваат условот на задачата. Нека претпоставиме дека постои полином $P(x,y)$, $\deg P \le k$ таков што $P(x_i, y_i) = c_i$, за $i = 1, 2, ..., n$. Тогаш степенот на полиномот $Q(x) = P(x, x^2)$ е помал или еднаков на $2k$. Притоа важи $Q(1) = Q(2) = ... = Q(n-1) = 0$ и $Q(n) = 1$. Според тоа, немултиот полином $Q(x)$ има $n-1$ корени, па затоа $2k \ge n-1$ и $k \ge [\frac{n}{2}]$.

67. Нека $P(x), Q(x)$ и $R(x)$ се полиноми со реални коефициенти такви што за секој $x \in \mathbb{R}$ важи $P(Q(x)) + P(R(x)) = const$. Докажи дека барем еден од полиномите $P(x)$ и $Q(x) + R(x)$ е од нулти степен.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека коефициентот пред $P(x)$ е еднаков на 1. Нека $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $n \ge 1$. Тогаш од $P(Q(x)) + P(R(x)) = const$ следува

$$Q^n + a_1 Q^{n-1} + ... + a_{n-1} Q + R^n + a_1 R^{n-1} + ... + a_{n-1} R = c = const. \qquad (1)$$

Ако $\deg Q \ne \deg R$ и на пример $\deg Q > \deg R$, тогаш

$$1+\frac{a_1}{Q}+...+\frac{a_{n-1}}{Q^{n-1}}+(\frac{R}{Q})^n+a_1(\frac{R}{Q})^{n-1}+...+a_{n-1}\frac{R}{Q}=\frac{c}{Q^n}.$$

Сега ако во последното равенство земеме $x\to\infty$, десната страна тежи кон 1, а левата тежи кон 0 што не е можно. Затоа $\deg Q=\deg R$ и треба да важи $\lim\limits_{n\to\infty}(1+(\frac{b}{a})^n)=0$, каде a и b се водечките коефициенти на R и Q, соодветно. Оттука следува дека n е непарен број и $b=-a$. Сега можеме да запишеме $Q(x)=ax^l+Q_1(x)$ и $R(x)=-ax^l+R_1(x)$, каде $\deg Q=\deg R=l$ и $\deg Q_1,\deg R_1<l$. Сега равенството (1) може да се запише во видот

$$(Q+R)(Q^{n-1}-Q^{n-2}R+...+R^{n-1})+a_1(Q^{n-1}+R^{n-1})+...+a_{n-1}(Q+R)-c=0$$

т.е.

$$(Q_1+R_1)(Q^{n-1}-Q^{n-2}R+...+R^{n-1})+a_1(Q^{n-1}+R^{n-1})+...+a_{n-1}(Q+R)-c=0.$$

За собирокот $(-1)^{k-1}Q^{n-k}R^k$ од вторите загради во последното равенство водечкиот член е еднаков на $(-1)^{k-1}a^{n-k}(-a)^{k-1}x^{l(n-l)}$, а водечкиот член на $a_1(Q^{n-1}+R^{n-1})$ е еднаков на $2a_1a^{n-1}x^{l(n-l)}$. Затоа последното равенство можеме да го запишеме во видот

$$(Q_1+R_1)(na^{n-1}x^{l(n-l)}+...)+2a_1a^{n-1}x^{l(n-l)}+...+...-c=0.$$

Последното равенство не е можно ако $na^{n-1}(Q_1+R_1)+2a_1a^{n-1}\neq 0$. Така заклучуваме дека $Q_1+R_1=-\frac{2a_1}{n}$ и затоа

$$Q(x)+R(x)=ax^l+Q_1(x)-ax^l+R_1(x)=-\frac{2a_1}{n},$$

што и требаше да се докаже.

68. Полиномот P од три променливи го нарекуваме цикличен ако и само ако $P(x,y,z)=P(y,z,x)$. Докажи, дека постојат циклични полиноми од три променливи P_1,P_2,P_3,P_4 такви што за секој цикличен полином од три променливи P постои полином Q од четири променливи за кој

$$P(x,y,z)=Q(P_1(x,y,z),P_2(x,y,z),P_3(x,y,z),P_4(x,y,z)).$$

Решение. Нека

$$S(x,y,z)=P(x,y,z)+P(y,x,z) \text{ и } T(x,y,z)=P(x,y,z)-P(y,x,z).$$

Лесно се проверува дека полиномот S е симетричен, а полиномот T е антисиметричен. Од $T(x,x,z)=0$ следува дека полиномот T е делив со $x-y$. Аналогно се докажува дека полиномот T е делив со $y-z$ и $z-x$, т.е.

$$T(x,y,z)=(x-y)(y-z)(z-x)R(x,y,z).$$

Од последното равенство и од антисиметричноста на T следува дека R е симетричен полином.

Добивме

$$P=\frac{S+T}{2}=\frac{S(x,y,z)}{2}+\frac{(x-y)(y-z)(z-x)R(x,y,z)}{2}.$$

Бидејќи секој симетричен полином од три променливи може да се претстави како полином на елементарните симетрични полиноми (кои се и циклични)

$$P_1 = x+y+z, P_2 = xy+yz+zx \text{ и } P_3 = xyz,$$

доволно е да земеме $P_4 = (x-y)(y-z)(z-x)$, кој исто такае цикличен.

69. Нека $P(x)$ е полином од $n-$ти степен со корени $i-1, i-2, ..., i-n$ и нека $R(x)$ и $S(X)$ се полиноми со реално коефициенти такви што $P(x) = R(x)+iS(x)$. Докажи, дека полиномот $R(x)$ има n реални нули. (i е имагинарната единица.)

Решение. Да означиме

$$P(x) = P_n(x) = R_n(x) + iS_n(x).$$

Со индукција по n ќе докажеме дека сите нули на $R_n(x)$ се реални и уште повеќе, ако $x_1 > x_2 > ... > x_n$ се нулите на R_n и $y_1 > y_2 > ... > y_{n-1}$ се нулите на R_{n-1}, тогаш важи

$$x_1 > y_1 > x_2 > y_2 > ... > x_{n-1} > y_{n-1} > x_n.$$

Тврдењето е тривијално за $n = 1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$. Бидејќи

$$R_n + iS_n = (x-i+n)(R_{n-1} + iS_{n-1})$$

за полиномите важат рекурентните врски

$$R_n = (x+n)R_{n-1} + S_{n-1} \text{ и } S_n = (x+n)S_{n-1} - S_{n-1}.$$

Оттука следува

$$R_n - (2x+2n-1)R_{n-1} + [(x+n-1)^2 + 1]R_{n-2} = 0.$$

Ако $z_1 > z_2 > ... > z_{n-2}$ се реални нули на полиномот R_{n-2}, од индуктивната претпоставка следува дека $z_{i-1} > y_i > z_i$. Бидејќи вредноста на полиномот R_{n-2} наизменично е позитивна и негативна на интервалите $(z_1, +\infty)$, (z_2, z_1) итн. Следува дека $\operatorname{sgn} R_{n-2}(y_i) = (-1)^{i-1}$. Сега, ако земеме предвид дека $R_{n-1}(y_i) = 0$, тогаш од релацијата

$$R_n(y_i) = -[(x+n-1)^2 + 1]R_{n-2}(y_i)$$

следува дека $\operatorname{sgn} R_{n-1}(y_i) = (-1)^i$, што значи дека полиномот R_n има нули на секој од интервалите $(y_1, +\infty)$, (y_2, y_1), ..., $(-\infty, y_{n-1})$, а тоа значи дека има n реални нули.

70. Нека $P(x)$ е полином со реални коефициенти, $\deg P = 2012$ и таков што за секои реални броеви a, b, c за кои $a+b+c = 0$ важи

$$P(a)^3 + P(b)^3 + P(c)^3 \geq 3P(a)P(b)P(c).$$

Дали може полиномот $P(x)$ да има точно 2012 различни реални нули?

Решение. Бидејќи

$$P(a)^3 + P(b)^3 + P(c)^3 - 3P(a)P(b)P(c) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(P(a)+P(b)+P(c)) \cdot (P(a)-P(b))^2 + (P(b)-P(c))^2 + (P(c)-P(a))^2)$$

условот на задачата е еквивалентен со $P(a)+P(b)+P(c) \geq 0$ кога $a+b+c = 0$.

Ќе конструираме полином $P(x)$ кој го задоволува овој услов и има 2012 различни реални нули. Земаме

$$P(x)=\prod_{k=0}^{2011}(x-1-\tfrac{k}{4022}).$$

За $x\leq 1$ или $x\geq\frac{3}{2}$ важи $P(x)\geq 0$ и уште повеќе за $x\leq 0$ имаме $P(x)>1$. За $1<x<\frac{3}{2}$ секој множител $x-1-\frac{k}{4022}$ по апсолутна вредност е помал од $\frac{1}{2}$, па затоа $P(x)>-\frac{1}{2^{2012}}$. Ако $a+b+c=0$, тогаш барем еден од броевите a,b,c не е поголем од нула. Нека тоа е бројот a. Тогаш $P(a)>1$ и $P(b),P(c)>-\frac{1}{2^{2012}}$, па затоа $P(a)+P(b)+P(c)\geq 0$.

71. Определи ги сите парови природни броеви (m,n), $m,n\geq 3$ такви што

$$\frac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}$$

е природен број за бесконечно многу природни броеви a.

Решение. Нека $R(x)$ е остатокот при делењето на полиномот $F(x)=x^m+x-1$ со полиномот $G(x)=x^n+x^2-1$. Тогаш за бесконечно многу x, $R(x)$ е делив со $G(x)$ и како $\deg R<\deg G$, за секој доволно голем $|x|$ ќе важи $|R(x)|<|G(x)|$, па затоа мора да важи $R(x)=0$. Значи, $R\equiv 0$, т.е. полиномот $F(x)$ е делив со полиномот $G(x)$.

Полиномот $H(x)=x^{m-n}G(x)-F(x)=x^{m-n+2}-x^{m-n}-x+1$ е делив со $G(x)$ и очигледно $\frac{H(x)}{G(x)}$ не е константа, па затоа $\deg H\geq\deg G+1$, т.е. $m\geq 2n-1$.

Од друга страна, бидејќи $G(0)=-1$ и $G(1)=1$ добиваме дека полиномот $G(x)$ има барем една нула $\alpha\in(0,1)$. Тогаш исто $F(\alpha)=0$, т.е. $\alpha^m+\alpha=\alpha^n+\alpha=1$. Ако $m\geq 2n$, тогаш

$$1-\alpha=\alpha^m\leq(\alpha^n)^2=(1-\alpha^2)^2,$$

што е еквивалентно со $\alpha(1-\alpha)(\alpha^2+\alpha-1)\leq 0$, но тоа не е можно бидејќи

$$\alpha^2+\alpha-1>\alpha^m+\alpha-1=0.$$

Значи, $m=2n-1$.

Според тоа, за некој $a\in\mathbb{Z}$ имаме

$$H(x)=(x-a)G(x)=x^{n+1}-ax^n+x^3-ax^2-x-a.$$

Сега лесно се добива дека $a=1$ и $(n,m)=(3,5)$.

72. Нека A е бесконечно подмножество од множеството природни броеви. Определи ги сите природни броеви n такви што за секој $a\in A$ важи

$$a^n+a^{n-1}+...+a^1+1\,|\,a^{n!}+a^{(n-1)!}+...+a^{1!}+1.$$

Решение. Да означиме

$$P(x)=x^n+x^{n-1}+...+x+1 \text{ и } Q(x)=x^{n!}+x^{(n-1)!}+...+x^{1!}+1.$$

Нека

$$Q(x)=C(x)P(x)+R(x),$$

каде $C(x)$ и $R(x)$ се полиноми со целобројни коефициенти и $\deg R<\deg P$. Од условот на задачата следува $P(a)\,|\,Q(a)$, па затоа $P(a)\,|\,R(a)$, за бесконечно многу цели броеви a. Бидејќи за доволно голем број a важи $|R(a)|<|P(a)|$, заклучуваме дека $R(a)=0$. Значи, $R(x)$ има бесконечно многу нули, па затоа $R(x)\equiv 0$ и $P(x)\,|\,Q(x)$.

Лема. Нека $k_0,k_1,...,k_n\in\mathbb{N}_0$. Полиномот

$$P(x)=x^n+x^{n-1}+...+x+1$$

е делител на полиномот

$$Q(x)=x^{k_n}+...+x^{k_1}+x^{k_0}$$

ако и само ако $\{k_0,k_1,...,k_n\}$ е потполн систем на остатоци по модул $n+1$.

Доказ. Нека r_i е остатокот при делење на k_i со $n+1$. Бидејќи $x^{n+1}-1$ е делител на $x^{k_i}-x^{r_i}$ за секој i, следува дека $P(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ е делител на $Q(x)-Q_1(x)$, каде $Q_1(x)=x^{r_n}+...+x^{r_1}+x^{r_0}$ и приота важи $\deg Q_1\le n$. Ако $P(x)\,|\,Q(x)$, тогаш $P(x)\,|\,Q_1(x)$, т.е. $Q_1(x)=cP(x)$ за некоја константа c, а тоа важи ако и само ако $c=1$ и $\{r_0,r_1,...,r_n\}=\{0,1,2,...,n\}$. ■

Од лемата следува дека бараните броеви се оние броеви за кои $\{0,1!,2!,...,n!\}$ е потполн систем на остатоци по модул $n+1$.

Ако $n>3$ и $n+1$ е сложен број, тогаш $n!\equiv 0(\bmod n+1)$, па условот не е задоволен. Ако $n+1=p>3$ е прост број, тогаш според теоремата на Вилсон $(p-1)!\equiv -1(\bmod p)$, од каде следува $(p-2)!\equiv 1=1!(\bmod p)$ и повторно условот не е исполнет. Останувaат случаите $n\le 3$. Со непосредна проверка се добива дека $n=1$ и $n=2$ ги задоволуваат условите на задачата.

2. ФАКТОРИЗАЦИЈА НА ПОЛИНОМИ

1. Полиномот $p(x)=x^8+4x^2+4$ запиши го како производ на два полиноми од четврт степен.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}p(x)&=x^8+4x^2+4=(x^8+4x^2+4)+(4x^6+8x^4+4x^2)-(4x^6+8x^4+4x^2)\\&=(x^8+4x^6+8x^4+8x^2+4)-4x^2(x^4+2x^2+1)\\&=(x^4+2x^2+2)^2-[2x(x^2+1)]^2\\&=(x^4+2x^3+2x^2+2x+2)(x^4-2x^3+2x^2-2x+2)\end{aligned}$$

2. Нека $p(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Ако

$$p(a)=p(b)=p(c)=-1,$$

каде a,b,c се цели броеви, тогаш $p(x)$ нема целобројни корени. Докажи!

Решение. Полиномот $q(x)=p(x)+1$ е со целобројни коефициенти и има три целобројни корени, т.е. $q(a)=q(b)=q(c)=0$. Според тоа,

$$p(x)+1=(x-a)(x-c)(x-b)g(x)$$

каде што $g(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Ако $m\in\mathbb{Z}$ и $g(m)=0$, тогаш

$$(m-a)(m-c)(m-b)g(m)=1$$

Значи, бројот 1 има три целобројни делители, кои се меѓу себе различни, што е противречност.

3. Полиномот $p(x)=x^4-7x^2+1$ запиши го како производ на два полиноми со степен не помал од 1.

Решение. Имаме

$$p(x)=x^4-7x^2+1=x^4+2x^2+1-9x^2=(x^2+1)^2-(3x)^2$$
$$=(x^2+3x+1)(x^2-3x+1).$$

4. Полиномот $p(x)=x^8+x^6+x^4+x^2+1$, запиши го како производ на полиноми со степени поголеми од 1.

Решение. Ставаме $x^2=t$ и добиваме

$$p(x)=(x^2)^4+(x^2)^3+(x^2)^2+x^2+1=t^4+t^3+t^2+t+1$$
$$=\frac{t^5-1}{t-1}=\frac{x^5-1}{x-1}\frac{x^5+1}{x+1}=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1).$$

5. Полиномот x^8+x+1 претстави го како производ на два неразложливи полиноми над $\mathbb{Z}$.

Решение. Нека $P(x)=x^8+x+1$ и $Q(x)=x^2(x-1)(x^3+1)+1$. Тогаш

$$P(x)=x^8-x^2+x^2+x+1=x^2(x^6-1)+x^2+x+1$$
$$=x^2(x^3-1)(x^3+1)+x^2+x+1$$
$$=x^2(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)+x^2+x+1$$
$$=(x^2+x+1)Q(x).$$

Очигледно, полиномот x^2+x+1 е неразложлив над $\mathbb{Z}$. Нека претпоставиме дека полиномот Q е разложлив над $\mathbb{Z}$. Бидејќи P нема реални корени (зошто?), полином од видот $x^2+ax\pm1$ е делител на Q (зошто?). Значи, за некој комплексен корен α на Q имаме дека $\frac{1}{\alpha}$ или $-\frac{1}{\alpha}$ е корен на Q . Во првиот случај добиваме

$$0=Q(\alpha)-\alpha^6Q(\tfrac{1}{\alpha})=\alpha(\alpha-1)(\alpha^3+1),$$

па затоа $\alpha^3+1=0$, т.е. $Q(\alpha)=1$, што е противречност. Во вториот случај имаме

$$0=Q(\alpha)-\alpha^6 Q(-\tfrac{1}{\alpha})=\alpha(1-\alpha^2)(\alpha^2+\alpha-1),$$

од каде следува $\alpha^2+\alpha-1=0$. Тогаш

$$0=Q(\alpha)=(\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2-\alpha+2)(\alpha^2+\alpha-1)-4\alpha+3=3-4\alpha,$$

што повторно е противречност. Според тоа, полиномот Q е неразложлив над $\mathbb{Z}$, со што задачата е решена.

6. Нека $p(x)$ е полином со целобројни коефициенти кој прима вредност 5 во пет различни цели броеви. Докажи дека $p(x)$ нема целобројни корени.

Решение. Од условот, следува $p(x)=5+(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_5)q(x)$, каде $x_1,...,x_5$ се различни цели броеви, а $q(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Ако постои цел број x_0 кој е корен на $p(x)$, тогаш $-5=(x_0-x_1)...(x_0-x_5)q(x_0)$. Значи $x_0-x_1,...,x_0-x_5$ се различни делители на -5. Но тоа не е можно, бидејќи -5 има 4 различни делители.

7. Во тетратките на Петар и Киро се запишани по два броја: на почетокот 1 и 2 кај Петар, и 3 и 4 кај Киро. Во секоја минута Петар формира квадратен трином $f(x)$ чии корени се броевите запишани во неговата тетратка, а Киро квадратен трином $g(x)$ чии корени се запишани во неговата тетратка. Ако равенката $f(x)=g(x)$ има два различни реални корени, тогаш едно од момчињата го заменува својот пар броеви со тие корени (во спротивно ништо не се случува). Ако во некој момент се појави бројот 5 во тетратката на Петар, кој е другиот број?

Решение. Во секоја тетратка ќе го допишеме квадратниот трином чии корени се соодветните броеви. Нека во некој момент се запишани триномите $p(x)$ и $q(x)$ Тогаш равенката која се решава е од видот $\alpha p(x)=\beta q(x)$, каде α и β се ненулти реални корени. Значи, добиените броеви се корени на полиномот $\alpha p(x)-\beta q(x)$. Ако некое од момчињата ги замени броевите, тогаш можеме да сметаме дека заедно со нив го запишал полиномот $\alpha p(x)-\beta q(x)$.

Нека $p_0(x)=(x-1)(x-2)$ и $q_0(x)=(x-3)(x-4)$. Од претходно изнесеното следува дека во секој чекор во секоја од тетртаките е запишан број трином од видот $\alpha p_0(x)+\beta q_0(x)$.

Според тоа, ако бројот 5 се појави во некоја од тетратките, тогаш во неа е запишан и триномот $a(x-5)(x-x_2)=\alpha(x-1)(x-2)+\beta(x-3)(x-4)$. За $x=5$ добиваме $12\alpha+2\beta=0$, од каде наоѓаме

$$\alpha(x-1)(x-2)+\beta(x-3)(x-4)=\alpha(-5x^2+39x-70)=-\alpha(x-5)(5x-14).$$

Според тоа, вториот број е $x_2=\frac{14}{5}$.

8. Нека $f(x)$ е полином со цели коефициенти, за кои важи

$$f(0)=23,\ f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=\ldots=f(x_n)=2014,$$

за некои различни $x_1, x_2, \dots, x_n$. Определи ја максималната вредност на n.

Решение. Дефинираме $g(x) = f(x) - 2014$. Ако $f(x_i) = 2014$, тогаш x_i е нула на $g(x)$, па затоа $g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)q(x)$ за некој полином $q(x)$ со цели коефициенти, каде n е максималниот број на x_i. Ставајќи $x = 0$ во $g(x)$ добиваме

$$g(0) = -1991 = -11 \cdot 181 = \prod_{i=1}^{n}(x_i)q(0).$$

Бидејќи 11 и 181 се прости броеви, следува дека -1991 може да се запише како производ на најмногу 4 различни множители, односно бидејќи $-1991 = -1 \cdot 1 \cdot 11 \cdot 181$, добиваме дека $n \le 4$. Останува да дадеме пример кога $n = 4$. Нека

$$g(x) = (x-1)(x+1)(x+11)(x+181),\ q(x) = 1.$$

Тогаш полиномот

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x+11)(x+181) + 2014$$

ги задоволува условите на задачата.

9. Нека $k \ge 4$ е цел број. Ако $F(x)$ е полином со целобројни коефициенти таков да $0 \le F(c) \le k$, за $c = 0,1,2,\dots,k+1$ докажи дека

$$F(0) = F(1) = F(2) = \dots = F(k+1).$$

Решение. Доволно е да докажеме дека броевите $1,2,\dots,k+1$ се нули на полиномот $F(x) - F(0)$. Од теоремата на Безу следува дека $F(k+1) - F(0)$ се дели со $k+1$ и како $|F(k+1) - F(0)| \le k$ заклучуваме дека $F(k+1) = F(0)$. Според тоа,

$$F(x) - F(0) = x(x-k-1)G(x),$$

за некој полином $G(x)$ со целобројни коефициенти. Затоа

$$k \ge |F(c) - F(0)| = c(k+1-c)\,|G(c)|,\ \text{за}\ c = 1,2,\dots,k.$$

Бидејќи за $1 < c < k$, важи $(c-1)(k-c) > 0$ добиваме дека $c(k+1-c) > k$ и $G(c) = 0$. Според тоа, 2,3,..., $k-1$ се корени на полиномот $G(x)$, и

$$F(x) - F(0) = x(x-2)(x-3)\dots(x-k+1)(x-k-1)H(x)$$

за некој полином $H(x)$ со целобројни коефициенти. За $c = 1$ и $c = k$ имаме

$$k \ge |F(c) - F(0)| = k\,|G(c)| = k(k-2)!\,|H(c)|.$$

Бидејќи $(k-2)! > 1$ за $k \ge 4$, мора да важи $H(c) = 0$. Конечно,

$$F(c) - F(0) = 0,\ \text{за}\ c = 1,2,3,\dots,k+1.$$

10. Да се докаже дека, ако p е прост број и $a \in \mathbb{Z}$, тогаш $P(x) = x^p - a$ е разложлив над $\mathbb{Z}$ ако и само ако a е p-ти степен на некој цел број.

Решение. Ако $a = b^p$ за некој $b \in \mathbb{Z}$, тогаш

$$P(x) = x^p - a = x^p - b^p = (x-b)\sum_{i=0}^{p-1} x^i b^{p-1-i}.$$

Значи, P може да се разложи над $\mathbb{Z}$.

Нека претпоставиме дека P може да се претстави во облик $P(x)=Q(x)R(x)$, каде $Q,R\in\mathbb{Z}[x]$. Нека $\mathrm{NZD}(2,p)=1$ е p-ти примитивен корен на единицата. Тогаш

$$\omega=e^{\frac{2i\pi}{p}}=\cos\frac{2\pi}{p}+i\sin\frac{2\pi}{p}.$$

Ако α е корен на Q, тогаш сите корени на Q се некои од броевите $\alpha,\alpha\omega,\alpha\omega^2,...,\alpha\omega^{p-1}$ и нека тие се на пример $\alpha\omega^{j_1},\alpha\omega^{j_2},...,\alpha\omega^{j_p}$. При тоа $0<r=\deg Q<p=\deg P$. За слободниот член $c\in\mathbb{Z}$ на полиномот Q, според Виетовите правила имаме $c=(-1)^r\alpha^r\omega^{j_1+j_2+...+j_r}$, од каде што добиваме

$$\begin{aligned}c^p&=(-1)^{pr}\alpha^{pr}\omega^{p(j_1+j_2+...+j_r)}=(-1)^{pr}(\alpha^p)^r(\omega^p)^{j_1+j_2+...+j_r}\\&=(-1)^{pr}a^r1^{j_1+j_2+...+j_r}=(-1)^{pr}a^r.\end{aligned}$$

Бидејќи p е прост број и $r<1$, добиваме дека $\mathrm{NZD}(p,r)=1$. Затоа постојат $u,v\in\mathbb{Z}$ такви што $ur+vp=1$. Од последното равенство имаме

$$a=a^1=a^{ur+vp}=(a^r)^u(a^v)^p=((-1)^{pr}c^p)^u(a^v)^p=((-1)^rc^ua^v)^p=b^p.$$

11. Да се докаже дека, ако $n\in\mathbb{N}$ и p е прост број, тогаш $P(x)=x^{p^n}-x+p^n$ не е разложлив над $\mathbb{Z}$.

Решение. На почеток ќе докажеме дека ако z е комплексен корен на полиномот x^k-x+k, $k\geq 2$, тогаш $|z|<k^{\frac{1}{k-1}}$. Ќе претпоставиме спротивно, т.е. дека z е комплексен корен таков што

$$|z|\geq k^{\frac{1}{k-1}}. \tag{2}$$

Тогаш

$$|z|+k\geq|z-k|=|z^k|=|z|^{k-1}|z|\geq(k^{\frac{1}{k-1}})^{k-1}|z|=k|z|,$$

од каде добиваме $|z|\leq\frac{k}{k-1}$. Од $|z|\geq k^{\frac{1}{k-1}}$, добиваме

$$k=(k^{\frac{1}{k-1}})^{k-1}\leq|z|^{k-1}\leq(\tfrac{k}{k-1})^{k-1}=(1+\tfrac{1}{k-1})^{k-1}<e<3,$$

и бидејќи $k\in\mathbb{Z}$, добиваме $k=2$. Полиномот го добива видот $P(x)=x^2-x+2$, а негови корени се $x_{1/2}=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$, при што

$$|x_{1/2}|=|\tfrac{1\pm i\sqrt{7}}{2}|=\sqrt{2}<2^{\frac{1}{2-1}},$$

Добивме контрадикција со (1), значи, таков полином не постои, односно за корените на полином од облик (1) е сиполнето неравенството $|z|<k^{\frac{1}{k-1}}$.

Нека претпоставиме дека $P=QR$, каде што $Q,R\in\mathbb{Z}[x]$ се неконстантни полиноми. Јасно е дека нивните најтари коефициенти се еднакви на 1. Нека

$$Q(x)=q_0+q_1x+...\text{ и }R(x)=r_0+r_1x+....$$

Ќе разгледаме два случаи:

а) $q_0 = p^n$ или $r_0 = p^n$. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $q_0 = p^n$. За производот на корени на Q според Виетовите правила и оценката за корените на P добиваме

$$p^n = q_0 = \prod_{i=1}^{q} \alpha_i < ((p^n)^{\frac{1}{p^n-1}})^{\deg Q} = p^{\frac{n \deg Q}{p^n-1}}.$$

Според тоа $\frac{n \deg Q}{p^n-1} > n$, $\deg Q > p^n - 1$. Бидејќи R е неконстантен полином, неравенството $\deg Q \geq p^n = \deg P$ не е можно.

б) $q_0 \neq p^n$ и $r_0 \neq p^n$. Бидејќи $q_0 r_0 = p^n$, имаме $p \mid r_0$ и $p \mid q_0$. Коефициентот пред x во P, т.е. $q_0 r_1 + r_0 q_1 = -1$ е делив со p. Бидејќи $p > 1$ тоа не е можно.

Значи, такво разложување не е можно.

12. Докажи дека ако p е прост број, $m \in \mathbb{Z}$, $p > |m| + 2$ и $n \in \mathbb{N}$, тогаш полиномот $P(x) = x^n + mx + p$ не може да се разложи над $\mathbb{Z}$.

Решение. Ќе докажеме дека ако z е корен на P, тогаш $|z| > 1$ (без разлика дали е реален или комплексен корен). Нека z е корен на P таков што $|z| \leq 1$. Тогаш

$$p = |z^n + mz| = |z||z^{n-1} + m| = |z^{n-1} + m| \leq |z^{n-1}| + |m| = |z|^{n-1} + |m| \leq 1 + |m| < 2 + |m|.$$

што е во спротивност со претпоставката од задачата.

Нека претпоставиме дека P може да се разложи над $\mathbb{Z}$, т.е. P може да се претстави во облик $P = Q \cdot R$, каде $Q = Q(x)$ и $R = R(x)$ се полиноми со целобројни коефициенти. Јасно е дека најстарите коефициенти на Q и R се еднакви на 1. Бидејќи $p = P(0) = Q(0)R(0)$ е прост број имаме $|P(0)| = 1$ или $|Q(0)| = 1$. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $|Q(0)| = 1$. Корените $z_1, z_2, ..., z_k$ на полиномот Q се нули и на полиномот P, па според тоа $|z_i| > 1$ за $i = 1, 2, ..., k$. Според виетовите правила

$$1 = |Q(0)| = |z_1 z_2 ... z_k| = |z_1||z_2|...|z_k| > 1.$$

Заради добиената контрадикција разложувањето не е можно.

13. Множеството M е добиено од множеството $\mathbb{R}$ со бришење на конечен број реални броеви. Докажи, дека за секој природен број n постои полином $f(x)$ таков што $\deg f = n$, коефициентите на f припаѓаат на множеството M и сите n корени на f припаѓаат на множеството M.

Решение. Од условот на задачата следува дека множеството

$$T = \{| x | \in \mathbb{R}, x \notin M\}$$

е конечно и нека $\alpha = \max\limits_{x \in T} x$. За секој реален број $k > \max\{|\alpha|, 1\}$ важи $-k \notin T$, па затоа $-k \in M$. Ќе докажеме, дека полиномот $f(x) = k(x+k)^n$ ги има саканите својства. Од $k > 1$ следува дека $\deg f = n$ и коефициентот пред x^m е еднаков на

$$k\binom{n}{m}k^{n-m} \geq k .$$

Оттука следува, дека сите коефициенти на $f(x)$ не припаѓаат на T, па затоа тие припаѓаат на множеството M. Од друга страна корените на полиномот $f(x)$ се $-k$ со кратност n, па затоа и тие припаѓаат на множеството M.

14. Разложи го полиномот

$$P(x,y) = x^5 + y^5 - x^4y - xy^4$$

на производ од еден линеарен и два квадратни множители, а потоа испитај го знакот на полиномот имајќи ја предвид претпоставката $|x|>|y|$.

Решение. Имаме:

$$P(x,y) = x^4(x-y) - y^4(x-y) = (x-y)(x^4 - y^4) = (x-y)(x^2-y^2)(x^2+y^2)$$
$$= (x-y)(x-y)(x+y)(x^2+y^2) = (x-y)^2(x+y)(x^2+y^2).$$

Бидејќи множителите $(x-y)^2$ и x^2+y^2 се позитивни за секој $x, y \in \mathbb{R}$ (и $x \neq y$), тоа значи дека знакот на полиномот $P(x, y)$ ќе зависи од знакот на линеарниот множител $x+y$. Од условот $|x|>|y|$ заклучуваме дека y припаѓа на интервалот $(-x, x)$ па тогаш:

- ако $x > 0$, следува $x + y > 0$, т.е. $P(x, y) > 0$
- ако $x < 0$, следува $x + y < 0$, т.е. $P(x, y) < 0$.

15. Разложи го на множители полиномот $(y-z)^5 + (z-x)^5 + (x-y)^5$.

Решение. Ќе ги примениме резултатите од симетричните полиноми од три реално независни променливи. Изразот за степената сума $s_5 = a^5 + b^5 + c^5$ изразена преку елементарните симетрични полиноми $\sigma_1 = a+b+c$, $\sigma_2 = ab+bc+ca$ и $\sigma_3 = abc$ е

$$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3 .$$

Ако воведеме смена $a = y-z$, $b = z-x$, $c = x-y$, тогаш дадениот израз

$$A = (y-z)^5 + (z-x)^5 + (x-y)^5$$

го добива обликот

$$A = (y-z)^5 + (z-x)^5 + (x-y)^5 = a^5 + b^5 + c^5 ,$$

при што $a+b+c = y-z+z-x+x-y = 0$. Значи $A = s_5$, при што исполнет е условот $\sigma_1 = 0$. Според тоа

$$A = s_5 = -5\sigma_2\sigma_3 = -5abc(ab+bc+ca) .$$

Ако се вратиме на старите променливи, добиваме

$$(y-z)^5 + (z-x)^5 + (x-y)^5 = (x-y)(y-z)(z-x)\cdot$$
$$\cdot[(x-y)(y-z) + (y-z)(z-x) + (z-x)(x-y)].$$

Ако во средните загради од десната страна на последното равенство се ослободиме од мали загради, равенството го добива обликот:

$$(y-z)^5 + (z-x)^5 + (x-y)^5 = (x-y)(y-z)(z-x)[xy + yz + zx - x^2 - y^2 - z^2] . \quad (1)$$

Бидејќи
$$xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2=-\tfrac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2],$$
полиномот $xy+yz+zx-x^2-y^2-z^2$ не можеме да го разложиме на множители. Според тоа разложувањето (1) е конечно.

16. За секој природен број n означуваме
$$A_n=\{j\,|\,1\le j\le n,\ \mathrm{NZD}(j,n)=1\}.$$
Определи ги сите $n\in\mathbb{N}$ за кои полиномот
$$P_n(x)=\sum_{j\in A_n}x^{j-1}$$
не може да се претстави како производ на два неконстантни полиноми со целобројни коефициенти.

Решение. Имаме
$$P_1(x)=P\ (x)=1,\ P_3(x)=x+1,\ P_4(x)=x^2+1,\ P_6(x)=x^4+1.$$
Според тоа, $n=1,2,3,4,6$ се меѓу бараните броеви. Ќе докажеме дека нема други броеви со саканото својство. За таа цел ќе докажеме дека за $n\ge 3$ полиномот $P_n(x)$ има делител од видот $1+x^r,\ r\ge 1$ кој не се совпаѓа со него за $n=5$ и $n\ge 7$. Ако $n\ge 3$ е прост број, тогаш тврдењето следува од разложувањето
$$P_n(x)=(1+x)(1+x^2+x^4+...+x^{n-3}).$$

За $n=4$ имаме $P_4(x)=x^2+1$.

Понатаму, ќе користиме индукција по n. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за секој $m\ge 3$ кој е помал од n. Ако $n\ge 6$ е сложен број, тогаш $n=mp$, каде p е прост број и $m\ge 3$. Можни се два случаја.

Прв случај. p е делител на m. Тогаш $A_n=\bigcup_{i=0}^{p-1}(A_m+im)$, па затоа
$$P_n(x)=P_m(x)\sum_{i=0}^{p-1}x^{im}.$$
Останува да забележиме дека согласно индуктивната претпоставка $P_m(x)$ има делител од видот $1+x^r,\ r\ge 1$.

Втор случај. p не е делител на m. Тогаш $A_n=(\bigcup_{i=0}^{p-1}(A_m+im))\setminus(pA_m)$ и ако искористиме дека $x^{kp-1}=x^{p-1}(x^p)^{k-1}$, добиваме
$$P_n(x)=P_m(x)\sum_{i=0}^{p-1}x^{im}-x^{p-1}P_m(x^p).$$

Од индуктивната претпоставка следува дека $P_m(x)$ има делител од видот $1+x^r,\ r\ge 1$, па затоа $1+x^{pr},\ r\ge 1$ е делител на $P_m(x^p)$. Ќе разгледаме два подслучаи.

а) Ако $p\ge 3$, тогаш p е непарен и $1+x^r$ е делител на $1+x^{pr}$, па затоа $1+x^r$ е делител на $P_n(x)$.

б) Ако $p=2$, тогаш можеме да сметаме дека m е прост број (во спротивно ќе го замениме p со прост делител на m и ќе го добиеме првиот случај). Тогаш

$$P_n(x)=(1+x^{m+1})(1+x^2+x^4+...+x^{m-3}).$$

Останува да забележиме дека $P_n(x)=1+x^r$ само за $n=3,4,6$, со што задачата е решена.

17. Нека

$$\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}=10^n a_n+10^{n-1}a_{n-1}+...+10a_1+a_0$$

е декадниот запис на прост број, каде $n>1$ и $a_n>1$. Докажи дека полиномот

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x+a_0$$

е неразложлив, т.е. не може да се претстави како производ на два полиноми со позитивни степени и целобројни коефициенти.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Ако a е комплексен корен на полином со реални коефициенти

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n,$$

тогаш $|a|<1+m$, каде

$$m=\max\{|\tfrac{a_k}{a_n}|:0\le k\le n-1\}.$$

Доказ. Ако $|a|\ge m+1$, тогаш последователно добиваме

$$0=|f(a)|\ge|a_na^n|\cdot|1+\tfrac{a_{n-1}}{a_na}+\tfrac{a_{n-2}}{a_na^2}+...+\tfrac{a_0}{a_na^n}|\ge|a_na^n|(1-|\tfrac{a_{n-1}}{a_na}|-|\tfrac{a_{n-2}}{a_na^2}|-...-|\tfrac{a_0}{a_na^n}|)$$

$$\ge|a_na^n|(1-|\tfrac{m}{a}|-|\tfrac{m}{a^2}|-...-|\tfrac{m}{a^n}|)\ge|a_na^n|[1-m(\tfrac{1}{m+1}+\tfrac{1}{(m+1)^2}+...+\tfrac{1}{(m+1)^n})$$

$$>|a_na^n|[1-m(-1+\tfrac{1}{1-\frac{1}{m+1}})]=0,$$

што е противречност. Според тоа, $|a|<1+m$. ■

Нека претпоставиме дека $P(x)=f(x)g(x)$, каде $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми со позитивни степени и целобројни коефициенти. Нека корените на $f(x)$ се $x_1,x\ ,...,x_k$. Тогаш $x_1,x\ ,...,x_k$ се корени на $P(x)$ и согласно со докажаната лема модулите им се помали од $1+\frac{9}{2}<9$. Според тоа, ако b е коефицинтот пред највисокиот степен на $f(x)$, тогаш

$$|f(10)|=|b|\cdot|\prod_{i=1}^{k}(10-x_i)|\ge|b|\prod_{i=1}^{k}(10-|x_i|)>1$$

и аналогно $|g(10)|>1$. Според тоа, $P(10)=f(10)g(10)$ не е прост број, што противречи на условот на задачата.

3. ПОЛИНОМНИ РАВЕНКИ И ВИЕТОВИ ФОРМУЛИ

1. Ако p и q се непарни броеви, да се докаже дека равенката

$$x^2+px+q=0$$

нема рационални корени.

Решение. Една квадратна равенка да има рационални корени, треба нејзината дискриминанта да биде квадрат на некој цел број, па ако претпоставиме дека дадената квадратна равенка има рационални корени, треба $p^2-4q=a^2$ за некој цел број a. Бидејќи p и q се непарни броеви и бројот p^2-4q е непарен(како разлика од непарен и парен број), следува дека и a^2 е непарен број, па и a е непарен број. Значи, треба да провериме дали равенката $p^2-4q=(2k+1)^2$ може да важи за $p=2m+1$, $q=2n+1$ и k цел број. Притоа

$$(2m+1)^2-4(2n+1)=(2k+1)^2$$

$$4m^2+4m+1-8n-4=4k^2+4k+1$$

$$m(m+1)-(2n+1)=k(k+1)$$

Бројот $k(k+1)$ е парен како производ на два последователни цели броеви, бројот $m(m+1)-(2n+1)$ е непарен како разлика на еден парен и еден непарен број, па добиваме дека последната равенка не може да важи, односно дека дадената квадратна равенка нема рационални корени.

2. Нека $p(x)$ е полином од трет степен со корени r_1, r_2, r_3 и

$$\frac{p(\frac{1}{2})+p(-\frac{1}{2})}{p(0)}=1000$$

Пресметај $\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_1r_3}$.

Решение. Ако $p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, тогаш

$$p(0)=a_0\,,\;\; p(\tfrac{1}{2})=a_3\tfrac{1}{8}+a_2\tfrac{1}{4}+a_1\tfrac{1}{2}+a_0\,,\;\; p(-\tfrac{1}{2})=-a_3\tfrac{1}{8}+a_2\tfrac{1}{4}-a_1\tfrac{1}{2}+a_0$$

Според тоа $\frac{2a_2\frac{1}{4}+2a_0}{a_0}=1000$, т.е. $\frac{a_2}{a_0}=1996$.

Од друга страна

$$\frac{1}{r_1r_2}+\frac{1}{r_2r_3}+\frac{1}{r_1r_3}=\frac{r_1+r_2+r_3}{r_1r_2r_3}=\frac{\frac{a_2}{a_3}}{\frac{a_0}{a_3}}=\frac{a_2}{a_0}=1996$$

3. Дадени се полиномите $f(x)=x^3+ax+b$ и $g(x)=x^3+a^2x^2+b^2$, каде a и b се реални параметри. Определи ги сите вредности на a и b за кои точно еден од броевите $-2,-1$ и 1 е заеднички корен на $f(x)$ и $g(x)$.

Решение. Од $g(1)=1+a^2+b^2>0$ следува дека заедничкиот корен не може да биде 1. Нека претпоставиме дека -2 е заеднички корен на $f(x)$ и $g(x)$. Тогаш

$f(-2)=-8-2a+b=0$ и $g(-2)=-8+4a^2+b^2=0$, од каде добиваме $b=2(a+4)$, $4a^2+4(a+4)^2=8$, т.е. $a^2+4a+7=0$. Последната равенка нема реални решенија, па затоа -2 не може да биде заеднички корен на $f(x)$ и $g(x)$.

Ако -1 е заеднички корен, тогаш

$$f(-1)=-1-a+b=0 \text{ и } g(-1)=-1+a^2+b^2=0,$$

па затоа $b=a+1$ и $a^2+(a+1)^2=1$, т.е. $2a^2+2a=0$, од каде добиваме $a=0$ или $a=-1$ и соодветно $b=1$ или $b=0$.

4. Нека a и b се реални броеви такви што сите нули на полиномот

$$P(x)=x^3+ax^2+bx-8$$

се реални броеви. Докажи, дека важи $a^2\geq 2b+12$.

Решение. Нека x_1,x_2,x_3 се нулите на полиномот $P(x)$. Од Виетовите формули следува

$$x_1+x_2+x_3=-a$$
$$x_1x_2+x_3x_2+x_3x_1=b$$
$$x_1x_2x_3=8$$

Затоа важи

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_3x_2+x_3x_1)=a^2-2b.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$a^2-2b=x_1^2+x_2^2+x_3^2\geq 3\sqrt[3]{x_1^2x_2^2x_3^2}=3\sqrt[3]{64}=12.$$

5. Нека $a\geq 2$ е реален број, x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2-ax+1=0$ и $S_n=x_1^n+x_2^n,\ n=1,2,\dots$.

а) Докажи, дека $\frac{S_{n+1}}{S_{n+2}}\leq\frac{S_n}{S_{n+1}},\ n=1,2,\dots$.

б) За кои вредности на a неравенството

$$\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_3}+\dots+\frac{S_n}{S_{n+1}}>n-1$$

е исполнето за секој $n=1,2,\dots$.

Решение. За $a\geq 2$ корените x_1 и x_2 на равенката $x^2-ax+1=0$ се позитивни и важи $x_1x_2=1$. Во случајов имаме $S_n>0,\ n=1,2,\dots$.

