

Granični objekti u računalnim igrama

Kristian Golubić*, Maja Starčević†

Sažetak

U radu je opisano kako se u računalnim igrama pojednostavljuje provjera kolizija igračih objekata. Zbog svoje kompleksnosti objekti se zamjenjuju jednostavnijim graničnim objektima poput kvadara, kugli i kapsula pomoću kojih je lakše ustanoviti je li došlo do sudara objekata. Na jednostavnom modelu prikazana je konstrukcija pojedinih graničnih objekata te je napravljena usporedba trenutaka u kojima se zbiva kolizija.

Ključne riječi: *granični objekti, minimizacija površine, testiranje presjeka*

Bounding objects in computer games

Abstract

This article describes the process of simplification of collision tests in computer games. Due to their complexity the objects in games are replaced by simpler bounding objects like cuboids, balls and capsules that are easier to make collision tests with. We use a simple model to show how to construct bounding objects and we compare moments of their collision.

Keywords: *bounding objects, area minimization, intersection testing*

*Gimnazija Velika Gorica, Velika Gorica, email: kristian.golubic@gmail.com

†PMF - Matematički odsjek, Zagreb, email: mstarcev@math.hr

1 Uvod

Objekti se u računalnim igrama uobičajeno kreću. Fizička ograničenja, koja u realnom svijetu ne dopuštaju čvrstim objektima da međusobno prodiru jedni u druge, u računalnim igrama moramo stvoriti sami. Drugim riječima, moramo stvoriti uvjete kako bi čvrsti objekti u računalnim igrama na prirodan način utjecali jedan na drugog. Program igre uključuje alate koji odlučuju treba li jedan objekt reagirati na sudar ili preklapanje s drugim objektom. Međutim, tek kada prepoznamo koliziju objekata, možemo stvoriti pravilnu reakciju. Kako su objekti u igračem svijetu različitih, često kompliciranih oblika, prepoznavanje presjeka složen je matematički problem. Najdirektniji pristup prilikom prepoznavanja presjeka je testiranje presjeka svih dužina kojima su dva objekta određena. Naravno, takav je pristup neefikasan. Vremenski je skupo testirati svaki par dužina. Umjesto toga zamjenjujemo svaki objekt jednostavnijim geometrijskim objektom - graničnim objektom. Za granične objekte lakše i brže određujemo postoji li presjek. Očito želimo granične objekte koji najmanje odstupaju od originalnih objekata. Ako je granični objekt podskup originalnog objekta, u nekim situacijama ćemo propustiti detektirati sudar, a ako je granični objekt nadskup originalnog, ponekad ćemo očitati sudar iako se on u stvarnosti nije dogodio. Ako granični objekti dovoljno dobro opisuju zadane, možemo zanemariti geometriju originalnih objekata. Radnja igre može biti dosta brza pa možda nećemo ni uočiti kad se uistinu dogodio sudar stvarnih objekata ili će greška biti dovoljno prihvatljiva da ne naruši prirodan tijek igre.

2 Primjeri graničnih objekata

Najjednostavniji granični objekti su kugla (krug u dvodimenzionalnim igrama) te kvadar (pravokutnik). Tim je graničnim objektima, osim jednostavnosti prepoznavanja presjeka, zajednički i jednostavan prikaz u programu. Za prikaz kugle (kruga) u igračem svijetu potrebno je samo središte i polumjer, dok su za prikaz kvadra (pravokutnika), kojemu su bridovi (stranice) paralelni s koordinatnim osima, potrebne samo dvije točke, jedna kojoj su koordinate minimalne koordinate točaka koje određuju objekt, te jedna kojoj su koordinate maksimalne koordinate točaka koje određuju objekt. Objekte možemo ograničiti i kvadrima, odnosno pravokutnicima koji nemaju stranice paralelne osima igračem svijeta. Još jedan poznati granični objekt je kapsula koja se u trodimenzionalnom slučaju dobije tako da objekt prvo smjestimo u odgovarajući valjak i zatim na svaku bazu dodamo po jednu polukuglu. U dvodimenzionalnom slučaju zadani objekt smještamo u pravokutnik kojem uz dvije nasuprotne stranice dodajemo po-

lukrugove. Definiramo radijus kapsule kao radijus svake od tih polukugli (polukrugova). Za prikaz kapsule dovoljno je poznavati radijus kapsule te koordinate središta polukugli (polukrugova).

Promotrimo sada granične objekte koji u potpunosti sadrže zadane objekte. Pri zamjeni objekta graničnim objektom navedenog tipa dobivamo objekt veće površine. Prirodno bi bilo odabrati granični objekt s najmanjom mogućom površinom.

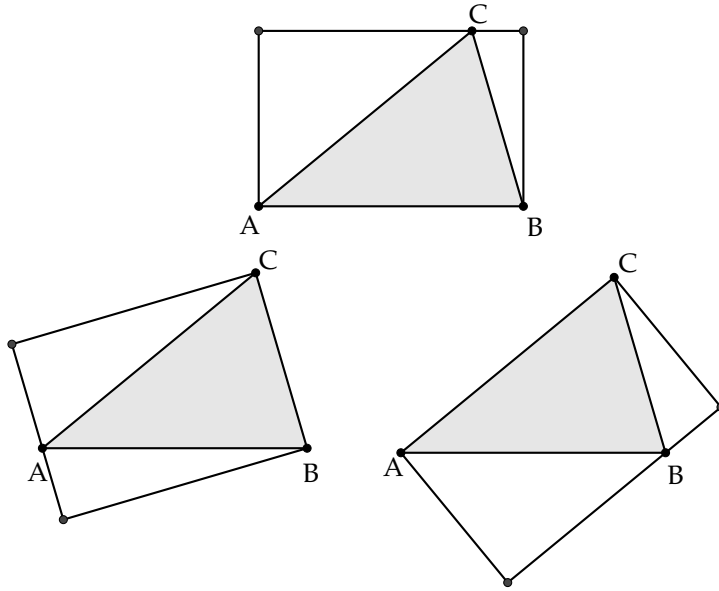
Kao primjer, razmotrit ćemo odabir graničnog objekta na jednostavnoj klasi igračih objekata, preciznije na trokutima. Za svaki trokut pronaći ćemo pravokutnik i krug koji ga sadrže i čija površina je najmanja moguća.

