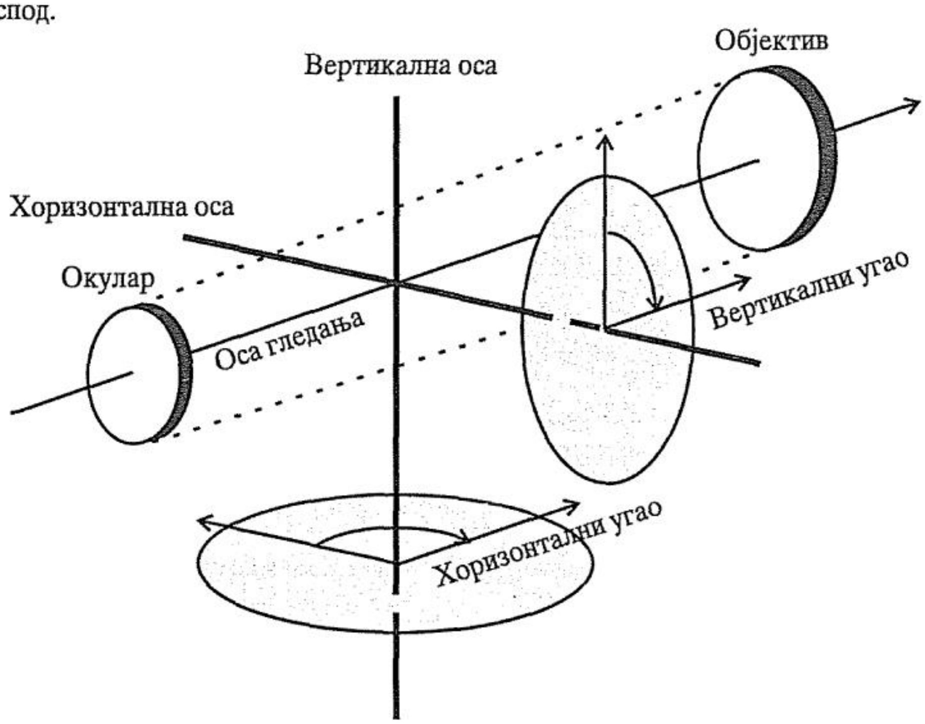
НЕКЕ ПРИМЕНЕ ТРИГОНОМЕТРИЈЕ

Ивана Милићевић

Пре предузимања различитих радова на преуређењу неког земљишта потребно је извршити тачно снимање терена и направити одређене планове. Нивелација земљишта, регулација река, подизање брана и насипа, пробијање тунела, наводњавање и исушивање терена, трасирање пруга и путева су такви послови за које се претходно морају припремити детаљни планови. За њих је потребно одредити велики број растојања и углова, чије би директно мерење било веома скупо, дуготрајно и тешко, а често и немогуће.

При решавању различитих практичних задатака у геодезији тригонометрија има широку примену. Овом приликом ћемо се бавити неким једноставнијом задацима из геодезије, уз претпоставку да су мерења извршена на прилично малом делу Земљине површине, узимајући у обзир само њене равнице. У случају решавања различитих геодетских задатака, када се при мерењу не могу занемарити узвишења и удубљења на Земљиној површини користи се и сферна тригонометрија.