а) Имаме

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{S_{n+1}}\leq\frac{S_{n-1}}{S_n} \quad &\Leftrightarrow\quad (x_1^{n-1}+x_2^{n-1})(x_1^{n+1}+x_2^{n+1})\geq(x_1^n+x_2^n)^2\\ &\Leftrightarrow\quad x_1^{n-1}x_2^{n+1}+x_1^{n+1}x_2^{n-1}\geq 2x_1^nx_2^n\\ &\Leftrightarrow\quad (x_1x_2)^{n-1}(x_1-x_2)^2\geq 0\end{aligned}$$

кое очигледно е исполнето.

б) Нека $a\geq 2$ го има саканото својство. Тогаш од а) следува дека

$$n\frac{S_1}{S_2}\geq\frac{S_1}{S_2}+\frac{S_2}{S_3}+\dots+\frac{S_n}{S_{n+1}}>n-1,$$

т.е. $\frac{S_1}{S_2} > 1 - \frac{1}{n}$. Последното неравенство важи за секој $n \in \mathbb{N}$, па затоа заклучуваме дека $\frac{S_1}{S_2} \geq 1$. Од Виетовите формули имаме $S_1 = a$, $S_2 = a^2 - 2$. Според тоа, $\frac{a}{a^2-2} \geq 1$, од каде добиваме $\frac{(a+1)(a-2)}{a^2-2} \leq 0$ и како $a \geq 2$ следува дека дека $a = 2$. Обратно, ако $a = 2$, тогаш $x_1 = x_2 = 1$ и $S_n = 2$, за секој $n = 1, 2, \dots$. Според тоа,

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_2}{S_3} + \dots + \frac{S_n}{S_{n+1}} = n > n - 1.$$

6. Докажи дека равенката $x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \dots - a_{n-1} x - a_n = 0$, каде што $a_k \geq 0$,$1 \leq k \leq n$, нема две различни позитивни решенија.

Решение. Равенката за $x \neq 0$ е еквивалентна со равенката $1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$. Ќе воведеме ознака $f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$ за $x \in (0, +\infty)$. Не е тешко да се види дека за $0 < x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Според тоа не може да постојат две различни вредности за x за кои $f(x) = 1$. Значи, равенката $1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$ нема две различни позитивни решенија. Според тоа, и почетната равенка нема две позитивни различни решенија.

7. Определи ги сите вредности на параметарот a за кои равенката

$$(a^2 - a - 9)x^2 - 6x - a = 0$$

има две различни позитивни решенија.

Решение. Од условот на задачата следува дека треба да се исполнети неравенствата

$$\begin{cases} D = a^3 - a^2 - 9a + 9 > 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{6}{a^2-a-9} > 0 \\ x_1 x_2 = \frac{-a}{a^2-a-9} > 0 \end{cases}$$

Првото неравенство е исполнето за секој $a \in (-3, 1) \cup (3, +\infty)$, второто неравенство е исполнето за секој $a \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{37}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{37}}{2}, +\infty)$, а третото за секој $a \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{37}}{2}) \cup (0, \frac{1+\sqrt{37}}{2})$. Конечно бараните вредности за a се наоѓаат во пресекот на овие три множества, т.е. тоа се сите броеви од интервалот $(-3, \frac{1-\sqrt{37}}{2})$.

8. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои што равенката

$$\frac{2a}{(x+1)^2} + \frac{a+1}{x+1} - \frac{2(a+1)x - (a+3)}{2x^2 - x - 1} = 0$$

има два реални корени x_1 и x_2 такви што $x_2^2 - a x_1 = a^2 - a - 1$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во видот

$$\frac{2(ax^2+(1-2a)x+(1-a))}{(x+1)^2 2x^2-x-1}=0$$

каде $x\neq -1,-\frac{1}{2},1$. Корените на оваа равенка се корени на равенката

$$ax^2+(1-2a)x+(1-a)=0\,.$$

Од друга страна

$$\begin{aligned}&x_2^2-ax_1=a^2-a-1\\&x_2^2+ax_2-a(x_1+x_2)-a^2+a+1=0\\&x_2^2+ax_2+a\tfrac{1-2a}{a}-a^2+a+1=0\\&x_2^2+ax_2-a^2-a+2=0.\end{aligned}$$

Решавајќи го системот

$$\begin{cases}x_2^2+ax_2-a^2-a+2=0\\ ax_2^2+(1-2a)x_2+1-a=0\end{cases}$$

добиваме

$$(a^2+2a-1)x_2=a^3+a^2-3a+1=(a^2+2a-1)(a-1)\,.$$

Коефициентот пред x се анулира за $a=1\pm\sqrt{2}$.

Ако $a=-1+\sqrt{2}$, тогаш втората равенка на системот го прима видот

$$(-1+\sqrt{2})x_2^2+(3-2\sqrt{2})x_2+(2-\sqrt{2})=0\,,$$

чија дискриминанта е $33-24\sqrt{2}<0$, што значи дека за $a=-1+\sqrt{2}$ равенката нема рални решенија. За $a=-1-\sqrt{2}$ ја добиваме равенката

$$(-1-\sqrt{2})x_2^2+(3+2\sqrt{2})x_2+(2+\sqrt{2})=0$$

која има два реални корена кои се различни од $-1,-\frac{1}{2}$ и 1.

Нека $a\neq 1\pm\sqrt{2}$. Тогаш $x_2=a-1$ и заменувајќи во равенката добиваме

$$\begin{aligned}&a(a-1)^2+(1-2a)(a-1)+(1-a)=0\\&a(a-1)^2-2a(a-1)=0\\&a(a-1)(a-3)=0.\end{aligned}$$

За $a=0$ равенката има едно решение, за $a=1$ таа има два реални корени 0 и 1, едниот од кои не е во множеството допустливи вредности за почетната равенка. За $a=3$ таа има два корени $x_1=-\frac{1}{3}$ и $x_2=2$ кои се во множеството допустливи вредности и го задоволуваат условот $x_2^2-ax_1=a^2-a-1$.

Конечно, бараните вредности за a се $a=3$ и $a=-1-\sqrt{2}$

9. Ако е познато дека равенката $x^{20}-20x^{19}+...+1=0$ има само позитивни реални решенија, решете ја равенката.

Решение. Нека $x_1, x_2, ..., x_{20}$ се сите корени на равенката. Од Виетовите врски имаме дека $x_1 + ... + x_{20} = 20$ и $x_1 x_2 ... x_{20} = 1$, од каде што следува дека аритметичката средина на сите броеви е еднаква на геометриската. Затоа сите корени се еднакви и $x_1 = x_2 = ... = x_{20} = 1$ е бараното решение.

10. Комплексните броеви a, b и c се решенија на равенката $x^3 - 2x + 2 = 0$. Пресметај ја вредноста на изразот

$$\tfrac{a+1}{a-1} + \tfrac{b+1}{b-1} + \tfrac{c+1}{c-1}.$$

Решение. Бидејќи a, b и c се решенија на равенката $x^3 - 2x + 2 = 0$ од Виетовите формули следува

$$a + b + c = 0,\ ab + bc + ca = -2,\ abc = -2.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\tfrac{a+1}{a-1} + \tfrac{b+1}{b-1} + \tfrac{c+1}{c-1} &= 1 + \tfrac{2}{a-1} + 1 + \tfrac{2}{b-1} + 1 + \tfrac{2}{c-1}\\ &= 3 + 2 \cdot \tfrac{(b-1)(c-1)+(a-1)(c-1)+(a-1)(b-1)}{(a-1)(b-1)(c-1)}\\ &= 3 + 2 \cdot \tfrac{(ab+bc+ca)-2(a+b+c)+3}{abc-(ab+bc+ca)+(a+b+c)-1}\\ &= 3 + 2 \cdot \tfrac{-2-0+3}{-2-(-2)+0-1} = 1.\end{aligned}$$

11. Определи ги комплексните броеви z_1, z_2, z_3 кои се еднакви по модул и за кои важи

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1.$$

Решение. Од условот на задачата имаме $|z_1| = |z_2| = |z_3| = a > 0$, па затоа од равенството $z_1 z_2 z_3 = 1$ следува $a^3 = |z_1 z_2 z_3| = 1$, односно $a = 1$. Понатаму, од равенството $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ следува $\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 1$ и ако последното равенство го помножиме со $z_1 z_2 z_3$ добиваме

$$\begin{aligned}&\overline{z_1} z_1 z_2 z_3 + \overline{z_2} z_1 z_2 z_3 + \overline{z_3} z_1 z_2 z_3 = z_1 z_2 z_3\\ &|z_1|^2\, z_2 z_3 + |z_2|^2\, z_1 z_3 + |z_3|^2\, z_1 z_2 = 1\\ &z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2 = 1.\end{aligned}$$

Сега од Виетовите правила следува дека z_1, z_2, z_3 се трите корени на равенката

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0. \qquad (1)$$

Конечно, со решавање на равенката (1) добиваме дека $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -i$.

12. Графиците на фукциите $y = x^2 - a$ и $x = y^2 - b$ се сечат во четири точки кои имаат апсциси x_1, x_2, x_3 и x_4. Докажи дека

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = 1.$$

Решение. Ако (x_i, y_i) е пресечна точка на графиците на разгледуваните функции, тогаш

$$\begin{cases} y_i = x_i^2 - a \\ x_i = y_i^2 - b \end{cases}, \ i = 1,2,3,4$$

Според тоа $x_i = (x_i^2 - a)^2 - b$, т.е. $x_i^4 - 2ax_i^2 - x_i + a^2 - b = 0$. Значи x_1, x_2, x_3 и x_4 се решенија на равенката

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - b = 0.$$

Според Виетовите правила, имаме

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \qquad \text{и} \quad x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 = 1.$$

Но, тогаш

$$\begin{aligned}
(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) &= -(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_2 + x_3) \\
&= -(x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)(x_2 + x_3) \\
&= -(x_1^2x_2 + x_1x_2x_3 + x_2^2x_1 + x_2^2x_3 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3^2) \\
&= -[(x_1^2x_2 + x_1x_2^2) + (x_1^2x_3 + x_1x_3^2) + (x_2^2x_3 + x_2x_3^2) + 2x_1x_2x_3] \\
&= -[x_1x_2(x_1 + x_2) + x_2x_3(x_2 + x_3) + x_3x_1(x_3 + x_1) + 2x_1x_2x_3] \\
&= -[-x_1x_2(x_3 + x_4) - x_2x_3(x_1 + x_4) - x_3x_1(x_2 + x_4) + 2x_1x_2x_3] \\
&= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 - 2x_1x_2x_3 \\
&= x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 = 1,
\end{aligned}$$

што требаше да се докаже.

13. Даден е полином со реални коефициенти

$$p(x) = x^{2013} + a_{2012}x^{2012} + ... + a_1x + a_0.$$

Нека сите корени на $p(x)$ се

$$-b_{1006}, -b_{1005}, ..., -b_1, 0, b_1, ..., b_{1005}, b_{1006},$$

каде $b_1, ..., b_{1005}, b_{1006}$ се позитивни реални броеви чиј производ е еднаков на 1.

Докажи дека $a_3a_{2011} \geq 1012036$.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$p(x) = x(x^2 - b_1^2)(x^2 - b_2^2)...(x^2 - b_{1006}^2)$$

од каде што добиваме

$$x^{2012} + a_{2012}x^{2011} + ... + a_1 = (x^2 - b_1^2)(x^2 - b_2^2)...(x^2 - b_{1006}^2).$$

Полиномот на десната страна на горното равенство е полином од x^2, што значи дека $a_2 = a_4 = ... = a_{2012} = 0$, т.е.

$$x^{2012} + a_{2011}x^{2010} + ... + a_3x^2 + a_1 = (x^2 - b_1^2)(x^2 - b_2^2)...(x^2 - b_{1006}^2).$$

Од Виетовите формули следува $\sum_{i=1}^{1006} b_i^2 = -a_{2011}$ и

$$\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_{1005} \leq 1006} b_{i_1}^2 ... b_{i_{1005}}^2 = (-1)^{1005} a_3 = -a_3.$$

Од последните две равенства, условот на задачата и неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$a_3a_{2011}=(-\sum_{i=1}^{1006}b_i^2)(-\sum_{1\le i_1<...<i_{1005}\le 1006}b_{i_1}^2...b_{i_{1005}}^2)=(\prod_{i=1}^{1006}b_i^2)(\sum_{i=1}^{1006}b_i^2)(\sum_{i=1}^{1006}\frac{1}{b_i^2})$$
$$=(\sum_{i=1}^{1006}b_i^2)(\sum_{i=1}^{1006}\frac{1}{b_i^2})\ge 1006^2=1012036.$$

14. Определи го полиномот Q со реални коефициенти, таков што секој негов корен (нула) е квадрат на корен (нула) на полиномот $P(x)=x^3+9x^2+9x+9$.

Решение. Нека u,v,w се нули (реални или комплексни) на полиномот $P(x)$. Според теоремата на Виет, имаме

$$u+v+w=-9$$
$$uv+vw+wu=9$$
$$uvw=-9$$

Сега полиномот можеме да го определиме на два начини.

Прв начин. Тогаш

$$u^2+v^2+w^2=(u+v+w)^2-2(uv+vw+wu)=81-2\cdot 9=81-18=63$$
$$u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2=(uv+vw+wu)^2-2uvw(u+v+w)=(-9)^2-2(-9)(-9)=-81$$
$$u^2v^2w^2=(uvw)^2=(-9)=81$$

Сега бараниот полином е

$$Q(x)=(x-u^2)(x-v^2)(x-w^2)=x^3-63x^2-81x-81.$$

Втор начин. За полиномот $Q(x)=(x-u^2)(x-v^2)(x-w^2)$ имаме

$$Q(x^2)=(x^2-u^2)(x^2-v^2)(x^2-w^2)=(x-u)(x-v)(x-w)(x+u)(x+v)(x+w)=$$
$$=[(x-u)(x-v)(x-w)][-(-x-u)(-x-v)(-x-w)]=P(x)[-P(-x)]=$$
$$=(x^3+9x^2+9x+9)[-(-x^3+9x^2-9x+9)]=$$
$$=[(x^3+9x)+(9x^2+9x)][(x^3+9x)-(9x^2+9)]=$$
$$=(x^3+9x)^2-81(x^2+1)^2=x^6-63x^4-81x^2-81=$$
$$=(x^2)^3-63(x^2)^2-81x^2-81.$$

Сега е јасно дека $Q(x)=x^3-63x^2-81x-81$.

15. Определи ги сите полиноми f од видот

$$f(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-1}+...+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+1,$$

за кои $|a_n|\le 2$ и кои имаат $2n$ реални корени.

Решение. Бидејќи полиномот е реципрочен, добиваме $f=gh$ за некои полиноми

$$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \text{ и } h(x)=(x-\frac{1}{x_1})(x-\frac{1}{x_2})...(x-\frac{1}{x_n}).$$

Тогаш, од Виетовите правиле следува дека

$$g(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n \text{ и } g(x)=x^n+\frac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1}+\ldots+\frac{1}{b_n}.$$

Според тоа, $|a_n|=|b_n+\frac{1}{b_n}+\frac{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_{n-1}^2}{b_n}|\leq 2$, па затоа $b_1=\ldots=b_{n-1}=0$ и $b_n=\pm 1$.

Нека $b_n=-1$. Од полиномите од облик $(x^n-1)^2$ само $(x-1)^2$ и $(x^2-1)^2$ имаат $2n$ реални нули, бидејќи x^n-1 ја менува монотоноста најмногу во една точка и ја сече апцисата најмногу двапати. Аналогно за $b_n=+1$ единствено решение е $(x+1)^2$.

16. Реалните броеви a,b,c и d се такви што $b-d\geq 5$ и полиномот

$$P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$$

има четири реални корени x_1,x_2,x_3 и x_4. Определи ја најмалата можна вредност на производот

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1).$$

Решение. *Прв начин*. Со помоиш на Виетовите формули неравенството $b-d\geq 5$ го запишуваме во обликот

$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4-x_1x_2x_3x_4\geq 5.$$

Според тоа,

$$x_1(x_2+x_3+x_4-x_2x_3x_4)+1(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4-1)\geq 4$$

од каде следува

$$[x_1(x_2+x_3+x_4-x_2x_3x_4)]^2+[1(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4-1)]^2\geq 16.$$

Сега од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\begin{aligned}16&\leq(x_1^2+1)[(x_2+x_3+x_4-x_2x_3x_4)^2+(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4-1)^2]\\&=(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако е исполнето равенството

$$x_1(x_2+x_3+x_4-x_2x_3x_4)=x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4-1$$

кое е еквивалентно со равенството

$$x_1+x_2+x_3+x_4=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4,$$

што според Виетовите формули значи $a=c$. Ако $x_1=x_2=x_3=x_4=1$ имаме $b-d=5$ и минималната вредност на разгледуваниот израз е 16.

Втор начин. Последователно добиваме

$$\begin{aligned}(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1)&=P(i)P(-i)\\&=[1-b+d+i(c-a)][1-b+d-i(c-a)]\\&=(b-d-1)^2+(c-a)^2\\&\geq 16.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $b-d=5$ и $a-c=0$, што се постигнува кога $x_1=x_2=x_3=x_4=1$.

17. Сите нули на полиномот

$$P(x)=x^n+5x^{n-1}+10x^{n-2}+a_3x^{n-3}+...+a_n$$

се цели броеви. Докажи дека $n\geq 5$ и $P(x)=(x+1)^5x^{n-5}$.

Решение. Нека $x_1,x_2,....,x_n\in\mathbb{Z}$ се нули на полиномот P . Тогаш според Виетовите формули имаме

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=-5 \text{ и } \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{n}x_ix_j=10 .$$

Од идентитетот

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2-2\sum_{i,j=1,\, i<j}^{n}x_ix_j$$

добиваме $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=5$. Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+x_i)=0 ,$$

Бидејќи $x_i\in Z$ имаме $x_i^2+x_i\geq 0$, $i=1,2,3,....,n$ и од последното равенство, добиваме

$$x_i^2+x_i=0 ,\ i=1,2,3,....,n .$$

Значи, $x_i=0$ или $x_i=-1$. Од равенството $\sum_{i=1}^{n}x_i=-5$, добиваме дека $n\geq 5$, и без ограничување на општоста можеме да сметаме дека

$$x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=-1 \text{ и } x_6=x_7=...=x_n=0 .$$

Сега, јасно е дека

$$P(x)=(x+1)^5x^{n-5} .$$

18. Дадени се полиномите $F(x)=x^4-2x^3-4x^2+Ax+B$ и $f(x)=x^2+px+q$. Најди ги броевите A и B така што за секој $x\in\mathbb{R}$ да важи $F(x)=f(f(x))$, а потоа за најдените вредности на A и B реши ја неравенката $F(x)<0$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}f(f(x))&=(x^2+px+q)^2+p(x^2+px+q)+q\\ &=x^4+2px^3+(p^2+p+2q)x^2+(p^2+2pq)x+q^2+pq+q\end{aligned}.$$

Имајќи го предвид равенството $F(x)=f(f(x))$ ги изедначуваме коефициентите пред соодветните членови и го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}2p=-2\\ p^2+p+2q=-4\\ p^2+2pq=A\\ q^2+pq+q=B\end{cases}$$

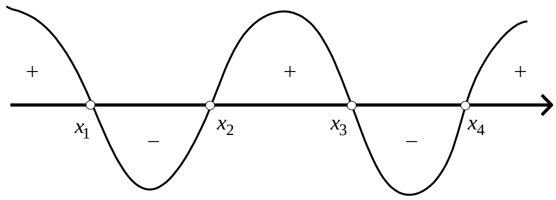
од каде што: $p=-1$, $q=-2$, $A=5$, $B=4$. Тогаш $f(x)=x^2-x-2$ и

$$F(x)=f(x)^2-f(x)-2=(f(x)+1)(f(x)-2)=(x^2-x-1)(x^2-x-4)=h(x)g(x).$$

Корените на равенките $g(x)=0$ и $h(x)=0$ се корени и на равенката $F(x)=0$ и тие се:

$x_1=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,

$x_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_4=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$,



па решението на неравенката (види цртеж) $F(x)<0$ е множеството $M=(x_1,x_2)\cup(x_3,x_4)$.

19. Дали постои прост број $p\geq 5$ за кој равенката

$$2(p+1)x^3-2(p-1)x^2-(p+3)x+3p-1=0$$

има рационален корен.

Решение. Нека $\frac{m}{n}$ е рационален корен на

$$f(x)=2(p+1)x^3-2(p-1)x^2-(p+3)x+3p-1=0,$$

каде $\text{NZD}(m,n)=1, m>0, n\neq 0$ и m е делител на $3p-1$. Тогаш

$$f(x)=(mx-n)g(x),$$

каде $g(x)$ е полином со целобројни коефициенти. Бидејќи $f(1)=2p$ и $f(-1)=2$, заклучуваме дека $m-n$ е делител на $2p$ и $m+n$ е делител на 2. Според тоа, $m-n=\pm1,\pm2,\pm p,\pm2p$ и $m+n=\pm1,\pm2$, при што $m-n$ и $m+n$ се со иста парност. Ако $m-n=x$ и $m+n=y$, тогаш $m=\frac{x+y}{2}, n=\frac{y-x}{2}$, за $x=\pm1,\pm2,\pm p,\pm2p$ и $y=\pm1,\pm2$. Од $m,n\neq 0$ следува дека $x\neq\pm1,\pm2$. Останува да ги разгледаме случаите $x=\pm p, y=\pm1$ и $x=\pm2p, y=\pm2$. Понатаму, од $m>0$ следува дека $x=p, y=\pm1$ или $x=2p, y=\pm2$. Можните вредности за m се $m=\frac{p\pm1}{2}$ и $m=p\pm1$, при што во сите случаи $\frac{p\pm1}{2}$ е делител на $3p-1$. Од $3p-1=6\cdot\frac{p-1}{2}+2=6\cdot\frac{p+1}{2}-4$, добиваме дека $\frac{p-1}{2}$ е делител на 2 (што не е можно за $p\geq5$) или $\frac{p+1}{2}$ е делител на 4, што е можно само за $p=7$. Непосредно се пороверува дека за $p=7$ соодветните вредности на m и n не даваат корени на равенката.

Според тоа, не постои прост број $p\geq5$ за кој дадената равенка има рационален корен.

20. Дадена е равенката $x^3-px+q=0$, $q\neq0$, која има три реални решенија.

a) Докажи дека $p>0$.

b) Ако и $q>0$, докажи дека за најмалиот по апсолутна вредност корен α на равенката, важи $|\alpha|\leq\min(\sqrt{\frac{p}{3}},\sqrt[3]{\frac{q}{2}})$.

Решение. Ако $p \le 0$, тогаш функцијата $f(x) = x^3 - px + q$ е строго растечка, па дадената равенка не може да има три реални решенија. До овој заклучок може да се дојде и со помош на Виетовите формули, имено од $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -p$, $x_1x_2x_3 = -q$, каде x_1, x_2, x_3 се корени на дадената равенка, се добива

$$0 < x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 2p ,$$

па $p > 0$. Ако и $q > 0$, имаме $x_1x_2x_3 = -q < 0$, и од $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, следи дека меѓу броевите x_1, x_2, x_3 два се позитивни и еден е негативен. Нека $x_1 = r > 0$, $x_2 = s > 0$, $r \le s$. Тогаш, $x_3 = -(r + s)$, па

$$p = -rs + r(r + s) + s(r + s) = r^2 + rs + s^2 \ge 3r^2 ,$$

односно $r \le \sqrt{\frac{p}{3}}$. Но, исто така и

$$q = -rs \cdot (-(r + s)) = rs(r + s) \ge 2r^3 ,$$

односно $r \le \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$. Следи дека $r \le \min(\sqrt{\frac{p}{3}}, \sqrt[3]{\frac{q}{2}})$, од каде следи тврдењето на задачата.

21. Реши ја равенката $x + a^3 = \sqrt[3]{a - x}$.

Решение. Равенката е определена за секој $x \in \mathbb{R}$. Ако воведеме смена $x = a - y^3$, таа го добива обликот

$$a - y^3 + a^3 = \sqrt[3]{a - (a - y^3)}$$
$$y^3 + y = a^3 + a .$$

Очигледно е дека едно решение на равенката е $y = a$. Ќе покажеме дека други решенија равенката нема. Од формулите за скратено множење имаме

$$y^3 - a^3 + y - a = 0$$
$$(y - a)(y^2 + ay + y^2 + 1) = 0 .$$

Од последната равенка имаме $y - a = 0$ или $y^2 + ay + y^2 + 1 = 0$. Според тоа, $y = a$ е едно решение, од каде добиваме дека решение на почетната равенка е

$$x = a - a^3 . \tag{1}$$

Бидејќи

$$y^2 + ay + y^2 + 1 = y^2 + 2\tfrac{a}{2}y + \tfrac{a^2}{4} + \tfrac{3a^2}{4} + 1 = (y + \tfrac{a}{2})^2 + \tfrac{3a^2}{4} + 1 \ge 1 ,$$

равенката $y^2 + ay + y^2 + 1 = 0$ нема решение. Конечно, единствено решение е (1).

22. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои равенката

$$\sqrt{ax^2 + ax + 2} = ax + 2$$

има единствено решение.

Решение. Ако $ax + 2 < 0$, тогаш равенката нема решебние, а ако $ax + 2 \ge 0$, тогаш таа е еквивалентна на равенката

$$(a^2-a)x^2+3ax+2=0.$$

За да има оваа равенка единствено решение можни се следниве случаи:

1) Коефициентот пред x^2 е еднаков на 0 и соодветната линеарна равенка има корен за кој важи $ax+2\geq 0$. За $a=0$ добиваме $2=0$, што не е можно. За $a=1$ добиваме $x=-\frac{2}{3}$ и како $ax+2=-\frac{2}{3}+2\geq 0$, заклучуваме дека $a=1$ е решение на задачата.
2) Коефициентот пред x^2 не е нула, ($a\neq 0,1$) и соодветната квадратна равенка има единствено решение кое го задоволува условот $ax+2\geq 0$. Тогаш $D=9a^2-8(a^2-a)=a^2+8a$, од каде добиваме $a=0$ или $a=-8$. Но, $a\neq 0$, па останува $a=-8$, при што добиваме $x=\frac{1}{6}$ и $ax+2=-8\cdot\frac{1}{6}+2\geq 0$, што значи дека $a=-8$ е решение на задачата.
3) Коефициентот пред x^2 не е нула ($a\neq 0,1$), а соодветната квадратна равенка има два корена x_1 и x_2 такви што $ax_1+2<0$ и $ax_2+2\geq 0$. Последното значи дека бројот $-\frac{2}{a}$ се наоѓа меѓу корените на равенката, при што може да се совпадне со поголемиот корен. Ако $-\frac{2}{a}=x_2$, добиваме $(a^2-a)(-\frac{2}{a})^2+3a(-\frac{2}{a})+2=0$, од каде следува $a=0$, што е противречност. Значи, $-\frac{2}{a}$ не се совпаѓа со ниту еден од корените. Оттука следува дека е исполнето неравенството

$$(a^2-a)((a^2-a)(-\tfrac{2}{a})^2+3a(-\tfrac{2}{a})+2)<0,$$

кое гарантира постоење на два корена. По упростување на последното неравенство добиваме $a\geq 1$.

Конечно, решение на задачата е $a=-8$ и $a\geq 1$.

23. Равенката $ax^5+bx^4+c=0$ има точно три реални (различни) корени. Колку корени има равенката $cx^5+bx+a=0$.

Решение. Јасно е дека $a\neq 0$ бидејќи во спротивен случај равенката би била линеарна равенка која има најмногу еден корен. Исто така, ниту еден од корените на дадената равенка не е нула. Навистина, ако претпоставиме дека $x=0$ е решение на дадената равенка, тогаш $c=0$ и равенката го добива обликот

$$ax^5+bx^4=0,$$

$$x^4(ax+b)=0. \quad (1)$$

Бидејќи $a\neq 0$, равенката (1) нема повеќе од два реални различни корени. Ако $b=0$, равенката има еден корен. Ако $b\neq 0$, равенката има два реални различни корени. Секој од овие случаи е спротивен на почетната претпоставка.

Од претходната дискусија добивме дека $a\neq 0$ и $c\neq 0$.

Нека $t\neq 0$ е корен на дадената равенка. Тогаш

$$at^5+bt^4+c=0,$$

$$t^5(a+b\tfrac{1}{t}+c(\tfrac{1}{t})^5)=0,$$

$$a+b\tfrac{1}{t}+c(\tfrac{1}{t})^5=0.$$

Значи, $\frac{1}{t}$ е корен на равенката $cx^5+bx+a=0$. Според тоа, бројот на корени на $cx^5+bx+a=0$ не е помал од бројот на корени на равенката $ax^5+bx^4+c=0$.

Со потполно аналогна дискусија, се докажува дека бројот на корени на равенката $ax^5+bx^4+c=0$ не е помал од бројот на корени на $cx^5+bx+a=0$.

Значи, и двете равенки имаат ист број на корени.

24. Во множеството реални броеви, реши ја равенката:

$$|x^4-x^2-6|=|x^4-4|-|x^2+2|.$$

Решение. Левата страна на равенката можеме да ја запишеме во облик

$$\begin{aligned}|x^4-x^2-6|&=|x^4-4-(x^2+2)|=|(x^2+2)(x^2-2)-(x^2+2)|\\&=(x^2+2)|x^2-2-1|=(x^2+2)|x^2-3|\end{aligned}\qquad(*)$$

а десната можеме да ја запишеме во облик

$$|x^4-4|-|x^2+2|=|(x^2+2)(x^2-2)|-|x^2+2|=(x^2+2)(|x^2-2|-1)\qquad(**)$$

Во (*) и (**) ја искористивме точноста на неравенството $x^2+2>0$, за секој $x\in\mathbb{R}$
Почетната равенка ја запишуваме во облик

$$(x^2+2)|x^2-3|=(x^2+2)(|x^2-2|-1),$$

и ако поделиме со x^2+2 истата го добива обликот

$$|x^2-3|=(|x^2-2|-1).\qquad(1)$$

Сега ќе разгледаме три случаи.

а) Ако $|x|\geq\sqrt{3}$ равенката преминува во идентитетот $x^2-3=x^2-2-1=x^2-3$

б) Ако $\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$ равенката преминува во равенката $3-x^2=x^2-2-1$ чие решение е $x=\sqrt{3}$ кое не припаѓа во интервалот $\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$.

в) Ако $|x|<\sqrt{2}$ равенката преминува во $3-x^2=2-x^2-1$ што не е можно.

Значи, решение на равенката е секој x, $|x|\geq\sqrt{3}$.

25. Реши ја равенката

$$x^{1996}-1996x^{1995}+....+1=0$$

(коефициентите пред $x,x^2,...,x^{1994}$ не се познати), ако се знае дека нејзините корени се позитивни реални броеви.

Решение. Нека $x_1,x_2,...,x_{1996}$ се решенија на дадената равенка. Од Виетовите формули е:

$$x_1+x_2+...+x_{1996}=1996,\qquad x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_{1996}=1.$$

Значи,

$$\tfrac{x_1+x_2+...+x_{1996}}{1996}=1=\sqrt[1996]{x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_{1996}},$$

т.е. аритметичката средина е еднаква на геометриската средина, па следува дека

$$x_1 = x_2 = ... = x_{1996} = 1 .$$

26. Најди ги корените на равенката $x^3 + ax + b = 0$, ако се знае дека има еден двоен корен.

Решение. Ако x_1, x_2, x_3 се корени на дадената равенка, тогаш според Виетовите формули имаме $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a$ и $x_1x_2x_3 = -b$. Од условот на задачата нека $x_1 = x_2$. Тогаш имаме $2x_1 + x_3 = 0$, $x_1^2 + 2x_1x_3 = a$ и $x_1^2 x_3 = -b$. Од првата равенка $x_3 = -2x_1$. Заменувајќи во втората и третата равенка добиваме $x_1^2 - 4x_1 = a$ и $-2x_1^3 = -b$. Значи $x_1^2 = -\frac{a}{3}$, односно $x_1^3 = \frac{b}{2}$. Одовде бидејќи $x_1x_1^2 = \frac{b}{2}$, добиваме $x_1(-\frac{a}{3}) = \frac{b}{2}$, односно $x_1 = -\frac{3b}{2a}$. На крајот, бидејки $x_3 = -2x_1$, имаме $x_3 = \frac{3b}{a}$.

27. Кој услов треба да го исполнат коефициентите p, q и r на равенката $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, така што за нејзините корени да важи релацијата $x_1x_2 = x_3$?

Решение. Од Виетовата теорема имаме

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p \, , \; x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \; \text{ и } \; x_1x_2x_3 = -r .$$

Од првата равенка $x_1 + x_2 = -(x_3 + p)$, додска во втората и третата равенка ако го примениме условот на задачата ќе добиеме

$$x_3 + x_3(x_1 + x_2) = q \qquad (1)$$

$$x_3^2 = -r \qquad (2)$$

Значи, од (1) и (2) ќе имаме

$$x_3 + x_3(-(x_3 + p)) = q \Rightarrow x_3 - x_3^2 - x_3 p = q \Rightarrow$$

$$x_3 + r - x_3 p = q \Rightarrow x_3(1 - p) = q + r \Rightarrow x_3 = \frac{q+r}{1-p} .$$

Додека од (2) ќе имаме $x_3 = \pm\sqrt{-r}$. Од споредбата на последните два резултата ја добиваме бараната врска меѓу коефициентите p, q и r на дадената равенка

$$(1 - p)\sqrt{-r} = q + r .$$

28. Одреди ги коефициентите a и b, така што равенката од четврт степен $ax^4 + bx^3 + 1 = 0$, да има двоен корен $x = 1$.

Решение. Нека x_1, x_2, x_3, x_4 се корени на дадената равенка, тогаш според Виетовата теорема имаме

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} ,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 0 ,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0 \; \text{ и }$$

$$x_1x_2x_3x_4 = \frac{1}{a} .$$

Од условот на задачата нека $x_3 = x_4 = 1$, тогаш во горните равенства имаме $x_1 + x_2 + 2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 1 = 0$, $2x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 0$ и $x_1x_2 = \frac{1}{a}$.

Од втората и третата равенка наоѓаме дека $x_1x_2 = \frac{1}{3}$, додека $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}$. Заменувајќи ги овие резултати во четвртата, односно првата равенка, ќе добиеме дека $a = 3$ и $b = 4$.

29. Реши ја равенката $f(x) = g(x)$, ако $g(x)$ е инверзна функција на функцијата $f(x) = x^3 + 1,5x^2$.

Решение. Бидејќи g е инверзна функција на функцијата f, нивниот пресек е на правата $y = x$ (т.е. на симетралата на првиот и третиот квадрант).

Значи, треба да ја решиме равенката $x^3 + \frac{3}{2}x^2 = x$, или

$$x(2x^2 + 3x - 2) = 0,$$

од каде што наоѓаме: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

30. Дали постојат 2000 реални броеви (не задолжително различни), кои не се сите еднакви на 0, со следново својство: ако било кои од нив се корени на полином со степен 1000 и водечки коефициент еднаков на 1, тогаш неговите коефициенти (освен тој пред x^{1000}) се некоја пермутација на останатите 1000 броеви?

Решение. Нека претпоставиме дека такви броеви постојат. Ако точно $k > 0$ од тие броеви се еднакви на 0, тогаш за $k \geq 1000$ полиномот x^{1000} покажува дека сите 2000 броеви се еднакви на 0, што е противречност. Ако $k < 1000$, тогаш полиномот со корени тие k нули и $1000 - k$ од останатите броеви има слободен член еднаков на 0, т.е. има уште еден корен еднаков на 0, што е противречност. Според тоа, сите 2000 броеви се различни од 0.

Ако 1000 од тие броеви се негативни, тогаш останатите 1000 броеви се коефициенти на полином со степен 1000 со негативни корени, па затоа се позитивни. Според тоа, со сигурност имаме 1000 позитивни броеви. Ако останатите 1000 се корени, добиениот полином има само пзоитивни коефициенти и тогаш неговите корени се негативни. Значи, имаме 1000 позитивни и 1000 негативни броеви. Повторно имаме противречност, бидејќи од Виетовите формули следува дека знаците на коефициентите на полином со 1000 позитивни корени наизменично се менуваат.

Конечно, од претходно изнесеното следува дека не постојат реални броеви кои го задоволуваат условот на задачата.

31. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ xy + yz + xz = a^2 \\ xyz = a^3 \end{cases}$$

Решение. *Прв начин.* Да го замениме збирот $x+y$ од првата равенка во втората, ќе добиеме $xy+z(a-z)=a^2$. Сега xy од оваа равенка да го замениме во третата равенка. Добиваме $z^3-az^2+a^2z-a^3=0$. Левата страна од ова равенство можеме да ја разложиме на множители $(z-a)(z-ai)(z+ai)=0$. Од овде имаме $z_1=a$, $z_2=ai$ и $z_3=-ai$.

Ако го замениме $z_1=a$ во првата и втората равенка ќе го добиемс системот $x+y=0$, $xy=a^2$. Одовде $x=\pm ia$, $y=\mp ia$. Притоа лесно може да се провери дека тројките броеви (x,y,z): $(ia,-ia,a)$, $(-ia,ia,a)$, го задоволуваат почетниот систем равенки. Аналогно наоѓаме уште два пара решенија, од $z_2=ai$ и од $z_3=-ai$. Тоа се:

$$(a,-ia,ia),\ (-ia,a,ia) \text{ и } (ia,a,-ia),\ (a,ia,-ia).$$

На тој начин шесте горедобиени решенија го задоволуваат системот.

Втор начин. До овој резултат можеме да дојдеме и на поелегантен начин, ако воочиме дека дадениот систем равенки се сведува на решавање на кубната равенка:

$$t^3-at+a^2t-a^3=0 \tag{1}$$

Навистина, ако x,y,z се решенија на равенката (1), тогаш од Виетовите формули добиваме дека за x,y,z важат релациите од почетниот систем.

Бидејќи

$$t^3-at^2+a^2t-a^3=t^2(t-a)+a^2(t-a)=(t-a)(t-ai)(t+ai),$$

трите корени на равенката (1) се: $t_1=a, t_2=ia, t_3=-ia$.

Ако ги индексираме на сите можни начини (ги има 3!), ќе ги добиеме сите решенија на разгледуваниот систем. На таков начин ние иовторно ги имаме шесте решенија, најдени и во погоре наведеното решение.

Овде ќе докажеме дека тие шест решенија се сите можни решенија на дадениот систем равенки. Навистина, даземеме тројката (x_1,y_1,z_1), да е некое решение на системот равенки и да ја разгледаме равенката од трет степен

$$(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)=0,$$

чии корени се броевите x_1, y_1 и z_1. Ако се ослободиме од заградите во равенката и ако ги искористиме равенствата

$$x_1+y_1+z_1=a,\ xy+yz+xz=a^2 \text{ и } xyz=a^3$$

ќе забележиме дека равенките (1) и

$$(t-x_1)(t-x_2)(t-x_3)=0$$

се еквивалентни. Значи x_1, y_1 и z_1 се јавуваат како корени и на равенката (1), што требаше и да се докаже.

32. При кои вредности на параметарот a системот

$$\begin{aligned} x^3-ay^3&=\tfrac{1}{2}(a+1)^2\\ x^3+ax^2y+xy^2&=1 \end{aligned} \tag{1}$$

има барем едно решение (x,y) што го задоволува условот $x+y=0$?

Решение. Да претпоставиме дека системот (1) има решение (x,y) кое го задоволува условот $x+y=0$; значи, $y=-x$, па, заменувајќи во двете равенки, ги добиваме равенките

$$(1+a)x^3=\tfrac{1}{2}(a+1)^2 \qquad (2)$$

$$(2-a)x^3=1. \qquad (3)$$

Од равенката (2) добиваме $a=-1$ или $x=\frac{1}{2}(a+1)$, при $a\neq-1$. Ставајќи $a=-1$ во (3) добиваме $x=\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$, а ставајќи $x=\frac{1}{2}(a+1)$ при $a\neq-1$ добиваме $\frac{1}{2}(a+1)=\frac{1}{2-a}$, т.е. $a=0$ и $a=1$. Според тоа, при $a=0, a=1$ и $a=-1$ системот (1) може да има решение од обликот $(x,-x)$.

Да видиме, сега, дали за овие вредности на a системот (1) има решение од тој облик.

За $a=0$, од првата равенка на (1) добиваме $x=\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, а за ова вредност на x, од втората равенка на (1) добиваме $y=\pm\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$. Значи, во овој случај решение на системот е парот $(\frac{\sqrt[3]{4}}{2},-\frac{\sqrt[3]{4}}{2})$.

За $a=1$ го добиваме системот

$$\begin{cases} x^3-y^3=2 \\ x^3+x^2y+xy^2=1 \end{cases}$$

чие едно решение е парот $(1,-1)$.

За $a=-1$ го добиваме системот

$$\begin{cases} x^3+y^3=0 \\ x^3-x^2y+xy^2=1 \end{cases}$$

чие(едно) решение е $(\frac{\sqrt[3]{9}}{3},-\frac{\sqrt[3]{9}}{3})$.

Следствено, системот (1) има решение од обликот $(x,-x)$ само за $a=0;-1;1$.

33. Определи ги сите вредности на реалниот параметар a за кои системот равенки

$$\begin{cases} \frac{ax+y}{y+1}+\frac{ay+x}{x+1}=a \\ ax^2+ay^2=(a-2)xy-x \end{cases}$$

има единствено решение.

Решение. За $x\neq-1, y\neq-1$ се ослободуваме од именителите во првата равенка и ако ја земеме предвид втората равенка добиваме $y=a$. Сега заменуваме во втората равенка и добиваме $ax^2-(a^2-2a-1)x+a^3=0$. За $a=0$ системот има единствено решение $(0,0)$. Ако $a=0$, тогаш треба дискриминантата на последната равенка да е 0 и соодветното решение да е во дефиниционата област или точно едно од двете решенија на квадратната равенка да не е во дефиниционата област и $y = a \neq -1$.

Во првиот случај имаме $(a^2 - 2a - 1)^2 - 4a^4 = 0$, т.е. $a^2 - 2a - 1 = \pm 2a^2$, од каде добиваме $a = -1, a = 1$ или $a = -\frac{1}{3}$. Во првите два случаја добиваме соодветно $y = -1$ и $x = -1$, што значи декасистемот нема решение. За $a = -\frac{1}{3}$ имаме единствено решение $(x, y) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

Во вториот случај, т.е ако $x = -1$ или $y = -1$, соодветно добиваме $a = 1$ или $a = -1$ и системот нема решение.

Конечно, решеника на задачата се $a = -\frac{1}{3}$ и $a = 0$.

34. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \ldots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}} \\ \sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \ldots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}} \end{cases}$$

Решение. Заради дефинираност на коренот, мора $x_i \in [-1, 1]$, за $i = 1, \ldots, 100$. Нека

$$\overrightarrow{a_i} = (\sqrt{1+x_i}, \sqrt{1-x_i}),\ \vec{b} = (100\sqrt{1+\tfrac{1}{100}}, 100\sqrt{1-\tfrac{1}{100}}),$$

па системот се сведува на $\sum_{i=1}^{100} \overrightarrow{a_i} = \vec{b}$. Бидејќи,

$$|\vec{b}| = \sqrt{(100\sqrt{1+\tfrac{1}{100}})^2 + (100\sqrt{1-\tfrac{1}{100}})^2} = 100\sqrt{2}$$

и

$$|\overrightarrow{a_i}| = \sqrt{(\sqrt{1+x_i})^2 + (\sqrt{1-x_i})^2} = \sqrt{2}, \text{ за } i = 1, \ldots, 100,$$

добиваме дека $|\sum_{i=1}^{100} \overrightarrow{a_i}| = \sum_{i=1}^{100} |\overrightarrow{a_i}|$, односно дека важи равенство во неравенството на триаголник за векторите $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_{100}}$, па тие се истонасочени (имаат иста насока како со $\vec{b}$). Ако важи $k(\sqrt{1+x}, \sqrt{1-x}) = (\sqrt{1+y}, \sqrt{1-y})$, $k \geq 0$, добиваме дека $k^2(1+x) = 1+y$ и $k^2(1-x) = 1-y$, односно $k = 1$, па овие вектори се истонасочени ако и само ако се еднакви (на векторот $\frac{1}{100}\vec{b}$). Значи, равенството важи ако и само ако $\overrightarrow{a_1} = \ldots = \overrightarrow{a_{100}}$, односно ако $x_1 = \ldots = x_{100} = \frac{1}{100}$, па ова е и единственото решение на системот.