Promotrimo za početak smještanje trokuta u pravokutnik. Neka je dakle zadan općeniti trokut ABC . Pretpostavimo da je zadani trokut smješten u proizvoljan pravokutnik. Taj pravokutnik sada zamijenimo pravokutnikom Pr_{min} kojem je svaka stranica paralelna s nekom od stranica početnog pravokutnika, a koji i dalje sadrži trokut ABC i najmanje je moguće površine.

Imamo tri moguća slučaja:

- a) Pretpostavimo prvo da je pravokutnik Pr_{min} takav da mu se jedna stranica podudara sa stranicom trokuta ABC , dok se treći vrh trokuta nalazi na nasuprotnoj stranici pravokutnika. Tada je površina pravokutnika Pr_{min} dvostruko veća od površine trokuta ABC . Primjećujemo i da površina tog pravokutnika ne ovisi o stranici trokuta koja se podudara sa stranicom pravokutnika, iako za različit odabir te stranice trokuta ne dobivamo općenito sukladne pravokutnike (slika 1). Kod šiljastokutnih trokuta tako možemo dobiti i do tri različita pravokutnika, kod pravokutnog trokuta možemo birati između dva pravokutnika, dok kod tupokutnog trokuta imamo samo jedan takav pravokutnik.
- b) Neka je Pr_{min} takav da se nijedna njegova stranica i nijedna njegova dijagonala ne podudaraju s nekom stranicom trokuta ABC te da se jedan njegov vrh podudara s nekim vrhom trokuta ABC (slika 2). Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je to vrh A .

Neka je pravokutnik Pr_{min} označen s $ADEF$ te neka je $B \in \overline{DE}$ i $C \in \overline{EF}$. Nadalje, neka visina trokuta ABC iz vrha C ima nožište N . Neka je Q presjek stranice $\overline{AB}$ i pravca koji prolazi kroz C te je okomit na $\overline{AD}$. Primijetimo da je $\angle DAB = \angle QCN$ pa su pravokutni



Slika 1.

trokuti BAD i QCN slični. Tada vrijedi

$$\frac{|CN|}{|CQ|} = \frac{|AD|}{|AB|},$$

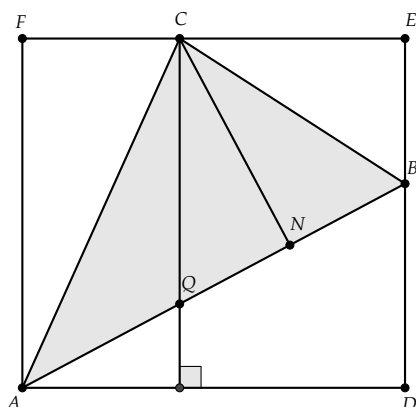
odnosno $|CQ||AD| = |CN||AB|$ iz čega slijedi

$$P(Pr_{min}) = |AD||DE| > |AD||CQ| = |CN||AB| = 2P(ABC).$$

Prema tome, svi promatrani pravokutnici u ovom slučaju imaju veću površinu od pravokutnika iz slučaja a).

- c) U ovom slučaju se jedna stranica trokuta ABC podudara s nekom od dijagonala pravokutnika Pr_{min} (slika 3), dok se treći vrh trokuta ne podudara ni sa jednim vrhom pravokutnika (to se može dogoditi jedino u slučaju da je trokut tupokutan). Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\overline{AB}$ spomenuta dijagonala pravokutnika. Preostale vrhove pravokutnika označimo s G i H . Uzmimo sada pravokutnik $ABKL$ takav da je vrh C na stranici $\overline{KL}$. Tada vrijedi

$$P(ABKL) = 2P(ABC) < 2(AGB) = P(AGBH).$$

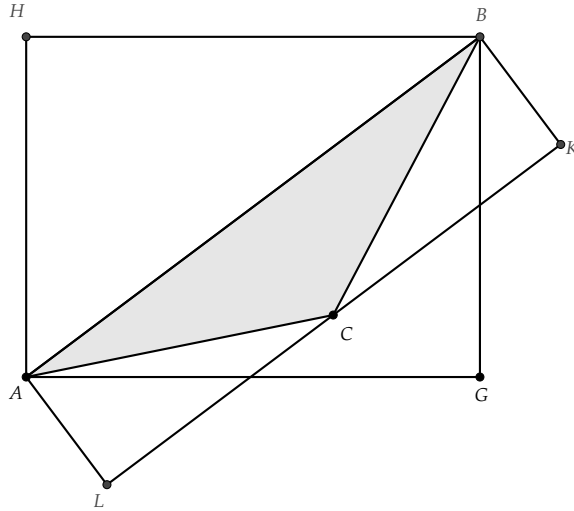


Slika 2.

Konačno zaključujemo da bilo koji pravokutnik koji sadrži trokut ABC i kojem je jedna stranica ujedno i stranica zadanog trokuta, a treći vrh trokuta se nalazi na nasuprotnoj stranici pravokutnika, predstavlja traženi pravokutnik minimalne moguće površine.

Slično možemo diskutirati koji je najmanji krug koji sadrži zadani trokut ABC . Promatramo tri slučaja. Prvo, neka je trokut ABC tupokutan s tупim kutom kod vrha C i neka se nalazi unutar kruga radijusa R . Tada je očito $2R \geq |AB|$. Ako je zadan krug sa središtem u polovištu stranice $\overline{AB}$ i radijusom $\frac{|AB|}{2}$, onda se prema Talesovom teoremu čitav trokut ABC nalazi unutar tog kruga i to je očito traženi krug najmanjeg radijusa. Na isti način konstruiramo traženi krug i u slučaju da je trokut ABC pravokutan. Primijetimo da je u ovom slučaju taj krug određen kružnicom koja je opisana trokutu ABC .