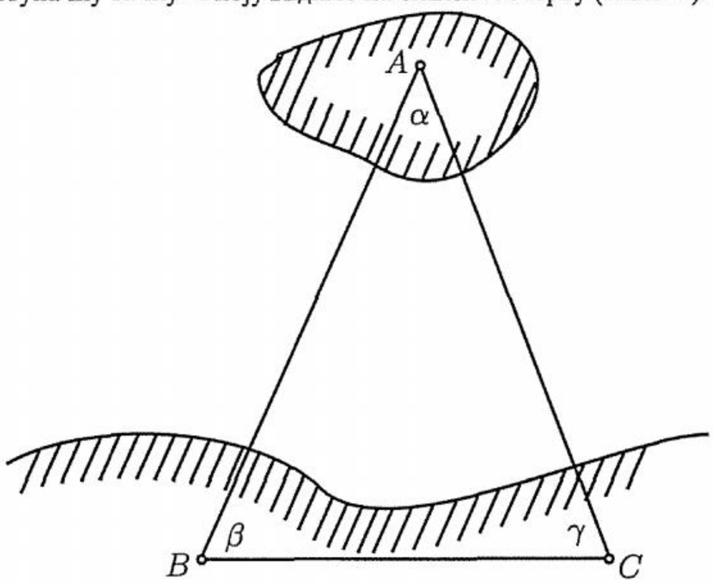
НАПОМЕНА. Данас постоји доста геодетских инструмената који се користе за прилично прецизно мерење углова, и то углавном оних чије нам је теме доступно док се краци „пружају" до неких недостижних (недоступних, удаљених, ...) тачака (места). Најстарији међу оваквим инструментима је *теодолит*. Упрошћено речено, теодолит треба поставити у теме угла који меримо, а затим погледом кроз дурбин, који је део теодолита, фиксирамо (удаљене) недостижне тачке. Различити положаји дурбина директно дају углове који су нам потребни. Теодолит је прилагођен како мерењу *хоризонталних углова* (први задатак, слика 2), тако и *вертикалних углова* (трећи задатак, слика 4). Веома сведен приказ теодолита дат је на слици испод.



Слика 1.

Задатак 1. Одредити растојање између доступне тачке B до недоступне тачке A.

Решење. Замислимо да се налазимо на морској обали и да желимо да у карту унесемо неку нову неприступачну тачку A коју видимо на блиском острву (слика 2).



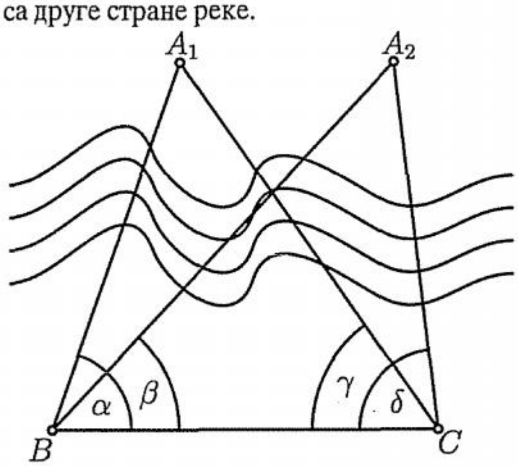
Слика 2.

У ту сврху посматраћемо још једну тачку C чији положај знамо. Из тачака B и C измерићемо углове $\beta = \sphericalangle CBA$ и $\gamma = \sphericalangle BCA$.

Сада се задатак своди на решавање троугла код кога су познати једна страница BC и два налегла угла. Коришћењем синусне теореме, добијамо да је $\dfrac{BA}{\sin\gamma} = \dfrac{BC}{\sin\alpha}$, тј. $BA = \dfrac{BC\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Како је $\alpha = \pi - (\beta+\gamma)$, то је $\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma)$, па је $BA = \dfrac{BC\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$. $\square$

Задатак 2. Одреди растојање између две недоступне тачке A_1 и A_2 које видимо из доступних тачака B и C (слика 3).

Решење. Замислимо да се налазимо са једне стране реке и да желимо да у карту унесемо положај тачака A_1 и A_2 са друге стране реке.