35. Во зависност од параметарот a реши го системот равенки

$$\begin{cases} ax + 6y + z = 1 \\ x + 6ay + z = 6 \\ x + 6y + az = 1 \end{cases}$$

Решение. Бидејќи, детерминантата на системот е $D=6(a-1)^2(a+2)$, додека пак $D_x=6(a-1)(a-6)$, $D_y=2(a-1)(3a+2)$ и $D_z=6(a-1)(a-6)$, тоа значи дека за $a\neq 1$ и $a\neq -2$ системот има единствено решение

$$(x,y,z)=(\tfrac{a-6}{(a-1)(a+2)},\tfrac{3a+2}{3(a-1)(a+2)},\tfrac{a-6}{(a-1)(a+2)}),$$

за $a=-2$, $D=0$, $D_x\neq 0$, па системот нема решение, а за $a=1$, со одземање на првите две равенки добиваме $0=5$, па ни во овој случај системот нема решение.

36. Реши го системот равенки

$$\frac{xy}{x+y}=a \quad \wedge \quad \frac{yz}{y+z}=b \quad \wedge \quad \frac{xz}{x+z}=c.$$

Решение. Ќе разгледаме два случаја:

1) $abc\neq 0$. Тогаш и $xyz\neq 0$, па системот го трансформираме во видот:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}\\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{1}{b}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c}\end{cases}.$$

Ако од збирот на било кои две од овие равенки ја одземеме третата, го добиваме системот

$$\begin{cases}\frac{2}{x}=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\\ \frac{2}{y}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\\ \frac{2}{z}=\frac{1}{c}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\end{cases}$$

а оттука, при $ab+bc-ca\neq 0$, $cb+ba-ba\neq 0$, $ac+ba-cb\neq 0$ го добиваме решението

$$(\tfrac{2abc}{ab+bc-ca},\tfrac{2abc}{cb+ba-ba},\tfrac{2abc}{ac+ba-cb})\,. \qquad (1)$$

2) $abc=0$. Во овој случај ќе разгледаме неколку можности.

i) Ако $a=b=c=0$, тогаш системот го добива видот

$$\tfrac{xy}{x+y}=\tfrac{yz}{y+z}=\tfrac{xz}{x+z}=0\,.$$

Лесно се гледа дека последниот систем нема решение.

ii) Ако $a=b=0$, $c\neq 0$, (другите две можности $a=c=0$, $b\neq 0$ и $c=b=0$, $a\neq 0$ се разгледуваат аналогно), тогаш системот го добива обликот

$$\tfrac{xy}{x+y}=0,\ \tfrac{yz}{y+z}=0,\ \tfrac{xz}{x+z}=c\,.$$

Оттука $y=0$, $x\neq 0, z\neq 0$, бидејќи $c\neq 0$. Ставаме $x=p$, $p\notin\{0,c\}$ и добиваме $z=\frac{pc}{p-c}$. Конечно, во овој случај решението на системот е секоја подредена тројка

$$(p,0,\tfrac{pc}{p-c}),\ p\in\mathbb{R}\setminus\{0,c\} \qquad (2)$$

Аналогно се добиваат решенијата

$$(0, p, \frac{pb}{p-b}),\ p \in \mathbb{R} \setminus \{0, b\} \qquad (2')$$

$$(p, \frac{pa}{p-a}, 0),\ p \in \mathbb{R} \setminus \{0, a\} \qquad (2'')$$

iii) Ако $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$, тогаш од системот

$$\frac{xy}{x+y} = 0, \frac{yz}{y+z} = b, \frac{xz}{x+z} = c$$

заклучуваме дека $c = 0$ или $b = 0$, што противречи на претпоставката. Значи, во овој случај системот нема решение.

Следствено, дадениот систем има едно решение, дадено со (1), ако $abc \neq 0$, нема решение ако $a = b = c = 0$, и има бесконечно многу решенија дадени со (2), (2') и (2''), ако $a = b = 0$, $c \neq 0$ или $a = c = 0$, $b \neq 0$ или $c = b = 0$, $a \neq 0$, соодветно.

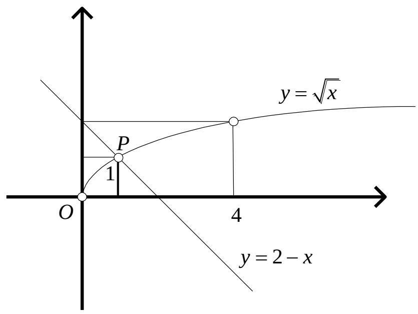
37. Реши ја неравенката $2 - x < \sqrt{x}$.

Решение. Неравенката има смисла за $x \geq 0$, т.е. $D = [0, +\infty)$. За да можеме неравенката да ја квадрираме, треба да ги знаеме знаците на двете страни. Но, десната страна на неравенката секогаш е ненегативна. Затоа неравенката ќе биде задоволена за оние вредности на x, за кои левата страна е негативна, т.е. за $2 - x < 0$, $x > 2$.

Ако $2 - x \geq 0$, т.е. $x \leq 2$, тогаш со квадрирање ја добиваме неравенката

$(2 - x)^2 < x$, т.е. $x^2 - 5x + 4 < 0$,

чие решение е интервалот $(1, 4)$. Според тоа, имајќи предвид дека $x \geq 0$, $x \leq 2$, следува дека решение на неравенката е интервалот $(1, 2]$.



Следствено, решение на дадената неравенка е унијата на интервалите $(1, 2]$ и $(2, +\infty)$, т.е. интервалот $(1, +\infty)$.

Задачата можеме едноставно да ја решиме графички. Од цртежот јасно е дека решение на неравенката е интервалот $(1, +\infty)$.

4. ФУНКЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ЗА ПОЛИНОМИ

1. Определи ги сите полиноми $p(x)$ за кои $xp(x-1) = (x-3)p(x)$.

Решение. *Прв начин.* Од условот на задачата

$$xp(x-1) = (x-3)p(x) \qquad (*)$$

следува дека полиномот $p(x)$ е делив со x, бидејќи $(x-3) \cdot p(x)$ е делив со x, а $x - 3$ не е делив со x (за секој $x \in \mathbb{R}$). Значи,

$$p(x) = xq(x) \text{ и } p(x-1) = (x-1)q(x-1),$$

па тогаш:

$$x(x-1)q(x-1)=(x-3)xq(x)\,,$$

т.е.

$$(x-1)q(x-1)=(x-3)q(x)\,. \qquad (1)$$

Аналогно, од (1) добиваме дека $(x-1)\,|\,q(x)$, па

$$q(x)=(x-1)r(x) \quad \text{и} \quad q(x-1)=(x-1)r(x-1)\,.$$

Тогаш (1) го добива видот

$$(x-2)r(x-1)=(x-3)r(x)\,. \qquad (2)$$

Од (2), повторно следува $(x-2)\,|\,r(x)$, па

$$r(x)=(x-2)s(x) \quad \text{и} \quad r(x-1)=(x-3)s(x-1)\,.$$

Тогаш (2) го добива видот

$$(x-2)(x-3)s(x-1)=(x-3)(x-2)s(x)\,,$$

т.е.

$$s(x)=s(x-1)\,. \qquad (3)$$

Равенството (3) е можно само за $s(x)=c=\text{const}$. Конечно, бараниот полином е:

$$p(x)=xq(x)=x[(x-1)r(x)]=cx(x-1)(x-2)$$

т.е.

$$p(x)=c(x^3-3x^2+2x)\,, \quad c\in\mathbb{R}\,.$$

Втор начин. Нека $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_\circ$, тогаш

$$p(x-1)=a_n(x-1)^n+a_{n-1}(x-1)^{n-1}+...+a_\circ\,.$$

Од условот на задачата следува дека

$$x[a_n(x-1)^n+a_{n-1}(x-1)^{n-1}+...+a_\circ]=(x-3)[a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_\circ]$$

или после средувањето

$$a_nx^{n+1}+(a_{n-1}-na_n)x^n+....+a_\circ x=a_nx^{n+1}+(a_{n-1}-3a_n)x^n+...-3a_\circ\,.$$

Ако ги изедначиме коефициентите пред x^n, добиваме

$$a_{n-1}-na_n=a_{n-1}-3a_n\,,$$

од каде што добиваме $n=3$. Значи, бараниот полином е од трет степен, т.е.

$$p(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_\circ\,. \qquad (1)$$

За полиномот (1) условот на задачата (*) го добива видот:

$$a_3x^4+(a_2-3a_3)x^3+(3a_3-2a_2+a_1)x^2+(a_0-a_1-a_2-a_3)x=$$
$$=a_3x^4+(a_2-3a_3)x^3+(a_1-3a_2)x^2+(a_\circ-3a_1)x-3a_0$$

Оттука го добиваме системот равенки

$$\begin{cases}3a_3-2a_2+a_1=a_1-3a_2\\ a_0-a_1+a_2-a_3=a_0-3a_1\\ 0=3a_0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}a_2=-3a_3\\ 2a_1+a_2=a_3\\ a_0=0\end{cases}$$

Овој систем е неопределен, бидејќи има четири променливи, а три равенки (не-противречни), па ако ставиме $a_3=m$, ќе следува $a_2=-3m$, $a_1=2m$, $a_\circ=0$.

Следствено, бараниот полином е

$$p(x) = m(x^3 - 3x^2 + 2x)\ , m \in \mathbb{R}\ .$$

2. Да се најде полином $P(x)$ за кој важи

$$xP(x-1) = (x-1990)P(x)\ .$$

Решение. Полиномот $P(x)(x-1990)$ е делив со x, па мора $P(x)$ да се дели со x, т.е. постои полином $P_1(x)$ така што $P(x) = xP_1(x)$. Заменувајќи го тоа во даденото равенство добиваме

$$x(x-1)P_1(x-1) = (x-1990)xP_1(x)$$
$$(x-1)P_1(x-1) = (x-1990)P_1(x)\ .$$

Аналогно како пред малку, ќе постои полином $P_2(x)$ така што

$$P_1(x) = (x-1)P_2(x)$$

и ако тоа се замени се добива

$$(x-1)(x-2)P_2(x-1) = (x-1990)(x-1)P_2(x)$$
$$(x-2)P_2(x-1) = (x-1990)P_2(x)\ .$$

Ако ова постапка се продолжи, се добиваат полиноми $P_3(x), P_4(x), ..., P_{1990}(x)$, и за овој полином ќе важи

$$(x-1990)P_{1990}(x-1) = (x-1990)P_{1990}(x)$$
$$P_{1990}(x-1) = P_{1990}(x)\ .$$

Од овде следува дека полиномот $P_{1990}(x) - P_{1990}(0)$ прима вредност 0 за секој цел број, а тоа е можно само ако $P_{1990}(x) - P_{1990}(0)$ е нулти полином. Нека $P_{1990}(0) = C$, тогаш

$$P(x) = xP_1(x) = x(x-1)P_2(x) = ... = x(x-1)(x-2)...(x-1989)P_{1990}(x)$$
$$= Cx(x-1)(x-2)...(x-1989)$$

3. Определи ги сите полиноми $P(x)$ такви што важи

$$(x+100)P(x) - xP(x+1) = 1$$

за секој реален број x.

Решение. Воведуваме замена $P(x) = Q(x) + \frac{1}{100}$ и добиваме

$$(x+100)Q(x) = xQ(x+1)\ . \qquad (1)$$

За $x = 0$ и $x = -100$ добиваме $Q(0) = Q(-99) = 0$. Понатаму, за $x = -1$ и $x = -99$ добиваме

$$99Q(-1) = -Q\left(0\right) = 0 \ \text{ и } \ 0 = Q(-99) = -99Q(-98)\ ,$$

па затоа $Q(-1) = Q(-98) = 0$. Слично, ако земеме $x = -2$ и $x = -98$ добиваме $Q(-2) = Q(-97) = 0$ итн. После 50 итерации имаме

$$Q(0) = Q(-1) = Q(-2) = ... = Q(-99) = 0\ ,$$

така што

$$Q(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+99)R(x)\ .$$

Со замена во (1) наоѓаме $R(x) = R(x+1)$, па затоа $R(x) = c$. Значи,

$$P(x)=cx(x+1)(x+2)\dots(x+99)+\tfrac{1}{100}.$$

4. Да се најдат сите полиноми со реални коефициенти така што

$$(x-8)p(2x)=8(x-1)p(x),$$

за секој $x\in\mathbb{R}$.

Решение. Ако замениме $x=1$ во равенката добиваме $-7p(2)=0$ па затоа $p(2)=0$. Ако во равенката ставиме $x=2$ добиваме $-6p(4)=0$, т.е. $p(4)=0$. Ако замениме $x=4$ во функционалната равенка добиваме $-4p(8)=0$, т.е. $p(8)=0$. Значи, бараниот полином може да се запише во облик

$$p(x)=(x-2)(x-4)(x-8)q(x)$$

Ако овој облик на $p(x)$ го запишеме во почетната функционална равенка добиваме $q(2x)=q(x)$.

Ако $x_0\neq 0$ е корен на $q(x)$ тогаш $2x_0, 4x_0, 8x_0, 16x_0,...$ се корени на полиномот q а тоа е можно ако и само $q(x)\equiv 0$.

Ако $x_0=0$ е корен на $q(x)$, тогаш $q(x)=ax^n$, за некој $a\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$. Ако употребиме $q(2x)=q(x)$ добиваме $ax^n=a2^n x^n$ за секој $x\in\mathbb{R}$, кое е можно за $a=0$, односно $q(x)=0$ т.е. $p(x)=0$. Значи, $q(x)$ нема реални корени, односно $q(x)=c$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Според тоа сите решенија на функционалната равенка се

$$p(x)=c(x-2)(x-4)(x-8).$$

5. Да се најдат сите полиноми полином со реални коефициенти, така да за секој реален број x да важи

$$(1+2x)P(2x)=(1+2^{1000}x)P(x).$$

Решение. Нека $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$. Од условот на задачата, за водечкиот коефициент имаме $2\cdot 2^n a_0=2^{1000}a_0$. Па степенот на полиномот е $n=999$. Јасно е дека $x=-\frac{1}{2}$ е нула на полиномот. Тогаш, за $x=-\frac{1}{2^2}$ имаме

$$(1-2\cdot\tfrac{1}{2^2})P(-\tfrac{1}{2})=(1+2^{1000}(-\tfrac{1}{2^2}))P(-\tfrac{1}{2^2}),$$

односно $(1-2^{998})P(-\frac{1}{2^2})=0$, од каде следува дека $x=-\frac{1}{2^2}$ е нула на полиномот $P(x)$. Продолжувајќи понатаму, се добива дека $x=-\frac{1}{2^k}$, $1\le k\le 999$ се нулите на полиномот $P(x)$. Па, бараниот полином е

$$P(x)=a_0(x+\tfrac{1}{2})(x+\tfrac{1}{2^2})\cdot\ldots\cdot(x+\tfrac{1}{2^{999}}),$$

$a_0\in\mathbb{R}$ е бараниот полином.

6. Нека a,b,c се три различни цели броеви. Најди полином $p(x)$ со целобројни коефициенти, таков што $p(a)=b$, $p(b)=c$ и $p(c)=a$.

Решение. Нека $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+....+a_n$. Тогаш од равенствата

$$p(a)=a_0a^n+a_1a^{n-1}+....+a_{n-1}a+a_n$$

$$p(b)=a_0b^n+a_1b^{n-1}+....+a_{n-1}b+a_n$$

имаме дека

$$p(a)-p(b)=a_0(a^n-b^n)+a_1(a^{n-1}-b^{n-1})+....+a_{n-1}(a-b)=(a-b)A.$$

Аналогно важи

$$p(b)-p(c)=(b-c)\cdot B,$$

$$p(c)-p(a)=(c-a)\cdot C.$$

Ако важат условите $p(a)=b$, $p(b)=c$, $p(c)=a$, ќе имаме

$$p(a)-p(b)=(a-b)A=b-c,$$

$$p(b)-p(c)=(b-c)\cdot B=c-a,$$

$$p(c)-p(a)=(c-a)\cdot C=a-b,$$

или

$$(a-b)(b-c)(c-a)\cdot A\cdot B\cdot C=(b-c)(c-a)(a-b),$$

од каде што следува дека $ABC=1$, односно

$$|A|=|B|=|C|=1, \text{ или } |a-b|=|b-c|=|c-a|,$$

што противречи на претпоставката $a\neq b\neq c\neq a$. Значи, не постои полином кој ги исполнува дадените услови.

7. Дали постои квадратен трином $p(x)=ax^2+bx+c$ каде што a, b, c се цели броеви, $a\neq 0$, така што за секој природен број n кој во својот десетичен запис има само единици, бројот $p(n)$ во својот десетичен запис има само единици?

Решение. Нека $n=\underbrace{11...1}_{k}$, $k\in{}^2$. Тогаш $9n+2=\underbrace{100...01}_{k-1}$, $(9n+2)n=\underbrace{11...1}_{2k}$. Според тоа, триномот $p(x)=9x^2+2x$ го има бараното својство.

8. Определи ги сите полиноми $P(x)$ со целобројни коефициенти, за кои $P(n)$ е делител на $2557^n+213\cdot 2015$ за секој природен број n.

Решение. Јасно, полиномите $P(x)\equiv 1$ и $P(x)\equiv -1$ се решенија на задачата. Ако $P\not\equiv 1, P\not\equiv -1$ и $P\not\equiv 0$, тогаш постои цел број n_0, таков што $|P(n_0)|>1$. Понатаму, ако q е прост делител на $P(n_0)$, тогаш q е делител на $2557^n+213\cdot 2015$, од каде следува дека q е непарен број и како 2557 е прост број добиваме дека $q\neq 2557$.

Од $P(n_0+q)\equiv P(n_0)\equiv 0(\mathrm{mod}\, q)$ и фактот дека $P(n_0+q)$ е делител на $2557^{n_0+q}+213\cdot 2015$ следува дека

$$2557^{n_0+q}+213\cdot 2015\equiv 2557^{n_0}+213\cdot 2015(\mathrm{mod}\, q),$$

т.е. $2557^{n_0+q} \equiv 2557^{n_0} (\mod q)$. Но, $\mathrm{NZD}(q, 2557) = 1$, па затоа $2557^q \equiv 1 \pmod q$. Сега од теоремата на Ферма добиваме

$$1 \equiv 2557^q \equiv 2557 (\mod q),$$

т.е. q е делител на $2556 = 2^2 3^2 \cdot 71$. Според тоа, $q = 3$ или $q = 71$, па затоа q е делител на $213 \cdot 2014$. Но, тоа значи дека q е делител на 2557^{n_0}, од каде заклучуваме $q = 2557$, што е противречност.

Конечно, бараните полиноми се $P(x) \equiv 1$ и $P(x) \equiv -1$.

9. Определи ги сите полиноми $P(x)$ со реални коефициенти такви што за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$P(x^2) + 2P(x) = (P(x))^2 + 2 .$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$P(x^2) - 1 = (P(x))^2 - 2P(x) + 1 \text{ , т.е. } P(x^2) - 1 = (P(x) - 1)^2 .$$

Воведуваме смена $Q(x) = P(x) - 1$ и ја добиваме равенката

$$Q(x^2) = Q^2(x) . \qquad (1)$$

Ако $Q(x)$ е константен полином, тогаш од (1) следува дека $Q(x) \equiv 0$ или $Q(x) \equiv 1$. Понатаму, ако $\deg Q = n > 0$, тогаш $Q(x) = a_n x^n + R(x)$, каде $R(x)$ е полином таков што $\deg R = r < n$. Со замена во (1) добиваме

$$a_n x^{2n} + R(x^2) = a_n^2 x^{2n} + 2a_n x^n R(x) + R^2(x) .$$

Од последното равенство следува дека $a_n = 1$ и

$$R(x^2) = 2x^n R(x) + R^2(x) . \qquad (2)$$

Во (2) степенот на полиномот на левата страна е $2r$, а на десната страна е $n + r$. Но, $2r < n + r$, па затоа равенството (2) е можно ако и само ако $R(x) \equiv 0$. Според тоа, $Q(x) = x^n$ и решенија на почетната равенка се полиномите $P(x) = 1, P(x) = 2$ и $P(x) = x^n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.

10. Определи ги сите полиноми со реални коефициенти такви, што за секој реален број x важи $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$.

Решение. Од $P(x)^2 = P(-x)^2 = P(x^2 + 1) - 1$ следува дека полиномот $P(-x)$ е идентино еднаков на $P(x)$ или $-P(x)$.

Ако $P(x) = -P(-x)$ за секој x, со замена на $x = 0$ добиваме $P(0) = 0$. Дефинираме низа $x_0 = 0, x_{n+1} = x_n^2 + 1$. Со индукција лесно се покажува дека

$P(x_n) = x_n$ за секој n. Но, низата $\{x_n\}$ строго расте, па затоа $P(x) = x$ за бесконечно многу броеви x, од каде следува дека $P(x) \equiv x$, што очигледно е решение на задачата.

Нека претпоставиме дека $P(x) = P(-x)$. Нека $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Тогаш полиномот

$$0 \equiv P(x) - P(-x) = 2(a_1x + a_3x^3 + ...),$$

па затоа $a_1 = a_3 = a_5 = ... = 0$, т.е. $P(x)$ е полином по x^2. Според тоа, постои полином Q таков што $P(x) = Q(x^2 + 1)$. Тогаш

$$Q((x^2 + 1)^2 + 1) = P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1 = Q(x^2 + 1)^2 + 1.$$

Воведуваме смена $x^2 + 1 = y$ и добиваме $Q(y^2 + 1) = Q(y)^2 + 1$, т.е. полиномот Q ја задоволува истата равенка како и полиномот P, но има помал степен. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме, дека во овој случај сите решенија се полиномите $T(x), T(T(x)), T(T(T(x))), ...$, каде $T(x) = x^2 + 1$.

11. Определи ги ги сите полиноми $p(x)$ такви што за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$(p(x))^2 - (p(y))^2 = p(x + y)p(x - y).$$

Решение. За $x = \frac{t}{2} = y$ се добива $p(0)p(t) = 0$, од каде мора $p(0) = 0$. Избирајќи во почетното равенство $y = x - T$ се добива

$$p^2(x) - p^2(x - T) = p(2x - T)p(T).$$

Значи, ако T е корен на полиномот p, тогаш $p^2(x) = p^2(x - T)$, односно p^2 е периодична функција со период T. Но неконстантан полином не може да има ненулти период, па затоа или p е константен полином (тогаш заради $p(0) = 0$ добиваме $p \equiv 0$) или единствени корени на p се нули. Во тој случај $p(x) = ax^n$. Тогаш имаме $x^{2n} - y^{2n} = (x + y)^n (x - y)^n$. Специјално за $x = 2, y = 1$ се добива $4^n - 1 = 3^n$. Оттука $n = 1$. Значи, решенија на функционалната равенка можат да бидат само полиномите од облик $p(x) = ax$. Се проверува дека полиномите од тој облик се решенија на функционалната равенка.

12. Определи ги сите полиноми со реални коефициенти такви што

$$P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c) \qquad (1)$$

за секои реални броеви a, b, c такви што $ab + bc + ca = 0$.

Решение. Нека $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. За секој $x \in \mathbb{R}$ подредената тројка $(a, b, c) = (6x - 3x, 2x)$ го задоволува условот $ab + bc + ca = 0$. Со замена во

(1) добиваме

$$P(3x)+P(5x)+P(-8x)=2P(7x)\text{, за секој } x\in\mathbb{R}.$$

Оттука со споредување на коефициентите следува дека

$$K(i)=3^i+5^i+(-8)^i-2\cdot 7^i=0 \text{ за секој } a_i\neq 0.$$

Понатаму, $K(2)=K(4)=0$ и $K(i)<0$ за непарен i, а $K(i)>0$ за парен $i\notin\{2,4\}$. Затоа $a_i=0$, за $i\neq 2,4$. Според тоа, $P(x)=a_2x^2+a_4x^4$, за некои реални броеви a_2 и a_4.

Лесно се проверува дека полиномите од видот $P(x)=ax^2+bx^4,\ a,b\in\mathbb{R}$ го задоволуваат условот на задачата.

13. Определи ги сите полиноми $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $n\geq 2$, со реални и ненулти коефициенти така што $P(x)-P_1(x)P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_{n-1}(x)$ е константен полином, каде

$$P_1(x)=a_1x+a_0,\ P_2(x)=a_2x^2+a_1x+a_0,\ \ldots,\ P_{n-1}(x)=a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0.$$

Решение. Бидејќи полиномот $P(x)-P_1(x)P_2(x)\cdot\ldots\cdot P_{n-1}(x)$ е константен и $a_k\neq 0$, $k=\overline{1,n-1}$, имаме дека

$$\begin{aligned}\deg P&=\deg(P_1P_2\cdot\ldots\cdot P_{n-1})=\deg P_1+\deg P_2+\ldots+\deg P_{n-1}\\ &=1+2+\ldots+(n-1)=\tfrac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

Добиваме дека $n=\frac{n(n-1)}{2}$, па затоа $n\in\{0,3\}$. Бидејќи $n\geq 2$, заклучуваме $n=3$

Според тоа $P(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, и $P(x)-P_1(x)P_2(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$ ако и само ако:

$$\begin{aligned}a_3&=a_1a_2\\ a_2&=a_1^2+a_0a_2\\ a_1&=2a_0a_1\\ a_0&=a_0^2+k\end{aligned}\qquad(1)$$

Од (1) имаме $a_1(1-2a_0)=0$, бидејќи $a_1\neq 0$ следува $a_0=\frac{1}{2}$ и $k=\frac{1}{4}$. Нека $a_1=a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Тогаш $a_2=2a^2$ и $a_3=2a^3$. Според тоа, бараните полиноми се од облик $P(x)=2a^3x^3+2a^2x^2+ax+\frac{1}{2}$, каде $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

14. Определи го полиномот P со најмал можен степен таков што

а) коефициентите на P се цели броеви

б) сите нули на P се цели броеви

в) $P(0)=-1$

г) $P(3)=128$.

Решение. Нека P е полином со степен n и нека $b_1,b_2,...,b_m$ се неговите нули. Тогаш

$$P(x)=a(x-b_1)^{r_1}(x-b_2)^{r_2}...(x-b_m)^{r_m},$$

каде $r_1,r_2,...,r_m\geq 1$ се природни бреови и a е цел број. Од условот $P(0)=-1$ добиваме дека $a(-1)^n b_1^{r_1}b_2^{r_2}...b_m^{r_m}=-1$. Последното равенство е можно ако и само ако $|a|=1$ и $|b_j|=1$ за $j=1,2,...,m$. Според тоа,

$$P(x)=a(x-1)^p(x+1)^{n-p},$$

за некој природен број $p\geq 0$ и n природен број. Но, од условот $P(3)=128$ добиваме

$$a\cdot 2^p 2^{2n-2p}=2^7.$$

Тогаш $2n-p=7$. Најмала вредност за n за кој имаме решение на последната равенка е $n=4$, а во тој случај $p=1$ и $a=1$. Полиномот

$$P(x)=(x-1)(x+1)^3$$

ги исполнува условите од задачата.

15. Одреди ги сите полиноми

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$$

за кои $\{a_n,a_{n-1},...,a_1,a_0\}\subseteq\{-1,1\}$, такви што сите решенија на равенката $p(x)=0$ се реални.

Решение. Ако ги знаеме сите такви нормирани полиноми ($a_n=1$), останатите ќе ги добиеме со множење со -1, затоа ќе се ограничиме на одредување на нормираните полиноми кои ги задоволуваат условите на задачата.

Нека $a_n=1$ и нека $x_1,x_2,...,x_n$ се сите корени на таквиот полином p. Од Виетовите формули следува

$$x_1+x_2+...x_n=-a_{n-1},\ x_1x_2+...+x_{n-1}x_n=a_{n-2},\ x_1x_2...x_n=(-1)^n a_0$$

па важи

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=(x_1+x_2+...+x_n)^2-2(x_1x_2+...+x_{n-1}x_n)=1\pm 2.$$

Но, корените се реални, па затоа последното е можно единствено ако

$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1+2=3.$$

Неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина на ненегативните броеви $x_1^2,x_2^2,...,x_n^2$ (кое очигледно важи и кога некој од тие броеви е еднакон на 0) ни дава:

$$\frac{3}{n}=\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}\geq\sqrt[n]{x_1^2x_2^2...x_n^2}=1$$

од каде што следува дека $n \le 3$.

Случајот $n=3$ (поради еднаквоста која тогаш настапува) е можен само ако $x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1$, односно $|x_1|=|x_2|=|x_3|=1$. Затоа (во случајот $n=3$), имајќи во предвид $x_1 + x_2 + ... x_n = -a_{n-1}$, $(a_{n-1} = \pm 1)$, ги имаме можностите

$$(x-1)^2(x+1) = x^3 - x^2 - x + 1 \text{ и } (x-1)(x+1)^2 = x^3 + x^2 - x - 1 .$$

За случајот $n=1$, односно $n=2$, со непосредна проверка на корените се утврдува дека $x+1, x-1, x^2+x-1, x^2-x-1$ се преостанатите такви нормирани полиноми.

16. Определи ги сите полиноми $p(x)$ со водечки коефициент 1, такви што

1) $p(x)$ не е константен полином и сите нули му се реални и различни,
2) ако a и b се нули на $p(x)$, тогаш и $a+b+ab$ е нула на $p(x)$.

Решение. Ако a е нула на $p(x)$, тогаш од 2) следува дека бројот a^2+2a исто така е нула на $p(x)$.

i) Ако $a>0$, тогаш $0<a<a^2+2a<(a^2+2a)^2+2(a^2+2a)<...$, што значи дека $p(x)$ има бесконечна монотона растечка низа од нули.

ii) Ако $-1<a<0$, тогаш $0>a>a^2+2a>-1$. Бидејќи $f(x)=x^2+2x$ строго расте во интервалот $(-1,0)$, повторно добиваме бесконечна низа нули на $p(x)$, која сега е монотоно опаѓачка и кои се во интервалот $(-1,0)$.

iii) Ако $-2<a<-1$, тогаш $-1<f(a)<0$, па од *ii*) следува дека полиномот $p(x)$ има бесконечно многу нули.

iv) Ако $a<-2$, тогаш $f(a)>0$, па од *i*) следува дека $p(x)$ има бесконечно многу нули.

Од претходните разгледувања следува, дека ако $a \notin \{-2,-1,0\}$, тогаш полиномот $p(x)$ има бесконечно многу нули, што не е можно. Со непосредна проверка се добива дека за $a \in \{-2,-1,0\}$ можно полиноми се

$$x,\ x+1,\ x(x+1),\ x(x+2),\ x(x+1)(x+2) .$$

17. Нека $P(x)$ е полином со целобројни коефициенти таков што $P(n)>n$, за секој природен број n. Нека за секој природен број m постои член во низата

$$P(1), P(P(1)), P(P(P(1))), ...$$

кој е делив со m. Докажи дека $P(x)=x+1$.

Решение. Да означиме со $x_1 = 1$ и $x_k = P(x_{k-1})$, за $k>1$. Фиксираме природен број n и нека $N = x_n - 1$. Тогаш имаме

$$x_1 \equiv x_n (\bmod N) \;\Rightarrow\; P(x_1) \equiv P(x_n)(\bmod N) \;\Rightarrow\; x_2 \equiv x_{n+1} (\bmod N) \;.$$

Користејќи индукција добиваме

$$x_k \equiv x_{n+k-1} (\bmod N) \text{, за секој } k \geq 2 . \qquad (1)$$

Според условот на задачата , постои природен број m таков што $x_m \equiv 0(\bmod N)$. Од (1) следува дека постои j таков што $1 \leq j \leq n-1$ и $x_j \equiv 0(\bmod N)$. Всушност, не е тешко да се воочи дека $j \equiv m(\bmod n-1)$. Бидејќи $P(n) > n$ за секој природен број, имаме $x_1 < x_2, ...< x_{n-1} < x_n$. Значи, $x_{n-1} \leq x_n - 1$ и $x_j \leq x_n - 1$. Бидејќи $N = x_n - 1$ и N е делител на сите x_j, заклучуваме дека $x_j = N$. Ако $j < n-1$, тогаш $x_j < x_{n-1}$ и затоа $x_n - 1 = N = x_j < x_{n-1} \leq x_n - 1$, што не можно. Тогаш $j = n-1$ иi $x_n - 1 = x_{n-1}$ и $P(x_{n-1}) = x_n = x_{n-1} + 1$. Но, ова важи за секој рприоден број n и затоа $P(x) = x+1$.

18. Определи ги сите полиноми *p* со реални коефициенти за кои важи $p(0) = 0$ и

$$f(f(n)) + n = 4f(n)$$

За секој природен број *n*, каде $f(n) = [p(n)]$.

Решение. Нека $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Тогаш

$$\begin{aligned} f(n) &= p(n) - k_n = t, 0 \leq k_n < 1 , \\ f(f(n)) &= p(t) - l_n, 0 \leq l_n < 1, \\ f(f(n)) &- 4f(n) + n = 0 \end{aligned} .$$

Следува дека

$$(a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0 - l_n) - 4(a_m n^m + a_{m-1--} n^{m-1} + ... + a_1 n + a_0 - k_n) + n = 0$$

$q(n, k_n) = l_n < 1$ за секој природен број *n*, па мора степенот на *n* во *q* да биде 0, во спротивно полиномот не може да биде ограничен со 1.

Затоа мора степенот на *n* во *p* мора де биде најмногу 1 (ако е барем 2 степенот на *n* во *q* ќе биде поголем од 1). Ако $m = 0$, тогаш

$$p(x) = a,\; f(x) = [a],\; [a] - 4[a] + n = 0$$

за секое *n* што не е можно. За $m = 1$, $p(x) = ax$, бидејќи $p(0) = 0$. Сега

$$f(f(n)) - 4f)n) + n = a(an - k_n) - l_n - 4(an - k_n) + n = 0 ,$$

следува дека $a^2 - 4a + 1 = 0$, $a_1 = 2 + \sqrt{3}$ или $a_2 = 2 - \sqrt{3}$. За a_1 имаме

$$f(f(n)) - 4f(n) + n = [a_1)a_1 n - k_n)] - 4(a_1 n - k_n) + n = [a_1(a_1 n - k_n) - 4(a_1 n - k_n) + n]$$

$$= [)a_1^2 - 4a_1 + 1)n + (4 - a_1)k_n] = [(4 - a_1)k_n] = 0$$

За a_2 и $n = 3$, имаме

$$f)n)=0,\ f(f(n))=0,\ f(f(n))-4f(n)+n=n=3>0$$

Единствено решение е: $p(x)=(2+\sqrt{3})x$.

19. Определи ги сите полиноми $f(x)$ со целобројни коефициенти кои го имаат следново својство: постои константа $c>0$, таква што за секој цел број $n>c$ бројот $f(n)$ е различен од нула и е делител на $n!$.

Решение. Јасно, целите ненулти константи се решенија на задачата.

Нека полиномот $f(x)$ е од облик

$$f(x)=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}...(x-a_k)^{\alpha_k}g(x),$$

каде $0\le a_1<a_2<...<a_k$ се ненегативни цели броеви, α_i се природни броеви, а полиномот $g(x)$ нема ненегативни целобројни корени. Нека претпоставиме дека $g(x)$ не е константен полином. Бидејќи простите делители на вредностите на $g(x)$ во множеството цели броеви се бесконечно многу (лема на Шур), можеме да избереме доволно голем прост број p за кој постои N таков што $p\,|\,g(N)$ и нека r е остатокот на N при делењето со p. Можеме да сметаме дека $r\ne a_i,\ i=1,2,...,k$ и $r>c$.

Јасно, p е делител на $g(r)$, од каде следува дека p и на $f(r)$, и како $f(r)$ е делител на $r!$, добиваме дека p е делител на $r!$, што противречи на $0<r<p$. Според тоа, $g(x)$ е константен полином, т.е.

$$f(x)=K(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}...(x-a_k)^{\alpha_k},$$

каде K е константа. Нека претпоставиме дека $\alpha_i\ge 2$ за некој i. Тогаш ако ставиме $x=p+a_i$ за некој доволно голем прост број p, добиваме дека p^2 е делител на $(p+a_i)!$, што за $a_i<p$ не е можно. Според тоа,

$$f(x)=K(x-a_1)(x-a_2)...(x-a_k). \qquad (1)$$

Лесно се проверува дека полиномите (1) ги задоволуваат условите на задачата.

20. Определи ги сите полиноми f од видот

$$f(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-1}+...+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+1,$$

за кои $|a_n|\le 2$ и кои имаат $2n$ реални корени.

Решение. Бидејќи полиномот е реципрочен, добиваме $f=gh$ за некои полиноми

$$g(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \text{ и } h(x)=(x-\tfrac{1}{x_1})(x-\tfrac{1}{x_2})...(x-\tfrac{1}{x_n}).$$

Тогаш, од Виетовите правиле следува дека

$$g(x)=x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n \text{ и } g(x)=x^n+\tfrac{b_{n-1}}{b_n}x^{n-1}+...+\tfrac{1}{b_n}.$$

Според тоа, $|a_n|=|b_n+\frac{1}{b_n}+\frac{b_1^2+b_2^2+...+b_{n-1}^2}{b_n}|\le 2$, па затоа $b_1=...=b_{n-1}=0$ и $b_n=\pm 1$. Нека $b_n=-1$. Од полиномите од облик $(x^n-1)^2$ само $(x-1)^2$ и $(x^2-1)^2$ имаат $2n$ реални нули, бидејќи x^n-1 ја менува монотоноста најмногу во една точка и ја сече апцисата најмногу двапати. Аналогно за $b_n=+1$ единствено решение е $(x+1)^2$.

21. Нека $n\in\mathbb{N}$. Определи ги сите полиноми $f(x)$ со комплексни коефициенти такви што

$$f(x^2+x+1)\mid f(x^3-1).$$

Решение. Нека α е нулата со најголем модул на полиномот $f(x)$ и нека β_1 и β_2 се решенија на равенката $x^2+x+1=\alpha$. Тогаш

$$\beta_i^3-1=(\beta_i-1)(\beta_i^2+\beta_i+1)=(\beta_i-1)\alpha, \tag{1}$$

за $i\in\{1,2\}$, а од Виетовите правила следува

$$\beta_1+\beta_2=-1. \tag{2}$$

Ако $f(x^2+x+1)\mid f(x^3-1)$, тогаш постои полином $g(x)$ со комплексни коефициенти таков што $f(x^3-1)=g(x)f(x^2+x+1)$, за секој $x\in\mathbb{C}$, па со замена $\beta_i, i\in\{1,2\}$, од (1) следува $0=g(\beta_i)f(\alpha)=f((\beta_i-1)\alpha)$, за $i\in\{1,2\}$, па затоа $(\beta_1-1)\alpha$ и $(\beta_2-1)\alpha$ се нли на полиномот $f(x)$. Тогаш од изборот на α следува дека $|(\beta_1-1)\alpha|\le|\alpha|$ и $|(\beta_2-1)\alpha|\le|\alpha|$, па од (2) следува

$$3|\alpha|=|(-\beta_1-\beta_2-2)\alpha|=|(\beta_1-1)\alpha+(\beta_2-1)\alpha|\le|(\beta_1-1)\alpha|+|(\beta_2-1)\alpha|\le 2|\alpha|,$$

што е можно само за $\alpha=0$.

Од друга страна, јасно е дека полиномот $cx^n, c\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ е полином од $n-$ти степен кој ги задоволува условите на задачата.

22. Определи ги сите полиноми $P(x,y)$ со реални коефициенти такви, што

$$P(ab,c^2+1)+P(bc,a^2+1)+P(ca,b^2+1)=0 \text{, за секои } a,b,c\in\mathbb{R}.$$

Решение. Треба да ги определиме сите полиноми $Q(x,y)=P(x,y+1)$, за кои важи

$$Q(ab,c^2)+Q(bc,a^2)+Q(ca,b^2)=0. \tag{1}$$

Да претпоставиме, дека постои таков ненулти полином Q. Можеме да сметаме дека неговиот степен е минимален. За $a=b=c=0$ од (1) следува дека $Q(0,0)=0$. Сега за $a=b=0$, повторно од (1) следува дека $Q(0,c^2)=0$, за секој c, па затоа $Q(0,y)=0$, за секој y. Сега, за $a=0$, повторно од (1) и од претходните разгледувања следува $Q(bc,0)=0$, т.е. $Q(x,0)=0$, за секој x. Според тоа, $Q(x,y)=xyR(x,y)$, каде R е полином. Сега за R добиваме

$$abc^2R(ab,c^2)+bca^2R(bc,a^2)+cab^2R(ca,b^2)=0\,,$$

т.е.

$$cR(ab,c^2)+aR(bc,a^2)+bR(ca,b^2)=0\,. \tag{2}$$

За $a=b=0$ добиваме $R(0,c^2)=0$, за секој c, па затоа $R(0,y)=0$, за секој y. Според тоа, $R(x,y)=xQ_1(x,y)$, каде Q_1 е полином. Од (2) следува дека

$$abcQ_1(ab,c^2)+abcQ_1(bc,a^2)+abcQ_1(ca,b^2)=0\,,$$

т.е.

$$Q_1(ab,c^2)+Q_1(bc,a^2)+Q_1(ca,b^2)=0\,.$$

Добивме, дека полиномот Q_1 е од понизок степен и за него важи истото равенство како и за полиномот Q, што противречи на изборот на Q. Од добиената противречност следува дека $Q(x,y)=0$, т.е. $P(x,y)=0$.

IX КОМБИНАТОРИКА

1. БИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ, БИНОМНА ФОРМУЛА

1. Да се покаже дека производот

$$(4-\tfrac{2}{1})(4-\tfrac{2}{2})(4-\tfrac{2}{3})...(4-\tfrac{2}{n}) \qquad (1)$$

е цел број.

Решение. $k-$тиот множител во (1), за произволно $1\leq k\leq n$ можеме да го запишеме во облик

$$4-\tfrac{2}{k}=\tfrac{4k-2}{k}=\tfrac{2(2k-1)}{k}=\tfrac{2k(2k-1)}{k\cdot k}$$

па според тоа вкупниот производ ќе биде

$$\prod_{k=1}^{n}(4-\tfrac{2}{k})=\prod_{k=1}^{n}\tfrac{2k(2k-1)}{k\cdot k}=\tfrac{(2n)!}{n!n!}=\binom{2n}{n}$$

кое е цел број.

2. Најди ги сите природни броеви n и k за кои $\binom{n}{k}=3003$.

Решение. Равенството

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

е точно за секои броеви n и k, доволно е да ги разгледаме паровите n и k за кои $n\geq 2k$. Од тоа што $\binom{n+1}{k}\geq\binom{n}{k}$ и $\binom{n+1}{k+1}\geq\binom{n}{k}$, за секои n и k, и од тоа што $\binom{14}{7}=3493\geq 3003$, следува дека доволно е да ги разгледаме паровите n и k за $k=1,2,3,4,5,6$. Со проверка се докажува дека единствени парови n и k од таков облик за кои $\binom{n}{k}=3003$ се: $n=3003$, $k=1$; $n=78$, $k=76$; $n=15$, $k=10$ и $n=14$, $k=8$.

3. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=0}^{1005}(-3)^{k}\binom{2010}{2k}.$$

Решение. Од Њутновата биномна формула следува

$$z=(1+i\sqrt{3})^{2010}=\sum_{k=0}^{2010}(i\sqrt{3})^{k}\binom{2010}{k}=\sum_{k=0}^{1005}(-3)^{k}\binom{2010}{2k}+i\sqrt{3}\sum_{k=0}^{1004}(-3)^{k}\binom{2010}{2k+1}.$$

Според тоа, бараниот збир е еднаков на реалниот дел на бројот $z=(1+i\sqrt{3})^{2010}$. Но, $1+i\sqrt{3}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$, па од Моавровата формула следува дека

$$z=2^{2010}(\cos\tfrac{2010\pi}{3}+i\sin\tfrac{2010\pi}{3})=2^{2010}(1+i\cdot 0)=2^{2010}.$$

Според тоа, z е реален број, т.е. е еднаков на бараниот збир, што значи дека

$$\sum_{k=0}^{1005}(-3)^{k}\binom{2010}{2k}=2^{2010}.$$

4. Определи го членот со најголем коефициент во развојот на биномот
$$(x+\sqrt{2})^{50}.$$

Решение. Нека $T_{k+1}=\binom{50}{k}x^k(\sqrt{2})^{50-k}$, и $A_{k+1}=\binom{50}{k}(\sqrt{2})^{50-k}$ е коефициентот пред x^k, за $k=0,1,2,...,50$. Од $\frac{A_{k+1}}{A_k}=\frac{\binom{50}{k}(\sqrt{2})^{50-k}}{\binom{50}{k-1}(\sqrt{2})^{50-k-1}}=\frac{51-k}{k}\sqrt{2}$, добиваме дека
$$\frac{A_{k+1}}{A_k}<1 \Leftrightarrow \frac{51-k}{k}\sqrt{2}<1 \;\; k>51(2-\sqrt{2})\approx 29,88,$$
т.е. $k\geq 30$. Значи, за $k\geq 30$ важи $A_{k+1}<A_k$, а за $k<30$ важи $A_{k+1}>A_k$. Според тоа најголем коефициент има членот $T_{30}=\binom{50}{29}x^{29}(\sqrt{2})^{21}$.