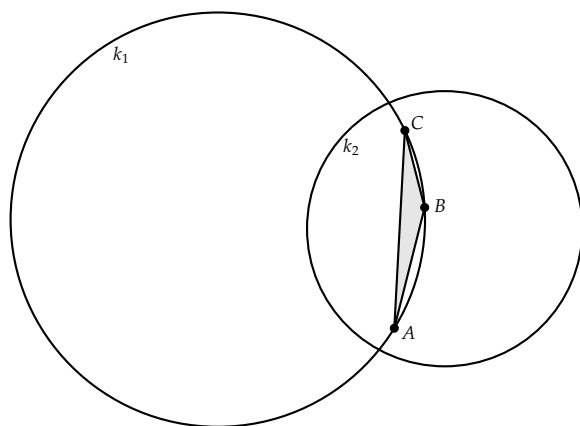
Ako je trokut ABC šiljastokutan, dokazat ćemo da je traženi krug minimalnog radijusa također određen kružnicom koja je opisana trokutu. Neka je k_1 ta kružnica i neka joj je radijus jednak r_1 . Pretpostavimo suprotno, da postoji kružnica k_2 s radijusom r_2 manjim od r_1 , takva da pripadni krug sadrži cijeli trokut ABC . Ako kružnica k_2 ne siječe kružnicu k_1 , onda zbog



Slika 3.

$r_2 < r_1$ ne može unutar sebe sadržavati kružnicu k_1 . Prema tome, krug kojeg određuje kružnica k_2 ne sadrži trokut ABC . Ako pak kružnica k_2 samo dodiruje kružnicu k_1 u jednoj točki, onda krug koji k_2 određuje sadrži najviše jedan vrh trokuta ABC što je očito u kontradikciji s pretpostavkom. Dakle, kružnice k_1 i k_2 se sijeku u dvije točke. Zbog $r_2 < r_1$, unutar kružnice k_2 nalazi se luk kružnice k_1 koji ima duljinu manju od pola duljine kružnice k_1 . S obzirom da krug određen kružnicom k_2 mora sadržavati sve vrhove trokuta ABC , oni se nalaze na manjem luku kružnice k_1 . Iz toga slijedi da je trokut ABC tupokutan (slika 4), čime dolazimo do kontradikcije. Dakle, najmanji krug kojim možemo prekriti čitav trokut ABC omeđen je s tom trokutu opisanom kružnicom.

Nadalje, ako želimo smjestiti objekt u kapsulu najmanje površine koja se sastoji od pravokutnika Pr i polukrugova Pk_1 i Pk_2 , moramo minimizirati izraz $P(Pr) + P(Pk_1) + P(Pk_2) = P(Pr) + 2P(Pk_1)$. Kod konstrukcije kapsule možemo iskoristiti i već pronađeni granični pravokutnik najmanje površine, te konstruirati polukrugove nad njegovim stranicama manje duljine. Međutim, nije posve sigurno da neki od pravokutnika veće površine, koji sadrže zadani trokut, neće imati stranicu manje duljine od duljina stra-



Slika 4.

nica optimalnog pravokutnika i konačno dati kapsulu manje površine.

Za kraj ovog poglavlja spomenimo da je testiranje kolizije dosad spomenutih graničnih objekata relativno jednostavno i dolazi sve više do izražaja s kompleksnošću originalnih objekata. Naprimjer, ako želimo vidjeti je li došlo do sudara krugova, dovoljno je provjeriti je li udaljenost njihovih središta manja od zbroja njihovih radijusa. Kod pravokutnika kojima su stranice paralelne koordinatnim osima provjeravamo sijeku li se projekcije oba pravokutnika na osi koordinatnog sustava. Ako se oba para projekcija sijeku, imamo koliziju objekata. Konačno, kod kapsula je potrebno odrediti udaljenost centralnih dužina kapsula. Centralna dužina kapsule je dužina koja spaja središta pripadnih polukrugova kapsule. Ako je udaljenost centralnih dužina kapsula manja od zbroja njihovih radijusa, kapsule se sijeku.

3 Odabir graničnog objekta

Sada ćemo promotriti jedan konkretan primjer dva igrača objekta i napraviti usporedbu kolizije njihovih graničnih objekata. Promatrat ćemo

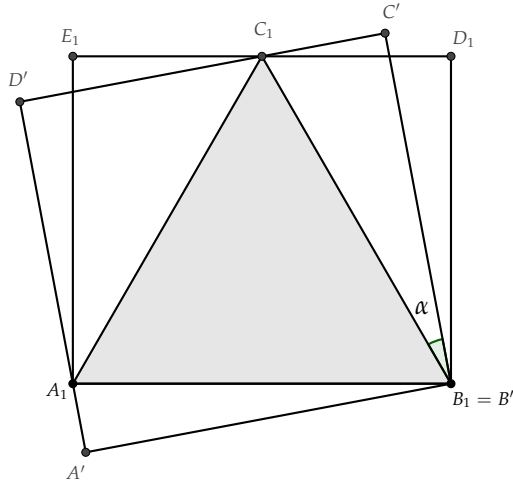
dva sukladna objekta koja su zadana sa po tri točke na međusubno jednakim udaljenostima. Dakle, objekti predstavljaju jednakokranične trokute. Neka im je duljina stranice jednaka a . Pretpostavljamo da u oba trokuta postoji stranica koja je u svakom trenutku paralelna x -osi koordinatnog sustava pridruženog igraćem svijetu, odnosno da nema rotacije objekata. Za prvi objekt pretpostavljamo da miruje, odnosno da je statičan i da mu se težište nalazi u ishodištu koordinatnog sustava. Drugi objekt je dinamičan i može imati proizvoljnu početnu poziciju. Na ovom jednostavnom primjeru proučit ćemo kako odabir graničnih objekata utječe na detekciju sudara. Pritom ćemo koristiti granične objekte koji u potpunosti sadrže zadane trokute i opisani su u prethodnom poglavlju. Dakle, ako želimo smjestiti trokute u krug, s obzirom da se radi o šiljastokutnim trokutima, odabrat ćemo krugove određene kružnicama koje su opisane trokutima. Što se tiče pravokutnika, možemo odabrati bilo koji pravokutnik kojem se jedna stranica podudara sa stranicom trokuta, dok je treći vrh trokuta na nasuprotnoj stranici pravokutnika. Zbog jednostavnosti testiranja kolizije, odaberimo pravokutnik kojem su stranice paralelne koordinatnim osima.