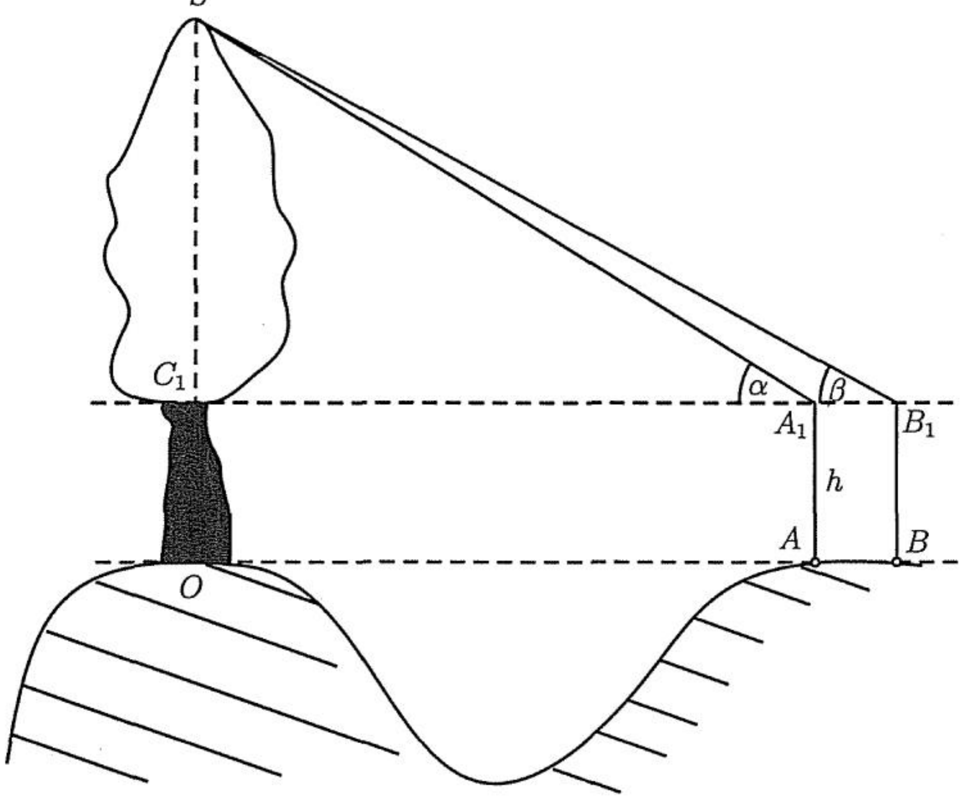
Слика 3.

Из доступних тачака B и C измеримо углове α, β, γ и δ (слика 3). На основу претходног задатка следи да је $A_1B = BC\dfrac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}$ и $A_2B = BC\dfrac{\sin\delta}{\sin(\beta+\delta)}$.

Применом косинусне теореме на троугао A_1A_2B тражена дужина A_1A_2 је $A_1A_2 = A_1B^2 + A_2B^2 - 2\cdot A_1B\cdot A_2B\cdot\cos(\alpha-\beta)$ (што смо могли добити и из троугла A_1A_2C). □

Задатак 3. Одредити висину недоступног предмета на слици 4.

Решење. „Вертикалне" углове ћемо мерити из тачака A_1 и B_1 које су на висини h од тла.



Слика 4.

Мерењем углова α и β из троугла SA_1B_1 имамо: $A_1S = A_1B_1\sin\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. Како је $OS = h + SC_1$ и $SC_1 = A_1S\sin\alpha$, имамо да је $OS = h + A_1S\sin\alpha$. □

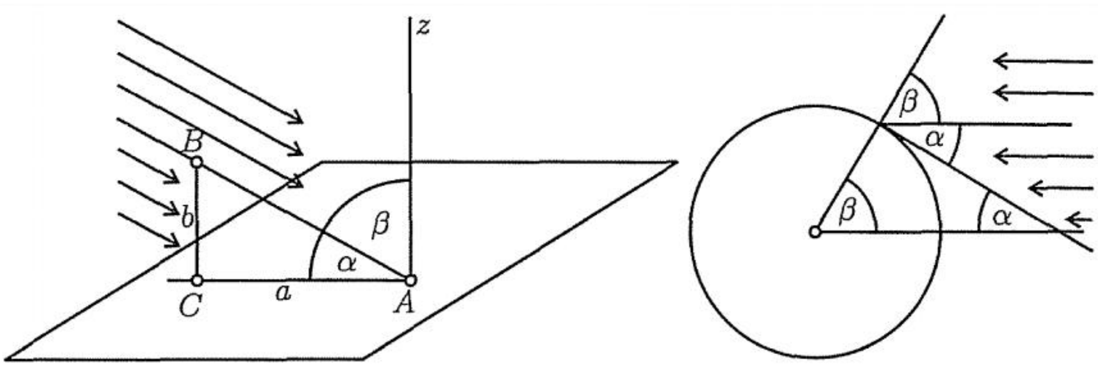
Ови задаци, који се своде на решавање троугла, представљају основну методу при решавању геодетских проблема.