5. Да се најде најголемиот член во развојот на $(1+\sqrt{2})^{50}$.

Решение. Според биномната формула, n-тиот член на развојот на $(1+\sqrt{2})^{50}$ е
$$T_{n+1}=\binom{50}{n}\sqrt{2^n}.$$
Така, имаме $T_1=1$, $T_2=50\sqrt{2}$, $T_3=255$, што значи дека $T_1<T_2<T_3$. Исто така, $T_{50}=2^{25}$, $T_{49}=50\cdot 2^{24}\cdot\sqrt{2}$, $T_{48}=1225\cdot 2^{24}$, што значи $T_{50}<T_{49}<T_{48}$. Според тоа, низата $T_1,T_2,T_3,...,T_{50}$ донекаде расте, а потоа опаѓа. За да го најдеме најголемиот член на таа низа, ќе го испитаме односот $T_{n+1}:T_n$. Имаме:
$$T_{n+1}:T_n=\binom{50}{n}\sqrt{2^n}:\binom{50}{n-1}\sqrt{2^{n-1}}=\frac{51-n}{n}\sqrt{2}.$$
За да биде $T_{n+1}<T_n$, треба да е
$$\frac{51-n}{n}\sqrt{2}<1,$$
т.е. $n>51(2-\sqrt{2})$. Најмалиот природен број што е поголем од $51(2-\sqrt{2})$ е 30, што значи дека $T_{30}>T_{31}>T_{32}>...>T_{50}$ и $T_1<T_2<T_3<...<T_{30}$. Според тоа, најголемиот член во развивањето на $(1+\sqrt{2})^{50}$ е членот $T_{n+1}=\binom{50}{29}\sqrt{2^{29}}$.

6. Да се најде природниот број n ако десеттиот член во развојот на биномот $(\frac{1}{5}x+\frac{2}{5})^n$ има најголем коефициент.

Решение. $k-$тиот член е $a^k=\binom{n}{k}(\frac{2}{5})^k\frac{1}{5^{n-k}}=\binom{n}{k}\frac{2^k}{5^n}$. Бидејќи десеттиот член има најголем коефициент, следува дека $a_8<a_9$ и $a_{10}<a_9$. Следува:
$$\binom{n}{8}\frac{2^8}{5^n}<\binom{n}{9}\frac{2^9}{5^n} \text{ и } \binom{n}{10}\frac{2^{10}}{5^n}<\binom{n}{9}\frac{2^9}{5^n}$$
а оттука добиваме дека $n>12,5$ и $n<14$. Значи, бараниот природен број е $n=13$.

7. Најди го членот што не содржи x во развојот на $(\frac{1}{x}+3x)^n$, ако коефициентот пред степенот на x во десеттиот по ред собирок е најголем.

Решение. За $k+1$-от член во развојот добиваме

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{x}\right)^{n-k}(3x)^k = \binom{n}{k}3^k x^{2k-n},$$

па коефициентот пред x е $A_{k+1} = \binom{n}{k}3^k$. Според условот на задачата имаме $A_{10} > A_9$ и $A_{10} > A_{11}$. Од $A_{10} > A_9$ имаме $\binom{n}{9}3^9 > \binom{n}{8}3^8$, па затоа $\frac{3}{9} > \frac{1}{n-8}$. Оттука $3n-24 > 9$, т.е. $n > 11$. Од $A_{10} > A_{11}$ добиваме $\binom{n}{9}3^9 > \binom{n}{10}3^{10}$ и постапувајќи на сличен начин како претходно $n < 12\frac{1}{3}$.

Според тоа $n = 12$.

Сега $x^{2k-12} = x^0$, па $2k-12 = 0$, односно $k = 6$. Значи бараниот член е седмиот и тој изнесува $T_6 = \binom{12}{6}3^6 = 673596$.

8. Одреди го членот од развојот на биномот $(\sqrt[4]{a^2x} + \sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}})^{13}$ кој не содржи x.

Решение. Нека бараниот член е k – тиот го означуваме со T_k. Тогаш имаме

$$T_k = \binom{13}{k-1}(\sqrt[4]{a^2x})^{13-k+1}\left(\sqrt[5]{\frac{1}{ax^2}}\right)^{k-1} = \binom{13}{k-1}a^{\frac{13-k+1}{2}-\frac{k-1}{5}}x^{\frac{13-k+1}{2}-\frac{2k-2}{5}}$$

$$= \binom{13}{k-1}a^{\frac{13-k+1}{2}-\frac{k-1}{5}}x^{\frac{78-13k}{20}}.$$

За k – тиот член да не содржи x потребно е и доволно $\frac{78-13k}{20} = 0$. Оттука $k = 6$. Значи бараниот член е шестиот и тој е еднаков на $T_6 = \binom{13}{5}a^{4-1} = 1287a^3$.

9. На колку нули завршува бројот $11^{100} - 1$?

Решение. Бројот 11^{100} можеме да го запишеме во облик

$$11^{100} = (10+1)^{100} = \sum_{k=0}^{96}\binom{100}{k}10^{100-k} + \binom{100}{97}10^3 + \binom{100}{98}10^2 + \binom{100}{99}10 + 1$$

$$= 10^4\sum_{k=0}^{96}\binom{100}{k}10^{96-k} + 33\cdot 49\cdot 10^4 + 495\cdot 10^3 + 10^3 + 1$$

$$= 10^4\left(\sum_{k=0}^{96}\binom{100}{k}10^{96-k} + 33\cdot 49\right) + 496\cdot 10^3 + 1$$

$$= 10^4\left(\sum_{k=0}^{96}\binom{100}{k}10^{96-k} + 33\cdot 49\right) + 496000 + 1.$$

Значи, последните четири цифри на 11^{100} се 6001 редоследно. Според тоа, бројот $11^{100} - 1$ завршува на три нули.

10. Провери ја точноста на равенството:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

каде $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Равенството ќе го докажеме со принципот на математичка индукција. Ќе воведеме ознака

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}$$

Јасно е дека $x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k}$. Тврдењето е точно за $n=1$. Навистина

$$x_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{1}{k} = (-1)^{1+1}\binom{1}{1} = 1 \ .$$

Нека тврдењето е точно за $n-1$, т.е. нека е точно равенството

$$x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k} = 1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n-1} \ .$$

Од равенството $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$, за $k=1,2,...,n-1$, за природниот број n, заради индуктивната претпоставка имаме

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}] + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n} = x_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{n}\binom{n}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\binom{n}{n}$$

$$= x_{n-1} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{n}\binom{n}{k} = x_{n-1} + \frac{1}{n}(-\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k}}{n}\binom{n}{k}+1) = x_{n-1} + \frac{1}{n}[1-(1-1)^n]$$

$$= x_{n-1} + \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}.$$

Сега, според принципот на математичка индукција добиваме дека равенството

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$$

е точно за секој природен број n.

11. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k\binom{n}{2k} = \binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...+(-1)^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2[\frac{n}{2}]} \ .$$

Решение. Имаме

$$(1+i)^n = \binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...+(-1)^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2[\frac{n}{2}]} + i(\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-...) \ ,$$

па затоа

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-...+(-1)^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2[\frac{n}{2}]} = \mathrm{Re}(1+i)^n = \mathrm{Re}(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}))^n$$

$$= \mathrm{Re}(2^{\frac{n}{2}}(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4})) = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

12. Нека $n\in\mathbb{N}$ и $n_1,n_2,...,n_k\in\mathbb{N}$ се такви што $n_1+n_2+...+n_k=n+1$. Докажи, дека

$$P_{n+1}^{n_1,n_2,\dots,n_k}=\sum_{i=1}^{k}P_n^{n_1,\dots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\dots,n_k}.$$

Решение. Имаме $n_1+n_2+\dots+n_k=n+1$, па затоа

$$\begin{aligned}P_{n+1}^{n_1,n_2,\dots,n_k}&=\frac{(n+1)!}{n_1!n_2!\dots n_k!}=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}(n+1)=\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}\sum_{i=1}^{k}n_i\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}n_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{n!}{n_1!\dots n_{i-1}!(n_i-1)!n_{i+1}!\dots n_k!}\\&=\sum_{i=1}^{k}P_n^{n_1,\dots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\dots,n_k}.\end{aligned}$$

13. Докажи, дека за секои $a_1,a_2,\dots,a_k\in\mathbb{R}$ и секој $n\in\mathbb{N}_0$ точна е формулата

$$(a_1+a_2+\dots+a_k)^n=\sum_{\substack{n_1,n_2,\dots,n_k\ge0\\n_1+n_2+\dots+n_k=n}}P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}. \qquad (1)$$

Формулата (1) во литературата е позната како *обопштена биномна формула* или *обопштена Њутнова биномна формула*

Решение. Формулата ќе ја докажеме со индукција по n. За $n=0$ имаме

$$(a_1+a_2+\dots+a_k)^0==1=\sum_{n_1=n_2=\dots=n_k=0}\frac{0!}{0!0!\dots0!}a_1^0a_2^0\dots a_k^0,$$

т.е. точна е формулата (1). Нека претпоставиме дека формулата (1) важи за некој $n\ge0$. Тогаш од индуктивната претпоставка и од претходната задача следува

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\dots+a_k)^{n+1}&=(a_1+a_2+\dots+a_k)^n(a_1+a_2+\dots+a_k)\\&=\Big(\sum_{\substack{n_1,n_2,\dots,n_k\ge0\\n_1+n_2+\dots+n_k=n}}P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}\Big)\sum_{i=1}^{k}a_i\\&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{n_1,n_2,\dots,n_k\ge0\\n_1+n_2+\dots+n_k=n}}P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_{i-1}^{n_{i-1}}a_i^{n_i+1}a_{i+1}^{n_{i+1}}\dots a_k^{n_k}\\&=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{n_1,n_2,\dots,n_k\ge0\\n_1+n_2+\dots+n_k=n+1}}P_n^{n_1,n_2,\dots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\dots,n_k}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_i^{n_i}\dots a_k^{n_k}\\&=\sum_{\substack{n_1,n_2,\dots,n_k\ge0\\n_1+n_2+\dots+n_k=n+1}}\Big(\sum_{i=1}^{k}P_n^{n_1,n_2,\dots,n_{i-1},n_i-1,n_{i+1},\dots,n_k}\Big)a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k}\\&=\sum_{\substack{n_1,n_2,\dots,n_k\ge0\\n_1+n_2+\dots+n_k=n+1}}P_{n+1}^{n_1,n_2,\dots,n_k}a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_k^{n_k},\end{aligned}$$

т.е. формулата (1) важи и за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n\in\mathbb{N}_0$.

14. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}.$$

Решение. Имаме $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}=0$, па затоа

$$\begin{aligned}0&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}+(-1)^n\binom{2n}{n}+\sum_{k=n+1}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}+(-1)^n\binom{2n}{n}+\sum_{k=n+1}^{2n}(-1)^{2n-k}\binom{2n}{2n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}+(-1)^n\binom{2n}{n}+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k},\end{aligned}$$

од каде наоѓаме

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{k}=\frac{(-1)^{n+1}}{2}\binom{2n}{n}.$$

15. Пресметај го збирот

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$$

Решение. Ако го искористиме идентитетот $\binom{n+1}{k+1}=\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$, добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}\\&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+1}{k+1}\\&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}\\&=\frac{1}{n+1}\Big[\binom{n+1}{0}-\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}\Big]\\&=\frac{1}{n+1}(1-0)=\frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

16. Докажи, дека

$$n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(i+1)^2}\binom{n-1}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.$$

Решение. Од равенството $\binom{n}{i+1}=\frac{n}{i+1}\binom{n-1}{i}$ и од задача 15 непосредно добиваме

$$n\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{(i+1)^2}\binom{n-1}{i}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i}{i+1}\binom{n}{i+1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i}\binom{n}{i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

17. Нека $n\geq k$. Пресметај го збирот

$$\binom{n}{k}\binom{k}{k}-\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{k}+\binom{n}{k+2}\binom{k+2}{k}+\ldots+(-1)^{n-k}\binom{n}{n}\binom{n}{k}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{n}{k+i}\binom{k+i}{k} &= \sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{n!}{(k+i)!(n-k-i)!}\frac{(k+i)!}{k!i!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\frac{(n-k)!}{(n-k-i)!i!}\\ &= \binom{n}{k}\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^i\binom{n-k}{i}\\ &= \binom{n}{k}(1-1)^{n-k}=0.\end{aligned}$$

18. Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{2m}\frac{1}{C_{2m}^k}=\frac{2m+1}{m+1},$$

каде $m\in\mathbb{N}$.

Решение. Јасно е дека C_{2m}^k можеме да го запишеме во вид $C_{2m}^k=\frac{(2m)!}{k!(2m-k)!}$.
Според тоа равенството можеме да го запишеме на следниот начин:

$$\sum_{k=0}^{2m}\frac{(-1)^k}{\frac{(2m)!}{k!(2m-k)!}}=\frac{2m+1}{m+1},$$

$$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k(m+1)k!(2m-k)!=(2m+1)!,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k(2m+2)k!(2m-k)!=(2m+1)!. \qquad (1)$$

Последното равенство е еквивалентно со даденото равенство.

Од друга страна, за $k=0,1,2,\ldots,2m$ имаме

$$\begin{aligned}(2m+1)(2m-k)!k! &= [(2m-k+1)+(k+1)](2m-k)!k!\\ &= (2m-k+1)(2m-k)!+(k+1)(2m-k)!k!\\ &= (2k-k+1)!k!+(2m-k)!(k+1)!\end{aligned}$$

Сега за левата страна на равенството (1) имаме

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k(2m+2)k!(2m-k)! &= \frac{1}{2}[(2m+1)!0!+(2m)!1!-(2m)!1!-(2m-1)!2!\\ &\quad+(2m-1)!2!+2m-2)!3!-\ldots.-(2m-1)!2!\\ &\quad-(2m)!1!+(2m)!1!+(2m+1)!0!]\\ &= \frac{1}{2}[(2m+1)!+(2m+1)!]=(2m+1)!\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже.

2. ПРЕБРОЈУВАЊА

1. Колку решенија има равенката $\overline{xy}+\overline{ab}=\overline{ya}$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик $10x+b=9(y-a)$. Бидејќи $x\neq 0, a\neq 0$ следува дека разликата $y-a$ може да прима вредности од 2 до 8, т.е. $2\leq y-a\leq 8$.

За секоја вредност од $y-a$ наоѓаме соодветни вредности за x и b . За $a=1$ имаме 7 вредности на y ; за $a=2$ има 6 такви вредности итн. Конечно, вкупниот број решенија на равенката е: $7+6+4+3+2+1=28$.

2. За природниот број n ќе велиме дека е *обичен*, ако бројот на различните начини на претставување на n како збир на два или повеќе последователни природни броја е непарен број. Определи го бројот на обичните броеви помали од 2012?

Решение. За секој непарен делител q на n добиваме различно претставување на n како збир на еден или повеќе последователни природни броеви на следниов начин. Нека $d=\frac{n}{q}$. Земаме q последователни цели броеви такви што средниот од нив е еднаков на d . Ако сите овие броеви се природни имаме претставување на n како збир на непарен број природни броеви. Ако меѓу овие броеви има непозитивни, тогаш нивните спротивни броеви исто така припаѓаат на збирот (0 е спротивна сама на себе). Во овој случај ги отфрламе спротивните броеви и добиваме претставување на n како збир од парен број природни броеви.

Обратно, ако n е збир на непарен број q природни броеви и средниот од нив е d , тогаш $n=dq$. Ако n е збир на парен број природни броеви, тогаш кон збирот да ги додадеме сите помали природни броеви, нулата и нивните спротивни. Ако средниот од нив е еднаков на d , тогаш $n=dq$. Добиените на тој начин делители q на n за секое претставување на n како збир на еден или повеќе последователни се различни.

Од досега изнесеното следува дека бројот на различните начини за претставување на n како збир на еден или повеќе последователни природни броеви е еднаков на бројот на непарните делители на n . Ако го исклучиме преставувањето на n како збир на еден број, добиваме дека бараните броеви во задачата се оние со парен број непарни делители. Полесно е да ги преброиме останатите броеви – тие имаат непарен број непарни делители, што е случај кога најголемиот нивен непарен делител r е точен квадрат (делителите се групираат по парови со производ r, а бројот им е непарен точно кога некој од нив е пар сам со себе). Така, броевите кои не се обични се точните квадрати: $1^2,2^2,3^2,...,44^2$ и удвоените точни квадрати: $2\cdot 1^2, 2\cdot 2^2, 2\cdot 3^2,...,2\cdot 31^2$. Според тоа, бројот на обичните броеви помали од 2012 е еднаков на $2011-31-44=1936$.

3. Определи го бројот на квадратните функции со коефициенти од множеството $S=\{1,2,4,8,16,32\}$ и такви што немаат реални нули. .

Решение. Функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ нема реални нули ако и само ако $b^2-4ac<0$. За $a,b,c\in S$ можеме да ставиме $a=2^k, b=2^s, c=2^l$, каде $k,s,l\in \{0,1,2,3,4,5\}$. Тогаш $b^2-4ac=2^{2s}-2^{k+l+2}$, па условот $b^2-4ac<0$ е еквивалентен на условот $2s<2+k+l$, односно $k+l+1\geq 2s$. Ќе го определиме бројот на можните избори на броевите $k,s,l\in\{0,1,2,3,4,5\}$ такви што важи $k+l+1\geq 2s$, во зависност од збирот $k+l$. Имаме

$k+l$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Број на избори на (k,l)	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Број на избори на s	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6

Конечно, вкупниот број на функции со саканото својство е еднаков на

$$1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 3+6\cdot 4+5\cdot 4+4\cdot 5+3\cdot 5+2\cdot 6+1\cdot 6=135.$$

4. За даден број ќе велиме дека е *шарен* ако е запишан со еднаков број парни и непарни цифри. Определи го бројот на сите четирицифрени шарени броеви запишани со различни цифри?

Решение. Имаме 5 парни цифри: 0, 2, 4, 6, 8 и 5 непарни цифри: 1, 3, 5, 7, 9. Два парни броја од 5 можеме да избереме на $C_5^2=10$ начини, т.е. ги имаме следниве можности $\{\{0,2\},\{0,4\},\{0,6\},\{0,8\},\{2,4\},\{2,6\},\{2,8\},\{4,6\},\{4,8\},\{6,8\}\}$. На исто толку начини може да се изберат два од 5-те непарни цифри. За секои два пара (еден пар парни и еден пар непарни броеви) постојат вкупно $4!=24$ начини за формирање на низа од четири цифри.Па вкупно имаме $10\cdot 10\cdot 24=2400$ четирицифрени низи, кои се состојат од две парни и две непарни цифри**.**

Останува да ги преброиме оние каде на прво место се наоѓа 0. Ако во некој пар составен од парни броеви се наоѓа 0 тогаш бројот на четирицифрени броеви кои започнуваат со 0 е $3!=6$. Бидејќи имаме четири парни пара, во кои се наоѓа 0, следува дека бројот на сите “шарени” четирицифрени низи кои започнуваат со 0 е $4\cdot 10\cdot 6=240$.

Според тоа бројот на сите четирицифрени “шарени” броеви запишани со различни цифри е $2400-240=2160$.

5. Какви шестцифрени броеви има повеќе: оние што можат да се претставаат како производ на два трицифрени броеви или оние што неможат да се претставаат во тој вид?

Решение. Трицифрени броеви, од 100 до 999 има вкупно 900. Од нив различни парови може да формираме на $\frac{900\cdot 899}{2}=404550$ начини, а еднакви парови има 900, т.е. вкупно 405450. Значи, шестцифрени броеви, кои можат да се преставаат како производ на два трицифрени броја нема повеќе од 405450.

Бидејќи шестцифрени броеви има вкупно 900000 следува дека повеќе од половината од нив не можат да се преставаат како производ на два трицифрени броја.

Следствено, има повеќе шестцифрени броеви кои неможат да се преставаат како производ на два трцифрени броја.

6. Од петте непарни цифри се запишуваат сите четирицифрени броеви. Колку од нив завршуваат на цифра која е делива со 3?

Решение. Бараните броеви го имаат видот

$$***3 \qquad \text{или} \qquad ***9,$$

каде што на местото на трите ѕвезди може да стои кој било трицифрен број запишан со цифрите $1,3,5,7$ и 9 . Такви броеви има колку и варијации со повторување од трета класа од петте елементи, т.е.

$$\overline{V}_5^3 + \overline{V}_5^3 = 2\overline{V}_5^3 = 2\cdot 5^3 = 250 .$$

Значи, постојат 250 такви броеви.

7. Колку петцифрени броеви, запишани само со цифрите 1, 2 и 3 се деливи со 9?

Решение. Ќе го користиме признакот за делливост со 9, т.е. треба збирот на цифрите на овие броеви да биде деллив со 9. Постојат само три можности за избор на цифрите:

1) Бројот да биде запишан со цифрите 1, 2, 2, 2, 2. Во овој случај постојат 5 броеви.

2) Бројот да биде запишан со цифрите 1, 1, 2, 2, 3. Во овој случај имаме $\frac{5!}{2!\cdot 2!} = 30$ броеви-тоа се сите пермутации со повторување од цифрите 1, 1, 2, 2, 3.

3) Бројот да биде запишан со цифрите 1, 1, 1, 3, 3. Во овој случај имаме вкупно $\frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ броеви.

Следствено со цифрите 1, 2 и 3 можат да се запишат вкупно $5+30+10=45$ петцифрени броеви деливи со 9.

8. Колку има стоцифрени природни броеви во чиј декаден запис се појавуваат само непарни цифри такви што разликата на секои две соседни цифри е еднаква на 2?

Решение. Со $x_k(n)$ да го означиме бројот на $n-$цифрените броеви чија прва цифра е k и секои две соседни цифри се разликуваат за 2. Секој таков број се добива со додавање од лево на цифрата k на $(n-1)-$цифрен број со прва цифра $k-2$ или $k+2$ (ако тоа навистина се цифри), па имаме

$$x_k(n) = x_{k-2}(n-1) + x_{k+2}(n-1),$$

при што дефинираме

$$x_{-1}(n) = x_{11}(n) = 0 \text{ и } x_1(1) = x_3(1) = x_5(1) = x_7(1) = x_9(1) = 1 .$$

Со индукција лесно се докажува дека $x_1(n) = x_9(n)$ и $x_3(n) = x_7(n)$, за секој n . Да означиме $a_n = x_1(n), b_n = x_3(n), c_n = x_5(n)$. Од претходно изнесеното следува

$$a_1 = b_1 = c_1 = 1 \text{ и } a_{n+1} = b_n,\ b_{n+1} = a_n + c_n,\ c_{n+1} = 2b_n .$$

Оттука следува

$$a_{n+1} = b_n = a_{n-1} + 2b_{n-2} = 3a_{n-1}$$

и слично $b_{n+1} = 3b_{n-1}$ и $c_{n+1} = 3c_{n-1}$. Сега од $a_2 = 1$ и $b_2 = c_2 = 2$ следува $a_{100} = 3^{49}$ и $b_{100} = c_{100} = 2\cdot 3^{49}$.

Конечно, стоцифрени броеви со саканото својство има

$$2a_{100} + 2b_{100} + c_{100} = 8 \cdot 3^{49}.$$

9. За природниот број чиј десетичен запис е

$$a_N 10^N + a_{N-1} 10^{N-1} + ... + 10a_1 + a_0, \ a_i \in \{0,1,2,...,9\}$$

ќе велиме дека е *монотон* ако $a_N \le a_{N-1} \le ... \le a_1 \le a_0$. Определи го бројот на сите монотони броеви со најмногу 1993 цифри.

Решение. Нека A е множеството од сите монотони броеви со најмногу 1993 цифри. Нека B е множеството од сите низи со должина 1993 од видот

$$\underline{00...0}\,\underline{11...1}\,\underline{22...2}...\underline{99...9}$$

со барем еден ненулти елемент (не е задолжително сите цифри да се појавуваат). Тогаш меѓу множествата A и B постои биекција, т.е. $|A|=|B|$. Низите во B заедно со низата од 1993 нули можат да бидат преброени на слениот начин: тие се еднакви на бројот на начините на кои можеме да поставиме девет прегради меѓу различните цифри, при што ако две прегради се соседни, тогаш соодветната цифра отсуствува. Овој број е еднаков на $\binom{1993+10-1}{10-1}$, што значи дека

$$|A|=|B|=\binom{2002}{9}-1.$$

10. Канаста и игра со карти која ја играат пет играчи. Во една населба 25 лица сакаат да играат канаста, но имаат само еден комплет карти. После секоја игра петте играчи се караат и секој играч решава дека повеќе нема да игра со ниту еден од останатите четири играчи. Колку игри најмногу може да се одиграат?

Решение. Вкупниот број на парови играчи е $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$ и после секоја игра губиме по $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ парови играчи. Според тоа, најмногу може да се одиграат $300 : 10 = 30$ игри.

Ќе докажеме дека 30 игри се можни. Играчите ги нумерираме со парови природни броеви (m,n), $m,n \le 5$, т.е. ги претставуваме во 5×5 табела.

Во играта со број i, $1 \le i \le 5$ играат петтемина за кои $m = i$ (од редот со број i во табелата). Во играта со број $6 + 5k + i, 0 \le i \le 4, 0 \le k \le 4$ играат играчите (m,n) за кои $mk + n$ дава остаток i при делење со 5. Јасно, за секои конкретни k,i,m имаме единствен n со сакaниот остаток. Така од секој ред од табелата има по еден играч, т.е. имаме 5 играчи и тие не играле меѓу себе во првите 5 игри.

За секои два играчи (m,n) и (m',n'), $m' \ne m$, броевите $k(m-m')$, $k = 0,1,2,3,4$ даваат различни остатоци при делење со 5. Според тоа, постои единствен k за кој $k(m-m') \equiv n-n' (\mathrm{mod}\, 5)$. Тоа значи, дека $km-n$ и $km'-n'$ даваат ист остаок при делње со 5 и добиените k и i определуваат единствена игра во која учествувале играчите (m,n) и (m',n').

Конечно, од претходноизнесеното следува дека со аквата организација ќе се одиграат точно 30 игри.

11. На колку начини $m+n+p$ предмети може да се распоредат во три групи така што во едната има m, во другата n а во третата p предмети?

Решение. Да означиме $k = m+n+p$. Од k предмети може да се изберат m предмети на $\binom{k}{m}$ начини. Од останатите $n+p$ предмети на $\binom{n+p}{n}$ начини може да се изберат n предмети. Останатите p предмети ги ставаме во последната група. Според тоа бараниот број е $\binom{n+p}{n}\binom{m+n+p}{m}$.

12. На еден универзитет има 10001 студент. Некои студенти формирале клубови (еден студент може да биде член во повеќе клубови). Некои клубови се групирале во здруженија (еден клуб може да биде во повеќе здруженија). Вкупно има k здруженија. Притоа се исполнети следниве услови:

i) Секој пар студенти припаѓа на точно еден клуб.

ii) За секој студент и секое здружение важи дека тој студент членува во точно еден клуб од тоа здружение.

iii) Секој клуб има непарен број студенти. Клуб со $2m+1$ студент се наоѓа во точно m здруженија.

Определи ги сите можни вредности на k.

Решение. За подредената тројка (a,K,Z) ќе велиме дека прифатлива, ако a е студент, K е клуб и Z е здружение, при што $a \in K,\ K \in Z$.

Од една страна, за секој студент a и секое здружение Z според условот *ii*) постои точно еден клуб K таков што тројката (a,K,Z) е прифатлива. Затоа имаме $10001k$ прифатливи тројки.

Од друга страна, за секој клуб K нека со $|K|$ го означиме бројот на членовите на тој клуб. Според условот *iii*) K се наоѓа во точно $\frac{|K|-1}{2}$ здруженија. Значи, постојат точно $\frac{|K|(|K|-1)}{2}$ прифатливи тројки со K како втора координата. Нека G е множеството од сите клубови. Тоа значи дека имаме $\sum\limits_{K\in G}\frac{|K|(|K|-1)}{2}$ прифатливи тројки. Според условот *i*) овој број е еднаков на бројот парови од студенти, т.е. е еднаков на $10001\cdot 5000$. Затоа имаме

$$10001k = \sum_{K\in G}\frac{|K|(|K|-1)}{2} = 10001\cdot 5000,$$

што значи дека $k = 5000$.

13. Нека n е природен број. Жирито на ММО е составено од $15n$ членови и комуницира на 5 јазици. На ММО 2021 година е забележано дека на секој пар различни јазици може да разговара точно $6n$ членови на жирито и дека ма секоја тројка различни јазици може да разговара точно $3n$ членови на жирито. Докажи дека секои два члена на жирито може да разговараат на некој од овие два јазика и дека постои јазик на кој може да разговараат најмалку $10n$ членови на жирито.

Решение. Нека a_i е бројот на членовите на жирито кои знаат точно i од воочените пет јазици ($i \in \{0,1,2,3,4,5\}$), а b_i бројот на членовите на жирито кои го знаат i – тиот јазик ($i \in \{1,2,3,4,5\}$). Тогаш

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15n. \qquad (1)$$

Бидејќи луѓето кои знаат i, $i \geq 2$ јазици знаат $\binom{i}{2}$ парови јазици следува дека

$$\binom{2}{2}a_2 + \binom{3}{2}a_3 + \binom{4}{2}a_4 + \binom{5}{2}a_5 = \binom{5}{2}6n,$$

т.е.

$$a_2 + 3a_3 + 6a_4 + 10a_5 = 60n. \quad (2)$$

Аналогно, разгледувајќи тројки јазици, се добива

$$a_3 + 4a_4 + 10a_5 = 30n. \quad (3)$$

Сега ако (1) ја помножиме со 2, потоа ја одземеме (2) и ја додадеме (3) добиваме $2a_0 + 2a_1 + a_2 + 2a_5 = 0$. Но, броевите $a_i, i \in \{1,2,3,4,5\}$ се ненегативни, па од последното равенство следува $a_0 = a_1 = a_2 = a_5 = 0$, а потоа $a_3 = 10n, a_4 = 5n$. Според тоа, секој член на жирито зборува најмалку три јазици, па заоа било кои два члена имаат заеднички јазик. Исто така

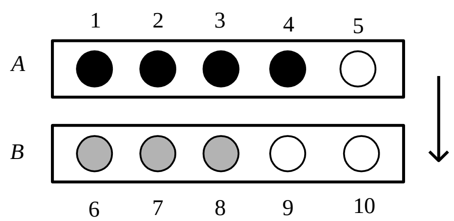
$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = a_1 + 3a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 3 \cdot 10n + 4 \cdot 5n = 50n,$$

па затоа $b_i \geq \frac{50n}{5} = 10n$ за некој $i \in \{1,2,3,4,5\}$.

14. Во купето на еден воз има две клупи, свртени една наспроти друга. Секоја клупа има пет седишта. Од десет патника, четири сакаат да седат свртени во насока на движењето на возот, тројца во спротивна насока, а на останатите им е сеедно. На колку начини патниците може да се распоредат на седиштата во тоа купе?

Решение. *Прв начин.* Првите патници можат да седнат на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ начини, вторите на $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, а преостанатие на $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начини. Следствено, вкупниот број на начини е:

$$n = 120 \cdot 60 \cdot 6 = 43200.$$



Втор начин. Ако патниците $6-9$ мируваат, а се преместуваат само патниците $1-5$, имаме вкупно $5! = 120$ начини

Исто толку ќе се добијат ако 5 и 9 ги променат своите места, односно ако 5 и 10 ги променат своите места или 9 и 10 ги променат своите места. Тоа се вкупно 360 начини.

На секоја од овие 360 промени во редот A ќе одговараат по 120 промени во редот B, па вкупниот број е $k = 120 \cdot 360 = 43200$.

Трет начин. На четворицата патници, четири од пет седишта им одбираме на $\binom{5}{4}$ начини, и на нив ги распоредуваме на $4!$ начини. На ист начин, за вторите тројца одбираме $\binom{5}{3}$ начини, а ги седнуваме на $3!$ начини и третите тројца ги седнуваме на $3!$ начини. Значи, вкупниот број начини е:

$$\binom{5}{4} \cdot 4! \cdot \binom{5}{3} \cdot 3! \cdot 3! - 5 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 6 = 43200.$$

15. Еден зад друг во круг се застанати n ученици, чии висини се $h_1 < h_2 < ... < h_n$. Ако ученикот со висина h_k е веднаш зад ученикот со висина h_{k-2} или помала, тогаш двата ученика можат да ги заменат местата. Докажи, дека се можни најмногу $\binom{n}{3}$ такви замени, т.е. дека после најмногу $\binom{n}{3}$ замени ќе се добие распоред после кој повеќе не се можни замени.

Решение. Со h_i да го означиме ученикот со висина h_i. Со индукција по j ќе докажеме дека за $1 \le i < j \le n$ ученикот h_j може да го замени местото со ученик h_i после најмногу $j-i-1$ замени. Базата на индукцијата следува од фактот дека h_i не може да го замени местото со h_{i+1}.

За докажување на индуктивниот чекор да забележиме дека h_i, h_{j-1} и h_j може да бидат распоредени или во тој редослед или во редослед h_i, h_j и h_{j-1}. Бидејќи h_{j-1} и h_j не може да ги заменат местата, единствен начин да се промени редоследот на овие три ученици е h_i да го замени местото или со h_{j-1} или со h_j. Значи, секои две замени на h_i со h_j треба да бидат разделени со замени на h_i со h_{j-1}. Бидејќе имаме најмногу $j-i-2$ замени од последниот вид, добиваме дека имаме најмногу $j-i-1$ замени од првиот вид. Според тоа вкупниот број на замени е најмногу

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(j-i-1)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-i-1} j=\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-i}{2}=\sum_{i=1}^{n-1}\left(\binom{n-i+1}{3}-\binom{n-i}{3}\right)=\binom{n}{3}.$$

16. Определи го најголемиот можен број на пермутации од n, $n>1$ елементи такви што секои два елементи се соседни најмногу во една пермутација.

Решение. Нека S е множество од n елементи. Нека P е множество од m пермутации на множеството S такво што произволни два елемента на S се соседни најмногу во една пермутација од P. Секоја пермутација на множеството S содржи $n-1$ пар соседни елементи, а множеството S има $\frac{n(n-1)}{2}$ дволементни подмножества. Затоа мора да важи $m(n-1) \le \frac{n(n-1)}{2}$, од каде добиваме $m \le [\frac{n}{2}]$.

Останува да се докаже дека постои множество P со $[\frac{n}{2}]$ кое ги задоволува условите на задачата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

17. Потврди го или негирај го тврдењето: за секоја пермутација $a_1, a_2, ..., a_{2002}$ на броевите $1, 2, ..., 2002$ постојат природни броеви m и n со еднаква парност, за кои $1 \le m < n \le 2002$ и $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$.

Решение. Со индукција ќе докажеме дека тврдењето не е точно, т.е. дека за секој природен број $k \ge 3$ постои пермутација $a_1, a_2, ..., a_k$ на броевите $1, 2, ..., k$ за која равенството $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}}$ не е исполнето за ниту едни m и n, $1 \le m < n \le k$.

За $k=3$ и $k=4$ тоа се пермутациите $1,3,2$ и $1,3,2,4$, соодветно. Нека тврдењето е точно за сите броеви помали од k. Да ја направиме следната почетна пермутација: во првиот блок (позиции од 1 до $[\frac{k+1}{2}]$) да се непарните броеви, потоа во ториот блок се броевите кои се делат со 2, но не се делат со 4 итн. (на пример, за $k=12$ ги имаме следниве четири блока: $1,3,5,7,9,11; 2,6,10; 1,12; 8$).

Ако a_m и a_n се во различни блокови, да означиме $a_m=2^s b, a_n=2^t c$, каде $t>s>0$ (за $s=0$ лесно се добива противречност). Тогаш $\frac{a_m+a_n}{2}=2^{s-1}(b+2^{t-s}c)$ се наоѓа во $s-$тиот блок, а $a_{\frac{m+n}{2}}$ е меѓу a_m и a_n, т.е. во некој од блоковите $s+1,...,t+1$. Според тоа, равенството $a_m+a_n=2a_{\frac{m+n}{2}}$ не е можно за броеви од различни блокови, независно од подредувањето на броевите во блоковите.

Останува да покажеме како можеме да ги подредиме броевите во фиксиран блок така што равенството $a_m+a_n=2a_{\frac{m+n}{2}}$ да не е исполнето за ниту едни a_m и a_n од тој блок. Да го разгледаме $(r+1)-$виот блок $2^r, 3\cdot 2^r, ..., (2d-1)2^r$, каде $2d-1\le k$. Согласно со индуктивната претпоставка постои пермутација $b_1, b_2, ..., b_d$ на броевите $1,2,...,d$ со саканото својство. Да ставиме $c_i=2b_i-1$, за $i=1,2,...,d$ и да го подредиме разгледуваниот блок во видот $2^r c_1, 2^r c_2, ..., 2^r c_d$. Тогаш

$$\frac{c_m+c_n}{2}=b_m+b_n-1\neq b_{\frac{m+n}{2}}-1=c_{\frac{m+n}{2}},$$

со што доказот е завршен.

18. На колку различни начини 20 јаболки можат да се разделат помеѓу четири деца, земајќи ги предвид и поделбите во кои некое дете не мора да добие јаболко?

Решение. *Прв начин.* Да ги означиме сите јаболки кај првото дете со 1, кај второто со 2, кај третото со 3 и кај четвртото дете со 4. Еве неколку можни поделби:

1111111111 222222 333 4

11111 22222 33333 44444

222222222222222222 3 4

....

Тоа всушност, се комбинации со повторување од елементите 1, 2, 3, 4, од класа 20, а нив вкупно ги има $\binom{4+20-1}{20}=\binom{23}{20}=\binom{23}{3}=1771$.

Втор начин. Да ги подредиме јаболката во една низа и над секоја да запишеме 1. Да допишеме до овие единици три нули, да ги разгледаме сите пермутации со повторување од така добиените 23 елементи. На секоја таква пермутација ќе одговара една поделба на јаболката меѓу четирите деца, и тоа на следниот начин: првото дете ќе добие онолку јаболки колку единици има до првата нула во низата, второто дете ќе има онолку јаболки, колку единици има меѓу првата и втората нула итн.

На пример, во низата $\underbrace{111}_{3}0\underbrace{1111111}_{7}0\underbrace{1111}_{4}0\underbrace{111111}_{6}$ децата добиваат по: 3, 7, 4 и 6 јаболки, а во низата $010\underbrace{1111111}_{7}0\underbrace{111111111111}_{12}$ децата добиваат по: 0, 1, 7 и 12 јаболка.

Според тоа, бараниот број на поделби е еднаков на бројот на сите пермутации од 23 елементи, меѓу кои има 20 елементи од класа 1 и 3 елементи од класа 2, т.е.

$$P_{23}(20,3)=\tfrac{23!}{20!3!}=1771\,.$$

19. На колку начини, од 20 засадени тополи по ред, можат да се исечат 15 тополи, но така што меѓу неисечените да не останат две соседни тополи?

Решение. *Прв начин.* Задачата е еквивалентна на следната: дадени се 15 бели топчиња подредени во редица. На колку начини 5 црни топчиња можеме да разместиме во оваа редица, така што секое од нив да биде помеѓу две црни или на некој од краевите на редицата. Бидејќи имаме вкупно 16 места на кои можеме да ги поставиме црните топчиња, бараниот број е $\binom{16}{5}=4368$.

Втор начин. Меѓу исечените тополи има 4 „зафатени“ места, т.е. местата на кои не може да има тополи. Да ги означиме тие места со знакот *, местата на кои останале тополи со 1, а останатите исечени тополи со знакот 0. На пример еден од можните начини е следниов:

$$01*001*01*01*000100\,.$$

Според тоа, бараниот број е всушност бројот на сите пермутации со повторување од 16 елементи, од кои еден е од класа 5, а другиот е од класа 11, т.е.

$$P_{16}(11,5)=\tfrac{16!}{11!\cdot 5!}=4368\,.$$

Трет начин. Ќе го преформулираме условот на задачата: на колку начини од множеството $\{1,2,3,...,20\}$ можеме да избереме 5 броеви, така што секои два од нив се несоседни.

Нека A е множеството на сите подредени петорки (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) од елементите на множеството $N_{20}=\{1,2,3,...,20\}$ за кои $a_{j+1}-a_j>1,\ \ j=1,2,3,4$. Нека $P_5(N_{16})$ е множеството на сите 5 елементни подмножества на множеството $N_{16}=\{1,2,3,...,16\}$. Тогаш дефинираме пресликување

$$\varphi: A\to P_5(N_{16})$$

на следниов начин:

$$\varphi:(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)\to(a_1,a_2-1,a_3-2,a_4-3,a_5-4)\,.$$

Јасно е дека вака дефинираното пресликување φ е биекција, од каде што следува дека $|A|=|P_5(N_{16})|$. Од друга страна, бројот на елементите на множеството $P_5(N_{16})$ е еднаков на бројот на можностите за избор на 5 елементни подмножества од 16 елементно множество, т.е. $|P_5(N_{16})|=C_{16}^5$.

Значи, бараниот број е $C_{16}^5=4368$.

20. Да се најде бројот на сите различни решенија на равенката

$$x_1+x_2+...+x_n=k$$

(k и n се дадени броеви) во множеството $\mathbb{N}$.

Решение. Јасно е дека треба да биде $n\le k$. За $n=k$ равенката има единствено решение $x_1=x_2=x_3=...=x_n=1$. Затоа, да претпоставиме дека $n<k$ и да ставиме

$$\underbrace{1+1+1+...+1}_{k}=k\ .$$

На секој знак “+” да му придружиме еден симбол. Бидејќи имаме $k-1$ знаци “+”, на тој начин го добиваме множеството

$$A=\{a_1,a_2,...,a_{k-1}\}\ .$$

На секое подмножество B од A со $n-1$ елемент му одговара едно решение на дадената равенка, т.е. ако избришеме $n-1$ знака “+” ќе избришеме едно решение. Следствено, бројот на сите решенија на равенката е еднаков со бројот на сите подмножества од A со $n-1$ елемент, а тој број е $\binom{k-1}{n-1}$.

На пример, да ја разгледаме равенката $x_1+x_2+x_3=5$. Имаме:

$$1+1+1+1+1=5\ .$$

Бришејќи по два знака, добиваме

$$1,1,1+1+1\ ;\ 1,1+1,1+1;\ 1,\ 1+1+1,1\ ;\ 1+1,\ 1,1+1;\ 1+1,1+1,1\ ;\ 1+1+1,1,1,$$

т.е. решенија на равенката се тројките

$$(1,1,3),(1,2,2),(1,3,1),(2,1,2),(2,2,1),(3,1,1)\ .$$

Нивниот број е 6 кој е еднаков со $\binom{4}{2}$.

21. Претставувањето на природниот број n како збир на природни броеви, при што редоследот на собирците е важен, го нарекуваме *подредено разбивање* на бројот n. На пример, имаме 8 подредени разбивања на бројот 4 и тоа:

$$4=1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=1+3=3+1=2+2\ .$$

Докажи, дека бројот на подредените разбивања на бројот n е еднаков на 2^{n-1}.