Preostaje pronaći kapsulu koja okružuje trokute, konstruirana je na način opisan u prethodnom poglavlju, i najmanje je površine.

Neka je statičan trokut označen s $A_1B_1C_1$. Smjestimo ga u proizvoljan pravokutnik. Taj pravokutnik možemo zamijeniti pravokutnikom $A'B'C'D'$ kojem su sve stranice paralelne nekoj od stranica početnog pravokutnika i koji ima najmanju površinu od svih pravokutnika s tim svojstvom.

Tada se barem jedan vrh trokuta $A_1B_1C_1$ podudara s nekim vrhom pravokutnika $A'B'C'D'$, a ostali vrhovi trokuta također pripadaju stranicama pravokutnika. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $B_1 = B'$ (slika 5). Označimo kut $\alpha = \angle C_1B_1C'$. Pritom je dovoljno promatrati kutove $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6}$. Uzmimo prvo kapsulu Ka_{min} koja je sastavljena od pravokutnika $A_1B_1D_1E_1$, pri čemu je $C_1 \in \overline{D_1E_1}$, i polukrugova koji su konstruirani nad kraćim stranicama pravokutnika $A_1B_1D_1E_1$, odnosno nad stranicama $\overline{B_1D_1}$ i $\overline{A_1E_1}$. Njena površina je jednaka $\frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 \pi$.

Sada promatramo dvije moguće kapsule koje možemo konstruirati koristeći pravokutnik $A'B'C'D'$. Prvo imamo kapsulu s polukrugovima kons-



Slika 5.

truiranima nad $\overline{A'B'}$ i $\overline{C'D'}$. Njena površina P_1 jednaka je

$$\begin{aligned} P_1(\alpha) &= P(A'B'C'D') + \frac{|A'B'|^2}{4} \pi \\ &= P(A'B'C'D') + \frac{a^2 \pi}{4} \cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) \\ &\geq P(A_1B_1D_1E_1) + \frac{3a^2 \pi}{16}, \end{aligned}$$

gdje smo koristili ocjenu $\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, pri čemu se jednakost postiže za kut $\alpha = 0$. Za taj kut dobivamo kapsulu koja je sukladna kapsuli Ka_{min} . Zaključujemo da svaka kapsula sastavljena na ovakav način ima površinu veću ili jednaku površini kapsule Ka_{min} .

Sada ćemo izračunati površinu P_2 kapsule koja sadrži pravokutnik $A'B'C'D'$

i polukrugove nad stranicama $\overline{B'C'}$ i $\overline{A'D'}$. Imamo

$$\begin{aligned} P_2(\alpha) &= P(A'B'C'D') + \frac{|B'C'|^2}{4} \pi \\ &= P(A'B'C'D') + \frac{a^2 \pi}{4} \cos^2 \alpha \\ &\geq P(A_1B_1D_1E_1) + \frac{3a^2 \pi}{16} . \end{aligned}$$

Jednakost se u ovom slučaju postiže za $\alpha = \frac{\pi}{6}$, što je kut koji odgovara kapsuli Ka_{min} . Ni s ovim tipom kapsule dakle ne možemo dobiti površinu manju od površine kapsule Ka_{min} . Prema tome, za konstrukciju kapsule najmanje površine u ovom primjeru ipak koristimo neki od graničnih pravokutnika najmanje površine.

Nakon što smo odabrali granične objekte, izračunat ćemo koliko oni povećavaju površinu zadanih trokuta. Kako je radijus kružnice opisane trokutu $A_1B_1C_1$ jednak $\frac{a}{3}\sqrt{3}$, za površinu pripadnog kruga (P_{kr}) i površinu trokuta (P_{tr}) vrijedi

$$\frac{P_{kr}}{P_{tr}} = \frac{\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 \pi}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi \approx 2.42 .$$

S druge strane, granični pravokutnik ima stranice duljina a i $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Označimo li njegovu površinu s P_{pr} , imamo

$$\frac{P_{pr}}{P_{tr}} = \frac{\frac{a^2}{2}\sqrt{3}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = 2 .$$

Prvi zaključak koji se nameće je da smo koristeći krugove dobili veće granične objekte te pretpostavljamo da će takvi granični objekti biti nešto „osjetljiviji“ na sudare od pravokutnika.

Konačno, površina kapsule je jednaka

$$P_{ka} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 \pi .$$

Sada imamo

$$\frac{P_{ka}}{P_{tr}} = 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \approx 3.36 .$$

Dakle, kapsula će najviše povećati površinu zadanog trokuta i prikaz objekta pomoću kapsule najviše odudara od realnosti.

Napomenimo da ovakav način konstrukcije kapsule ima više efekta kod izduljenijih objekata, odnosno kod objekata kod kojih je jedna dimenzija osjetno veća od druge, pogotovo ako koristimo pravokutnike kojima stranice nisu nužno paralelne osima koordinatnog sustava. Kapsulu možemo odabrati i tako da sadrži čitav zadani objekt, ali da taj objekt ne pripada u potpunosti pravokutniku kapsule, te se na taj način bolje približiti zadanom objektu.