У астрономији се растојање небеских тела и њихов међусобни положај одређују посредно мерењима које се врше на Земљи. Следе три примера примене тригонометрије у астрономији.

Задатак 4. Одредити (угловну) висину[3], односно зенитно растојање Сунца помоћу сенке вертикално (у односу на Земљину површину) постављеног предмета.

Решење. Нека је b висина вертикалног предмета, а a дужина његове сенке на равној хоризонталној подлози (слика 5, лево). Тада се угао α, тј. *(уѓловна) висина* Сунца може одредити из једнакости $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{b}{a}$, док је зенитно растојање Сунца $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$.

[3]Угао који сунчеви зраци заклапају са Земљином површином



Слика 5.

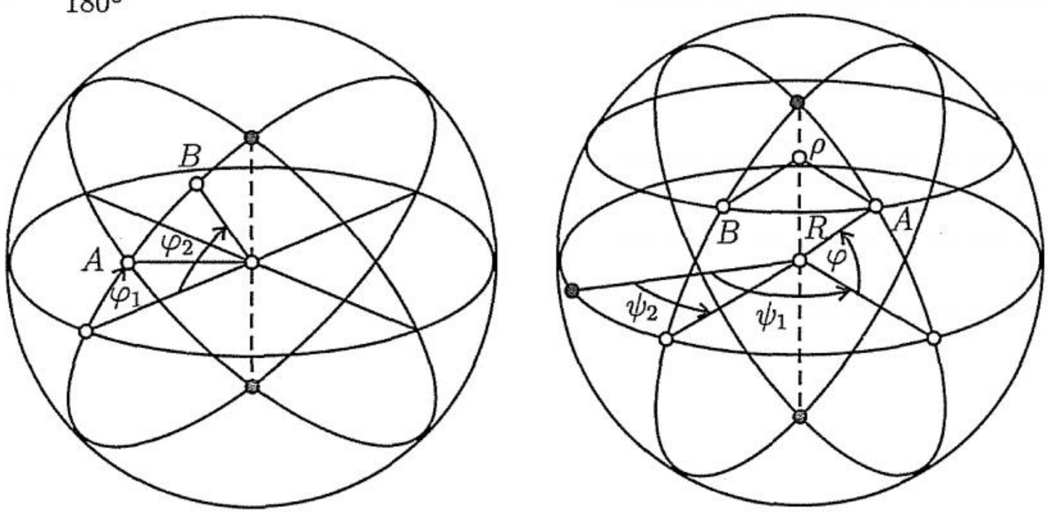
Ако се висина Сунца одреди на дан равнодневнице, и то у подне, онда зенитно растојање истовремено представља и географску ширину места на којем се мерење врши (слика 5, десно).

У то време Сунчеви зраци падају нормално на екватор, па су зенитно растојање и угао који даје географску ширину једнаки (сагласни углови са два паралелна Сунчева зрака, при чему је полупречник Земље трансверзала). Географску ирину β је тада једноставно одредити на основу једнакости

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\beta = \frac{b}{a}. \quad \square$$

Задатак 5. Одредити растојање између два места на Земљиној површини исте географске а) ширине; б) дужине.

Решење. а) Ако су два места A и B на Земљиној површини на истом меридијану (исте географске дужине), и имају географске ширине φ_1 и φ_2 (слика 6, лево)[4], лук ℓ меридијана између A и B биће $\ell = R(\varphi_2 - \varphi_1)$, ако су φ_1 и φ_2 у радијанима, а ако су дати у степенима $\ell = \dfrac{R(\varphi_2 - \varphi_1)}{180^\circ}\pi$.



Слика 6.