Решение. Да разгледаме n единици запишани во редица. Меѓу секои две соседни единици можеме да ставиме или да не ставиме преграда (вертикална црта). На секое поставување на прегради меѓу единиците соодветствува единствено подредено разбивање на бројот n и обратно, на секое подредено разбивање соодветствува единствено поставување на прегради меѓу единиците (ги собираме единиците меѓу две прегради, со што се добива собирокот во претставувањето). Според тоа, бројот на подредените разбивања е еднаков на бројот на поставувањата на преградите меѓу единиците. Бидејќи прегради може да се поставaт или да не се постават на $n-1$ место, добиваме дека вкупниот број на поставувања на прегради е еднаков на 2^{n-1}, што значи дека бројот на подредените разбивања на бројот n е еднаков на 2^{n-1}.

22. Колку има $n-$цифрени броеви чиј збир на цифрите е еднаков на 11?

Решение. Нека S е множеството решенија на равенката $x_1+x_2+...+x_n=11$ во множеството $\mathbb{N}_\circ$. Нека A,B и C множествата на оние решенија од S за кои соодветно важат условите:

$i)$ $x_1=0$

$ii)$ еден од броевите $x_1,x_2,...,x_n$ е еднаков на 11

$iii)$ еден од броевите $x_1,x_2,...,x_n$ е еднаков на 10.

соодветно. Тогаш

$$|S|=\binom{n+10}{11},\ |A|=\binom{n+9}{11}, |B|=n, |C|=n(n-1),\ |A\cap B|=n-1,$$
$$|B\cap C|=0, |C\cap A|=(n-1)(n-2)$$

и бараниот број е еднаков на

$$|S\setminus(A\cup B\cup C)|=|S|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|B\cap C|+|C\cap A|-|A\cap B\cap C|$$
$$=\binom{n+9}{10}-2n+1.$$

23. Нека $A(n,k)$ е бројот на $k-$торките $(a_1,a_2,...,a_k)$ од цели броеви, за кои важи

$$\begin{aligned}&a_1+a_2+...+a_{k-1}\le n\\&a_1+a_2+...+a_{k-1}+a_k>n\\&1\le a_i\le n,\ i=1,2,...,k.\end{aligned}\tag{1}$$

За кој k вредноста на $A(12,k)$ е најголема?

Решение. Прво ќе го пресметаме бројот на $k-$торките $(a_1,a_2,...,a_k)$ од цели броеви $1\le a_i\le n$ за кои $a_1+a_2+...+a_k\le n$. Очигледно збирот на левата страна може да прима вредности $k,k+1,...,n$, па затоа бројот на тие $k-$торки е еднаков на

$$\binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k-1}+...+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}.$$

Според тоа, бројот на $k-$торките за кои се исполнети условите (1) е еднаков на

$$A(n,k)=n\binom{n}{k-1}-\binom{n}{k}=\binom{n}{k}\left(\frac{nk}{n-k+1}-1\right).$$

Останува да определиме за кој број k бројот $A(12,k)=\binom{12}{k}\left(\frac{12k}{12-k+1}-1\right)$ е најголем. Бидејќи за $1\le k\le 6$ и двата множители растат, заклучуваме дека максимумот се достигнува за $6\le k\le 12$. Имаме $\frac{A(12,k+1)}{A(12,k)}=\frac{k(13-k)}{k^2-1}$. Последниот количник е поголем од 1 за $k=6$, а помал од 1 за $k=7,8,9,10,11,12$. Според тоа, бараната најголема вредност се достигнува за $k=7$.

24. Десет луѓе купувале книги. Притоа

1) Секој купил три различни книги и
2) Секои двајва купиле најмалку една иста книга.

Да ја разгледаме книгата купена од најголем број пати. Определи ја најмалата вредност на овој број.

Решение. Нека биле купени шест различни книги и да ги означиме книгите со 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Десетте луѓе можеле да ги купат следниве тројки книги:

$$(1,2,3), (1,3,4), (1,4,5), (1,5,6), (1,6,2), (2,3,5), (3,4,6), (4,5,2), (5,6,3), (6,2,4).$$

Притоа секоја од книгите е купена точно од 5 луѓе.

Нека се купени n различни книги. Со m_i да го означиме бројот на луѓето кои ја купиле $i-$тата книга, $1\le i\le n$. Ќе пишуваме $\{x,y,b\}$ ако x и y ја купиле книгата b. Било кои двајца купувачи припаѓаат најмалку на една множество, а $i-$тата книга припаѓа во точно $\binom{m_i}{2}$ множества. Затоа

$$\binom{m_1}{2}+\binom{m_2}{2}+...\binom{m_n}{2}\geq\binom{10}{2}=45,$$

каде $m_1+m_2+...+m_n=30$. Ако бараниот број е еднаков на 4, тогаш

$$\binom{m_1}{2}+\binom{m_2}{2}+...\binom{m_n}{2}\leq 7\cdot\binom{4}{2}+\binom{2}{2}=43,$$

што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека бараната најмала вредност е 5.

25. Нека $n\geq 1$ е природен број а $a>0$ даден реален број. Најди го бројот на решенија $(x_1,x_2,...,x_n)$ на равенката $\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+(a-x_i)^2)=na^2$, такви што $x_i\in[0,a]$, за $i=1,2,...,n$.

Решение. Дадената равенка ќе ја запишиме во облик

$$\sum_{i=1}^{n}(2x_i^2-2ax_i+a^2)=na^2 \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-a)=0$$

Бидејќи бараме решенија во интервалот $[0,a]$, изразите $x_i-a\leq 0$, па според тоа $x_i(x_i-a)\leq 0$, $i=1,2,3,4,...,n$. Заради условот

$$\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-a)=0,$$

добиваме

$$x_i(x_i-a)=0 \text{ за } i=1,2,3,4,...,n.$$

Според тоа $x_i=0$ или $x_i=a$, $i=1,2,3,4,...,n$. Значи, бројот на решенија е 2^n.

26. На колку начини можеме да ги разместиме заградите во изразот $2:2:2:2:2:2$? Колку различни резултати се добиваат при тоа и кои се тие?

Решение. Во изразот $2:2:2$ можни се два начини на разместување на заградите и при тоа се добиваат два резултати: $(2:2):2=\frac{1}{2}$ и $2:(2:2)=2$.

За изразот $2:2:2:2$ ги имаме следните можности:

1) $2:(2:2:2)$ - на два начина

2) $(2:2):(2:2)$ - на еден начин

3) $(2:2:2):2$ - на два начина

Значи, вкупно 5 начини, и при тоа се добиваат следните резултати $\frac{1}{4}$, 1 и 4.

За изразот $2:2:2:2:2$ имаме:

1) $2:(2:2:2:2)$ - на 5 начини

2) $(2:2):(2:2:2)$ - на 2 начини

3) $(2:2:2):(2:2)$ - на 2 начини

4) $(2:2:2:2):2$ - на 5 начини

Следствено, во изразот $2:2:2:2:2$ заградите можеме да ги разместиме на 14 начини и при тоа се добиваат следните резултати: $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, 2 и 8.

27. Во изразот

$$x_1 : x_2 : x_3 : ... : x_n\,,\ n \geq 3$$

запишуваме загради. Определи го бројот на начините на кои тоа може да се направи така што добените изрази се различни како функции од $n-$ променливи.

Решение. Ако на некој начин запишеме загради, тогаш после средувањето на дбиениот израз истиот ќе го добие видот

$$\frac{x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}}{x_{j_1}x_{j_2}...x_{j_k}}\,,$$

каде за индекасите важи $i_1 < i_2 < ... < i_k$, $j_1 < j_2 < ... < j_k$ и $i_r \neq j_s$ за секои r и s. Забележуваме дека $i_1 = 1$ и $j\ = 2$. Тврдиме дека преостанатите индекси можеме да ги разместиме по желба, што значи дека секој од останатите индекси може да биде и во броителот и во именителот. Бидејќи преостануваат $n-2$ броеви, добиваме дека бројот на различните изрази ќе биде еднаков на 2^{n-2}.

Доказот ќе го спроведеме со индукција по n.

За $n = 3$ можеме да ги добиеме изразите

$$(x_1 : x_2) : x_3 = \frac{x_1}{x_2x_3} \text{ и } x_1 : (x_2 : x_3) = \frac{x_1x_3}{x_2}\,,$$

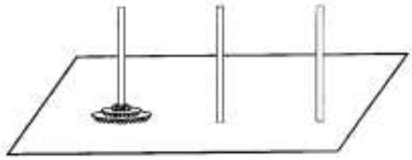
што значи дека нивниот број е еднаков на $2 = 2^{3-2}$, т.е. тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека за $n = k \geq 3$ бројот на различните изрази е еднаков на 2^{k-3}.

Да разгледаме израз со $n = k+1$ членови. Нека со првите k членови е добиен изразот A во кој x_1 е во броителот и x_2 е во именителот. Ако во овој израз на местото на x_k ставиме $x_k : x_{k+1}$, тогаш x_k ќе биде на истото место како и во изразот A, а x_{k+1} ќе биде во именителот ако x_k е во броителот и обратно. Ќе докажеме дека x_{k+1} може да се појави на истото место заедно со x_k. После поставувањето на заградите во изразот A можеме да најдеме комбинација од видот $B : x_k$, каде B е или членот x_{k-1} или посложен израз со еднаков број леви и десни загради. Овој израз го заменуваме со изразот $((B : x_k) : x_{k+1} = B : (x_k x_{k+1})$. Забележуваме дека на овој начин ќе добиеме ист израз како и A, со тоа што наместо x_k ќе имаме $x_k x_{k+1}$. Според тоа, од секој израз со k членови добиваме два изрази со $k+1$ членови, па затоа бројот на изразите со $k+1$ челнови е еднаков на $2 \cdot 2^{k-3} = 2^{(k+1)-3}$, т.е. тврдењето важи за $n = k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој природен број $n \geq 3$.

28. На еден од три клина се наоѓаат n дискови со различни дијаметри, наредени така што секој диск (освен најдолниот) е со помал дијаметар од дикот под него (види цртеж). Дисковите треба да се преместат на друг клин така што да бидат во истиот распоред како почетниот. Меѓутоа, во еден потез пренесувањето од клин на клин треба да се прави така што секогаш се пренесува само еден диск и не смее да се стави диск врз диск со помал дијаметар. Притоа може да се користи и третиот клин.

Како треба да го резлизираме бараното преместување и кој е најмалиот број потези за истото да се реализира?



Решение. Со x_n да го означиме бараниот минимален број потези потребен за пренесеување на n дискови од првиот на вториот клин.

Очигледно, $x_1 = 1$. За префрлање на k дискови се потребни x_k потези. За да префрлиме $k+1$ дискови ќе постапиме на следниов начин. За да од првиот клин го извадиме $(k+1)-$виот диск, мораме претходно да ги преместиме првите k дискови на вториот и третиот клин. Бидејќи $(k+1)-$виот диск не смее да се стави над диск со помал дијаметар мораме првите k дискови да ги преместиме во ист распоред како почетниот на третиот клин. За тоа ни се потребни x_k потези. Сега со еден потез $(k+1)-$виот диск го ставаме на вториот клин и потоа со уште x_k потези ги префрламе останатите k дискови. Значи,

$$x_{k+1} = 2x_k + 1, \; x_1 = 1. \qquad (1)$$

Ќе докажеме за бројот x_n зададен со рекурентната формула (1) важи

$$x_n = 2^n - 1. \qquad (2)$$

Навистина, за $n = 1$ имаме $x_1 = 1 = 2^1 - 1$, т.е. точна е формулата (2). Нека претпоставиме дека формулата (2) важи за $n = k$, т.е. дека $x_k = 2^k - 1$. Тогаш за $n = k + 1$ добиваме

$$x_{k+1} = 2x_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека (2) важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

29. Дадени се 12 кутии, наредени во низа една до друга, и доволен број на црвени, сини и бели топчиња. Сакаме да ставиме по едно топче во секоја кутија, при што, за секое топче барем едно од соседните топчиња е со иста боја. На колку начини можеме ова да го направиме?

Решение. Со a_n да го означиме бројот на бараните распореди во n кутии. Топчето во $k-$тата кутија ќе го наречеме топче k. Ако има n кутии, топќињата $n-1$ и n мора да бидат со иста боја. Можни се два случаја.

1) Топчињата $n-2$ и $n-1$ се со иста боја. Тогаш распоредот на топчињата од 1до $n-1$ ги задоволува условите, а бојата на тошчето n е еднозначно определена. Вакви распореди има a_{n-1}.
2) Топчето $n-2$ не е со иста боја како топчето $n-1$, но е со иста боја како топчето $n-3$. Тогаш распоредот на топчињата од 1 до $n-2$ ги задоволува условите на задачата, а бојата на топчињата $n-1$ и n можеме да ја избереме на два начина (тие се со иста боја, која е различна од бојата на топчето $n-2$). Затоа вакви распореди има $2a_{n-2}$.

Од досега изнесеното следува дека $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$, за $n > 3$. Притоа $a_2 = a_3 = 3$. Оттука со непосредни пресметувања се добива $a_{12} = 2049$. Може да се докаже дека $a_n = 2^{n-1} + (-1)^n$.

30. Во еден град живеат вкупно $2k$ луѓе, при што секои двајца се или пријатели или непријатели, и секој има најмногу t непријатели. Ќе велиме дека една група жители е *пријателска* ако секои два члена на групата се пријатели. Познато е дека во градот нема пријателска група која содржи повеќе од k жители, како и дека сите жители на градот може да се распределат во две пријателски групи од по k луѓе во секоја група. Докажи, дека бројот на сите можни пријателски групи од по k луѓе е помал или еднаков на $2^{k-1}+2^{k-t}$.

Решение. Нека $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}$ и $B=\{b_1,b_2,...,b_k\}$ се двете пријателски групи. За произволна подгрупа C од A со S_C да ја означиме групата од сите луѓе од B, секој од кои не познава барем еден човек од C. Ако $|C|>|S_C|$, тогаш групата $C\cup(B\setminus S_C)$ е пријателска и таа има $|C|+|B|-|S_C|>|B|=k$ членови, што е противречност.

Тоа значи, дека множествата $S_{\{a_i\}}$ ги исполнуваат условите од теоремата на Хол за систем од различни претставници. Според тоа, можеме да сметаме дека a_i и b_i, за $i=1,2,...,k$ се непријатели. Тоа значи, дека секоја пријателска група од k луѓе содржи точно по еден човек од секој пар (a_i,b_i) за $i=1,2,...,k$.

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека непријатели на a_1 се $b_1,b_2,...,b_t$. Секоја пријателска група, која го содржи a_1 не ги содржи $b_1,b_2,...,b_t$, па затоа ги содржи $a_1,a_2,...,a_t$. Од секој од останатите $k-t$ парови $(a_j,b_j),\ j>t$ треба да избереме a_j или b_j. Според тоа, такви групи се најмногу 2^{k-t}.

Секоја пријателска група со k членови која не го содржи a_1 го содржи b_1. Од секој од останатите $k-1$ парови $(a_j,b_j),\ j>1$ треба да избереме a_j или b_j. Според тоа, такви групи се најмногу 2^{k-1}.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека бројот на сите можни пријателски групи од по k луѓе е помал или еднаков на $2^{k-1}+2^{k-t}$.

31. Секој жител од градовите A,B,C познава најмногу еден од жителите на друг град. Ако

1) бројот на жителите на градот A е еднаков на 6000,
2) бројот на жителите на градот B кои имаат познаници во градот C е помал или еднаков на 2000, и
3) во градовите B и C повеќе од половината жители немаат познаници во градот A,

докажи дека вкупниот број жители во градовите A,B и C кои немаат познаници во други градови е поголем од 1999.

Решение. Нека r е бројот на жителите во градовите A,B,C кои немаат познаници во други градови. Со k_A,k_B,k_C да ги означиме бројот на жители во градот A,B,C, соодветно, со k_{AB} бројот на жителите од градот A кои имаат познаници во градот B, k_{BC} и k_{AC} го имаат истото значење и k_{ABC} нека е бројот на жителите од градот A кои имаат познаници во градовите B и C. Тогаш

$$r = k_A + k_B + k_C - 2k_{AB} - 2k_{BC} - 2k_{AC} + 3k_{ABC}$$
$$\geq (k_A - 2k_{BC}) + (k_B - 2k_{AB}) + (k_C - 2k_{AC}).$$

Од условот на задачата следува

$$k_A = 6000, \quad k_{BC} \leq 2000, \quad k_B - 2k_{AB} \geq 0, \quad k_C - 2k_{AC} \geq 0\,,$$

па затоа

$$r \geq (k_A - 2k_{BC}) + (k_B - 2k_{AB}) + (k_C - 2k_{AC}) \geq 6000 - 2\cdot 2000 > 1999\,.$$

32. Нека $N = mn - n + 1$, каде $m \geq 3$ и $n \geq 2$ се природни броеви. Докажи, дека ако во група од N лица меѓу секои m постојат две лица кои се познаваат, тогаш постои лице кое познава барем n од останатите членови на групата. Дали тврдењето е точно за $N < mn - n + 1$?

Решение. Од дадените N лица да избереме подгрупа со максимален број лица така што во подгрупата не постојат две лица кои се познаваат. Јасно, ако во групата има l лица, тогаш $l \leq m-1$. Освен тоа, од максималноста на l следува дека со додавање на било кој од останатите членови на групата, че имаме барем едно познанство. Според тоа, секое од останатите $N-l$ лица познава барем едно од избраните l лица. Тогаш некое од избраните l лица ќе има барем $\frac{N-l}{l}$ познати. Бидејќи

$$\tfrac{N-l}{l} = \tfrac{N}{l} - 1 \geq \tfrac{N}{m-1} - 1 = n + \tfrac{1}{m-1} - 1 > n - 1\,,$$

постои лице со барем n познати.

Нека $N = mn - n = (m-1)n$ и да разгледаме $m-1$ група од по n особи, такви што секои две лица од секоја група се познаваат и нема познати од различни групи. Тогаш меѓу секои m лица има двајца кои припаѓаат на иста група, т.е. двајца кои се познаваат. Од друга стрна секој познава точно $n-1$ лице. Според тоа, тврдењето не е точно ако $N < mn - n + 1$.

33. Во група од n лица постојат тројца познаници, секој од кои се познава со повеќе од половината членови на групата. Колку најмалку тројки познаници има во таа група?

Решение. Тројцата познаници да ги означиме со A, B и C.

Нека $n = 2k+1$. Во тој случај секој од A, B и C има барем $k+1$ познаник ($k-1$ од кои не се A, B или C). Со T да го означиме множеството од сите лица од групата без A, B и C и нека $a_i, i = 0,1,2,3$ е бројот на лицата од T кои имаат точно по i познаници меѓу A, B и C. Тогаш $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ е бројот на сите членови на T, т.е. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 2k - 2$. Од друга страна $a_1 + 2a_2 + 3a_3$ е бројот на познаниците на A, B и C, т.е. $a_1 + 2a_2 + 3a_3 \geq 3k - 3$. Оттука следува

$$3k - 3 \leq a_1 + 2a_2 + 3a_3 = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3) + a_2 + 2a_3 = 2k - 2 + a_2 + 2a_3$$

па затоа $a_2 + 2a_3 \geq k - 1$. Бидејќи секој познаник со двајцата од A, B и C формира тројка познаници, а секој познат со тројцата формира три тројки познаници, добиваме дека бројот на тројките познаници е најмалку

$$1 + a_2 + 3a_3 > a_2 + 2a_3 \geq k - 1\,,$$

што значи дека бројот на тројките познаници не е помал од k. Останува да дадеме пример во кој бројот на тројките познаници е точно k. Нека во T не постојат две лица кои се познаваат. Ако A познава точно $k-1$ лице од T, B ги познава останатите $k-1$ лице од T, а C познава било кои $k-1$ лица од T, тогаш само познаниците на C влегуваат во тројки познаници и вкупниот број на тројки е k.

Нека $n=2k$. Како и во случај кога n е непарен број, добиваме дека бројот на тројките познаници е најмалку $k+1$. Ако A и B имаат само еден заеднички познаник во T (тоа е можно бидејќи $|T|=2k-3$, а познаниците на A и B се по $k-1$), кој не е меѓу познаниците на C, тогаш имаме точно $k+1$ тројки познаници.

34. Определи го најмалиот број $n \geq 5$ за кој постои група од n лица, така што секои две лица кои се познаваат немаат заеднички познаник, а секои две лица кои не се познаваат имаат точно два заеднички познаници. (Ако $A \neq B$ и A го познава B, тогаш и B го познава A .)

Решение. Нека A е фиксиран член на групата и $A_1, A_2, ..., A_r$ се познаниците на A. Тогаш од условот на задачата следува дека меѓу лицата $A_1, A_2, ..., A_r$ не постојат двајца кои се познаваат и за секои две лица A_i и A_j, $1 \leq i < j \leq r$ постои точно едно лице $A_{ij} \neq A$ кое се познава со двајцата. Освен тоа, не постојат две од лицата A_{ij} кои се познаваат меѓу себе, бидејќи во спротивно ќе има член на групата кој има барем три заеднички познаници со A.

Множеството членови A_{ij}, $1 \leq i < j \leq r$ всушност е множеството од оние лица кои не го познаваат A. Според тоа, $n = 1 + r + \binom{r}{2}$, од каде наоѓаме $r = \frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}$. Добиениот израз за r не зависи од изборот на A, што значи дека сите членови на групата имаат ист број познаници.

Од условот $n \geq 5$ следува $r \geq 3$. Уште повеќе, бидејќи познаниците на $A_{1,2}$ се A_1, A_2 и уште $r-2$ членови на множеството $\{A_{ij} \mid 3 \leq i < j \leq r\}$ треба да биде исполнето неравенството $r-2 < \binom{r-2}{2}$, па затоа $r \geq 5$ и $n \geq 16$.

Ќе дадеме пример на група од 16 лица $A, A_1, A_2, ..., A_5, A_{1,2}, A_{1,3}, ..., A_{4,5}$ во која познанствата се меѓу следниве парови

1) (A, A_i), $i = 1, 2, ..., 5$
2) (A_i, A_{ij}), (A_j, A_{ij}), $1 \leq i < j \leq 5$,
3) (A_{ij}, A_{km}), $1 \leq i < j \leq 5, 1 \leq k < m \leq 5, \{i, j\} \cap \{k, m\} = \varnothing$.

Лесно се проверува дека оваа група ги има саканите својства, па затоа најмалиот број е 16.

35. Докажи дека во множество од $\binom{2n}{n}$ луѓе, $n \in \mathbb{N}$, може да се најдат $n+1$ лице кои меѓусебно сите се познават или $n+1$ лице кои меѓусебно сите не се познаваат.

Решение. Ќе докажеме поопшто тврдење: Во множество од $\binom{p+q}{q}$ луѓе, $p, q \in \mathbb{N}$, може да се најдат $p+1$ особи кои сите меѓусебно се познаваат или $q+1$ особи кои сите меѓусебно не се познаваат. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $p+q$.

Ако $p+2=2$, тогаш $p=q=1$, па тврдењето важи.

Нека претпоставиме дека имаме $\binom{p+q}{q}$ луѓе. Да избереме произволна особа A. Можни се следниве случаи:

1) Ако A познава $\binom{(p-1)+q}{p-1}$ лица, тогаш од индуктивната претпоставка следува дека меѓу познаниците на A може да се најдат p кои сите меѓусебно се познаваат и кои заедно со A се бараните $p+1$ лица кои сите меѓусебно се познаваат, или $q+1$ лица кои сите меѓусебно не се познаваат.
2) Ако A не познава барем $\binom{p+(q-1)}{p}$ луѓе, тогаш од индуктивната претпоставка следува дека меѓу лицата кои не го познават A може да се најдат $p+1$ лица кои сите меѓусебно не се познаваат или q лица кои сите меѓусебно не се познаваат, па овие лица заедно со A се $q+1$ лица кои сите меѓусебно не се познаваат.
3) Случајот кога A познава најмногу $\binom{(p-1)+q}{p-1}-1$ лица и не познава најмногу $\binom{p+(q-1)}{p}-1$ не е можен, бидејќи

$$\binom{(p-1)+q}{p-1}-1+\binom{p+(q-1)}{p}-1=\binom{p+q}{p}-2<\binom{p+q}{p}-1.$$

36. Нека n и k се природни броеви такви што $k \ge n$ и $k-n$ е парен број. Дадени се $2n$ ламби означени со броевите $1, 2, \ldots, 2n$, секоја од кои може да биде вклучена или исклучена. На почетокот сите ламби се исклучени. Ја разгледуваме низата од чекори: во секој чекор една од ламбите ја менува состојбата (од вклучена во исклучена, или обратно). Нека N е бројот на вакви низи кои се состојат од k чекори такви што се добива состојба во која сите ламби означени со броевите од 1 до n се вклучени, а ламбите од $n+1$ до $2n$ се исклучени. Нека M е бројот на такви низи низи кои се состојат од k чекори т.ш. се добива состојба во која сите ламби означени со броевите од 1 до n се вклучени, а ламбите од $n+1$ до $2n$ се исклучени, но т.ш. ниедна од ламбите од $n+1$ до $2n$, не била никогаш вклучена. Одреди го односот $\frac{N}{M}$.

Решение. Нека S_N, S_M се множествата од низи со соодветните дефиниции дадени во задачата.

$$|S_N|=N,\ |S_M|=M.$$

Ќе ја формираме кореспонденција 1 спрема 2^{k-n} од S_M кон S_N.

Да разгледаме произволна низа од S_M. Во неа се појавуваат само броевите од 1 до n, и секој се појавува непарен број пати. За даден i, $1 \le i \le n$, одбираме парен број појавувања на i во низата и ги заменуваме со $n+i$. Ако i се појавува вкупно $2m_i+1$ пати тогаш претходното може да се направи на вкупно

$$\binom{2m_i+1}{0}+\binom{2m_i+1}{2}+...+\binom{2m_i+1}{2m_i}=2^{2m_i}$$

начини.

Бидејќи

$$\sum m_i=\frac{\sum(2m_i+1)-n}{2}=\frac{k-n}{2},$$

тоа значи дека вкупно постојат

$$\prod 2^{2m_i}=2^{2\sum m_i}=2^{k-n}$$

начини од низа од S_M да се добие низа од S_N.

Ниту една низа во S_N не може да се добие од две различни низи од S_M. Навистина, елементите на една низа при оваа кореспонденција се инваријантни по модул n. Па ако две низи од S_M ја даваат истата низа од S_N, тогаш тие се исти по модул n, па мора да се истата низа.

Сите низи од S_N се добиваат со оваа кореспонденција. Навистина ако избереме низа од S_N, и ја формираме низата од нејзините елементи по модул n, ќе ја добиеме низата од S_M, од која таа произлегла при кореспонденцијата.

37. Нека $a_1,a_2,...,a_{100}$ е пермутација на броевите 1, 2, ..., 100 и нека $S_1=a_1$, $S_2=a_1+a_2$, ..., $S_{100}=a_1+a_2+...+a_{100}$. Колку најмногу точни квадрати може да има меѓу броевите $S_1,S_2,...,S_{100}$?

Решение. На низата $S_1,S_2,...,S_{100}$ и додаваме почетен член $S_0=0$ и ги разгледуваме членовите $S_{n_0}<S_{n_1}<...$ кои се точни квадрати, т.е. $S_{n_k}=m_k^2$ (во случајот $n_0=m_0=0$). Бидејќи $S_{100}=5050<72^2$, заклучуваме дека броевите m_k се помали или еднакви на 71. Ако $m_{k+1}=m_k+1$, добиваме дека разликата $S_{n_{k+1}}-S_{n_k}=2m_k+1$ е непарна. Оттука следува дека барем еден од броевите $a_{n_k+1},...,a_{n_{k+1}}$ е непарен. Бидејќи непарните броеви, кои се помали од 100 се точно 50, меѓу разликите $m_{k+1}-m_k$ најмногу 50 се еднакви на 1. Ако допуштиме дека точните квадрати во почетната низа се најмалку 61, добиваме дека

$$m_{61}=(m_{61}-m_{60})+(m_{60}-m_{59})+...+(m_1-m_0)\geq 50+11\cdot 2=72,$$

што не е можно. Пример на низа со 60 точни квадрати може да се конструирана следниов начин. Ако $a_i=2i-1$ за $1\leq i\leq 50$, можеме да ги искористиме сите непарни броеви и нека $S_i=i^2$. Понатаму, нека $S_{54+4i}-S_{50+4i}=204+8i$. Тогаш $S_{54+4i}=(52+2i)^2$. Последните 18 члена од низата се 30, 40, 64, 66, 68, 6, 8, 14, 16, 32, 38, 46, 54, 62, 22, 24, 48 и 56. Сега $S_{87}=66^2+2\cdot 134=68^2$ и $S_{96}=70^2$.

38. Пермутацијата π на броевите од 1 до n ќе ја наречеме добра, ако множеството $\{\pi(k)-k\,|\,k=1,2,...,n\}$ има два елементи. Докажи, дека бројот на добрите пермутации е еднаков на $\sigma(n)-\tau(n)$, каде $\sigma(n)$ е збирот на позитивните делители на n, а $\tau(n)$ е нивниот број.

Решение. Да разгледаме една добра пермутација π. Бидејќи $\sum_{k=1}^{n}(\pi(k)-k)=0$, заклучуваме дека еден од двата елементи на множеството $\{\pi(k)-k \mid k=1,2,...,n\}$ е позитивен, а другиот е негативен, на пример $a>0$ и $-b<0$. Нека $A=\{k \mid \pi(k)-k=a\}$ и $B=\{k \mid \pi(k)-k=-b\}$.

Прво да забележиме, дека ако $i\in A$ и $i+a+b\le n$, тогаш $i+a+b\in A$. Навистина, ако $\pi(i)=i+a$, тогаш бидејќи π е пермутација следува $\pi(i+a+b)\ne\pi(i)=i+a$, т.е. $\pi(i+a+b)-(i+a+b)\ne -b$, т.е. $i+a+b\notin B$. Аналогно, ако $i\in B$ и $1\le i-a-b$, тогаш $i-a-b\in B$. Навистина, ако $\pi(i)=i-b$, тогаш бидејќи π е пермутација следува $\pi(i-a-b)\ne\pi(i)=i-b$, па затоа важи $\pi(i-a-b)-(i-a-b)\ne a$, т.е. $i-a-b\notin A$.

Очигледно, $i\in A$ за $1\le i\le b$. Од претходните разгледувања следува дека ако остатокот на i при делење со $a+b$ е ненулти и е помал или еднаков на b, тогаш $i\in A$. Аналогно, ако остатокот на i при делење со $a+b$ е 0 или поголем од b, тогаш $i\in B$. Оттука лесно следува дека $d=a+b$ е делител на n.

Обратно, горните разгледувања дозволуваат за секој делител d на n и секој $a=1,2,...,d-1$ да конструираме добра пермутација така, што елементи на множеството $\{\pi(k)-k \mid k=1,2,...,n\}$ се a и $-b=a-d$. Според тоа, бројот на добрите пермутации е еднаков на

$$\sum_{d|n}(d-1)=\sum_{d|n}d-\sum_{d|n}1=\sigma(n)-\tau(n).$$

39. Нека n е природен број кој е делив со 4. Да се определи бројот на биекции f, $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ кои што го исполнуваат условот:

$$f(j)+f^{-1}(j)=n+1,\ j=1,2,...,n$$

Решение. Ако σ е биекција која што го исполнува условот од задачата тогаш $\sigma(j)\ne j$. Навистина, ако $\sigma(j)=j$ (значи j е неподвижен елемент), тогаш $\sigma^{-1}(j)=j$ па според тоа $\sigma(j)+\sigma^{-1}(j)=2j$. Бидејќи $2j\ne n+1$ за било кој природен број j, $j=1,2,3,...,n$, добиваме контрадикција. Според тоа, било која пермутација која го задоволува условот

$$\sigma(j)+\sigma^{-1}(j)=n+1$$

нема неподвижни елементи.

Нека σ е пермутација која го задоволува равенството (1) и нека $\sigma(a)=b$. Значи, $a\ne b$ и од равенството

$$\sigma(a)+\sigma^{-1}(a)=n+1,$$

добиваме дека $\sigma^{-1}(a)=n+1-b$, односно $\sigma(n+1-b)=a$. Бидејќи $\sigma^{-1}(b)=a$,од равенството

$$\sigma(b)+\sigma^{-1}(b)=n+1,$$

добиваме $\sigma(b)=n+1-a$, па според тоа $\sigma^{-1}(n+1-a)=b$ од каде имаме дека $\sigma(b)=n+1-a$. Од равенствата

$$\sigma^{-1}(n+1-a)=b \text{ и } \sigma(n+1-a)+\sigma^{-1}(n+1-a)=n+1,$$

добиваме дека $\sigma(n+1-a)=n+1-b$ и $\sigma^{-1}(n+1-b)=n+1-a$. Значи, ако $a,b\in\{1,2,3,...,n\}$, $a\neq b$ и $\sigma(a)=b$, тогаш имаме

$$a\xrightarrow{\sigma}b\xrightarrow{\sigma}n+1-a\xrightarrow{\sigma}n+1-b\xrightarrow{\sigma}a.$$

Според тоа, ако $n=4k$, секоја пермутација σ која го исполнува условот на задачата го разбива множеството елементи н $\{1,2,3,...,n\}$ на групи од, по четири елементи така што тие формираат циклус.

Обратно, нека од множеството $\{1,2,3,...,n\}$, каде $n=4k$ формираме групи од по четири елементи од обликот $\{p,q,n+1-p,n+1-q\}$ каде $a\neq b$.Бидејќи множеството $\{1,2,3,...,n\}$ има $n=4k$ елементи, добиваме дека такво разбивање е можно и при тоа делбените множества се попарно дисјунктни.За секое такво четириелементно множество определуваме по едно пресликување

$$p\to q\to n+1-p\to n+1-q\to p.$$

Треба да го определиме бројот различни такви разбивања.

Заради дисјунктноста на множеството, и тоа што секое вакво пресликување е биекција добиваме дека на $\{1,2,3,...,n\}$ е определена биекција и не е тешко да се провери дека таа ги исполнува бараните својства.

Според тоа, елементите на секое множество $\{j,n+1-j\}$ се членови на еден циклус на пермутацијата, и секој циклус со должина 4 кој е дел од пермутацијата се состои од елементите од две такви множества.Множеството $\{j,n+1-j\}$, $j=1,2,3,...,2k$ ќе го означиме со A_j. Ако $i\neq j$, тогаш $A_i\cap A_j=\varnothing$.

Од множеството $\{A_1,A_2,...,A_{2k}\}$ два елементи можеме да избереме на $\binom{2k}{2}$ начини. Од преостанатите елементи можеме да избереме на $\binom{2k-2}{2}$ -начини две множества. Продолжувајќи на тој начин добиваме дека низа со должина k во која на секое место има запишано две множества(не е битен редоследот на запис на двете множества на даденото место) можеме да формираме на

$$\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}...\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{(2k)!}{2^k}$$

начини. За секоја низа од $\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}...\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{(2k)!}{2^k}$ -те можни низи, секоја од кои се состои од k парови множества A_pA_q, $p\neq q$ (во еден запис има k такви парови) за секој пар определени се две биекции

$$p\to q\to n+1-p\to n+1-q\to p$$
$$p\to n+1-q\to n+1-p\to q\to p$$

Според тоа, со секоја низа со должина k определени се 2^k различни пермутации кои го задоволуваат условот на задачата.

Бројот на такви двоелементни подмножества е еднаков на $2k$. Бројот на разбивања на множеството $\{1,2,3,...,n\}$ на такви четириелементни подмножества запишани во даден редослед е еднаков на

$$\binom{2k}{2}\binom{2k-2}{2}...\binom{4}{2}\binom{2}{2}=\frac{(2k)!}{2^k}.$$

Бидејќи редоследот на запис на четириелементните множества од лево кон десно не е битен, можеме да ги сметгаме за еднакви, добиваме дека со еден запис исти такви има $k!$. Бидејќи нив ги сметаме за еднакви, добиваме дека бројот на такви пермутации е еднаков на

40. Определи го бројот на $(p_1, p_2,..., p_n)$ на елементите од множеството $\{1,2,3,...,n\}$, за кој изразот

$$|p_1-1|+|p_2-2|+...+|p_n-n|$$

достигнува максимална вредност.

Решение. Нека $(p_1, p_2,..., p_n)$ е пермутација на броевите од множеството $\{1,2,3,...,n\}$. По ослободувањето од апсолутните вредности, во бројниот израз што се добива, се појавуваат броевите

$$1,1,2,2,3,3,...,n,n. \quad (1)$$

Притоа, половина од нив се со знак плус, а половина од нив се со знак минус. Збирот на така добиениот броен израз е максимален ако и само ако по ослободувањето од апсолутните вредности првите n членови од низата (1) се со знак минус, а преостанатите n се со знак плус.

Збирот во тој случај е еднаков на:

а) ако n е непарен број, т.е. $n=2k+1$, имаме

$$-1+(-1)+(-2)+(-2)+...+(-k)+(-k)+[-(k+1)]+(k+1)+...+(2k+1)+(2k+1)=$$

$$=2k(k+1)=\frac{4k^2+4k+1-1}{2}=\frac{n^2-1}{2}$$

б) Ако n е парен, т.е. $n=2k$, имаме

$$-1+(-1)+(-2)+(-2)+...+(-k)+(-k)+(k+1)+(k+1)+...+2k+2k=2k\cdot k$$

$$=\frac{4k^2}{2}=\frac{n^2}{2}.$$

Останува уште да го определиме вкупниот број на пермутации кои го исполнуваат погоре наведениот услов.

Случај 1. $n=2k$. Максимум се достигнува ако и само ако

$$\{p_1, p_2,..., p_k\}\in\{k+1,k+2,...,2k\}, \{p_{k+1}, p_{k+2},..., p_{2k}\}\in\{1,2,...,k\}.$$

Бројот на вакви пермутации е еднаков на $k!\cdot k!=(k!)^2$.

Случај 2. $n=2k+1$. Максимумот се достигнува ако и само ако

$$\{p_1, p_2,..., p_k, p_{k+1}\}\in\{k+1,k+2,...,2k,2k+1\}$$

или постои $x\in\{1,2,...,k\}$,

$$\{p_1, p_2,..., p_k\}\in\{k+2,k+3,...,2k,2k+1\}$$

$$\{p_{k+1}, p_{k+2},..., p_{2k+1}\}\in\{1,2,...,k+1\}\setminus\{x\}.$$

Бројот на пермутации во овој случај е

$$k(k!)(k!)+(k!)(k+1)!=(k!)^2(2k+1).$$

41. Определи го бројот S на сите пермутации π на множеството $\{1,2,3,...,n\}$ такви што производот

$$(\pi_1-1)(\pi_2-2)...(\pi_n-n)$$

е непарен број.

Решение. Производ на природни броеви е непарен број ако и само ако секој од множителите да е непарен број, т.е. $(\pi_1-1)(\pi_2-2)...(\pi_n-n)$ е непарен број ако и само ако $\pi_1-1,\pi_2-2,...,\pi_n-n$ се непарни броеви.

Ќе разгледаме два случаи.

Случај 1. n е непарен број т.е. $n=2k+1$. Нека π е пермутација која го исполнува условот од задачата. Тогаш $\pi_1-1,\pi_2-2,...,\pi_n-n$ се непарни броеви, па според тоа и нивниот збир е непарен број, т.е.

$$(\pi_1-1)+(\pi_2-2)+...+(\pi_n-n)=2s+1.$$

Од друга страна $\{\pi_1,\pi_2,...,\pi_n\}=\{1,2,...,n\}$, па затоа

$$\begin{aligned}(\pi_1-1)+(\pi_2-2)+...+(\pi_n-n)&=(\pi_1+\pi_2+...+\pi_n)-(1+2+...+n)\\&=(1+2+...+n)-(1+2+...+n)=0,\end{aligned}$$

што е противречност. Значи, кога n е непарен број таква пермутација не постои.

Случај 2. n е парен број, т.е. $n=2k$. За да секој од множителите $\pi_1-1,\pi_2-2,...,\pi_n-n$ е непарен потребно и доволно е за секој i бројот π_{2i-1} да е парен, а бројот π_{2i} да е непарен. Да ги разгледаме пермутациите

$$\alpha:\{2,4,...,2k\}\to\{2,4,...,2k\},\ \beta:\{1,3,...,2k-1\}\to\{1,3,...,2k-1\}. \qquad (1)$$

Со помош на овие пермутации ќе определиме пермутација на

$$\pi:\{1,2,...,2k\}\to\{1,2,...,2k\}$$

на следниот начин:

$$\pi_{2i-1}=\alpha_{2i},\ \pi_{2i}=\beta_{2i-1}, \qquad (2)$$

за $i=1,2,...,k$. Тогаш π е пермутација на $\{1,2,...,2k\}$ таква што производот $(\pi_1-1)(\pi_2-2)...(\pi_n-n)$ е непарен број. Обратно, секоја пермутација π која го задоволува условот на задачата е определена со (2), каде α и β се пермутации од видовите (1). Бидејќи

$$|S_A|=|\{\beta\,|\,\beta:\{1,3,...,2k-1\}\to\{1,3,...,2k-1\}\text{ е пермутација}\}|=k!$$

$$|S_B|=|\{\alpha\,|\,\alpha:\{2,4,...,2k\}\to\{2,4,...,2k\}\text{ е пермутација}\}|=k!$$

добиваме дека бројот на пермутациите кои го задоволуваат условот на задачата е

$$|S_A\times S_B|=|S_A|\cdot|S_B|=(k!)(k!)=(k!)^2.$$

42. Нека $(a_1,a_2,...,a_n)$ е пермутација на броевите $1,2,...,n$, $n\ge 2$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\sum_{n=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|.$$

Решение. Да означиме

$$S(a_1,a_2,...,a_n)=|a_n-a_1|+\sum_{n=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|$$

и на реалната оска да ги разгледаме точките $A_1,A_2,...,A_n$ со координати $a_1,a_2,...,a_n$, соодветно. Тогаш збирот $S(a_1,a_2,...,a_n)$ е еднаков на должината на затворената искршена линија $A_1A_2...A_nA_1$. Ќе ја оцениме оваа должина ако го разгледаме покривањето на интервалите од видот $[k,k+1]$, каде $k\in\{1,2,...,n-1\}$.

Ако $k<\frac{n}{2}$, интервалот $[k,k+1]$ е покриен најмногу $2k$ пати, бидејќи на располагање имаме најмногу k леви краеви на покривните отсечки, а секоја точка е крајна за две отсечки. Аналогно при $k\geq\frac{n}{2}$ интервалот $[k,k+1]$ е покриен најмногу $2(n-k)$ пати. Според тоа, кога $n=2m$ имаме

$$S(a_1,a_2,...,a_n)\leq 2[1+2+...+m+(m-1)+...+2+1]=2m^2,$$

а кога $n=2m+1$ имаме

$$S(a_1,a_2,...,a_n)\leq 2[1+2+...+m+m+(m-1)+...+2+1]=2m(m+1).$$

Можеме да ги обединиме двете оценки со $S(a_1,a_2,...,a_n)\leq 2m(n-m)$, каде $m=[\frac{n}{2}]$. Тогаш бараниот збир е помал или еднаков на $2m(n-m-1)$.

Не е тешко да се провери дека пермутацијата зададена со $a_{2k}=k$ и $a_{2k-1}=n-m-k$, за $k=1,2,...,m$, $a_n=m+1$, ако n е непарен број, дава збир $2m(n-m)-1$. Според тоа, бараната најголема вредност е $[\frac{n}{2}](n-[\frac{n}{2}]-1)$.

43. Определи ги сите природни броеви n за кои постои пермутација σ на броевите $1,2,...,n$ таква што $\sqrt{\sigma(1)+\sqrt{\sigma(2)+\sqrt{...+\sqrt{\sigma(n)}}}}$ е рационален број.