4 Testiranje kolizija

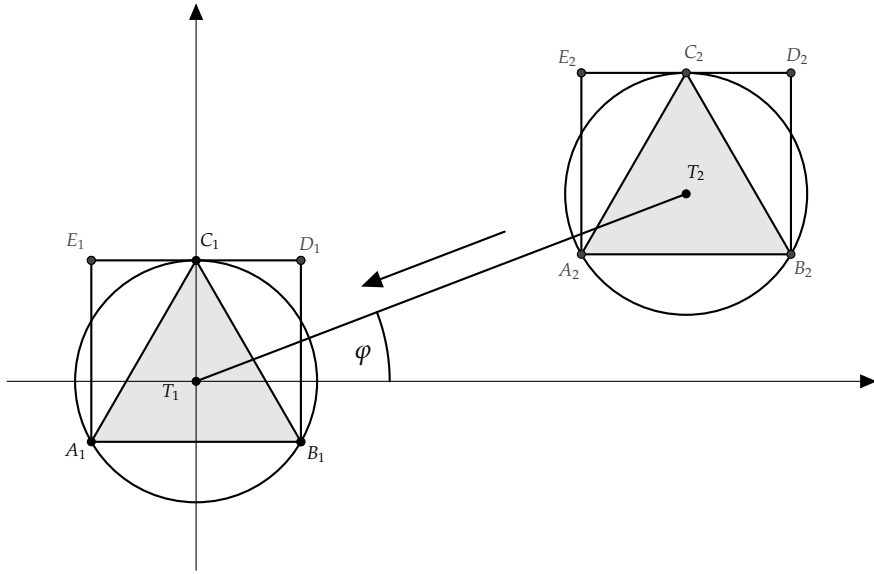
U ovom poglavlju pretpostavljamo da se težište dinamičnog trokuta (točka T_2) giba pravocrtno prema težištu statičnog trokuta (točka T_1). Uz tu pretpostavku ćemo precizno odrediti u koliko posto smjerova gibanja dolazi prije do kolizije graničnih objekata jednog tipa u odnosu na granične objekte drugog tipa, što će nam dati precizniju sliku o tome kako odabir graničnog objekta utječe na sudare.

Statičan jednakostranični trokut određen je vrhovima A_1, B_1, C_1 , gdje je $A_1 = (-\frac{a}{2}, -\frac{a}{6}\sqrt{3})$, $B_1 = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{6}\sqrt{3})$, $C_1 = (0, \frac{a}{3}\sqrt{3})$. Pretpostavimo da se dinamičan jednakostranični trokut $A_2B_2C_2$ nalazi na proizvoljnoj poziciji, ali tako da se granični objekti trokuta ne sijeku (slika 6). Želimo za početak odrediti smjerove kretanja za koje će prije doći do sudara pravokutnika kao graničnih objekata, nego do sudara krugova. Imamo otprije slutnju, na temelju površina, da će se to dogoditi u manje situacija, ali sad ćemo izračunati u kolikom postotku smjerova se to uistinu i dogodi. Vidimo da nam je pritom bitan samo smjer kretanja, a ne i početni položaj dinamičnog trokuta. Prvo određujemo položaj dinamičnog trokuta u trenutku kad dolazi do sudara graničnih krugova trokuta. Nakon toga ćemo vidjeti je li već došlo do preklapanja njihovih graničnih pravokutnika.

Označimo s φ kut koji pravac gibanja težišta T_2 čini s x -osi. S r označimo polumjer graničnih krugova zadanih jednakostraničnih trokuta. Dakle, $r = \frac{a}{3}\sqrt{3}$. Lako je onda zaključiti da su koordinate težišta T_2 u trenutku dodira krugova jednake $(2r \cos \varphi, 2r \sin \varphi)$.

Odredimo još i koordinate vrhova graničnih pravokutnika u tom trenutku.

Radi se o pravokutnicima $A_1B_1D_1E_1$ i $A_2B_2D_2E_2$ gdje je $D_1 = (\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\sqrt{3})$, $E_1 = (-\frac{a}{2}, \frac{a}{3}\sqrt{3})$, $A_2 = (2r \cos \varphi - \frac{a}{2}, 2r \sin \varphi - \frac{a}{6}\sqrt{3})$, $B_2 = (2r \cos \varphi + \frac{a}{2}, 2r \sin \varphi - \frac{a}{6}\sqrt{3})$, $D_2 = (2r \cos \varphi + \frac{a}{2}, 2r \sin \varphi + \frac{a}{3}\sqrt{3})$, $E_2 = (2r \cos \varphi -$



Slika 6.

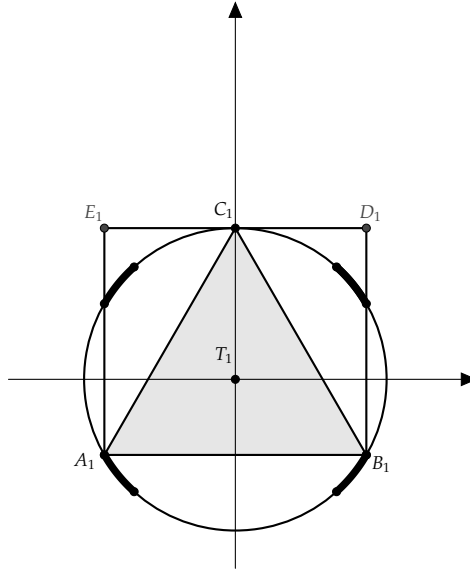
$$\frac{a}{2}, 2r \sin \varphi + \frac{a}{3} \sqrt{3}).$$

Pravokutnici koji okružuju dva promatrana trokuta sjeći će se u slučaju da se sijeku i njihove ortogonalne projekcije na x -os i njihove ortogonalne projekcije na y -os.

Općenito, ako imamo dva intervala $[a_1, a_2]$ i $[a_3, a_4]$, ti intervali se sijeku ako i samo ako je $a_1 \leq a_3 \leq a_2$ ili je $a_3 \leq a_1 \leq a_4$.

Pravokutnici će se samo dodirivati ako i samo ako se oba para projekcija sijeku te se uz to barem jedan par projekcija dodiruje izvana. Intervali $[a_1, a_2]$ i $[a_3, a_4]$ se dodiruju izvana ako i samo ako je $a_2 = a_3$ ili $a_1 = a_4$.