б) Ако су места A и B на истом упореднику (исте географске ширине), а имају географске

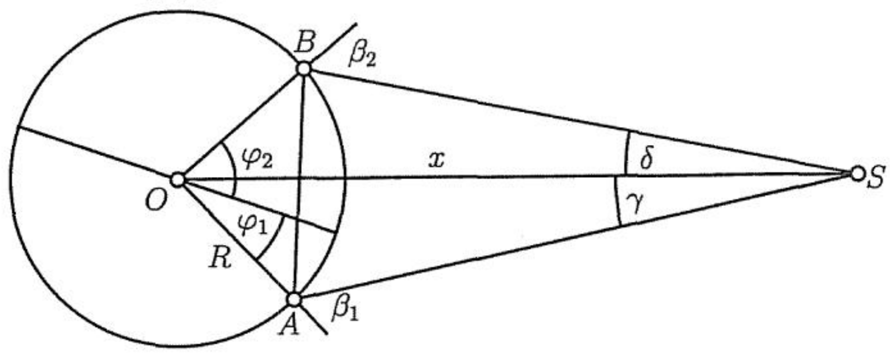
[4] φ_1 и φ_2 су истог знака ако су A и B са исте стране екватора, а супротног знака ако нису.

дужине ψ_1 и ψ_2 (слика 6, десно)[5], полупречник ρ упоредника на којем леже та два места је $\rho = R\cos\varphi$, па ће лук ℓ упоредника између A и B бити $\ell = (\psi_1 - \psi_2)R\cos\varphi$, за ψ_1 и ψ_2 у радијанима, а $\ell = \dfrac{(\psi_1 - \psi_2)R\cos\varphi}{180^\circ}\pi$, за ψ_1 и ψ_2 у степенима. □

Ако се у претходно изведеним обрасцима зна лук меридијана или упоредника између два места, може се одредити полупречник Земље R. Ово је знао да искористи Ератостен (275 - 194 п.н.е.). Сазнавши да се у Сијени у Египту, јужно од Александрије, налази један бунар у којем се једном годишње огледа Сунце, успео је да израчуна полупречник Земље. Он је измерио зенитно растојање Сунца у Александрији у моменту када се Сунце огледало у бунару у Сијени. Знајући дужину лука између Сијене и Александрије и претходне формуле израчунао је полупречник Земље.

Задатак 6. Одредити удаљеност неког небеског тела од Земље.

Решење. Ако су позната зенитна растојања β_1 и β_2 неког небеског тела S у два места A и B у тренутку када се то тело налази у равни меридијана та два места (слика 7) може се, познавајући географске ширине φ_1 и φ_2 та два места и полупречник Земље R, одредити растојање x тела S од средишта Земље O.



Слика 7.

У једнакокраком троуглу AOB, угао на врху је $\varphi_2 - \varphi_1$, па су углови на основици AB су $\dfrac{\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)}{2}$. Тада је дужина тетиве $AB = 2R\cos\left(\dfrac{\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)}{2}\right) = 2R\sin\dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$.

У $\triangle ABS$ углови на основици су $\sphericalangle BAS = \dfrac{\pi}{2} - \beta_1 + \dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$ и $\sphericalangle ABS = \dfrac{\pi}{2} - \beta_2 + \dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$.

Према синусној теореми примењеној на $\triangle ABS$ је $AS = AB\dfrac{\cos\left(\beta_2 - \dfrac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)}{\sin\left((\beta_1 + \beta_2) - (\varphi_2 - \varphi_1)\right)}$.

У троуглу OAS су познате две странице $AS, OA(= R)$ и захваћени угао $\sphericalangle OAS = \pi - \beta_1$. Поновном применом синусне теореме добија се $x = OS = R\dfrac{\sin\beta_1}{\sin\gamma}$, при чему се γ може одредити применом тангенсне теореме на троугао OSA. □

Ако се зна растојање неког небеског тела може се наћи и његова величина, ако му се измери угао под којим се види са Земље.

[5] ψ_1 и ψ_2 су истог знака ако су обе дужине исте врсте (обе источне или обе западне), а супротног знака ако нису.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2008/09 година