Решение. Да означиме $a_i=\sqrt{\sigma(i)+\sqrt{\sigma(i+1)+\sqrt{...+\sqrt{\sigma(n)}}}}$, за $1\leq i\leq n$ и $a_{n+1}=0$. Ако a_1 е рационален, со повеќекратно квадрирање добиваме дека и $a_2,...,a_n$ се рационални. Уште повеќе, a_n мора да биде цел број, па затоа и $a_{n-1},...,a_1$ се цели броеви. Понатаму, од $a_n<\sqrt{n}+1$ следува дека $a_{n-1}<\sqrt{n+\sqrt{n}+1}<\sqrt{n}+1$, а потоа дека $a_{n-2}<\sqrt{n}+1$ итн. па затоа $a_i<\sqrt{n}+1$, за секој i. Нека $k^2<n\leq(k+1)^2$. За некој j важи $\sigma(j)=k^2+1$. Бидејќи $a_j>k$ имаме $a_j=\sqrt{k^2+1+a_{j+1}}\geq k+1$, т.е. $a_{j+1}\geq 2k$. Меѓутоа, $a_{j+1}<\sqrt{n}+1$, па затоа $2k<\sqrt{(k+1)^2+1}$, од што следува $3k^2<2k+2$, па затоа $k\leq 1$, т.е. $n\leq 4$.

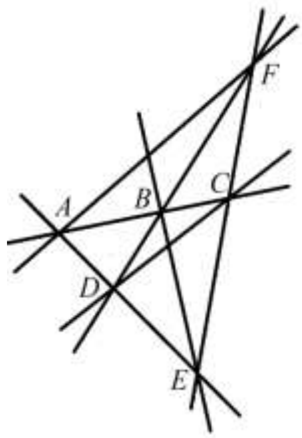
Ако $n=4$, тогаш $\sigma(4)=1$ или $\sigma(4)=4$. Во првиот случај мора да биде $\sigma(3)=3$ и $\sigma(2)=2$, па останува $\sigma(4)=1$, што не е решение. Во вториот случај се добива $(3)=(2)=2$, што не е можно. Слично и за $n=2$ немаме решение. За $n=1$ и $n=3$ решенија се $\sqrt{1}=1$ и $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1}}}=2$. Значи, $n\in\{1,3\}$.

44. Определи множество S со најмал број точки со кои се определени седум различни прави.

Решение. Нека S е множество точки кои определуваат 7 различни прави и нека $|S|=n$. Ако во множеството S не постојат три колинерани точки, тогаш тоа множество определува $\frac{n(n-1)}{2}$ различни прави. Ако ова множество определува 7 прави, тогаш $\frac{n(n-1)}{2}=7$, т.е. $n(n-1)=14$, што не е можно, бидејќи бројот 14 не е производ на два последователни природни броја. Според тоа, ниту едно множество во кое нема барем една тројка колинеарни точки не определува 7 различни прави.

Значи, во множеството S постои најмалку едно триелементно подмножество колинеарни точки. Ако имаме само едно триелементно подмножество колинеарни точки, тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2}-2$ различни прави. Имено, триелементното подмножество колинеарни точки определува само една права, а триелемнтното подмножество содржи три двоелементни подмножества, што значи дека една иста права сме ја броеле трипати. Затоа од $\frac{n(n-1)}{2}$ треба да одземеме 2. Така имаме $\frac{n(n-1)}{2}-2=7$, т.е. $n(n-1)=18$, што повторно не е можно.

Ако имаме точно две триелементни подмножества колинеарни точки, тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2}-2\cdot 2$ различни прави. Значи, треба да важи $\frac{n(n-1)}{2}-2\cdot 2=7$, т.е. $n(n-1)=22$, што повторно не е можно.

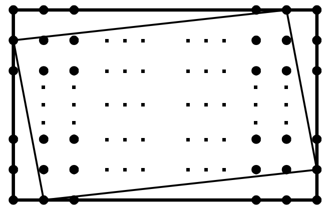


Ако имаме точно три триелементни подмножества колинеарни точки, тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2}-3\cdot 2$ различни прави. Значи, треба да важи $\frac{n(n-1)}{2}-3\cdot 2=7$, т.е. $n(n-1)=26$, што повторно не е можно.

Ако имаме точно четири триелементни подмножества колинеарни точки, но немаме подмноижество од четири колинеарни точки (четири колинеарни точки определуваат четири триелементни подмножества колинеарни точки), тогаш со ова множество се определени $\frac{n(n-1)}{2}-3\cdot 2$ различни прави. Значи, треба да важи $\frac{n(n-1)}{2}-4\cdot 2=7$, т.е. $n(n-1)=30$. Од последната равенка наоѓаме $n=6$. Според тоа, множество S од 6 точки, во кое постојат точно четири триелементни подмножества колинеарни точки и не постојат четири колинеарни точки определува точно 7 прави. Нека $S=\{A,B,C,D,E,F\}$, $S_1=\{A,B,C\}$, $S_2=\{A,D,E\}$, $S_3=\{B,D,F\}$, $S_4=\{C,E,F\}$. Ова множество ги определува правите $AB, AE, AF, BF, BE, CD, CE$ (види цртеж).

45. Правоаголник со димензии m и n, каде $m,n \in N$ со прави паралелни со неговите страни е поделен на единечни квадрати. Темињата на единечните делбени квадрати ги нарекуваме јазли. На секоја страна од правоаголникот е избран еден јазол, различен од неговите темиња. Четирите избрани јазли се темиња на конвексен четириаголник.

Кој е најголемиот број на јазли кој може да се најде во внатрешноста на овој четириаголник?



Решение. Јасно е дека во внатрешноста на избраниот конвексен четириаголник може да се најдат само внатрешни јазли на правоаголникот. Нивниот број е еднаков на $(m-2)(n-2)$. Ако ги избереме јазлите кои се темиња на конвексниот четириаголник, тогаш добиваме четириаголник кој ги содржи сите внатрешни јазли.

46. Во рамнина, 2014 прави се распоредени во три групи заемно паралелни прави. Кој е најголемиот број на триаголници кои ги образуваат правите (секоја страна од триаголникот лежи на некоја од правите).

Решение. Нека $a \geq b \geq c$ се броевите на прави во трите групи за кои се добива најголем број на триаголници. Тогаш $a+b+c=2014$, а најголемиот можен број на триаголници е abc (кога никои три прави немаат заедничка точка). Ќе докажеме дека $a \leq c+1$.

Да го претпоставиме спротивното, т.е. $a > c+1$. Тогаш

$$abc < b(ac+a-c-1) = b(a-1)(c+1),$$

што е противречно на изборот на a, b и c. Не може $a=c$, бидејќи во тој случај $a=b=c=\frac{2014}{3}$ не е цел број. За a, b и c да бидат цели мора $a=672$ и $b=c=671$ и бројот на триаголници е $672\cdot 671^2$.

47. Дадени се $2n$ ($n>1$) точки кои лежат во една рамнина. Правата p лежи во истата рамнина и не минува низ ниту една од дадените точки. Докажи дека правата сече не повеќе од n^2 отсечки чии краеви се во дадените точки.

Решение. Нека дадените точки и правата p лежат во рамнината π. Правата p ја дели рамнината π на две полурамнини π_1 и π_2. Ако во едната полурамнина лежат m точки, тогаш во другата полурамнина лежат $2n-m$ точки. Отсечки на кои двете крајни точки им се во иста полурамнина правата не ги сече. Правата ги сече отсечките, со крајни точки во дадените, на кои едниот крај му е во полурамнината π_1 а другиот крај им е во полурамнината π_2. Такви отсечки има $m(2n-m)$. Бидејќи

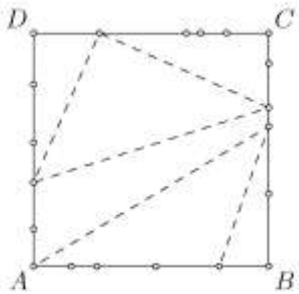
$$n^2 - m(2n-m) = n^2 - 2nm + m^2 = (n-m)^2 \geq 0,$$

добиваме дека $n^2 \geq m(2n-m)$.

Значи, правата не сече повеќе од n^2 отсечки.

48. На страните на квадратот $ABCD$ се земени $4n$ точки: сите четири темиња и уште по $n-1$ точка на секоја страна на квадратот. Определи го бројот на сите недегенирани триаголници чии темиња се овие точки.

Решение. Од дадените $4n$ точки можеме на $\binom{4n}{3}$ начини да избереме три точки. Меѓутоа, тие три точки ќе бидат темиња на триаголник само ако не лежат на иста страна. Да преброиме на колку начини можеме да избереме три точки на една страна на квадратот. На секоја страна имаме $n+1$ точка (вклучувајќи ги темињата), па затоа во случајот изборот може да се направи на $\binom{n+1}{3}$ начини. Ова важи за сите четири страни на квадратот, па затоа бараниот број триаголници е еднаков на $\binom{4n}{3}-4\binom{n+1}{3}$.



49. Даден е правилен $n-$аголник, $n \geq 6$. Колку триаголници има со темиња во темињата на $n-$аголникот, чии страни се дијагоналите на $n-$аголникот?

Решение. Нека $A_1A_2...A_n$ е правилен $n-$аголник. Да ги разгледаме бараите триаголници за кои едно теме е A_1. Ова теме може да се поврзе со било кое теме од $n-$аголникотот, освен со темињата A_2 и A_n. Такви две точки може да се изберат на $\binom{n-3}{2}$ начини. Од овој број треба да го одземеме бројот на триаголниците од видот $A_1A_kA_{k+1}$, $k=3,4,...,$ $n-2$, кои ги има $n-4$ на број, па затоа A_1 е теме на $\binom{n-3}{2}-(n-4)$ такви триаголници. Ако постапката ја повториме за останатите темиња, секој триаголник ќе го броиме триапти, па затоа бараниот број триаголници е еднаков на

$$\frac{1}{3}n[\binom{n-3}{2}-(n-4)]=\frac{n(n-4)(n-5)}{6} .$$

50. Во рамнината се дадени $n>4$ точки такви што меѓу нив нема три колинеарни. Докажи, дека постојат најмалку $\binom{n-3}{2}$ конвексни четириаголници чии темиња се во дадените точки.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Секои 5 точки меѓу кои нема три колинеарни определуваат најмалку еден конвексен четириаголник.

Доказ. Нека S е конвексната обвивка на дадените точки. Ако S е петаголник, тогаш ќе отстраниме било кој од петте точки и добиваме конвексен четириаголник. Всушност тогаш постојат 5 конвексни четириаголници (цртеж а)). Ако S е четириаголник, тогаш петтата точка се наоѓа во внатрешноста, па нема што да докажуваме (цртеж b)). Ако S е триаголник, тогаш две од останатите точки припаѓаат во неговата внатрешност (цртеж c)). Правата ни овие две точки сече две страни од триаголникот, па ако го отстраниме заедничкото теме на овие страни, тогаш останатите четири точки се темиња на конвексен четириаголник (зошто?). ■

Да се вратиме на задачата. Ги разгледуваме сите комбинации од по 5 точки. Нив ги има $\binom{n}{5}$. Секоја комбинација содржи подмножество од четири точки кои се темиња на конвексен четириаголник. Секое теме на четириаголникот е вклучено во $n-4$ комбинации. Значи, постојат барем $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5}$ конвексни четириаголници, кои припаѓаат на даденото множество точки. Останува да докажеме дека $\frac{1}{n-4}\binom{n}{5} \geq \binom{n-3}{2}$. Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(n-5)(n-6)(n+8) \geq 0\,.$$

која е точна за секој $n>4$.

a) b) c)

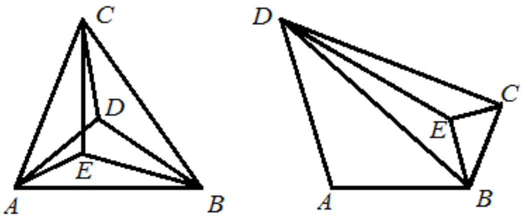
Забелешка. За $n=5$ важи знак за равенство (цртеж c) кога постои само еден конвексен четириаголник). Меѓутоа, за $n>5$ вистинскиот број на конвексни четириаголници е поголем од оваа оценка. Имено, на авторот му е познато е дека тој поголем од $\frac{1}{5}\binom{n}{4}$, но не му е познато дали постои подобра оценка.

51. Во рамнина се дадени 100 точки, меѓу кои не постојат три колинеарни точки. Да ги разгледаме сите триаголници со темиња во дадените точки. Докажи дека најмногу 70% од овие триаголници се остроаголни.

Решение. *Лема.* Во рамнина дадени се пет точки, такви што било кои три се неколинеарни. Тогаш постојат три триаголници со темиња во тие точки кои не се остроаголни.

Доказ. Ги разгледуваме трите можни случаи.

(a) Конвексната обвивка на точките е триаголникот ABC. Меѓу аглите BDA, CDB и ADC барем два не се остри. Слично се гледа дека меѓу триаголниците BEA, CEB и AEC барем два не се остроаголни. Значи, во овој случај постојат барем четири триаголници кои не се остроаголни.

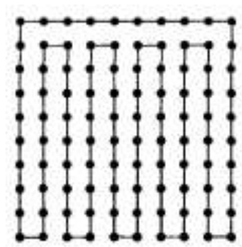


(b) Конвексната обвивка на дадените точки е четириаголник $ABCD$. Јасно, барем еден триаголник со темиња во точките A,B,C,D не е остроаголен. Нека точката E е во триаголникот BCD (таа не може да припаѓа на дијагонала на четириаголникот $ABCD$, бидејќи било кои три точки се неколинеарни). Тогаш барем два од триаголниците BED, BCE и CDE не се остроаголни. Значи и во овој случај постојат барем три триаголници кои не се остроаголни.

(c) Нека конвексната обвивка на дадените точки е конвексен петаголник. Ако четири агли од овој петаголник се остри, тогаш збирот на аглите би бил помал од $4\cdot 90^\circ + 180^\circ = 540^\circ$, што не е можно. Претпоставувме дека острите агли се наоѓаат во темињата A, B и C. Барем еден од аглите на конвексниот четириаголник $ACDE$ не е остар. Затоа постојат барем три темиња кај кои аглите не се остри. ■

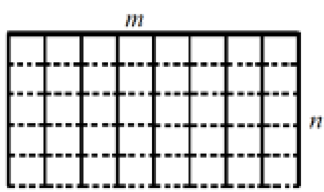
Од 100 точки може да се изберат $3\cdot\binom{100}{5}$ триаголници кои не се остроаголни. Еден ист триаголник се појавува во $\binom{97}{2}$ петорки темиња. Затоа бројот на триаголниците кои не се остроаголни е поголем или еднаков на $\frac{3\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}}$. Но, бројот на сите триаголници е $\binom{100}{3}$, па затоа бројот на остроаголните триаголници е помал или еднаков на $\binom{100}{3}-\frac{3\binom{100}{5}}{\binom{97}{2}}$. Конечно, односот на бројот на остроаголни триаголници и вкупниот број на триаголници не може да биде поголем од $1-\frac{3\binom{100}{5}}{\binom{100}{3}\binom{97}{2}}=0,7$, што значи дека веројатноста да биде избран остроаголен триаголник е помала или еднаква на 70%.

52. Десет улици во еден град се паралелни една на друга, а другите десет ги сечат под прав агол. Колку најмалку кривини може да има затворена маршрута која минува низ сите раскрсници на дваесетте улици?



Решение. Пример со 20 кривини е даден на цртежот десно. Ќе докажеме дека не е можно да има помалку од 20 кривини. Да разгледаме 10 улици со ист правец. Ако маршрутата минува низ секоја, таа на секоја од нив има најмалку 2 кривини и тврдењето е докажано. Ако меѓу нив има улица по која маршрутата не минува, тогаш таа мора да минува низ сите 10 улици кои се нормални на неа. Овие 10 улици се со ист правец, па значи маршрутата на секоја од нив има најмалку по 2 кривини.

53. Еден град има мрежа од m „хоризонтални“ и n „вертикални“ улици, при што секои две соседни раскрсници се еднакво оддалечени. Определи ја најмалата должина која треба да се асфалтира така што од секоја раскрсница до секоја раскрсница може да се стигне по асфалтен пат.



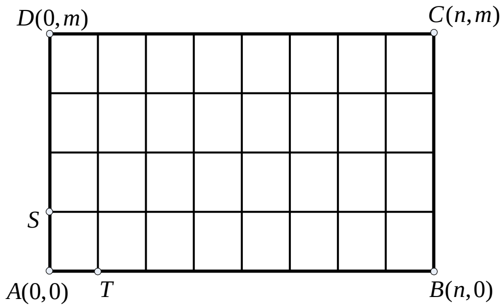
Решение. Во градот има mn раскрсници. Делот од улицата меѓу две соседни раскрсници ќе го наречеме сокак. Ако тргнеме од една раскрсница, за да поминеме низ секоја од останатите раскрсници, движејќи се по асфалтен дел од мрежата, мора да асфалтираме најмалку $mn-1$ сокак (до секоја следна раскрсница стигнуваме по нов сокак). На цртежот е прикажана мрежа на која се асфалтирани $m(n-1)+m-1=mn-1$ сокаци, при што секои две раскрсници се поврзани со асфалтен пат.

54. Правоаголник со димензии m и n каде што m и n се природни броеви и $n=mk$ е разделен на $m\cdot n$ единечни квадрати. Секој пат од точката A до точката

C по делбените отсечки (страните на малите квадрати) при што е дозволено движење надесно и движење на нагоре, има должина $m+n$. Најди колку пати бројот на патишта од A до C што минуваат низ точката T е поголем од бројот на патишта од A до C што минуваат низ точката S.

Решение. Секој пат од A до C ќе го означиме со нули и единици, при што со единица го означуваме движењето нагоре за единица должина, а со нула го означуваме движењето надесно за единица должина. Според тоа, бројот на патишта низ точката T е

$$C_{m+n-1}^{n-1} = \binom{m+n-1}{n-1},$$



а бројот на патишта низ точката S е

$$C_{m+n-1}^{m-1} = \binom{m+n-1}{m-1}.$$

Бидејќи

$$\frac{C_{m+n-1}^{m-1}}{C_{m+n-1}^{n-1}} = \frac{\binom{m+n-1}{m-1}}{\binom{m+n-1}{n-1}} = k,$$

следува дека бројот на патишта низ точката T е за $k-$пати поголем од бројот на патишта низ точката S.

55. Во темето A на коцката $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стои мравка. Мравката патува 2015 минути, при што секоја минута поминува преку раб до соседно теме. Нека m е бројот на патеките со кои мравката своето патување го завршува во темето B, а n е бројот на патеките со кои таа своето патување го завршува во темето C_1. Пресметај ја вредноста на изразот $m-n$.

Решение. Нека m_k е бројот на патеките при кои после k минути мравката е во B. Поради симетрија овој број е еднаков на бројот на патеките и до D и до A_1. Нека n_k е бројот на патеките при кои после k минути мравката е во C_1. Нека p_k е бројот на патеките при кои после k минути мравката е во B_1. Поради симетрија тој број е еднаков на бројот на патеките и до C и до D_1. Нека q_k е бројот на патеките при кои после k минути мравката е во A. Имаме

$$m_{k+1} = q_k + 2p_k,\ n_{k+1} = 3p_k,\ p_{k+1} = n_k + 2m_k,\ q_{k+1} = 3m_k.$$

Според тоа,

$$m_{k+1} - n_{k+1} = q_k + 2p_k - 3p_k = q_k - p_k \text{ и } q_{k+1} - p_{k+1} = 3m_k - n_k - 2m_k = m_k - n_k,$$

па затоа

$$m - n = m_{2015} - n_{2015} = q_{2014} - p_{2014} = m_{2013} - n_{2013} = \dots$$
$$= m_3 - n_3 = q_2 - p_2 = m_1 - n_1 = q_0 - p_0 = 1.$$

56. Во една држава има повеќе од 7 градови. Докажи, дека не постои мрежа од еднонасочни патишта со следниве својства:

1) меѓу секои два града постои точно еден директен пат,
2) за секои два града A и B постои точно еден град во кој директно може да се стигне и од A и од B,

3) за секои два града A и B постои точно еден град од кој директно може да се стигне и во A и во B.

Решение. Нека претпоставиме дека меѓу градвите $A_1, A_2, ..., A_n, (n>7)$ постои мрежа еднонасочни патишта таква што се исполенти условите 1), 2) и 3). Да го означиме со A_iA_j патот со почеток во A_i и крај во A_j, а множеството од сите патиќта со P. За секој $k \in \{1,2,...,n\}$ нека

$$B_k = \{A_i \mid A_kA_i \in P\} \text{ и } C_k = \{A_j \mid A_jA_k \in P\}.$$

Ако за некој i важи $A_i \in B_k$, тогаш од условот 3) следува дека постои точно еден град A_j таков што $A_jA_i \in P$ и $A_jA_k \in P$, па за A_j важи $A_j \in C_k$. Според тоа, $|B_k| \leq |C_k|$.На сличен начи, користејќи го условот 2) се докажува дека $|B_k| \geq |C_k|$. Според тоа, за секој $k \in \{1,2,...,n\}$ важи $|B_k| = |C_k|$. Од условот 1) следува дека $n = 1 + |B_k| + |C_k| = 1 + 2|B_k|$, т.е. n е непарен број. Стваме $n = 2r+1, |B_k| = |C_k| = r$.

Нека

$$P_k = \{(i,j) \mid i<j, A_kA_i \in P, A_kA_j \in P\}.$$

Од условот 3) следува дека за секој пар $(i,j), i<j$ постои точно еден број $k \in \{1,2,...,n\}$ таков што важи $(i,j) \in P_k$. Значи, множествата $P_1, P_2, ..., P_{2r+1}$ се дисјунктни по парови и според 1) важи

$$|P| = |P_1 \cup P_2 \cup ... \cup P_{2r+1}| = |P_1| + |P_2| + ... + |P_{2r+1}|.$$

Бидејќи $|B_k| = r$, т.е. од градот A_k може директно да се стигне во r други градови добиваме $|P_k| = \binom{r}{2}$. Но, $|P| = \binom{2r+1}{2}$, па затоа

$$\binom{2r+1}{2} = |P| = |P_1| + |P_2| + ... + |P_{2r+1}| = (2r+1)\binom{r}{2},$$

од каде наоѓаме $r=3$, т.е. $n=7$, што противречи на претпоставката.

За држава со 7 градови може да се конструира мрежа која ги задоволува условите на задачата. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

57. Во една држава постојат n, $n \geq 2$ градови. Некои од нив се поврзани со патишта. Познато е дека ако меѓу два града не постои директен пат, тогаш постои град со кој двата града се поврзани со директен пат. Определи го најмалиот можен број патишта во државата.

Решение. Ќе докажеме дека во државата има најмалку $n-1$ пат.

Нека A е еден од градовите и нека од него поаѓаат k патишта. Ако $k=n-1$, тогаш нема што да се докажува. Нека $k<n-1$ и нека A е директно поврзан со градовите $A_1, A_2, ..., A_k$, а не е поврзан со градовите $A_{k+1}, A_{k+2}, ..., A_{n-1}$. Но, тогаш од секој од градовите $A_{k+1}, A_{k+2}, ..., A_{n-1}$ постои барем еден пат до некој од градовите $A_1, A_2, ..., A_k$. Според тоа, во државата има најмалку $k+(n-1-k)=n-1$ пат.

Понатаму, ако фиксен град се поврзе со директен пат со секој од останатите $n-1$ градови, добиваме мрежа од $n-1$ пат која ги задоволува условите на задачата.

58. Во една држава има $n, n \geq 4$ градови. Некои од нив се поврзани со патишта. Познато е дека ако меѓу два града не постои директен пат, тогаш постојат најмалку два града кои со секој од двата неповрзани градови се поврзани со директен пат. Определи го најмалиот можен број патишта во државата.

Решение. Ќе докажеме дека во државата има најмалку $2n-4$ патишта.

Нека X е произволен град. Бројот на патиштата кои поаѓаат од градот X го нарекуваме степен на градот X. Јасно степенот на секој град е поголем или еднаков на 2. Можни се следниве случаи:

1) постои град со степен еднаков на 2,
2) не постои град со степен еднаков на 2, но постои град со степен еднаков на 3 и
3) степенот на секој град е поголем или еднаков на 4.

Одделно ќе го разгледаме секој од овие случаи.

1) Нека градот A е поврзан само со градовите B и C. Според условот на задачата, бидејќи секој друг град не е поврзан со A, тој мора да е поврзан со B и C. Значи, во земјата постојат најмалку $2(n-3)+2=2n-4$ патишта.
2) Нека градот A е поврзан само со градовите $B, C,$ и D. Ако A, B, C и D се единствени градови во државата, тогаш бидејќи сите имаат степен 3, во државата има $\frac{4 \cdot 3}{2}=6>4=2 \cdot 4-4$ патишта. Нека во државата постои град различен од градовите A, B, C и D. Според условот на задачата, бидејќи секој друг град не е поврзан со A тој мора да е поврзан со два од градовите $B, C,$ и D. Според тоа, во земјата постојат најмалку $2(n-4)+3=2n-5$ патишта, при што се броени само патиштата од A кон $B, C,$ и D, и од другите градови кон $B, C,$ и D се броени само по два пата. Но степенот на градот кој е различен од градовите A, B, C и D е 3, па затоа во државата постојат најмалку $2n-5+1=2n-4$ патишта.
3) Во овој случај вкупниот број на патишта е поголем или еднаков на $\frac{4 \cdot n}{2}=2n>2n-4$.

Останува уште да покажеме дека $2n-4$ патишта се доволни за бараниот вид поврзување. Ако фиксни два града A и B ги поврземе со секој друг град, тогаш ваквата мрежа од $2(n-2)=2n-4$ патишта ги задоволува условите на задачата.

59. Во една држава има $n, n \geq 4$ градови. Некои од нив се поврзани со патишта. Познато е дека за секои два града постои град кој со секој од двата града е поврзан со директен пат. Определи го најмалиот можен број патишта во државата.

Решение. Ќе докажеме дека $n-1+[\frac{n}{2}]$ патишта се доволни за бараниот вид поврзување.

Нека $n=2k+1, k \geq 2$. Избираме град A и го поврзуваме со сите други градови. Останатите $2k$ градови ги делиме во k парови и ги поврзуваме градовите од секој пар. Ваквата патна мрежа има $3k=n-1+[\frac{n}{2}]$ патишта и ги задоволува условите на задачата.

Нека $n=2k, k \geq 2$. Избираме град A и го поврзуваме со сите други градови. Останатите $2k-1$ градови ги делиме во $k-2$ парови и една тројка градови

B, C, D Ги поврзуваме градовите од секој пар и го поврзуваме градот B со градовите C и D. Ваквата патна мрежа има $2k-1+k-2+2=n-1+[\frac{n}{2}]$ и ги задоволува условите на задачата.

Ќе докажеме дека се потребни најмалку $n-1+[\frac{n}{2}]$ патишта. Јасно, секој пат има степен (број на патишта кои што поаѓаат од него) поголем или еднаков на 2. Ако степенот на секој град е најмалку 3, тогаш бројот на патиштата е поголем или еднаков на $\frac{3n}{2}$. Бидејќи $n-1+[\frac{n}{2}]<n-1+\frac{n}{2}<\frac{3n}{2}$, следува дека се потребни најмалку $n-1+[\frac{n}{2}]$ патишта.

Нека постои град A со степен 2, кој е поврзан само со градовите B и C. За градовите A и B постои град кој е поврзан и со двата града, па како A е поврзан само уште со C, добиваме дека B и C се поврзани. Со M да го означиме множеството од преостанатите $n-3$ градови. За градот X од M и градот A постои град кој е поврзан и со X и со A, што значи дека X е поврзан со еден од градовите B или C. Значи, во државата има најмалку $3+n-3=n$ патишта, при што се броеви само патиштата меѓу градовите A, B, C и од градовите од M кон градовите B и C. Но степенот на секој град е најмалку 2, па затоа од секој град на множеството M поаѓа најмалку уште по еден пат, што значи дека во државата има најмалку уште $[\frac{n}{2}]-1$ патишта, што значи дека вкупниот број патишта е поголем или еднаков на $n-1+[\frac{n}{2}]$.

60. Секои два града во една држава се поврзани со еднонасочен пат така што не постои затворена маршрута. Дали е можно за поминувањето по секој пат да се наплатува патарина (за различните патишта патарините може да се различни) така што за секои два града A и B патарина која се плаќа за секоја маршрута, која почнува во A и завршува во B, да биде една иста?

Решение. Ако од секој град излегува барем еден пат, тогаш тргнувајќи од произволен град ќе формираме затворена маршрута (бидејќи влегувајќи воеден град секогаш можеме да излеземе по некој пат). Според тоа, има град од кој не излегува ниту еден пат. Разгледувајќи ги останатите градови, со индукција добиваме, дека градовите може да се наредат во низа $A_1, A_2, ..., A_n$ при што патот меѓу секои два града е кон градот со поголем број. На патот A_iA_j, $i<j$ да ставиме патарина $j-i$. Тогаш секоја маршрута меѓу два града A_p и A_q за $p<q$ има цена $q-p$, што значи дека одговорот на поставеното прашање е позитивен.

61. Една држава има 2012 градови. Некои од градовите се директно поврзани со патишта, но така што од секој град да може да се стигне до секој друг град. Познато е дека ако два града се поврзани со пат, тогаш вкупниот број патишта кои излегуваат од тие градови е непарен број. Колкав е најголемиот број патишта?

Решение. Градовите да ги поделиме во две групи P и Q на следниов начин. Во P влегуваат сите градови од кои излегуваат парен број патишта, а во Q влегуваат сите градови од кои излегуваат непарен број патишта. Нека $|P|=p$ и

$|Q|=q$, при што важи $p+q=2012$. Според условот на задачата не постои пат кој поврзува два града од P или два града од Q. Тоа значи дека секој пат поврзува град од P со град од Q. Бидејќи од секој град од P излегуваат парен број патишта, заклучуваме дека вкупниот број патишта е парен број. Оттука и од условот дека од секој град од Q излегуваат непарен број патишта следува дека q е парен број.

Бидејќи $p+q=2012$, заклучуваме дека p исто така е парен број. Според тоа, од секој град од Q излегуваат најмногу $p-1$ патишта. Значи, ако $p=2p_0$, $q=2q_0$, тогаш имаме најмногу $2q_0(2p_0-1)$ патишта. Бидејќи

$$2q_0+(2p_0-1)=2011,$$

заклучуваме дека најголемата вредност на $2q_0(2p_0-1)$ се достигнува кога $2q_0$ и $2p_0-1$ се скоро еднакви, т.е. кога $2q_0=1006$ и $2p_0-1=1005$. Тогаш имаме $1005\cdot 1006=1011030$ патишта.

Ќе дадеме пример во кој патиштата се точно $1005\cdot 1006$. Нека $A_1,A_2,...,A_{1006}$ и $B_1,B_2,...,B_{1006}$ се градовите во P и Q, соодветно. Го поврзуваме секој од градовите $B_1,B_2,...,B_{1004}$ со секој од градовите $A_1,A_2,...,A_{1005}$. Ги поврзуваме градовите B_{1005} и B_{1006} со секој од градовите $A_2,A_3,...,A_{1006}$. Јасно, бројот на патиштата е $1005\cdot 1006$ и од секој град може да се стигне до секој друг град.

62. Во Недојдија има 60 градови и секои два се поврзани со едносмерен пат. Докажи дека четири од градовите може да се обојат во црвено, а други четири во зелено ака што патиштата меѓу црвените и зелени граови да се во насока од црвен кон зелен град.

Решение. Ќе велиме дека градот A го опслужува на градот B ако патот меѓу A и B е во насока од A кон B. Во овој случај ќе велиме и дека патот меѓу A и B излегува од A. Според тоа, градот A ги опслужува градовите B_1,B_2,B_3,B_4 ако патиштата меѓу A и B_i се во насока од A кон B_i, за $i=1,2,3,4$, т.е. патиштата A и B_i излегуваат од A. Јасно, ако еден град опслужува k градови, тој опслужува C_k^4 четворки градови. Нека броевите на патиштата кои излегуваат од сите 60 градови се $k_1,k_2,...,k_{60}$. Тоа се сите можни патишта и нивниот број е $C_{60}^2=59\cdot 30$. Понатаму, вкупниот број опслужувани четворки градови е $S=C_{k_1}^4+C_{k_2}^4+...+C_{k_{60}}^4$. Ќе докажеме дека најмалата вредност на овој збир при услов $k_1+k_2+...+k_{60}=59\cdot 30$ е еднаква на $30C_{30}^4+30C_{29}^4$. Навистина, множеството подреден шеесетторки $(k_1,k_2,...,k_{60})$ од природни броеви чиј збир е $59\cdot 30$ е конечно и затоа една од овие шеесетторки го определува најмалиот збир S. Нека претпоставиме во $(k_1,k_2,...,k_{60})$ постојат два броја $m\geq 4$ и n такви што $m-n\geq 2$. Ако ги замениме m и n со $m-1$ и $n+1$, тогаш збирот се намалува за

$$C_m^4+C_n^4-C_{m-1}^4-C_{n+1}^4=C_{m-1}^3-C_n^3>0.$$

Последното значи дека најмалата вредност на S се достигнува за за шеесетторка

$(k_1, k_2, ..., k_{60})$ во која разликата на секои два броја е помала или еднаква на 1. Оваа шеесетторка е единствена и од $k_1 + k_2 + ... + k_{60} = 59 \cdot 30$ следува дека таа е составена од 30 броја еднакви на 30 и 30 броја еднакви на 29. Според тоа, сите 60 градови се опслужени од најмалку $30C_{30}^4 + 30C_{29}^4$ четворки. Лесно се проверува дека овој број е поголем од $3C_{60}^4$, т.е.од тројниот збир на сите четворки. Тоа значи дека постои четворка која опслужува најмалку 4 града, што и требаше да се докаже.

63. Дадена е бесконечна табела, формирана според следниве правила:

1) во горниот лев агол е запичан бројот 4,
2) броевите во секој ред и секоја колона се запишани во растечки редослед при што разликата меѓу секои два броја во $i-$тиот ред е $2i+1$, а разликата меѓу секои два соседни броја во $j-$тата колона е $2j+1$.

4	7	10	13	16	...
7	12	17	22	27	...
10	17	24	31	38	...
13	22	31	40	49	...
16	27	38	49	60	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

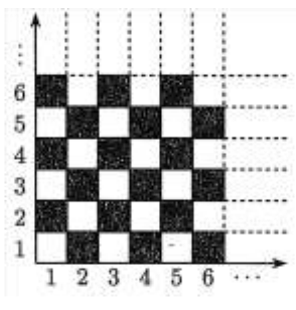
На колку места во табелата се појавува бројот $N = \frac{2013^{2013}-1}{2}$?

Решение. Забележуваме дека во пресекот на $i-$тиот ред и $j-$тата колона е запишан бројот $2ij + i + j$. Според тоа, ако бројот M се појавува во табелата важи $2M+1 = (2i+1)(2j+1)$, за некои $i, j \in \mathbb{N}$. Обратно, ако $2M+1 = ab$ и $a \neq 1, b \neq 1$, тогаш a и b се непарни броеви и бројот M се јавува во пресекот на редот $i = \frac{a-1}{2}$ и колоната $j = \frac{b-1}{2}$. Според тоа, бројот на јавувањата на N во табелата е еднаков на бројот на подредените парови (a,b) за кои $2N+1 = ab$, $a \neq 1, b \neq 1$. Овој број е за 2 помал од бројот на делителите на бројот $2N+1$. Така, за $N = \frac{2013^{2013}-1}{2}$ имаме

$$2N+1 = 2013^{2013} = 3^{2013} \cdot 11^{2013} \cdot 61^{2013},$$

кој има $(2013+1)^3 = 2014^3$ делители, па затоа бараниот број на појавувања на бројот $N = \frac{2013^{2013}-1}{2}$ е $2014^3 - 2$.

64. Дадена е бесконечна шаховска табла, поставена во првиот квадрант, чии полиња се обоени со бела и црна боја, а редовите и колоните се нумерирани со броевите 1, 2, 3, ... (цртеж десно). На почетокот на полето $(1,1)$ е поставен жетон. На секој чекор се избира еден од веќе поставените жетони и се заменува со два нови жетони според следново правило: ако на таблата има k жетони и избраниот жетон е на полето (i, j), тогаш двата нови жетона се поставуваат на полињата $(i, k+1)$ и $(k+1, j)$.



Определи го бројот на достижните конфигурации, кои се состојат од n жетони распоредени само на црните полиња.

Решение. Нека на таблата се поставени n жетони. Очигледно не постојат два жетони кои се во линија (Зошто?). На секоја конфигурација еднозначно можеме да и придружиме пермутација на броевите $1,2,3,...,n$ на следниот начин: ако жетоните имаат позиции

$$(1,a_1),(2,a_2),...,(n,a_n)$$

$\{a_1,a_2,...,a_n\}=\{1,2,...,n\}$, тогаш придружената пермутација на оваа конфигурација е

$$\pi=\binom{1\quad 2\quad 3\quad \dots\quad n}{a_1\quad a_2\quad a_3\quad \cdots\quad a_n}.$$

Со индукција по n се покажува дека оваа пермутација е циклус

$$i_1\to i_2\to i_3\to...\to i_n\to i_1,$$

$\{i_1,i_2,...,i_n\}=\{1,2,...,n\}$. Понатаму, полето (i,j) е црно ако и само ако $i+j$ е непарен број. Според тоа, за горниот циклус важи

$$i_1+i_2\equiv i_2+i_3\equiv...\equiv i_{n-1}+i_n\equiv i_n+i_1\equiv 1 \pmod 2.$$

Останува да забележиме, дека кога n е непарен број не постои циклус со даденото својство, а кога n е парен број, тогаш бараниот број на конфигуирации е

$$(\tfrac{n}{2})!(\tfrac{n-2}{2})!.$$

65. На кружница се обележени n точки. Кој е најголемиот можен број на остроаголни триаголници со темиња во тие точки?

Решение. Ако постојат две точки кои се дијаметрално спротивни, тогаш едната од нив можеме да ја поместиме по кружницата на доволно мало растојание така што и двете точки да учествуваат само во остроаголни и тапоаголни триаголници, при што бројот на остроаголните триаголници не се намалува после преместувањето на едната од точките. Според тоа, можеме да сметаме дека имаме само тапоаголни и остроаголни триаголници.

Да разгледмае произволна точка A чиј центар е X. Тогаш точката A учествува во формирање на тапоаголен триаголник и не е теме на тапиот агол ако и само ако останатите две темиња се наоѓаат во иста полурамнина во однос на правата AX. Во случајов бројот на тапоаголните триаголници е еднаков на $\binom{a}{2}+\binom{b}{2}$, каде a и b се броевите на точките во една и иста полурамнина во однос на правата AX, соодветно. Имаме $a+b=n-1$ и

$$\binom{a}{2}+\binom{b}{2}=\frac{a^2+b^2-a-b}{2}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2-2(a+b)}{4}=\frac{(n-1)^2+(2a-(n-1))^2-2(n-1)}{4}$$

$$=a^2-(n-1)a+\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Ако $n=2k+1$, тогаш функцијата

$$a^2-(n-1)a+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=a^2-2ka+k(2k-1)$$

има минимум за $a=k=\frac{n-1}{2}$, па затоа $b=\frac{n-1}{2}$ и во случајот минималниот број тапоаголни триаголници е еднаков на $\frac{n}{2}\binom{(n-1)/2}{2}$. Ако $n=2k$, тогаш најмалите целобројни вредности на функцијата

$$a^2-(n-1)a+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=a^2-(2k-1)a+(2k-1)(k-1)$$

се достигнуваат за $a=k=\frac{n}{2}$ и $a=k-1=\frac{n-2}{2}$. Притоа, $b=\frac{n-2}{2}$ и $b=\frac{n}{2}$, соодветно и во случајов минималниот број тапоаголни триаголници е еднаков на $\frac{n}{2}(\binom{(n-2)/2}{2})+\binom{n/2}{2})$. Останува од вкупниот број триаголници, кој е еднаков на $\binom{n}{3}$ да ја одземеме најдената оценка.

Пример за $n=2k+1$ е правилен $n-$аголник, а за $n=2k$ доволно е да разгледаме правилен $n-$аголник кај кој k последователни точки се ротирани за еднаков доволно мал агол во однос на центарот на кружницата.

66. Мравка се наоѓа во координатниот почеток O. Секоја секунда таа минува пат од $1cm$ во некоја од насоките исток, запад, север или југ. После m секунди мравката повторно се вратила во точката O. Ако бројот на можните маршрути на мравката е делив со 2015, определи ја најмалата можна вредност на m.

Решение. Со буквите И, З, С и Ј ги кодираме насоките исток, запад, север и југ, соодветно. Јасно колку што имаме букви С треба да имаме и букви Ј и нека се по k, а колку што имаме букви И треба да имаме букви З и нека се по $n-k$, каде $m=2n$. Бројот на овие кодови е еднаков на

$$\frac{(2n)!}{k!k!(n-k)!(n-k)}=\binom{2n}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

Според тоа, вкупниот број на маршрути е еднаков на

$$\binom{2n}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}^2.$$

Во претходното равенство го искористивме равенството

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n},$$

кое може да се докаже, на пример, на следниов начин: ако во група имаме n момчиња и n девојчиња, тогаш левата страна на последното равенство го дава бројот на начините на избор на n деца, а десната страна во секоја група од n деца да има k момчиња и $n-k$ девојчиња, $k=0,1,...,n$.

Останува да го определиме најмалиот n за кој $\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n!n!}$ се дели со $2015=5\cdot 12\cdot 31$. Заради деливоста со 31 потребно е $n\geq 16$. Вредностите $n=16,17,18,19$ не се можни, бидејќи за овие вредности степените на 13 во броителот и именителот на $\frac{(2n)!}{n!n!}$ се еднакви. За $n=20$ степените на 5, 13 и 31 во броителот на $\frac{(2n)!}{n!n!}$ се поголеми од соодветните степени во именителот, па затоа најмалата можна вредност на m е $m=2n=40$.

67. На секој ѕид на една коцка дадени се по n точки така што било кои три точки не се колинеарни и ниту една точка не лежи на рабовите на коцката.

а) Колку прави што не лежат на ѕидовите на коцката се определени со дадените точки?

б) Колку триаголници што не лежат на ѕидовите на коцката се определени со дадеите точки?

в) Ако ѕидовите на коцката се обојат со различни бои, колку тетраедри со темиња во дадените точки имаат:

i) три истобојни темиња,

ii) две по две истобојни темиња.

Решение. а) Коцката има 6 ѕидови,што значи дека вкупно имаме $6n$ точки. Бидејќи било кои три точки кои лежат на еден ѕид не се колинеарни и не постојат три колинеарни точки кои лежат на различни ѕидови, со овие $6n$ точки се определени $\binom{6n}{2}$ прави. Бројот на правите кои лежат на еден ѕид е $\binom{n}{2}$, па затоа бараниот број е

$$\binom{6n}{2}-6\binom{n}{2}=15n^2.$$

б) На сличен начин добиваме дека бројот на триаголниците определени со дадените $6n$ точки, а кои не лежат на еден ѕид на коцката е

$$\binom{6n}{3}-6\binom{n}{3}=5n^2(7n-3).$$

в) За три темиња да бидат истобојни, тие мора да лежат на ист ѕид од коцката. Според тоа, бројот наосновите на тетраедрите е еднаков на $6\binom{n}{3}$. Една од овие основи, заедно со било која од останатите $5n$ точки формира тетраедар. Според бараниот број тетраедри е

$$6\binom{n}{3}\cdot 5n=5n^2(n-1)(n-2).$$

Аналогно како претходниот случај наоѓаме дека кога две по две темиња на тетраедарот се истобојни, тогаш бројот на тетраедрите е еднаков на

$$\binom{6}{2}\binom{n}{2}\binom{n}{2}=\frac{15}{4}n^2(n-1)^2.$$

68. Да ги разгледаме сите природни броеви чии записи во систем со основа 2 имаат 2013 цифри и содржат повеќе нули отколку единици. Нека n е бројот на тие броеви, а s е нивниот збир. Докажи дека записот на бројот $n+s$ во систем со основа 2 содржи повеќе нули отколку единици.