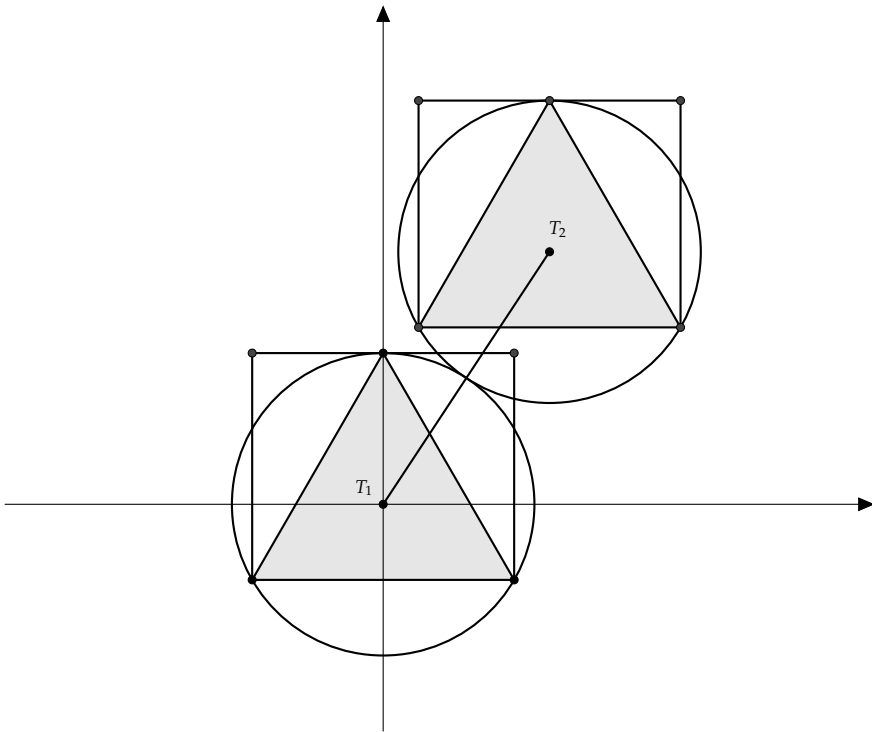
Konkretno, u našem slučaju ortogonalne projekcije pravokutnika na x -os su intervali $[x_1, x_2] = [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ i $[x_3, x_4] = [2r \cos \varphi - \frac{a}{2}, 2r \cos \varphi + \frac{a}{2}]$. Prema prethodnom, ta dva intervala će se sijeći ako i samo ako je $-\frac{a}{2} \leq 2r \cos \varphi - \frac{a}{2} \leq \frac{a}{2}$ ili $2r \cos \varphi - \frac{a}{2} \leq -\frac{a}{2} \leq 2r \cos \varphi + \frac{a}{2}$, što vrijedi ako i samo ako je $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos \varphi \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, odnosno $\varphi \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$.



Slika 7.

Na analogan način ćemo odrediti kad se sijeku ortogonalne projekcije pravokutnika na y -os, odnosno intervali $[y_1, y_2] = [-\frac{a}{6}\sqrt{3}, \frac{a}{3}\sqrt{3}]$ i $[y_3, y_4] = [2r \sin \varphi - \frac{a}{6}\sqrt{3}, 2r \sin \varphi + \frac{a}{3}\sqrt{3}]$. Dobivamo da se sijeku ako i samo ako je $-\frac{a}{6}\sqrt{3} \leq 2r \sin \varphi - \frac{a}{6}\sqrt{3} \leq \frac{a}{3}\sqrt{3}$ ili $2r \sin \varphi - \frac{a}{6}\sqrt{3} \leq -\frac{a}{6}\sqrt{3} \leq 2r \sin \varphi + \frac{a}{3}\sqrt{3}$. Dakle, intervali se sijeku ako i samo ako je $-\frac{3}{4} \leq \sin \varphi \leq \frac{3}{4}$, tj. za kuteve $\varphi \in [-\arcsin \frac{3}{4}, \arcsin \frac{3}{4}] \cup [\pi - \arcsin \frac{3}{4}, \pi + \arcsin \frac{3}{4}]$. Primijetimo još da je $\arcsin \frac{3}{4} \approx 48.59^\circ$.

Dakle, pravokutnici se sijeku prije nego što se sijeku krugovi za kuteve $\varphi \in \langle \frac{\pi}{6}, \arcsin \frac{3}{4} \rangle \cup \langle \pi - \arcsin \frac{3}{4}, \frac{5\pi}{6} \rangle \cup \langle \frac{7\pi}{6}, \pi + \arcsin \frac{3}{4} \rangle \cup \langle 2\pi - \arcsin \frac{3}{4}, \frac{11\pi}{6} \rangle$ (slika 7). Za rubne kuteve tih intervala do presjeka krugova i pravokutnika dolazi u isto vrijeme. Na slici 8 vidimo primjer smjera kretanja za koji prije dolazi do sudara krugova, dok se u slučaju na slici 9 prije sudaraju pravokutnici. Ako podijelimo ukupnu duljinu dobivenih intervala s duljinom



Slika 8.

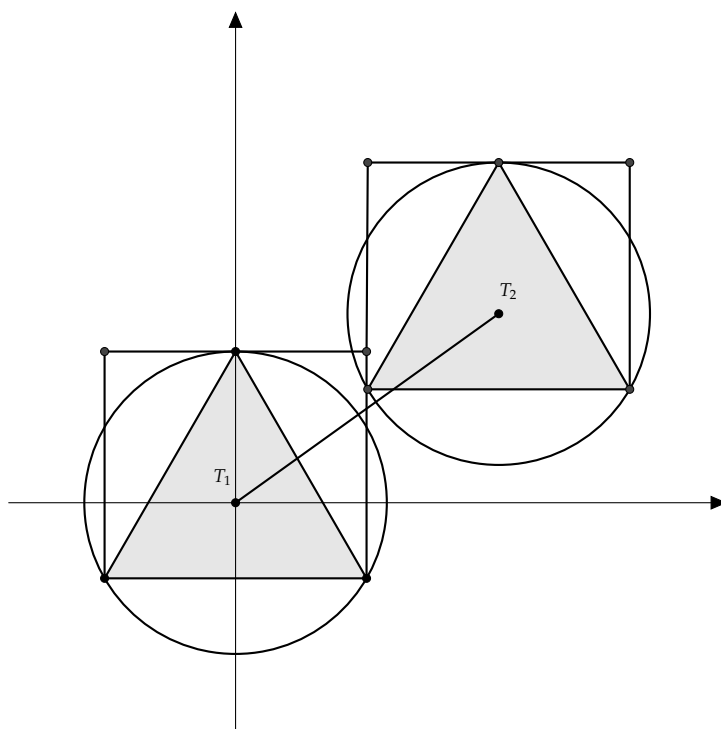
jedinične kružnice, dobivamo

$$\frac{4 \left(\arcsin \frac{3}{4} - \frac{\pi}{6} \right)}{2\pi} \approx 0.21 .$$

Dakle, ako se zadani objekti kreću direktno jedan prema drugom, samo u oko 21% smjerova će pravokutnik biti osjetljiviji granični objekt u odnosu na krug.