Решение. Почетната цифра на секој од разгледуваните броеви е 1 и бидејќи бројот на нулите е поголем од бројот на единиците, следува дека бројот на нулите е природен број кој припаѓа на интервалот $[1007,2012]$. Според тоа,

$$\begin{aligned}n&=\binom{2012}{1007}+\binom{2012}{1008}+\ldots+\binom{2012}{2011}+\binom{2012}{2012}=\frac{2^{2012}-\binom{2012}{1006}}{2}\\&=2^{2011}-\frac{1}{2}\binom{2012}{1006}=2^{2011}-\binom{2011}{1005}.\end{aligned}$$

За да го определиме s ќе го разгледаме бројот на единици во фиксирано место. Почетната цифра на сите броеви е единица. Да разгледаме произволно место на останатите. Без почетната цифра и разгледуваната цифра, на останатите 2011 места треба да имаме барем 1007 нули. Според тоа, тој број е еднаков на

$$\binom{2011}{1007}+\binom{2011}{1008}+\ldots+\binom{2011}{2010}+\binom{2011}{2011}=2^{2010}-\binom{2011}{1006}=2^{2010}-\binom{2011}{1005}.$$

Според тоа,

$$s=2^{2012}n+\left(2^{2010}-\binom{2011}{1005}\right)\sum_{i=0}^{2012}2^i=2^{2012}n+\left(2^{2010}-\binom{2011}{1005}\right)(2^{2012}-1),$$

па затоа

$$\begin{aligned}n+s&=2^{2011}-\tbinom{2011}{1005}+2^{2012}(2^{2011}-\tbinom{2011}{1005})+(2^{2010}-\tbinom{2011}{1005})(2^{2012}-1)\\&=2^{4023}+2^{4022}+2^{2010}-2^{2013}\tbinom{2011}{1005}\\&=2^{2013}(2^{2010}+2^{2009}-\tbinom{2011}{1005})+2^{2010}.\end{aligned}$$

Бидејќи $n+s<2^{4024}$, бинарниот запис на $n+s$ има најмногу 4024 цифри, а од

$$n+s=2^{2013}(2^{2010}+2^{2009}-\tbinom{2011}{1005})+2^{2010}$$

следува дека последните 2012 од 2013 цифри се нули. Ако допуштиме, дека во бинарниот запис на $n+s$ има повеќе нули од единици, тогаш првите 2012 цифри треба да се единици. Број со такво својство е бројот

$$2^{2013}(1+2+...+2^{2010})+2^{2010}$$

и ово број е поголем од $n+s$, што е противречност.

69. Даден е природен број n. Во рамнината се избрани точки $P_1,P_2,...,P_{4n}$ такви што никои три од нив не лежат на иста права. Познато е дека за секој $i=1,2,...,4n$ сликата на зракот $\overrightarrow{P_iP_{i-1}}$ при ротација со центар P_i и агол 90° во насока на движењето на стрелката на часовникот е зракот $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$. Определи го максималниот можен број подредени парови (i,j), $1\le i<j\le 4n$, за кои отсечките P_iP_{i+1} и P_jP_{j+1} се сечат во точка, различна од крајна точка на отсечка. (Земаме $P_0=P_{4n},P_{4n+1}=P_1$.)

Решение. За $k=1,2,...,n$ да ставиме $A_k=P_{4k-3},B_k=P_{4k-2},C_k=P_{4k-1}$ и $D_k=P_{4k}$. Освен тоа, нека $A_{n+1}=A_1$ и $B_{n+1}=B_1$. Можеме да сметаме, дека насочените отсечки A_iB_i,B_iC_i,C_iD_i и D_iA_{i+1} се соодветно во насока налево, надолу, надесно и нагоре. За секој $i=1,2,...,n$ ќе велиме дека конвексната линија е од тип налево-надолу и аналогно дефинираме надолу-надесно,надесно-нагоре и нагоре-налево конвексни линии.

Ја разгледуваме пресечната точка на две отсечки, кои се насочени соодветно налево и надолу како пресечна точка на две конвексни линии од видот налево-надолу. Задачата се сведува на наоѓање на максималниот број на пресечните точки на две налево-надолу конвексни линии, две надолу-надесно конвексни линии, две надесно-нагоре конвексни линии и две нагоре-налево конвексни линии.

Ќе велиме дека парот $(i,j),1\le i\ne j\le n$ е добар, ако конвексните линии во секој од следните четири парови $A_iB_iC_i$ и $A_jB_jC_j$, $B_iC_iD_i$ и $B_jC_jD_j$, $C_iD_iA_{i+1}$ и $C_jD_jA_{j+1}$, $D_iA_{i+1}B_i$ и $D_jA_{j+1}B_j$ се сечат. Да забележиме дека, ако парот (i,j) е добар и A_i се наоѓа над A_j, тогаш B_i лежи десно од B_j, C_i лежи под C_j, D_i се наоѓа лево од D_j и A_{i+1} е под A_{j+1}.

Лема. Да го означиме комплементот на секое непразно вистинско подмножество X на множеството $\{1,2,...,n\}$ со $Y=X^c$. Тогаш постојат $x\in X$ и $y\in Y$, за кои парот (x,y) не е добар.

Доказ. За секој $x\in\{1,2,...,n\}$ дефинираме

$$x^{+}=\begin{cases}x+1, & \text{ако } 1\le x\le n-1\\ 1, & \text{ако } x=n\end{cases}\quad,\qquad x^{-}=\begin{cases}x-1, & \text{ако } 2\le x\le n\\ 1, & \text{ако } x=1\end{cases}$$

Нека за секој избор на $x\in X$ и $y\in Y$ парот (x,y) е добар. Дефинираме $f(k)=i$ и $f^{-1}(i)=k$, ако A_k е на $i-$тата позиција одгоре надолу меѓу точките $A_1,A_2,...,A_n$.

Ќе докажеме, дека за секој $k, 1\le k\le n$ бројот на точките меѓу $f(1), f(2),...,$ $f(k)$ кои припаѓаат на X е еднаков на бројот на точките меѓу $f(1)^{-}, f(2)^{-},..., f(k)^{-}$ кои припаѓаат на X. Нека претпоставиме дека во првото множество има повеќе елементи. Тогаш постои $x\in X$, токов што $f^{-1}(x)\le k$ и $f^{-1}(x^{+})>k$. Освен тоа, бидејќи бројот на точките од множеството $\{f(k+1), f(k+2),..., f(n)\}$ кои се од Y е поголем од бројот на точките од множеството $\{f(k+1)^{-}, f(k+2)^{-},..., f(n)^{-}\}$ кои се од Y, постои $y\in Y$ таков што $f^{-1}(y)>k$ и $f^{-1}(y^{+})\le k$. Тоа значи дека парот (x,y) не е добар, што е противречност. Аналогно се добива противречност ако претпоставиме, дека второто подмножество има повеќе елементи од првото.

Ако го искористиме равенството на бројот на елементите на двете множества, за $k=l$ и $k=l-1$ добиваме дека $f(l)\in X$ ако и само ако $f(l)^{-}\in X$. Тоа значи дека за секој x важи $x\in X$ ако и само ако $x^{-}\in X$. Последното противречи на претпоставката, дека X е непразно подмножество на $\{1,2,...,n\}$, со што доказот на лемата е завршен. ■

Нека претпоставиме дека бројот на паровите (x,y) кои не се добри е најмногу $n-2$. Тогаш бројот на елементите на множеството $\{1,2,...,n\}$, кои можат да бидат достигнати од 1 со низа на парови кои не се добри е најмногу $n-1$. Нека X е множеството на оние елементи, кои можат да бидат достигнати од 1 на посочениот начин, а Y е комплементот на X. Добиваме противречност со лемата. Според тоа, имаме најмногу $n-1$ парови од множеството $\{1,2,...,n\}$ кои не се добри. Значи, максималниот број парови (i,j), кои го задоволуваат условот е еднаков на $4\binom{n}{2}-(n-1)=(2n-1)(n-1)$.

Дади пример, во кој има точно $(2n-1)(n-1)$ пресечни точки.

70. Во рамнината се дадени n конвексни $k-$аголници, такви што секои два од нив имаат заедничка внатрешна точка. Познато е дека секој од $k-$аголниците може да се преслика во секој друг $k-$аголник со хомотетија со позитивен коефициент. Докажи, дека во рамнината постои точка која припаѓа барем на $1+\frac{n-1}{2k}$ од тие $k-$аголници.

Решение. Ќе ја користиме следнава лема.

Лема. Ако два конвексни многуаголници со заедничка внатрешна точка се пресликуваат еден во друг при хомотетија со позитивен коефициент, тогаш некое од темињата на едниот многуаголник е внатрешна точка за другиот многуаголник.

Доказ. Нека двата многуаголници се P и P'. Ако едниот од нив лежи во другиот, тогаш нема што да се докажува. Во спротивно, постои страна AB на P, која ја сече контурата на P'. Ако P' содржи една од точките A или B, тогаш тврдењето е докажано.

Останува да го разгледаме случајот кога P' ја сече AB по отсечка, која лежи во внатрешноста на AB. Јасно, P' има темиња и од двете страни на правата AB. Да ги разгледаме страната $A'B'$ на P' која при хомотетијата е соодветна на AB и произволно теме C' на P', такво што $A'B'$ и C' се во различни полурамнини во однос на AB. Нека C е во P соодветното теме на C'. Тогаш C' лежи во внатрешноста на $\triangle ABC$, бидејќи се наоѓа во една иста полурамнина во однос на AB, BC и AC со тој триаголник. Во случајов C' припаѓа на P, со што доказот е завршен. ■

Нека $P_1, P_2, ..., P_n$ се дадените $k-$аголници и да означиме $P_i = A_{i,1}...A_{i,k}$, за $i = 1, 2, ..., n$. За секое теме $A_{i,j}$ со $a_{i,j}$ да го означиме бројот на многуаголниците P_s, $s \neq i$, за кои $A_{i,j}$ е внатрешна точка. Од лемата следува, дека секој пар $k-$аголници е броен барем еднаш при наоѓање на броевите $a_{i,j}$. Затоа

$$a_{1,1} + ... + a_{1,k} + ... + a_{i,1} ... + a_{i,k} + ... + a_{n,1} + ... + a_{n,k} \geq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Оттука следува, дека барем еден од броевите $a_{i,j}$ не е помал од $\frac{n(n-1)}{2nk} = \frac{n-1}{2k}$. Бидејќи темето $A_{i,j}$ лежи во P_i и уште $a_{i,j}$ други $k-$аголници, добиваме дека тоа припаѓа на $1 + \frac{n-1}{2k}$ од $k-$аголниците, т.е. го има саканото својство.

3. МНОЖЕСТВА

1. Нека A е множество природни броеви со следново својство: за секои $m, n \in A, m \neq n$ точно е неравенството $10|m-n| + 50 \geq mn$. Определи го најголемиот можен број елементи на A.

Решение. Нека $m, n \in A$ и без ограничување на општоста можеме да земеме дека $m > n$. Тогаш даденото неравенство можеме да го запишеме во обликот $mn + 10n - 10m \leq 50$, т.е. во обликот $(m+10)(n-10) \leq -50$. Но, тоа значи дека не е можно $n \geq 10$. Според тоа, A има најмногу еден број поголем од 9. Псвен тоа, лесно се гледа, дека не е можно броевите 8 и 9 истовремено да се во A. Затоа, $|A| \leq 9$.

Множеството $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 15\}$ го има саканото својство и тоа има 9 елементи. Јасно е како се добиваат првите 8 елементи, а 15 е најмалиот број кој соодветствува на sслoвот заедно со 8.

2. Да се докаже дека секое множество од шест различни едноцифрени броеви содржи две подмножества без заеднички елементи, такви што збирот на елементите на првото подмножество е еднаков на збирот на елементите од второто подмножество.

Решение. Бројот на непразни подмножества на множество од шест елементи е $2^6 - 1 = 63$ и ниедна од сумите на елементите вон ив не е поголема од $6 \cdot 9 = 54$, што значи дека со 63 различни подмножества можеме да формираме најмногу 54 различни збира. Според тоа, барем две подмножества ќе имаат еднаков збир на елементите. Ако тие подмножетва не се дисјунктни, тогаш од нив ќе ги извадиме заедничките елементи.

3. Определи за кои природни броеви n низата броеви $1,2,3,...,4n$ може да се подели на n групи по 4 броја така што во секоја група еден од броевите е аритметичка средина на останатите три.

Решение. Да разгледаме група од 4 броја a,b,c и d така што бројот d е аритметичка средина на a,b и c. Имаме $a+b+c=3d$, односно $a+b+c+d=4d$. Значи, сумата на броевите од групата е делива со 4. Оттука следува дека за да може да се подели дадената низа на n групи со бараното својство, мора вкупната сума да е делива со 4. Имаме $1+2+...,4n = 2n(4n+1)$. Значи, n мора да е парен број.

Нека $n=2k$ е парен број. Тогаш дадената низа е $1,2,...,8k$. Ги делиме дадените броеви на k групи по 8 броеви:

$$1,2,...,8;9,10,...,16;...;8(k-1)+1,8(k-1)+2,....,8k.$$

Избираме една од добиените групи и нека тоа е $8s+1,8s+2,....,8s+8$, каде $0 \le s \le k-1$. Ја делиме добиената група на две групи по 4 броја:

$$8s+1,8s+3,8s+4,8s+8;8s+2,8s+5,8s+6,8s+7 .$$

Во првата група $8s+4$ е аритметичка средина на преостанатите три броја, а во втората $8s+5$ е аритметичка средина на преостанатите три броја. На овој начин ја делиме секоја од претходно дефинираните групи од 8 елементи на две групи од 4 елементи кои ги задоволуваат бараните услови од задачата.

4. Нека S е $n-$елементно множество и F е фамилија од 2^{n-1} подмножества на S такви што секои три множества од F имаат непразен пресек.

Докажи, дека пресекот на сите множества од F е непразно множество.

Решение. Нека $X \subseteq S$ и нека $X^c = S \setminus X$. Бидејќи $X \cap X^c = \varnothing$ заклучуваме дека најмногу едно од множествата X и X^c може да е во F. Уште повеќе, бидејќи F ги содржи точно половината подмножества на S, добиваме дека за секој $X \subseteq S$ точно едно од множествата X и X^c е во F.

Нека $A,B \in F$ и да претпоставиме дека $(A \cap B)^c \in F$. Тогаш трите множества A,B и $(A \cap B)^c$ се во F, но нивниот пресек е празно множество, што е противречност. Според тоа, ако $A,B \in F$, тогаш $A \cap B \in F$. Значи, фамилијата F е затворена во однос на пресекот, што значи дека пресекот на сите множества од F не е празно множество.

5. Нека S е множество од n елементи. Определи го најголемиот природен број m за кој постои фамилија $\{S_1,S_2,...,S_m\}$ непразни подмножества на S таква што пресекот на секои три множества од таа фамилија е празно множество.

Решение. Нека $\{S_1,S_2,...,S_m\}$ е фамилија непразни подмножества на множеството $S=\{1,2,...,n\}$ таква што пресекот на секои три множества од таа фамилија е празно множество. Тогаш секој елемент на множеството S може да биде елемент на најмногу две од множествата $S_1,S_2,...,S_m$. Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{n}|S_i|\le 2n .$$

Од друга страна, ако со k го означиме бројот на едноелементните множества S_i, кои се членови на дадената фамилија, тогаш

$$\sum_{i=1}^{n}|S_i|\ge k+2(m-k) .$$

Од поседните две неравенства следува дека $2m\le 2n+k$ и бидејќи $k\le n$ добиваме $2m\le 3n$, т.е. $m\le[\frac{3n}{2}]$. На пример, фамилијата

$$\{1\},\{2\},...,\{n\},\{1,2\},\{3,4\},...,\{2[\tfrac{n}{2}]-1,2[\tfrac{n}{2}]\}$$

има точно $[\frac{3n}{2}]$ и ги задоволува условите на задачата.

6. Определи го бројот на подредените тројки множества (A,B,C) такви што

1) $A\cup B\cup C=\{1,2,...,n\}$,
2) $A\cap B\cap C=\varnothing$
3) $A\cap B\neq\varnothing$.

Решение. Ако за подредената тројка множества (A,B,C) важат дадените услови, тогаш секој од елементите $1,2,...,n$ припаѓа на едно од следниве по парови дисјунктни множества:

$$A\cap\overline{B}\cap\overline{C},\quad \overline{A}\cap B\cap\overline{C},\quad \overline{A}\cap\overline{B}\cap C,$$
$$A\cap B\cap\overline{C},\quad A\cap\overline{B}\cap C,\quad \overline{A}\cap B\cap C$$

и барем еден од елементите се наоѓа во множеството $A\cap B\cap\overline{C}$. Бројот на распоредувања на n елементи во 6 дисјунктни множества е еднаков на 6^n. Бројот на распоредувањата кај кои $A\cap B\cap\overline{C}=\varnothing$ е еднаков на 5^n. Значи, бараниот број подредени тројки е еднаков на 6^n-5^n.

7. Нека n е природен број и S е множеството од сите точки (x,y), каде x и y се природни броеви и $x\le n,\ y\le n$. Нека T е множеството од сите квадрати со темиња од S. Со a_k, $k\ge 0$ да го означиме бројот на паровите точки од S, кои се темиња на точно k квадрати од T. Докажи дека $a_0=a_2+2a_3$.

Решение. Бројот на паровите точки од S е еднаков на $a_0+a_1+a_2+a_3=\binom{n^2}{2}$. Бројот на квадратите од T, чии страни се паралелни со координатните оски и имаат должина k е еднаков на $(n-k)^2$. Секој од тие квадрати содржи $k-1$ квадрати чии темиња лежат на неговите страни и чии страни се паралелни со координатните оски. Според тоа, бројот на сите квадрати од T е еднаков на

$$\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)j^2 = n\sum_{j=1}^{n-1} j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} j^3 = n\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Од друга страна, ако земеме предвид дека темињата на секој квадрат генерираат 6 парови точки од S, добиваме дека бројот на сите квадрати од T е еднаков на $\frac{a_1+2a_2+3a_3}{6}$. Според тоа,

$$a_1+2a_2+3a_3 = \frac{n^2(n^2-1)}{2} = \binom{n^2}{2} = a_0+a_1+a_2+a_3,$$

од каде следува дека $a_0 = a_2+2a_3$.

8. Определи го најголемиот природен број n за кој постојат различни множества $S_i,\, i=1,2,...,n$ такви што:

1) $|S_i \cup S_j| \le 2004$, за секои i, j, такви што $1 \le i < j \le n$, и

2) $S_i \cup S_j \cup S_k = \{1,2,...,2008\}$, за секои i, j, k такви што $1 \le i < j < k \le n$.

Решение. Секое множество S_i има најмногу 2003 елементи. Навистина, ако $|S_i| = 2004$, тогаш од условот 1) следува дека $S_j \subset S_i$, за секој j, што противречи на условот 2). Да ги разгледаме множествата

$$G_{\{i,j\}} = \{1,2,...,2008\} \setminus (S_i \cup S_j),\ \text{за } 1 \le i < j \le n.$$

Важи $|G_{\{i,j\}}| \ge 4$ и сите $\binom{n}{2}$ множества $G_{\{i,j\}}$ се меѓусебно дисјунктни (во спротивно ако $x \in G_{\{i,j\}} \cap G_{\{k,l\}}$, тогаш $x \notin S_i \cup S_j \cup S_k \cup S_l$, што не е можно бидејќи барем три од индексите i, j, k, l се различни). Според тоа, $4\binom{n}{2} \le 2008$, од каде добиваме $n \le 32$.

Ќе конструираме 32 множества кои ги задоволуваат условите 1) и 2). Произволно го разбиваме множеството $\{1,2,...,2008\}$ на $\binom{32}{2} = 496$ дисјунктни множества $G_{\{i,j\}}$, такви што $|G_{\{i,j\}}| \ge 4$ за $1 \le i, j \le 32$ и дефираме

$$S_i = \{1,2,...,2008\} \setminus \bigcup_{j \ne i} G_{\{i,j\}},\ \text{за } i = 1,2,...,32.$$

Условот 1) е очигледно исполнет. Освен тоа, секој $s \in \{1,2,...,2008\}$ припаѓа најмногу на едно од множествата $G_{\{p,q\}}$, што значи дека постојат најмногу две множества S_i кои не го содржат (тоа се S_p и S_q), па затоа и условот 2) е исполнет. Според тоа, бараниот најголем природен број е $n = 32$.

9. Нека A е множеството од сите низи од 0 и 1 со должина 4. За две такви низи ќе велиме дека се соседни ако се совпаѓаат или ако се разликуваат во точно еден член. Нека M е подмножество од A со својството: За секои два елементи a и b на A постои елемент на M, кој е соседен со a, но не е соседен со b или е соседен со b, но не е соседен со a. Определи го најмалиот можен број елементи на M ?

Решение. Да разгледаме табела, чии редови соодветствуваат на елементите на A, а колоните соодветствуваат на елементите на M. Во едно поле ставаме $\times$, ако елементот на A во соодветниот ред е соседен на елемента на M во соответната колона. Нека $|M|=k$. Од условот следува, дека нема два еднакви реда, што значи дека M има барем 16 различни подмножества. Бидејќи множество со n елементи има 2^n подмножества, важи $k \geq 4$.

Бидејќи секој ред има пет соседни (тоа е самиот ред и оние кои се разликуваат од него во првиот, вториот, третиот или четвртиот член), добиваме дека во секоја колона има точно пет знаци $\times$, т.е. вкупниот број им е $5k$. Минимален број знаци $\times$ по редови се добива кога имаме еден ред со нула знаци, k редови со по еден знак $\times$, $\binom{k}{2}$ елементи со два знака $\times$ итн.

1) За $k=4$ сите подмножества на M се 16 и затоа секое подмножество на M треба да се среќава точно по еднаш како множество од соседни на некој елемент на A. Тогаш по редови имаме еден ред без $\times$, 4 реда со по еден знак $\times$, 6 реда со по два знака $\times$, 4 реда со по 3 знака $\times$ и еден ред со четири знака $\times$. Вкупниот број на знаците $\times$ ќе биде $32 > 20 = 4 \cdot 4$, што е противречност.
2) За $k=5$ имаме 25 знаци $\times$. По редови минималниот број се достигнува кога е еден ред со нула знаци $\times$, 5 реда со по еден знак $\times$ и 10 реда со по два знака $\times$. Бидејќи $5 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 25$ распределбата треба да биде точно опишаната. Тоа значи, дека секои два елементи на M треба да бидат едновремено соседни на некој елемент на A. Лесно се гледа, дека ако два елементи на M се разликуваат во повеќе од две места (позиции), тогаш не постои елемент, на кој и двата се соседни. Според тоа секои два елементи на M се разликуваат во една или две позиции. Ако допуштиме дека има два елементи, кои се разликуваат во точно една позиција, тогаш без ограничување на општоста тоа се 0000 и 1000. Тогаш соседните на $a=0000$ и $b=1000$ во M се 0000 и 1000 и низите на $a=0000$ и $b=1000$ се совпаѓаат, противречност. Тоа покажува, дека секои два елементи на M се разликуваат во точно две позиции. Без ограничување на општоста $0000 \in M$. Тогаш останатите 4 елементи се меѓу 0011, 1100, 0101, 1010, 1001 и 0110. Но од секој од паровите $(0011, 1100)$, $(0101, 1010)$ и $(1001, 0110)$ може да се избере најмногу еден елемент, противречност.
3) За $k=6$ множеството $M=\{0000, 1111, 0111, 0100, 1001, 0101\}$ ги разделува секои два елементи на A.

Значи, бараниот најмал број е 6.

10. Нека S е множество од 100-цифрени броеви. За број кој припаѓа на множеството S ќе велиме дека е *лош*, ако не е делив со збирот на кои било други два (не задолжително различни) броја од множеството S. Определи го најголемиот можен број на елементи на множеството S, ако е познато дека S содржи најмногу 10 лоши броеви.

Решение. Броевите од множеството S кои не се лоши ќе ги наречеме добри. Да забележиме дека секој добар број може да се запише како збир на барем два и најмногу девет (не задолжително различни) лоши броеви. Бидејќи имаме $\binom{10+j}{9}$, $j=2,3,...,9$ збирови од по j броеви, бројот на елементите на S е помал или еднаков на

$$\sum_{j=1}^{9}\binom{10+j}{9}=\binom{19}{10},$$

(собирокот за $j=1$ го додава десетте лоши броеви).

Десетте лоши броеви се избрани од интервалот $[10^{100},\frac{10^{101}-1}{9}]$. Да забележиме дека во овој интервал има $\frac{10^{100}-1}{9}$ броеви, од кои можеме да избираме. Освен тоа, јасно е дека збировите на барем два и најмногу девет (не задолжително различни) броја од овој интервал се 100-цифрени броеви од овој интервал се 100-цифрени броеви и можеме да ги разгледуваме за вклучување во S. Останува да го прецизираме изборот така што да не се добиваат еднакви збирови.

Да претпоставиме дека веќе сме избрале j лоши броеви и сите збирови од најмногу девет (не задолжително различни) од овие броеви се различни. Следниот лош број не треба да е делител на ниту еден од веќе избраните броеви и не треба да е еднаков на разликата на веќе избраните лоши броеви. Тоа ни дава не повеќе од

$$\frac{10^{10}(10^{10}-1)}{2}+9\cdot 10^{10}<10^{21}$$

(го искористивме неравенството $\binom{19}{10}<10^{10}$) можности и сега можеме да го направиме изборот на следниот $(j+1)-$ви лош број, $j+1\leq 10$.

11. Нека $n\geq 2$ е природен број и нека S е подмножество на множеството $\{1,2,...,n\}$ кое не содржи два заемно прости броја, ниту два броја од кои едниот е делител на другиот. Колку елементи може најмногу да има множеството S ?

Решение. За секој $x\in S$ постои единствен $k_x\in\mathbb{N}_0$ таков што $\frac{n}{2}<2^{k_x}x\leq n$. Да означиме $f(x)=2^{k_x}x$. Пресликувањето f е инјекција. Навистина, ако за $x,y\in S$ важи $f(x)=f(y)$, тогаш или $x\,|\,y$ или $y\,|\,x$, па според условот на задачата $x=y$. Според тоа, множеството $f(S)=\{f(x)\,|\,x\in S\}$ има ист број елементи како и множеството S. Притоа $f(S)$ не содржи два последователни броја (бидејќи тие се заемно прости), па затоа $|f(S)|\leq[\frac{n-[\frac{n}{2}]+1}{2}]=[\frac{n+2}{4}]$.

Од друга страна, множеството $S=\{2i\,|\,\frac{n}{4}<i\leq\frac{n}{2}\}$ има точно $[\frac{n+2}{4}]$ елементи и ги задоволува условите на задачата. Според тоа, одговорот е $[\frac{n+2}{4}]$.

12. Определи го бројот на подмножествата B на множеството $\{1,2,...,2005\}$ со својство: збирот на елементите на B при делење со 2048 дава остаток 2006.

Решение. Да го разгледаме множеството $\{1,2,2^2,...,2^{10}\}$. Бидејќи секој број од 0 до 2047 на единствен начин се претставува како збир на степени на бројот 2 заклучуваме, дека за секој $i, 0 \le i \le 2047$ постои единствено подмножество на $\{1, 2, 2^2, ..., 2^{10}\}$ чиј збир на елементи е еднаков на i (земаме дека збирот на елементите на празното множество е еднаков на 0).

Да разгледаме множество A со својство: за секој i бројот на подмножествата со збир на елементи кои при делење со 2048 даваат остаток i не зависи од i. Лесно се гледа дека за секој a истото својство важи и за множестото $A \cup \{a\}$. Бидејќи $\{1, 2, 2^2, ..., 2^{10}\} \subset \{1, 2, 3, ..., 2005\}$ добиваме дека бројот на подмножествата B на множеството $\{1, 2, ..., 2005\}$ со збир на елементи кои даваат остаток $i, 0 \le i \le 2047$ при делење со 2048 е еднаков на $\frac{2^{2005}}{2048} = \frac{2^{2005}}{2^{11}} = 2^{1994}$. Според тоа, бараниот број е 2^{1994}.

13. Нека S е множество од n елементи и $M_i \subseteq S, M_i \ne \varnothing$, за $i = 1, 2, ..., n+1$. Докажи, дека постојат два различни избори на броеви

$$1 \le i_1 < i_2 < ... < i_r \le n+1 \text{ и } 1 \le j_1 < j_2 < ... < j_s \le n+1 \tag{1}$$

такви што

$$M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup ... \cup M_{i_r} = M_{j_1} \cup M_{j_2} \cup ... \cup M_{j_s}. \tag{2}$$

Решение. Различни унии $M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup ... \cup M_{i_k}$ составени од множествата M_1, $M_2, ..., M_{n+1}$ добиваме само за непразни подмножества $\{i_1, i_2, ..., i_k\}$ на множеството $\{1, 2, ..., n+1\}$. Нивниот број е еднаков на $2^{n+1} - 1$. Но, бројот на непразните подмножества на множеството S е еднаков на $2^n - 1 < 2^{n+1} - 1$, па затоа меѓу разгледуваните унии постојат две кои се еднакви на едно исто подмножество од S, што значи дека постојат два различни избори на броеви (1) за кои важи (2).

14. Нека X е множество такво што $|X| = n$. Докажи, дека ако $S = \{X_i\}_{i=1}^r$ е фамилија различни подмножества од X таква што $X_i \cap X_j \ne \varnothing$ за секои $i, j = 1, 2, ..., r$, тогаш $r \le 2^{n-1}$.

Решение. Нека $Y_i = X \setminus X_i, i = 1, 2, .., r$. Ако $r > 2^{n-1}$, тогаш постои i таков што $X_i \in S, Y_i \in S$, па затоа $X_i \cap Y_i = \varnothing$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува $r \le 2^{n-1}$.

15. Нека X е множество и $X_\alpha, \alpha \in A$ е фамилија подмножества од X. За фамилијата $X_\alpha, \alpha \in A$ ќе велиме дека е *покривка* на множеството X ако $\bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha = X$. Со $A(n)$ да го означиме бројот на покривните на множеството $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Докажи, дека

$$A(n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot 2^{2^{n-k}-1}. \tag{1}$$

Решение. Множеството X има 2^n-1 непразни подмножества, па затоа бројот на фамилиите непразни подмножества на X е еднаков на 2^{2^n-1}. Ако со A_i ја означиме фамилијата непразни подмножества на X кои не го содржат x_i, за $i=1,2,...,n$, тогаш

$$A(n)=2^{2^n-1}-|A_1\cup...\cup A_n|. \qquad (2)$$

Понатаму, од принципот на вклучување и исклучување имаме

$$|A_1\cup...\cup A_n|=\sum_i|A_i|-\sum_{i\neq j}|A_i\cap A_j|+... . \qquad (3)$$

Меѓутоа, ако $|K|=k$, тогаш

$$|\bigcap_{i\in K}A_i|=2^{2^{n-k}-1}$$

и K може да се избере на $\binom{n}{k}$ начини. Конечно, од последното и од равенствата (2) и (3) следува равенството (1).

16. Нека $A_i, i=1,2...,n$ се конечни множества со еднаков број на елементи и $S=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$. Ако за некој фиксиран $k\in\{1,2,...,n\}$ произволна унија на k од дадените множества е неразложлива покривка на S, т.е. таква покривка што ниту една нејзина вистинска подпокривка не е покривка на S, тогаш

$$|S|\geq\binom{n}{k-1},$$

при што знак за равенство се достигнува кога $|A_i|=\binom{n-1}{k-1}$. Докажи!

Решение. За секој $x\in S$ ставаме $M(x)=\{i\,|\,x\in A_i\}$. Нека T е произволно подмножество на множеството $\{1,2,...,n\}$ такво што $|T|=n-k+1$. Тогаш постои $x\in S$ таков што $T=M(x), x\notin\bigcup_{i\in T}A_i$ бидејќи тоа е унија на $k-1$ множество од дадените. Тогаш

17. Нека S е множество со $n, n\geq 2$ елементи и нека $A_1,A_2,...,A_m$ се подмножества од S, $m\geq 2$. Ако за секои $x,y\in S$, $x\neq y$ постои множество A_i такво што $x\in A_i$ и $y\notin A_i$ или $x\notin A_i$ и $y\in A_i$, докажи дека $2^m\geq n$.

Решение. Ја формираме следнава $n\times m$ табела: за секој $x_i, i=1,2,...,n$ и секое множество A_j, $j=1,2,...,m$ во пресекот на $i-$тиот реди $j-$тата колона ставаме 1 ако $x_i\in A_i$ или 0 ако $x_i\notin A_i$. Според условот на задачата, било кои два реда мора да се различни барем на едно место, што значи дека вкупниот број редови е помал или еднаков на бројот на различните низи од 0 и 1 со должина m. Затоа, $2^m\geq n$.

18. Нека A е множеството од сите низи со должина 2012, составени од броевите 0, 1 и 2. Нека $T\subset A$ е подмножество со најмал број елементи кои го имаат следново својство: за секоја низа $a_1,a_2,...,a_{2012}$ од A постои низа $b_1,b_2,...,b_{2012}$ од T, за која $a_i \neq b_j$, за секој $i=1,2,...,2012$. Докажи, дека. $\frac{3^{2011}}{2^{2010}} <|T|\leq 3^{1006}$

Решение. Да го разгледаме множеството B составено од сите низи

$$x_1,y_1,x_2,y_2,x_3,y_3,...,x_{1006},y_{1006},$$

каде $x_iy_i=00,11$ или 22. Бидејќи имаме 1006 парови x_iy_i и секој пар прима три вредности, добиваме дека бројот на овие низи е 3^{1006}, односно $|B|=3^{1006}$. Од друга страна, бидејќи за секој пар $ab, a,b\in\{0,1,2\}$ постои $x_iy_i=00,11$ или 22 за кој $a\neq x, b\neq y$, заклучуваме дека множеството B го задоволува условот на задачата. Затоа $|T|\leq|B|=3^{1006}$.

Нека A_n е множеството од сите низи со должина n составено од 0, 1 и 2, а T_n е множество со најмал број елементи кое го задоволува условот на задачата. Ќе го докажеме неравенството $|T_n|\geq\frac{3}{2}|T_{n-1}|$. Со $t_i, i=0,1,2$ да го означиме бројот на низите од T_i чиј прв елемент е еднаков на i. Бидејќи низите од A_n со прв елемент 2 се “покриваат” од низите од T_n со први елементи 0 или 1, добиваме $t_0+t_1\geq|T_{n-1}|$. Аналогно, $t_1+t_2\geq|T_{n-1}|$ и $t_0+t_2\geq|T_{n-1}|$. Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$|T_n|=t_0+t_1+t_2\geq\tfrac{3}{2}|T_{n-1}|.$$

Од последното неравенство, ако искористиме дека $|T_1|=2$, добиваме

$$|T_{2012}|\geq\tfrac{3}{2}|T_{2011}|\geq...\geq(\tfrac{3}{2})^{2011}|T_1|=\tfrac{3^{2011}}{2^{2010}}.$$

19. Нека Φ е фамилија подмножества на множество од n елементи таква што ниту еден нејзин член не е подмножество на некој друг нејзин член. Докажи дека фамилијата Φ може да има најмногу $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$ членови.

Решение. Нека Φ е фамилија со опишаното својство која има најголем можен број членови. Понатаму, нека k е најмалиот број елементи што ги има некој член на фамилијата Φ и l е бројот на членовите на фамилијата Φ кои имаат по k елементи. Ќе докажеме дека $k\geq\frac{n-1}{2}$.

Нека претпоставиме дека $k<\frac{n-1}{2}$. Со Φ_1 да ја означиме фамилијата подмножества на даденото множество која ја добиваме кога од Φ ги исфрламе сите l членови кои имаат по k елементи, а потоа ги додаваме сите нивни надмножества кои имаат по $k+1$ елемент (ниту едно од нив не беше член на фамилијата Φ, бидејќи во спротивно исфрленото множество од Φ ќе беше подмножество на новото множество во Φ_1, што противречи на условот на задачата). Понатаму, бидејќи за секој исфрлен член има $n-k$ опишани подмножества, а секој додаден член се повторува најмногу $k+1$ пати, добиваме најмалку $\frac{l(n-k)}{k+1}$

нови членови. Но, $k < \frac{n-1}{2}$, па затоа $\frac{l(n-k)}{k+1} > \frac{n+1}{2(k+1)} l > l$, што значи дека фамилијата Φ_1 има повеќе членови од фамилијата Φ. Лесно се проверува дека и за фамилијата Φ_1 важи дека ниту еден нејзин член не е подмножество на некој друг нејзин член. Последното противречи на претпоставката за максималноста на фамилијата Φ, па затоа $k \geq \frac{n-1}{2}$.

На сличен начин можеме да докажеме дека најголемиот број елементи на некој член на фамилијата Φ може да биде $\frac{n+1}{2}$. Според тоа, фамилијата Φ може да содржи само подмножества кои имаат $\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}$ елементи.

Нека $n = 2m$. Од досега изнесеното следува дека Φ има само членови со $\frac{n}{2}$ елементи. Од друга страна фамилијата од сите подмножества со m елементи од множество со $2m$ елементи ги задоволува условите на задачата, па во овој случај фамилијата има $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$ членови.

Ако $n = 2m+1$, на фамилијата Φ и припаѓаат само подмножества кои имаат m елементи или само подмножества кои имаат $m+1$ елемент. И во двата случаја бројот на членовие на фамилијата Φ е еднаков на $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$.

20. Дадени се реални броеви $x_i > 1, i = 1,2,...,2n$. Докажи, дека интервалот $[0,2]$ содржи најмногу $\binom{2n}{n}$ збирови од видот

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i x_i \text{ , каде } a_i \in \{-1,1\} \text{ за } i = 1,2,...,2n.$$

Решение. На секој збир $\sum_{i=1}^{2n} a_i x_i$ соодветствува разбивање $S \cup T$ на множеството $\{1,2,...,2n\}$ определено со

$$k \in S \iff a_k = -1 \text{ и } k \in T \iff a_k = 1.$$

Нека $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{2n} a_i x_i$ и $\sigma_2 = \sum_{i=1}^{2n} b_i x_i$ се два збира од дадениот вид, $a_i, b_i \in \{-1,1\}$ и нека $S_1 \cup T_1$ и $S_2 \cup T_2$ се соодветните разбивања на множеството $\{1,2,...,2n\}$. Нека претпоставиме дека $S_1 \subset S_2$. Тогаш збировите σ_1 и σ_2 се разликуваат за удвоениот збир на неколку од броевите x_i, што значи за повеќе од 2, па не е можно и двата да припаѓаат на интервалот $[0,2]$. Значи, ако $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m$ се сите збирови од дадениот вид кои припаѓаат на интервалот $[0,2]$ и $S_1 \cup T_1, S_2 \cup T_2, ..., S_m \cup T_m$ се соодветните разбивања на множеството $\{1,2,...,2n\}$, тогаш множествата $S_1, S_2, ..., S_m$ се неспоредливи во однос на инклузијата, т.е. ниту едно од нив не се содржи во друго како подмножество. Конечно од претходната задача следува $m \leq \binom{2n}{n}$.

21. Нека S е множество со $n\geq 2$ елементи и $A_1, A_2, ..., A_m$ $(m\geq 2)$ се подмножества од S со следново својство: за секои два различни елементи x и y од S постои подмножество A_i кое содржи точно еден од овие два елементи. Докажи, дека $2^m \geq n$.

Решение. Нека $S=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $x_i \in A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_{k(i)}}$. Од условот следува дека ако $i\neq j$, тогаш $\{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_{k(i)}}\} \neq \{A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{j_{k(j)}}\}$. Бројот на сите подмножества на множеството $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$ е еднаков на 2^m и овој број не е помал од бројот на елементите на S.

22. За секој природен број $n\geq 3$ определи го најмалиот природен број $f(n)$ со следново својство: за секој избор на множество $A\subseteq\{1,2,...,n\}$ со $f(n)$ елементи постојат $x,y,z\in A$ кои се по парови заемно прости.

Решение. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека m е природен број и $M=\{m, m+1, ..., m+5\}$. Тогаш секое петелементно подмножество на M содржи три броја кои се по парови заемно прости.

Доказ. Лесно се гледа дека постои непарен број a таков што $A=\{a, a+2, a+4\}\subset M$. Барем еден од броевите $a+1$ и $a+3$ не е делив со 3. Тој број да го означиме со b и да го разгледаме множеството $B=\{a, a+2, a+4, b\}\subset M$. Тогаш елементите на B се по парови заемно прости, а секое петелементно подмножество на M содржи три елементи од B. Со тоа доказот на лемата е завршен. ■

Да го разгледаме множеството $X\subset\{1,2,3,...,n\}$ кое се состои од броевите деливи со 2 или со 3. Тогаш X го нема саканото својство, бидејќи во секое триелементно подмножество на X ќе има два броја со заеднички делител 2 или 3. Според тоа, секое множество со саканото својство има најмалку $|X|+1$ елемент, па затоа $f(n)\geq[\frac{n}{2}]+[\frac{n}{3}]-[\frac{n}{6}]+1$.

Со индукција ќе докажеме дека за секој избор на множество $A\subseteq\{1,2,...,n\}$ со $g(n)=[\frac{n}{2}]+[\frac{n}{3}]-[\frac{n}{6}]+1$ елементи постојат $x,y,z\in A$ кои се по парови заемно прости. За забележиме дека $g(n+6)=g(n)+4$.

Случаите $n=3,4,5$ се тривијални, а за $n=6$ тврдењето следува од лемата. За $n=7$ ја применуваме лемата кога $1,7\notin A$, а во спротивен случај тројката $\{1,7,x\}$, каде $x\neq 1,7$ е произволен елемент од A е бараната тројка од условот на задачата. На сличен начин се разгледува и случајот $n=8$.

Нека $n\geq 9$ и $f(k)\leq g(k)$ за секој $k\in\{3,4,...,n-1\}$. Ако пресекот $A\cap\{n-5, n-4,...,n\}$ содржи барем 5 елементи, тогаш тврдењето следува од лемата. Ако $|A\cap\{n-5, n-4,...,n\}|\leq 4$, тогаш во A се содржат најмалку $g(n)-4=g(n-6)$ елементи од $\{1,2,...,n-6\}$ и меѓу нив согласно индуктивната претпоставка постојат $x,y,z\in A$ кои се по парови заемно прости.

23. Нека $n \geq 2$ е природен број и конечните непразни множества $A_1, A_2, ..., A_n$ се такви, што $|A_i \Delta A_j| = |i-j|$ за секои $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Определи ја максималната можна вредност на $|A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$. (Симетричната разлика на множества A и B се дефинира со $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$).

Решение. Да го означиме бараниот минимум со S_n. Ќе докажеме, дека $S_{2k} = k^2 + 2$ и $S_{2k+1} = k^2 + k + 2$.

Прво да забележиме дека се точни следниве две едноставни тврдења.

Тврдење 1. За секои две конечни множества A и B важи $|A| + |B| \geq |A \Delta B|$.

Тврдење 2. За секои две непразни конечни множества A и B од $|A \Delta B| = 1$ следува $|A| + |B| \geq 3$.

За $n = 2k$ од тврдењето 1 следува, дека

$$|A_i| + |A_{2k+1-i}| \geq |A_i \Delta A_{2k+1-i}| = 2k + 1 - 2i \text{, за } i = 1, 2, ..., k-1.$$

Освен тоа $|A_k \Delta A_{k+1}| = 1$ и од тврдењето 2 следува $|A_k| + |A_{k+1}| \geq 3$. Значи,

$$S_{2k} = |A_k| + |A_{k+1}| + \sum_{i=1}^{k-1} (|A_i| + |A_{2k+1-i}|) \geq 3 + \sum_{i=1}^{k-1} (2k + 1 - 2i) = k^2 + 2 .$$

Аналогно, за $n = 2k + 1$ имаме

$$|A_i| + |A_{2k+2-i}| \geq |A_i \Delta A_{2k+2-i}| = 2k + 2 - 2i \text{, за } i = 1, 2, ..., k-1,$$

и $|A_k| + |A_{k+1}| + |A_{k+2}| \geq 3 + 1 = 4$. Значи,

$$\begin{aligned} S_{2k+1} &= |A_k| + |A_{k+1}| + |A_{k+2}| + \sum_{i=1}^{k-1} (|A_i| + |A_{2k+2-i}|) \\ &\geq 4 + \sum_{i=1}^{k-1} (2k + 2 - 2i) = k^2 + k + 2. \end{aligned} .$$

Сега лесно се докажува, дека множествата

$$A_i = \{i, i+1, ..., k\},\ i = 1, 2, ..., k,\ \ A_{k+1} = \{k, k+1\}$$
$$A_{k+j} = \{k+1, k+2, ..., k+j-1\},\ j = 2, 3, ..., k+1,$$

се такви, што $|A_i \Delta A_j| = |i-j|$ за секои $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, при што важи

$$|A_1| + |A_2| + ... + |A_{2k}| = k^2 + 2 = [\tfrac{(2k)^2}{4}] + 2,$$

$$|A_1| + |A_2| + ... + |A_{2k+1}| = k^2 + k + 2 = [\tfrac{(2k+1)^2}{4}] + 2.$$

Значи, минималната можна вредност на S_n е $[\frac{n^2}{2}] + 2$.

24. Нека $n \in \mathbb{N}$ и A_n е множеството од сите пермутации $(a_1, a_2, ..., a_n)$ на множеството $\{1, 2, ..., n\}$ такви што важи $k \mid 2(a_1 + a_2 + ... + a_k)$, за секој $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Определи го бројот на елементите на множеството A_n .

Решение. Со F_n да го означиме бројот на елементите на множеството A_n. Имаме $F_1 = 1, F_2 = 2$ и $F_3 = 6$. За $n > 3$, да разгледаме произволна пермутација

$(a_1,a_2,...,a_n)$ во A_n. Бидејќи $n-1$ е делител на $2(a_1+a_2+...+a_{n-1})=$ $n(n+1)-2a_n \equiv 2-2a_n (\bmod n-1)$, следува дека a_n е еднаков на $1, \frac{n+1}{2}$ или n.

Нека $a_n=\frac{n+1}{2}$. Тогаш $n-2$ е делител на $2(a_1+a_2+...+a_{n-2})=n^2-1-2a_{n-1} \equiv$ $3-2a_{n-1} (\bmod n-2)$. Затоа, мора да биде $2a_{n-1}-3=n-2$, т.е. $a_{n-1}=\frac{n+1}{2}=a_n$, што е шротивречност.

Ако $a_n=n$, тогаш пресликувањето $(a_1,a_2,...,a_n) \to (a_1,a_2,...,a_{n-1})$ е биекција во множеството A_{n-1}, па вакви пермутации има F_{n-1}.

Ако $a_n=1$, тогаш $(a_1-1,a_2-1,...,a_{n-1}-1)$ е пермутација на $\{1,2,...,n-1\}$, која припаѓа на множеството A_{n-1}, бидејќи

$$2((a_1-1)+(a_2-1)+...+(a_k-1))=2(a_1+a_2+...+a_k)-2k$$

делив со k за $k=1,2,...,n-1$. Како и во претходниот случај вакви пермутации има F_{n-1}.

Според тоа, за $n>3$ важи $F_n=2F_{n-1}$ и како $F_3=6$, добиваме дека $F_n=3\cdot 2^{n-2}$, за $n\geq 3$.

25. Нека n и k се природни броеви и $S=\{1,2,...,n\}$.

а) Определи го бројот на сите подредени $k-$торки $(A_1,A_2,...,A_k)$ каде A_i, $i=1,2,...,k$ се по парови дисјунктни подмножества од S такви што $\bigcup_{i=1}^{k} A_i=S$.

б) Определи го бројот на сите подредени $k-$торки $(A_1,A_2,...,A_k)$ каде A_i, $i=1,2,...,k$ се подмножества (не задолжително дисјунктни) од S такви што $\bigcup_{i=1}^{k} A_i=S$.

Решение. а) Секој елемент од множеството S се наоѓа во едно и само едно од множествата $A_i, i=1,2,...,k$. Понатаму, подмножеството во кое некој елемент ќе се најде можеме да го избереме на k начини. Бидејќи множеството S има n елементи, заклучуваме дека бараниот број е еднаков на k^n.

б) На секое множество A_i му придружуваме низа со должина n од нули и единици, која на местото m има 1 ако $m\in A_i$, односно 0 ако $m\notin A_i$. Формираме матрица $k\times n$ чии редици се бинарните низи придружени на множествата $A_1,A_2,...,A_k$. Заради условот $\bigcup_{i=1}^{k} A_i=S$ во секоја колона на оваа матрица се наоѓа барем една единициа. Обратно, секоја $k\times n$ матрица од нули и единици која во секоја колона содржи барем една единица определува една $k-$торка подмножества кои го задоволуваат условот на задачата. Бидејќи секоја колона можеме да ја избереме на 2^k-1 начини (сите низи освен низата 0, 0, ..., 0), добиваме дека бројот на овие матрици е еднаков на $(2^k-1)^n$ и тоа е бараниот број.

26. Нека Q е фамилијата од сите конечни множества, составени од последователни природни броеви. За секое подмножество

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \subset \{1, 2, ..., n\},\ a_1 < a_2 < ... < a_k\ ,$$

дефинираме

$$g(A) = \max_{B \subset A,\ B \in Q} |B|, \quad f(A) = \max_{1 \le i \le k-1} a_{i+1} - a_i\ .$$

Уште дефинираме

$$G(n) = \sum_A g(A),\ \ F(n) = \sum_A f(A)\ .$$

Докажи, дека постои природен број m таков, што за секој природен број $n > m$ е исполнето неравенството $F(n) > G(n)$.

Решение. За секое множество A со A_s да го означиме множеството со истиот минимален и максимален елемент, но сите елементи меѓу нив да се од комплементот на A во множеството $\{1, 2, ..., n\}$. Ако $|A| = 1$, тогаш $A_s = A$. Јасно е дека $(A_s)_s = A$, т.е. оваа операција е инверзибилна.

За $A \subset \{1, 2, ..., n\}$ нека $B \in Q$ е максимално. Мнжеството B соодветствува на најголемата разлика $a_{i+1} - a_i$ во A_s, како $a_{i+1} - a_i = |B| + 1, |B|$ или $|B| - 1$ во зависност од тоа дали $k = |B \cap \{\min A, \max A\}| = 0, 1$ или 2. Тогаш

$$f(A_s) - g(A) = 1 - k$$

Нека S_n е множеството од сите подмножества на $\{1, 2, ..., n\}$, кои ги содржат 1 и n. Да означиме

$$s_n = \sum_{A \in S_n} (f(A) - g(A)) = \sum_{A \in S_n} (f(A_s) - g(A))\ .$$

Не е тешко да се пресмета, дека

$$s_0 = 0,\ s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = -1\ .$$

Од друга страна, за $n \ge 6$ имаме $s_n \ge 2^{n-6} - 1$. Навистина, да ги разгледаме множествата $A \in S_n$ за кои $3, 4 \in A$, но $2, n-1 \notin A$. Имаме 2^{n-6} вакви множества и за секое од нив важи $f(A_s) - g(A) = 1$. Единстваеното множество од S_n за кое $f(A_s) - g(A) = -1$ е самото множество $\{1, 2, ..., n\}$. Затоа $s_n \ge 2^{n-6} - 1$.

Сега да разгледаме $F(n) - G(n)$. Ако $T_{i,j}$ е множеството од сите подмножества со минимален елемент i и максимален елемент j, тогаш збирот на $f(A) - g(A)$ по множествата од $T_{i,j}$ е еднаков на s_{j-i}. Во случајов тој збир зависи само од разликата $j - i$. Фиксна разликата $j - i$ може да биде избрана на $n + 1 - (j - i)$ начини. Затоа

$$F(n) - G(n) = ns_1 + (m-1)s_2 + (n-2)s_2 + ... + 2s_{n-1} + s_n\ .$$

Оттука и од горните оценки следува

$$F(n) - G(n) \ge 2^{n-6} - 5n - 11\ .$$

Лесно се докажува дека $2^{n-6} - 5n - 11 > 0$, за $n \ge 13$.

27. Даден е природен број $n \le 2015$ кој не е делив со 5. Определи го бројот на различните $n-$елементни подмножества на множеството $\{1,2,...,2015\}$ такви што збирот на нивните елементи е делив со 5.

Решение. За секој $i \in \{0,1,2,3,4\}$ со X_i да го означиме множеството од подмножества на $A=\{1,2,...,2015\}$ со збир на елементи кој при делење со 5 дава остаток i. Нека $|X_i|=x_i$. Ќе докажеме дека $x_0=x_1=x_2=x_3=x_4$.

Нека $\sigma: A \to A$ е циклична пермутација на елементите од A, т.е. $\sigma(i)=i+1$, за секој $i=1,2,...,2014$ и $\sigma(2015)=1$. На $X=\{a_1,a_2,...,a_n\} \in X_i$ му го придружуваме множеството $X'=\sigma(X)=\{\sigma(a_1),\sigma(a_2),...,\sigma(a_n)\}$. Од дефиницијата на σ следува дека збирот на елементите на X' е конгруентите со $i+n$ по модул 5. Бидејќи n не е делив со 5, имаме $i+n \equiv j(\mathrm{mod}\,5)$, $j \in \{0,1,2,3,4\}$, каде $j \ne i$. Освен тоа, бројот j е ист за различните $X \in X_i$, па затоа $\sigma(X) \in X_j$. Понатаму, сликите на различните множества се различни, па затоа ова пресликување е инјекција, што значи дека $x_i \le x_j$.

Со истото размислување за $\sigma: X_j \to X_k$ добиваме дека $x_j \le x_k$, $k \ne j, k \ne i$ итн. при што циклусот се затвора во петтиот чекор. Според тоа, $x_0=x_1=x_2=x_3=x_4$.

Бидејќи $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=\binom{2015}{n}$, заклучуваме дека $x_0=\frac{1}{5}\binom{2015}{5}$.

28. За две подмножества X и Y на множеството $A=\{1,2,...,2n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ќе велиме дека се соседни ако $|X \cap Y|=1$ и $X \cup Y = A$. Докажи, дека може да се изберат најмногу $2^{2n-1}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}-1$ подмножества на A меѓу кои нема соседни множества.

Решение. Да забележиме дека ако X и Y се соседни и $|X|=k, k=1,2,...,n$, тогаш $|Y|=2n+1-k$. Ќе докажеме, дека за секој $k=1,2,...,n$ од сите множества множества со k и $2n+1-k$ елементи може да бидат избрани најмногу $\binom{2n}{k}$ множества меѓу кои нема соседни.

Нека p и q е бројот на мноествата со k и $2n+1-k$ елементи, соодветно. Бидејќи секое множество со k елементи има точно k сосоедни множества со $2n+1-k$ елементи и секое множество со $2n+1-k$ елементи има точно $2n+1-k$ сосоедни множества со k елементи, добиваме дека

$$[\tfrac{kp}{2n+1-k}]+q \le \binom{2n}{2n-k+1}.$$

Аналогно

$$[\tfrac{(2n+1-k)q}{k}]+p \le \binom{2n}{k}.$$

Ако допуштиме дека $\binom{2n}{k} < p+q$, после собирањето на последните три неравенства добиваме

$$\frac{kp}{2n+1-k}+\frac{(2n+1-k)q}{k}\leq\binom{2n}{2n-k+1}.$$

Ако земеме предвид дека $2n+k-1>k$ и $\binom{2n}{k}<p+q$ добиваме

$$\binom{2n}{2n-k+1}\geq\frac{kp}{2n+1-k}+\frac{(2n+1-k)q}{k}=(p+q)\frac{k}{2n+1-k}+q\left(\frac{2n+1-k}{k}-\frac{k}{2n+1-k}\right)$$
$$>\binom{2n}{k}\frac{k}{2n+1-k}=\binom{2n}{2n-k+1},$$

што е противречност.

Според тоа, $p+q\leq\binom{2n}{k}$. Ако за $k=1,2,...,n$ ги собереме добиените неравенства добиваме дека имаме најмногу

$$\binom{2n}{1}+\binom{2n}{2}+...+\binom{2n}{n}=2^{2n-1}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}-1$$

подмножества на A меѓу кои нема соседни множества.

29. Дадено е множеството од првите триста природни броеви $\{1,2,...,299,300\}$. Определи го бројот на троелементите подмножества, такви што збирот на елементите на секое од тие троелементни множества е делив со 3.

Решение. Ќе ги разгледаме множествата A_j, $j=0,1,2$ такви што во множеството A_j се наоѓаат елементи кои при делење со 3 даваат остаток j. Секако дека во секое од овие три множества има по сто елементи, т.е. $|A_j|=100$. Ако од множеството A_j ги избереме било кои три елементи, тогаш нивниот збир е број кој е делив со 3. Од множеството A_j можеме да избереме по три елементи на $\binom{100}{3}$ начини.

Ако од множеството $A_\circ$ избереме елемент a, од множеството A_1 избереме елемент b и од множеството A_2 избереме елемент c, тогаш $a+b+c$ е број кој е делив со 3. Од множеството $A_\circ$ еден елемент можеме да избереме на $\binom{100}{1}=100$-начини, и аналогно од множеството A_1 можеме да избереме еден елемент на $\binom{100}{1}=100$-начини, од множеството $A_2=\binom{100}{1}=100$-начини.

Други можности на избор на три елементи чиј збир е делив со 3 нема.

Во првиот случај, бројот на троелементни множества чиј збир на елементи е делив со 3 е $3\binom{100}{3}$ а во вториот случај број на троелементни подмножества чиј збир на елементи е делив со 3 е $\binom{100}{1}\binom{100}{1}\binom{100}{1}=100^3$.

Значи, вкупниот број на триелементни подмножества чиј збир на елементи е делив со 3 е $3\binom{100}{3}+100^3$.

30. Определи го бројот на триелементите подмножества од множеството $\{1,2,3,4,...,20\}$, такви што во секое од нив производот на елементите е број кој е делив со 4.

Решение. Ќе го определиме бројот на подмножества со три елементи, такви што производот на елементите во секое од нив да не е делив со 4. Производот на три природни броја не е делив со 4 ако сите три множители се непарни, или два од нив се непарни а еден е парен број кој не е делив со 4. Непарни броеви се $\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$, и нивниот број е 10. Бројот на троелементни подмножества од последното множество е $\binom{10}{3}$. Во секое такво подмножество производот на елементите не е делив со 4. Од множеството на парни броеви $\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, броевите од подмножеството $\{2,6,10,14,18\}$ не се деливи со 4. За секој избор на еден елемент од множеството $\{2,6,10,14,18\}$ и за избор на два елементи од множеството $\{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$, формираме множество од три елементи такво што производот на неговите елементи не е делив со 4. Според тоа, бројот на такви множества е $\binom{5}{1}\binom{10}{2}=5\binom{10}{2}$.

Други такви подмножества нема. Според тоа бројот на троелементни подмножества во кои производот на елементите не е делив со 4 е $\binom{10}{3}+5\binom{10}{2}$.

Вкупниот број на троелементни подмножества од почетното множество е $\binom{20}{3}$. Според тоа, бараниот број на множества е: $\binom{20}{3}-\binom{10}{3}-5\binom{10}{2}$.

31. Нека $1\leq s\leq k\leq m\leq n$. Најди го бројот на сите $k-$елементни подмножества од $\{1,2,...,n\}$ кои содржат точно s елементи од множеството $\{1,2,...,m\}$.

Решение. Прво од множеството $\{1,2,...,m\}$ треба да избереме s елементи. Бројот на $s-$елементните подмножества од $\{1,2,...,m\}$ изнесува $\binom{m}{s}$. При фиксен избор на едно такво подмножество, за да се „дополни“ до k-елементно подмножество од $\{1,2,...,n\}$ кое ќе содржи точно s елементи од $\{1,2,...,m\}$, мора останатите $k-s$ елементи да ги избереме од множеството $\{1,2,...,n\}\setminus\{1,2,...,m\}$. Последново множество има $\binom{n-m}{k-s}$ подмножества со $k-s$ елементи. Можеме да направиме $\binom{m}{s}$ такви фиксирања, па бараниот број изнесува $\binom{m}{s}\cdot\binom{n-m}{k-s}$.

4. ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

1. На некој прием е присутен определен број луѓе кои меѓусебно или се познаваат или не се познаваат (постои барем едно познанство). За секои двајца кои познаваат еднаков број луѓе важи дека немаат заеднички познаници. Докажи дека на приемот постои човек кој познава само еден друг човек. (Познанството е симетрична релација.)

Решение. Да го разгледаме лицето A со најголем број познаници k. Според условот на задачата, секои две лица меѓу познаниците $B_1,B_2,...,B_k$ на лицето A имаат различен број познаници не поголем од k и не помал од 1. Затоа, барем еден од овие броеви е еднаков на 1.

2. Во рамнината е даден правоаголен координатен систем и пет точки $A,B,C,$

D, E со целобројни координати. Докажи, дека меѓу триаголниците (дегенерирани или недегенерирани) со темиња во дадените точки има најмалку три со целобројна плоштина.

Решение. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Ако темињата на $\triangle MNP$ имаат целобројни координати, тогаш неговата плоштина се менува за цел број ако координатите на темињата M, N, P ги промениме за парен број.

Доказ. Нека $M(a,b), N(,c,d)$ и $P(e,f)$. Ако

$$M_1(a+2k,b+2l),\ \ N_1(c+2m,d+2n) \text{ и } P_1(e+2p,f+2q),$$

тогаш

$$P_{\triangle M_1N_1P_1}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a+2k & b+2l & 1\\ c+2m & d+2n & 1\\ e+2k & f+2q & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+2l & 1\\ c & d+2n & 1\\ e & f+2q & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} k & b+2l & 1\\ m & d+2n & 1\\ k & f+2q & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1\\ c & d & 1\\ e & f & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\cdot 2\begin{vmatrix} a & l & 1\\ c & n & 1\\ e & q & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} k & b+2l & 1\\ m & d+2n & 1\\ k & f+2q & 1\end{vmatrix}$$

$$=P_{\triangle MNP}+\begin{vmatrix} a & l & 1\\ c & n & 1\\ e & q & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} k & b+2l & 1\\ m & d+2n & 1\\ k & f+2q & 1\end{vmatrix}=P_{\triangle MNP}+D,$$

каде $D\in\mathbb{Z}$. ■

Да се вратиме на задачата. Координатите на точките A, B, C, D, E се цели броеви, па затоа со парни промени на нивните координати истите можеме да ги пресликаме во точките

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1). \tag{1}$$

Според принципот на Дирихле најмалку две од дадените точки ќе се пресликаат во една од точките (1). Но, тоа значи дека најмалку три од новодобиените триаголници се дегенирани триаголници со плоштина еднаква на 0. Сега, од лемата следува дека најмалку три триаголниците со темиња во дадените точки има целобројна плоштина.

3. Во просторот е даден правоаголен координатен систем Докажи, дека меѓу 19 точки со целобројни координати секогаш има 4 кои се темиња на тетраедар со целоброен волумен.

Решение. Аналогно како во претходната задача се докажува дека ако темињата на тетраедарот $MNPQ$ имаат целобројни координати, тогаш неговиот волумен се менува за цел број ако координатите на темињата M, N, P, Q ги промениме за цел број делив со 6. Според тоа, после соодветни транслации можеме да сметаме дека координатите на точките се еднакви на 0, 1, 2, 3, 4 и 5. Да ја разгледаме првата координата на точките добиени со транслација на дадените точки. Од принципот на Дирихле следува дека најмалку 4 од добиените точки имаат иста прва координата, што значи дека овие точки лежат во иста рамнина. Но, тоа значи најмалку еден од добиените тетраедри е дегенериран тетраедар со волумен еднаков на 0, т.е. дека меѓу дадените 19 точки постојат 4 кои се темиња на тетраедар со целоброен волумен.

4. Нека се дадени реалните броеви $a_i, i=1,2,...,7$. Докажи, дека постојат a_k, a_m, $k \neq m$ такви што

$$0 \le \frac{a_k - a_m}{1+a_k a_m} < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Решение. Нека $\alpha_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), i=1,2,...,7$ се такви што $a_i = \operatorname{tg}\alpha_i, i=1,2,...,7$. Интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ го делиме на шест интервали со еднаква должина $\frac{\pi}{6}$. Од принципот на Дирихле следува дека во еден од овие интервали ќе припаѓаат два броја α_k, α_m, т.е. постојат $k, m, (k \neq m)$ такви што

$$0 \le \alpha_k - \alpha_m < \frac{\pi}{6}.$$

Функцијата tg е монотоно растечка на интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, па затоа последователно важи

$$0 \le \operatorname{tg}(\alpha_k - \alpha_m) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$0 \le \frac{\operatorname{tg}\alpha_k - \operatorname{tg}\alpha_m}{1+\operatorname{tg}\alpha_k \operatorname{tg}\alpha_m} < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$0 \le \frac{a_k - a_m}{1+a_k a_m} < \frac{\sqrt{3}}{3},$$

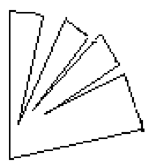
што и требаше да се докаже.

5. Одреди го најголемиот број на остри агли што може да ги има 12-аголник.

Решение. На цртежот десно се гледа дека е можно еден 12-аголник да има 9 остри агли.

Ќе покажеме дека 12-аголникот не може да има повеќе од 9 остри агли.

Да претпоставиме дека 12-аголникот има 10 остри агли. Тогаш сумата на сите агли во 12-аголникот е помала од $10 \cdot 90 + 2 \cdot 360 = 1620$ степени (Зошто?). Но, сумата на аглите во 12-аголникот изнесува $(12-2) \cdot 180^\circ = 1800^\circ$. Добивме контрадикција, што значи дека претпоставката не ни е точна, односно во 12-аголник не може да има повеќе од 9 остри агли.



6. Дадени се шест подредени тројки реални броеви. Докажи, дека постојат барем две тројки (a,b,c) и (x,y,z) такви што

$$ax + by + cz \ge 0. \tag{1}$$

Решение. Ако меѓу шесте подредени тројки се наоѓа тројката $(0,0,0)$, тогаш тврдењето е тривијално. Во спротивно, секоја тројка (p,q,r) определува ненулти вектор во однос на произволно избран Декартов правоаголен координатен систем, а бројот $ax+by+cz$ е скаларниот производ на векторите (a,b,c) и (x,y,z). Според тоа, условот (1) е еквивалентен со условот аголот меѓу векторите (a,b,c) и (x,y,z) да е помал или еднаков на 90°. Ќе докажеме дека аголот меѓу некои два од шесте вектори е помал или еднаков на 90°.

Избираме произволен вектор меѓу шесте вектори. Да претпоставиме дека тој гради тапи агли со останатите пет вектори. Тогаш овие вектори лежат во еден полупростор. Овој полупростор го делиме на четири правоаголни октанти. Според принципот на Дирихле два од петте вектори припаѓаат на ист октант. Јасно, овие два вектори зафаќаат агол кој е помал или еднаков на 90°.

7. Докажи, дека меѓу првите 10^8 членови на низата на Фибоначи

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{, за } n \ge 0$$

постои барем еден кој е делив со 10^4.

Решение. Нека претпоставиме дека $10^4 \nmid f_n$ за $n \le 10^8$. Да ја разгледаме низата остатоци $r_i, i = 1, 2, \ldots$ од делењето на $f_i, i = 1, 2, \ldots$ со 10^4. Имаме

$$r_1 \equiv r_2 (\mathrm{mod} 10^4) \text{ и } r_{n+2} \equiv r_{n+1} + r_n (\mathrm{mod} 10^4).$$

Бидејќи $r_n \ne 0$, добиваме дека r_n прима најмногу $10^4 - 1$ вредност, а за сите последователни парови $(r_1, r_2), (r_2, r_3), \ldots, (r_n, r_{n+1}), n = 10^8 - 1$ постојат најмногу $(10^4 - 1)^2 < 10^8 - 1$ можности. Според тоа, постојат броеви $i < j \le 10^8 - 1$ такви што $r_i \equiv r_j (\mathrm{mod} 10^4)$ и $r_{i+1} \equiv r_{j+1} (\mathrm{mod} 10^4)$. Затоа

$$r_{i-1} \equiv r_{i+1} - r_i \equiv r_{j+1} - r_j \equiv r_{j-1} (\mathrm{mod} 10^4),$$

$$r_{i-2} \equiv r_{j-2} (\mathrm{mod} 10^4),$$

....

$$1 = r_2 \equiv r_{j-i+2} (\mathrm{mod} 10^4),$$

$$1 = r_1 \equiv r_{j-i+1} (\mathrm{mod} 10^4).$$

Конечно, $r_{j-i} \equiv 1 - 1 (\mathrm{mod} 10^4)$, т.е. $10^4 \mid f_{j-i}$.

8. Даден е правилен шестаголник со страна 1. Во внатрешноста на шестаголникот земени се m точки такви што никои три точки меѓу темињата и овие m точки не се колинеарни. Шестаголникот е разделен на триаголници, при што секоја од дадените m точки и секое од темињата на шестаголникот е теме на делбен триаголник. Два делбени триаголници немаат заедничка внатрешна точка. Докажи дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.

Решение. Ќе го определиме вкупниот број на делбени триаголници на кои е поделен дадениот шестаголник. Нека A е произволна точка од внатрешните m точки. Збирот од сите агли во точката A е 360° (збир од сите агли во A на сите триаголници кои таа точка ја имаат за свое теме). Од друга страна, збирот од сите агли во теме на шестаголникот е 120°. Бидејќи збирот на аглите во секој триаголник е 180°, бројот на делбени триаголници е:

$$\frac{m\cdot 360^\circ+6\cdot 120^\circ}{180^\circ}=2m+4.$$

Нека претпоставиме дека плоштината на секој од дадените делбени триаголници е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$. Тогаш збирот на плоштините на сите делбени триаголници е поголем од $(2m+4)\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, што не е можно бидејќи плоштината на дадениот шестаголникот е $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Конечно, од добиената противречност следува дека постои делбен триаголник чија плоштина не е поголема од $\frac{3\sqrt{3}}{4(m+2)}$.

9. Даден е круг со радиус 1 на кој се избрани 8 точки. Докажи дека од овие точки можат да се изберат две со меѓусебно растојание помало од 1. Дали тврдењето важи за 7 точки?

Решение. Да го разгледаме кружниот исечок со агол од 60°. Должината 1 се достигнува за најоддалечените точки на лакот и за центарот на исечокот и произволна точка од лакот. Кругот може да се покрие целосно со 6 вакви исечоци. Најмногу една точка лежи во центарот на кругот, па од преостанатите 7, барем две лежат во ист исечок, а да не се најоддалечените точки на лакот. Нивното растојание е помало од 1. Од до сега изнесеното се гледа дека тврдењето не мора да важи за 7 точки, ако една се стави во центарот на кригот, а останатите во темињата на правилниот шестаголник впишан во таа кружнца.

10. Во рамнината се дадени две заемно нормални прави, три правоаголници чии страни се паралелни со дадените прави и еден триаголник. Унијата на правоаголниците го покрива работ на триаголникот, т.е. секоја точка од страните на триагоLникот лежи во внатрешноста на еден правоаголник. Докажи, дека целиот триаголник лежи во внатрешноста на унијата на правоаголниците.

Решение. Нека T е произволна точка во внатрешноста на триаголникот. Низ T повлекуваме прави паралелни со дадените прави. Во пресекот на овие прави со страните на триаголникот добиваме четири точки, од кои најмалку две лежат во еден од трите четириаголници. Во овој правоаголник лежи и точката T (зошто?). Сега тврдењето на задачата следува од произволноста на точката T.

11. Во табела со димензии $2n\times 2n$ се запишани природни броеви кои се помали или еднакви на 10, при што броевите кои се запишани во квадрати со заеднички теме се заемно прости. Докажи, дека постои број кој се појавува барем $\frac{2n^2}{3}$ пати.

Решение. Да ја поделиме табелата на n^2 квадрати со димензија 2×2. Бидејќи секој од овие квадрати може да содржи најмногу 2 од броевите 2, 3, 4, 6, 8, 9 и 10, заклучуваме дека секој од овие квадрати содржи барем два од броевите 1, 5 и 7. Но, вакви квадрати има n^2, па затоа броевите 1, 5 и 7 во табелата ќе се појават $2n^2$. Конечно, од принципот на Дирихле следува дека некој од броевите 1, 5 и 7 ќе се појави најмалку $\frac{2n^2}{3}$ пати.

12. Множеството A има 6 елементи. Дадени се 11 различни негови подмножества $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}$. Докажи дека од нив може да се изберат три множества A_i, A_j, A_k кои се подмножества од четириелементно подмножество од A.

Решение. Да забележиме дека постојат вкупно $\binom{6}{3} = 20$ троелементни подмнжества. За секое троелементно множество B ќе го формираме парот од троелементни множества $(B, A \setminus B)$. Јасно е дека B и $A \setminus B$ се дисјунктни и триелементни подмножества. Според принципот на Дирихле, постојат два елементи од $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}$ кои формираат пар. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа се A_1 и A_2. Значи, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ и $A_1 \cup A_2 = A$. Секое од множествата $A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$, A_9, A_{10}, A_{11}, со едно од множествата A_1 и A_2 има едноелементен пресек, а со другото од нив има двоелементен пресек. Според принципот на Дирихле, едното од нив со пет од деветте множества има едноелементен пресек. Повторно, без ограничување на општоста, можеме да претпоставиме дека тоа е множеството A_1.

Сега, бидејќи A_2 е триелементно множество, две од петте множества имаат ист пресек со него. Нека тоа се A_i и A_k. Конечно, од претходните разгледувања следува $|A_1 \cup A_i \cup A_k| = 4$.

Значи, бараните множества се A_1, A_i, A_k.

13. Определи го најмалиот природен број n таков што за произволни природни броеви $a_i, i = 1, 2, ..., n$ постојат $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ кои не се сите еднакви на нула и важи $2017 \mid \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i$.

Решение. Нека $n = 11$. Ако избереме броеви $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, тогаш постојат $2^{11} - 1$ начини (исклучена е можноста сите ε_i да се нули) на кои можеме да собереме некои од тие броеви, земајќе го секој од нив по еднаш. Од $2^{11} > 2017$ следува дека меѓу добиените збирови постојат два кои при делење со 2017 даваат ист остаток. Нивната разлика е делива со 2017 и таа е од саканиот облик.

Бројот $n = 11$ е најмалиот број со ова својство. Навистина за $n = 10$ и броевите $a_i = 2^{i-1}, i = 1, 2, 3, ..., 10$ не постојат такви ε_i бидејќи сите претходно опишани збирови се различни и помали од 2017.

14. Множеството A има 6 елементи. Докажи дека во секоја фамилија од различни триелементни подмножества

$$\{A_1, A_2, ..., A_{11}\} \ (|A_j| = 3, \ A_i \neq A_j, \ i \neq j, \ i, j = 1, 2, ..., 11)$$

постојат три различни множества A_i, A_j, A_k кои се подмножества од исто четириелементно множество.

Решение. Бројот на триелементни подмножества од шестелементното множество A е еднаков на

$$\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!3!}=20\,.$$

За секое од множествата $A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9,A_{10},A_{11}$ можеме да формираме парови од множества, т.е. двоелементни множества $\{A_i,A\setminus A_i\}$, $i=1,2,...,11$. Јасно, множествата A_i и $A\setminus A_i$ се дисјунктни подмножества од A и двете се троелементни. Бројот на можни вакви парови $\{B,A\setminus B\}$ е десет. Бидејќи во фамилијата $\{A_i,A\setminus A_i\}$, $i=1,2,...,11$ имаме единаесет елементи, од принципот на Дирихле следува дека постои пар на индекси $i,j\in\{1,2,...,11\}$ таков што $i\neq j$ и $\{A_i,A\setminus A_i\}=\{A_j,A\setminus A_j\}$. Бидејќи $A_i\neq A_j$, добиваме дека $A_i=A\setminus A_j$.

Нека тоа не се множествата A_1 и A_2. Останатите девет множества $A_3,A_4,A_5,A_6,A_7,A_8,A_9,A_{10},A_{11}$ со множествата A_1 и A_2 имаат пресек кој има еден или два елементи. Бидејќи имаме девет множества, од принципот на Дирихле следува дека пет од нив со едно од множествата A_1 и A_2 ќе имаат едноелементен пресек. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа е множеството A_2. Уште повеќе, според принципот на Дирихле, две од овие множества, на пример A_k и A_l, имаат ист пресек со A_2. Ако на пример $A_k\cap A_2=\{a\}$ и $A_l\cap A_2=\{a\}$, тогаш $|A_k\cap A_1|=2$ и $|A_l\cap A_1|=2$.

Нека претпоставиме дека $A_2=\{a,b,c\}$ и $A_1=\{d,e,f\}$. Јасно, $A_k\cap A_l\cap A_1$ е едно елементно множество, бидејќи во спротивно ќе биде $A_k=A_l$, што противречи на претпоставката.

Од условот $A_k\cap A_l\cap A_1$ да е едноелементо множество, добиваме дека $A_k\cap A_l$ е двоелементно множество. Во спротивно, ако $A_k\cap A_l$ е едноелементно множество, тогаш тоа е елементот кој припаѓа и во A_1 и во A_2 што не е можно.

Сега, од принципот на вклучување и исклучување, добиваме дека

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_k\cup A_l|&=|A_1|+|A_k|+|A_l|-|A_1\cap A_k|-|A_1\cap A_l|-|A_k\cap A_l|\\&\quad+|A_1\cap A_k\cap A_l|\\&=3+3+3-2-2-2+1=4.\end{aligned}$$

15. Нека M е множество природни броеви, секој од кои има 2013 цифри и не ја содржи нулата во декадниот запис. За два броја од M велиме дека се *соседни,* ако цифрите им се совпаѓаат барем во една класа. Определи го најголемиот можен број елементи на M, ако меѓу секои 9 броеви од M можеме да избереме 3 броја кои се соседни по парови.

Решение. Нека A е множеството од сите природни броеви со 2013 цифри, такви што на првите 2012 места може да стои секоја од цифрите 1, 2, 3, ..., 9, а на последното место може да стојат само цифрите 1, 2 ,3 и 4. Тогаш $|A|=4\cdot 9^{2012}$. Од принципот на Дирихле следува, дека меѓу произволни 9 броеви од A најмалку три имаат иста последна цифра, што значи дека тие се соседни по парови. Според тоа, $|M|\geq|A|=4\cdot 9^{2012}$.

Ќе докажеме, дека ако B е множество броеви секој од кои има 2013 цифри и во декадниот запис не ја содржи нулата и ако $|B| > 4\cdot 9^{2012}$, тогаш можеме да избереме 9 броеви, меѓу кои нема три кои се по парови соседни. Нека N е множеството од сите броеви со 2013 ненулти цифри. Тогаш $|N| = 9^{2013}$. Да ги подредиме цифрите 1, 2, ...,9 на кружница во насока на движењето на стрелката на часовникот. Ќе велиме дека 2 е после 1, 3 е после 2, ..., 1 е после 9. За два 2013-цифрени броја a и b ќе велиме дека a е после b, ако секоја од цифрите на a е после соодветната цифра на b. Множеството N може да се разбие на 9^{2012} подмножества $N_1, N_2, ..., N_{9^{2012}}$ од по 9 елементи, такви што во секое подмножество деветте броеви се еден по друг.

Бидејќи $|B| > 4\cdot 9^{2012}$, од ринципот на Дирихле следува дека можеме да избереме 5 елементи од едно од множествата N_i. Од останатите елементи на B можеме да избереме 4 елементи од едно исто подменожество N_j. Повторно од принципот на Дирихле следува дека од секои три од овие елементи два се содржат во едно од множествата N_i или N_j. Последното значи, дека овие два елементи не се соседни. Според тоа, $|M| \le 4\cdot 9^{2012}$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека $|M| = 4\cdot 9^{2012}$.

16. Дадена е кружница со центар во координатниот почеток и радиус 2016. На кружницата и во нејзината внатрешност се избрани 540 точки со целобројни координати такви што меѓу нив нема три колинеарни точки. Докажи, дека постојат два триаголника чии темиња се во дадените точки и кои имаат еднакви плоштини.

Решение. Нека претпоставиме дека сите триаголници имаат различна плоштина. Имаме вкупно $\binom{540}{3} = \frac{540\cdot 539\cdot 538}{1\cdot 2\cdot 3} = 26098380$ триаголници. Плоштината на секој од овие триаголници ABC се пресметува со формулата

$$P = \frac{1}{2}\,|A_x(B_y - C_y) + B_x(C_y - A_y) + C_x(A_y - B_y)|,$$

па затоа плоштината на секој од разгледуваните триаголници е природен број поделен со 2. Според тоа, бидејќи имаме 26098380 триаголници најголемата плоштина ќе биде поголема од $\frac{26098380}{2} = 13049190$. Меѓутоа, плоштината на кругот е

$$2016^2\pi < 2016^2\cdot 3,2 = 13005619,2 < 13049190,$$

што значи дека триаголникот со најголема плоштина нема да може да биде впишан во кругот. Конечно, од добиената противречност следува дека има најмалку два триаголника кои имаат еднакви плоштини.

17. Во кружницата k со радиус R се наоѓаат кружни дамки. Површината на секоја дамка е најмногу 1. Секој радиус на кружницата k, како и секоја нејзина концетрична кружница, сече најмногу една дамка. Докажи дека плоштината на сите дамки е помала од $\pi\sqrt{R} + \frac{1}{2}R\sqrt{R}$.

Решение. Ќе го докажеме тврдењето за радиуси на дамките помали од еден тогаш во секој случај е опфатен случајот кога плоштината е помала од еден. Треба да разгледаме два случаи ако има само една дамка или повеќе дамки. Разликата е во тоа што ако има повеќе дамки тогаш центарот не смее да биде во ниту една дамка во спротивно сите радиуси би ја сечеле. Ако има само една дамка:

$$R \le 1 \Rightarrow P \le \pi R^2 \le \pi\sqrt{R} < \pi\sqrt{R} + \tfrac{1}{2}R\sqrt{R};$$

$$R > 1 \Rightarrow P \le \pi < \pi\sqrt{R} + \tfrac{1}{2}R\sqrt{R}.$$

Ако има повеќе од една дамка да забележиме дека ако има две дамки со радиуси r_1 и r_2 такви што

$$r_1 + r_2 \le 1,$$

$$P_1 + P_2 = \pi(r_1^2 + r_2^2) < \pi(r_1 + r_2)^2$$

$$r_1 + r_2 > 1,$$

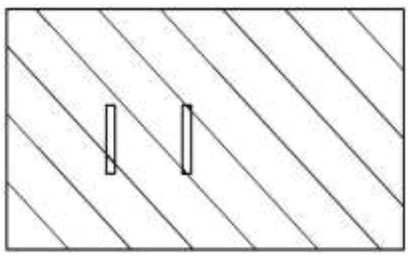
$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \pi(r_1^2 + r_2^2) < \pi(1 + (r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - 2r_1 - 2r_2 + 1) - 2 + 2r_1 + 2r_2 - 2r_1r_2) \\ &= \pi(1 + (r_1 + r_2 - 1)^2 - 2(1 - r_1)(1 - r_2)) \\ &< \pi(1 + (r_1 + r_2 - 1)^2) \end{aligned}$$

Од ова може да се забележи дека површината на дамките секако не е поголема од случајот во кој сите освен една дамка се со радиус 1 и збирот на нивните дијаметри е еднаков на R. Во овој случај се добива површина:

$$P = \pi([\tfrac{R}{2}] + (\tfrac{R}{2} - [\tfrac{R}{2}])^2) < \tfrac{\pi R}{2} < \tfrac{\pi R}{2} 2\sqrt{\tfrac{2}{\sqrt{R}} + \tfrac{\sqrt{R}}{\pi}} \le \tfrac{\pi R}{2}(\tfrac{2}{\sqrt{R}} + \tfrac{\sqrt{R}}{\pi}) = \pi\sqrt{R} + \tfrac{R\sqrt{R}}{2}$$

18. Определи го најголемиот број правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ кој може да се добие од правоаголник со димензии 50×90, ако е дозволено сечење по прави паралелни на страните на дадениот правоаголник.

Решение. Нека темињата на правоаголникот се $A(0,0), B(90,0), C(90,50)$ и $D(0,50)$. Да ги повлечеме правите $x + y = 10n\sqrt{2}$, каде $n = 1, 2, \dots [\frac{90+50}{10\sqrt{2}}] = 9$ и да ги разгледуваме отсечките кои правоаголникот $ABCD$ ги отсекува од нив. Лесно се пресметува дека вкупната должина на овие отсечки еднаква на $570\sqrt{2} - 360$. Меѓутоа, секој правоаголник со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ и страни паралелни на координатните оски покрива делови од овие отсечки со должина $\sqrt{2}$. Според тоа, не може да бидат пресечени повеќе од $[\frac{570\sqrt{2}-360}{\sqrt{2}}] = 315$ од бараните правоаголници.



Ако дадениот правоаголник го поделиме на правоаголници со димензии $50\times 60\sqrt{2}$ и $50\times(90-60)\sqrt{2}$, тогаш првиот правоаголник може да подели на 300 правоаголници $1\times 10\sqrt{2}$, додека од вториот може да се отсечат уште $3\cdot 5 = 15$

правоаголници, бидејќи $[\frac{50}{10\sqrt{2}}]=3$ и $[(90-60)\sqrt{2}]=5$. Според тоа, од дадениот правоаголник може да се добијат 315 правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$.

19. Во правилен шестаголник $ABCDEF$ со должина на страна еднаква на 1 избрани се различни точки $P_1, P_2, ..., P_{2556}$. Ако никои три точки од множеството $S=\{A, B, C, D, E, F, P_1, P_2, ..., P_{2556}\}$ не лежат на една права, докажи дека постои триаголник со темиња од S чија плоштина е помала од $\frac{1}{1700}$.

Решение. Да разгледаме триангулација на правилниот шестаголник и дадените точки. Збирот на сите агли од таа триангулација е еднаков на

$$2556\cdot 360^\circ + 6\cdot 120^\circ = 2556\cdot 2\cdot 180^\circ + 4\cdot 180^\circ,$$

па затоа вкупниот број на триаголници е еднаков на $2556\cdot 2+4=5116$. Ако секој од овие триаголници има плоштина поголема од $\frac{1}{1700}$, тогаш плоштината на шестаголникот ќе биде $5116\cdot\frac{1}{1700}>3>\frac{3\sqrt{3}}{2}=P_{ABCDEF}$, што е противречност.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder, P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007

42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E., Rouseau, C.: Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
67. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
68. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
69. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
70. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
71. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
72. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
73. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
74. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
75. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
76. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
77. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
78. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
79. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
80. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
81. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
82. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
83. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
84. Арсеновић, М., Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
85. Арсланагиђ, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
86. Арсланагиђ, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје

87. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
88. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
89. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
90. Арсланагиќ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол на триаголник, Сигма, Скопје
91. Арсланагиќ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
92. Арсланагиќ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
93. Арсланагиќ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
94. Арсланагиќ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
95. Арсланагиќ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
97. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
98. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
108. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
109. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
110. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
111. Велинов, Д.: Полиномни равенки, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
113. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
114. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
115. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
116. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
117. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
118. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
121. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
122. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
123. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
124. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје
125. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
126. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
127. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
128. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015

129. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
130. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
131. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
132. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
134. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
135. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
136. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
137. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
138. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Полиноми по једној променљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
153. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
154. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
155. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
157. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
158. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
159. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
160. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
161. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
162. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиуђ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
167. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
168. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
169. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970
170. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
171. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
172. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
173. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
174. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
175. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
176. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
177. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје

178. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
179. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
180. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
181. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика$^+$, Софија, 1997
182. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
183. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
184. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
185. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
188. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
191. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
192. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
193. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
195. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
196. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
197. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
202. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
203. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
204. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
210. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
211. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
212. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
213. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
214. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
215. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
216. Малчески, Р.: Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
217. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
218. Малчески, Р., Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
219. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995

220. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
221. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
222. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
223. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
224. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
226. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
227. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
228. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
229. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
230. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
231. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
233. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
234. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
235. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
236. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
237. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
238. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
239. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
240. Малчески, Р:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
241. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
242. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
248. Маркоски, Ѓ.: Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
249. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
252. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
253. Миличић, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013
254. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
255. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
256. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
257. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
258. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
259. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международние математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
260. Муминагиħ, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
261. Муминагиħ, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
262. Муминагиħ, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
263. Муминагиħ, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
264. Мушкаров, О., Гроздев, С.: Едно математичко чудовиште, Сигма, Скопје
265. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
266. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
267. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
268. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
269. Поја, Г.: Математическое открìитие, Москва 1976
270. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
271. Поповска-Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
272. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988

273. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
274. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
275. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
276. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
277. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
278. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
279. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
280. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
281. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
282. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
283. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
284. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
285. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
286. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
287. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
288. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
291. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
292. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
293. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
294. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
295. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
296. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
297. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
299. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011