Odnos površina graničnih objekata nam je stoga dao dobru slutnju da pravokutnici daju realniju zamjenu originalnih objekata, ali samo u kontekstu postotaka jer krugovi u nekim smjerovima kretanja ipak bolje zamjenjuju originalne objekte.

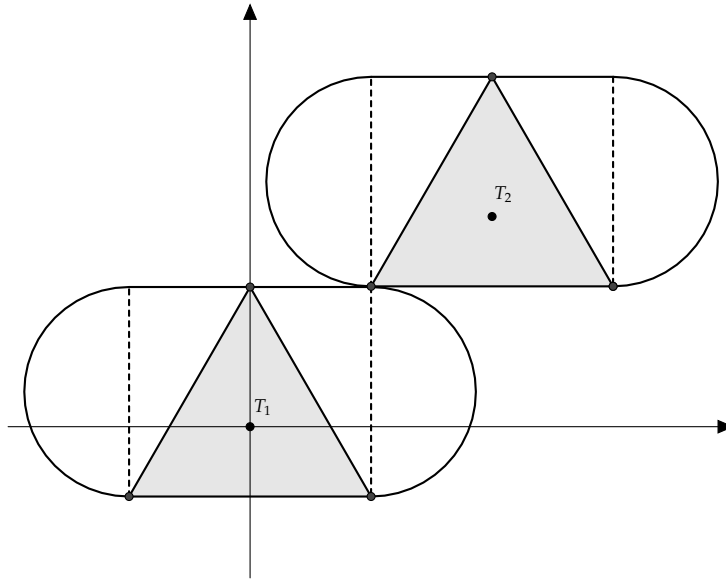
Sada okružimo svaki trokut kapsulom koja se sastoji od odabranog granič-



Slika 9.

nog pravokutnika i polukrugova s promjerima koji su jednaki vertikalnim stranicama graničnog pravokutnika. Odredit ćemo također za koje smjerove će brže doći do presjeka kapsula nego do presjeka graničnih pravokutnika ili krugova.

Očito je da se pravokutnici neće nikad sudariti prije kapsula, jedino što će se u nekim slučajevima u istom trenutku sudariti i pravokutnici i kapsule. To se može dogoditi samo kad se dotaknu horizontalne stranice pravokutnika. Na slici 10 vidimo jedan od rubnih smjerova kretanja za koji dolazi do dodira takvih stranica. Dakle, tu se podudaraju gornji desni vrh statičnog graničnog pravokutnika i donji lijevi vrh dinamičnog graničnog pravokutnika. Neka je u tom trenutku udaljenost težišta T_1 i T_2 jednaka ρ . Izjednačavanjem koordinata tih vrhova dobivamo $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) =$



Slika 10.

$\left(\rho \cos \varphi - \frac{a}{2}, \rho \sin \varphi - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$, odnosno

$$\rho \cos \varphi = a, \quad \rho \sin \varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Iz prethodnih jednakosti dobivamo da je $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, odnosno $\varphi \approx 40.89^\circ$.

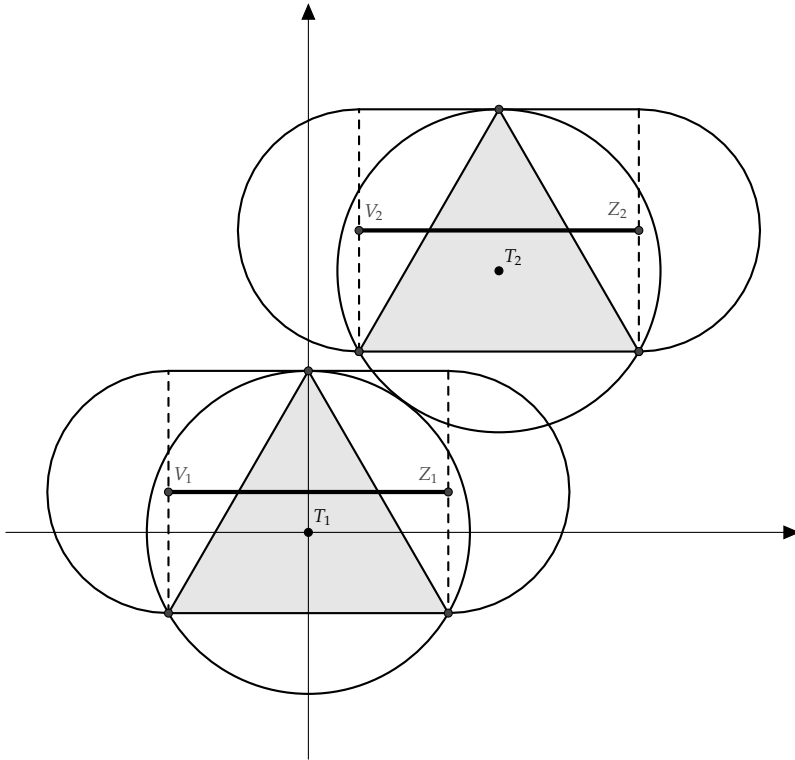
Analogno se donji desni vrh statičnog pravokutnika i gornji lijevi vrh dinamičnog pravokutnika podudaraju kad je $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ostale granice traženih intervala dobivamo simetrijom s obzirom na y -os. Konačno možemo zaključiti da će se kapsule i pravokutnici sudariti u istom trenutku ako je

$$\varphi \in \left[\arctg \frac{\sqrt{3}}{2}, \pi - \arctg \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \cup \left[\pi + \arctg \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\pi - \arctg \frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

Odredimo udio tog intervala u jediničnoj kružnici:

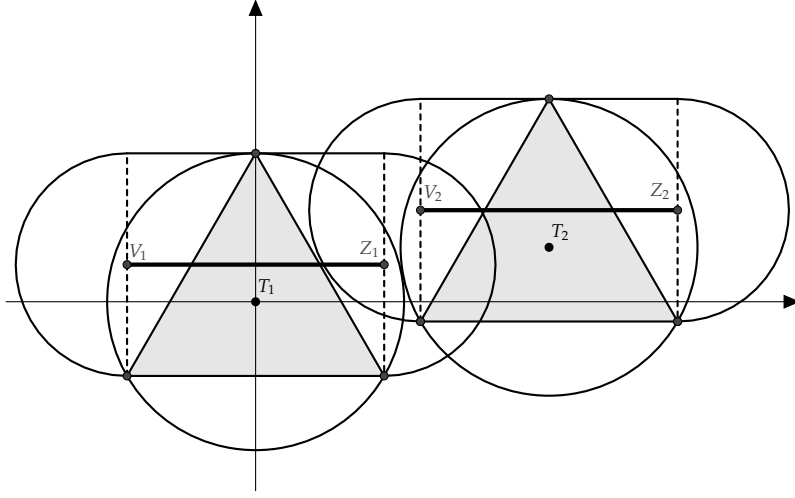
$$\frac{2 \left(\pi - 2 \arctg \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{2\pi} \approx 0.55.$$

Vidimo da je u oko 45% smjerova kapsula osjetljivija na sudare od pravokutnika, dok se u ostalim smjerovima pravokutnici i kapsule jednako ponašaju, pa je preporučljivo koristiti pravokutnik, a ne kapsulu. To se ujedno slaže i s pretpostavkom koju smo donijeli na temelju odnosa površina tih graničnih objekata.



Slika 11.

Pretpostavimo sada da je došlo do dodira graničnih krugova promatranih trokuta. Znamo da je $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ radijus tih krugova, te da je položaj težišta dinamičnog trokuta jednak $(2r \cos \varphi, 2r \sin \varphi)$. Da bismo odredili jesu li se već sudarile i pripadne kapsule, odredit ćemo udaljenost njihovih centralnih dužina. U trenutku sudara krugova, centralna dužina kapsule



Slika 12.

statičnog trokuta je dužina $\overline{V_1Z_1}$, gdje je $V_1 = (-\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{12})$ i $Z_1 = (\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{12})$, dok su krajnje točke centralne dužine kapsule dinamičnog trokuta točke $V_2 = (2r \cos \varphi - \frac{a}{2}, 2r \sin \varphi + \frac{a\sqrt{3}}{12})$ i $Z_2 = (2r \cos \varphi + \frac{a}{2}, 2r \sin \varphi + \frac{a\sqrt{3}}{12})$. Radijus obje kapsule jednak je $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Imamo dva slučaja. U prvom slučaju projekcija centralne dužine dinamičke kapsule na pravac kojem pripada centralna dužina statičke kapsule siječe centralnu dužinu statičke kapsule (slika 11) pa vrijedi $-\frac{3a}{2} \leq 2r \cos \varphi - \frac{a}{2} \leq \frac{a}{2}$, odnosno $\cos \varphi \in [-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$. Dakle, u ovom slučaju promatramo smjerove $\varphi \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}]$. Tada je udaljenost centralnih dužina kapsula jednaka

$$\left| \left(2r \sin \varphi + \frac{a\sqrt{3}}{12} \right) - \frac{a\sqrt{3}}{12} \right| = |2r \sin \varphi|$$

pa se kapsule sijeku ako i samo ako vrijedi $|2r \sin \varphi| \leq 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}$, odnosno $|\sin \varphi| \leq \frac{3}{4}$. Konačno možemo zaključiti da će u nekim smjerovima doći do ranijeg sudara krugova i to za kutove iz intervala $\langle \arcsin \frac{3}{4}, \pi - \arcsin \frac{3}{4} \rangle \cup \langle \pi + \arcsin \frac{3}{4}, 2\pi - \arcsin \frac{3}{4} \rangle$. U rubnim kutovima tih intervala krugovi i kapsule se sudaraju u istom trenutku.

Neka je $\varphi \in \langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \rangle$. Sada projekcija jedne centralne dužine na odgovarajući pravac druge centralne dužine s tom drugom dužinom nema presjeka (slika 12) pa se kapsule sijeku ako i samo ako je udaljenost točaka Z_1 i V_2 manja ili jednaka od dvostrukog radijusa kapsule, odnosno ako i samo ako je $(2r \cos \varphi - a)^2 + (2r \sin \varphi)^2 \leq \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$, tj. $(2r)^2 - 4ra \cos \varphi + a^2 \leq \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$. To je ekvivalentno s $\cos \varphi \geq \frac{19}{48}\sqrt{3}$. Za promatrane kutove $\varphi \in \langle -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \rangle$ je $\cos \varphi > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{19}{48}\sqrt{3}$ pa će za pripadne smjerove kretanja uvijek prije doći do presjeka kapsula nego do presjeka krugova. Slično zaključujemo i za kuteve $\varphi \in \langle \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \rangle$.

Konačno, omjer duljine intervala u kojem prije dolazi do sudara krugova i duljine jedinične kružnice je

$$\frac{2(\pi - 2 \arcsin \frac{3}{4})}{2\pi} \approx 0.46$$

Zaključujemo da će se kapsule sudariti prije nego krugovi u 54% smjerova, a u ostalim smjerovima (osim rubnih kuteva intervala) će se prije sudariti krugovi. Prema tome, kapsule su podjednako osjetljivi granični objekti kao i krugovi iako je površina kapsule bitno veća. Dobili smo drugačiji rezultat nego u slučaju usporedbe kapsula i pravokutnika gdje je u svakom smjeru kapsula osjetljiviji ili barem jednako osjetljiv granični objekt. Međutim, to je pokazatelj da nije bitno samo koliko granični objekt povećava originalni objekt, nego i kakav mu je oblik.

Literatura

- [1] K. Golubić, *Primjena matematike u izradi računalnih igara*, diplomski rad, PMF - Matematički odsjek, Zagreb, 2014.
- [2] J. M. Van Verth, L. M. Bishop, *Essential mathematics for games and interactive applications: a programmer's Guide*, CRC Press, 2008.