ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ

ЕЛЕМЕНТАРНА АЛГЕБРА

ПРОСВЕТНО ДЕЛО АД
Скопје, 2001

Уредник
Александра Масин

Рецензенти
Д-р Радојко Секулоски, *професор на*
Технолошко-металуршки факултет - Скопје
Д-р Кирил Стојменовски, *професор на*
Технолошко-металуршки факултет - Скопје

ПРЕДГОВОР

Книгава Елементарна алгебра првенствено е наменета за учениците во средното образование од природно-математичка насока како дополнителна литература за здобивање со поголеми и сеопфатни знаења од алгебрата. Солидното познавање на алгебрата во средното образование е фундамент за успешно следење и совладување и на останатите математички дисциплини, а со тоа и за обезбедување на успешен старт на студии по математика и информатика, како и на сите технички факултети.

Основна цел на книгава е на наставниците и на учениците да им обезбеди богат материјал, толку неопходен, за работа во математичките секции со ученици кои пројавуваат посебен интерес кон математиката и се подготвуваат за регионални, државни и меѓународни математички натпревари и олимпијади. Во неа ќе се сретнат со доволен број на различни типови потешки задачи, како и со посебни принципи на нивно решавање. Таа може да се користи и како литература за изработка на индивидуални писмени работи - матурски теми од предметот математика од страна на учениците од IV година на гимназиите и техничките училишта.

Материјалот во оваа книга, во основа, се состои од предавањата по предметот Елементарна алгебра, што авторот ги држел во текот на 20 години (1968 - 1988) на Педагошката академија „Климент Охридски" во Скопје. Затоа таа може да им служи како учебник и дополнителна литература и на студентите на Педагошкиот факултет, а исто така и на студентите по математика и информатика на Природно-математичкиот факултет.

Материјалот во книгава е поделен во десет глави. Во првата глава е даден кус преглед на комплексните броеви, со цел да се овозможи полесно следење на материјалот од страна на читателот. Понатаму следуваат: глава II со наслов Полиноми од една променлива, глава III - Дробни рационални изрази, глава IV - Полиномни равенки од една променлива, глава V - Неравенки и систем неравенки со една променлива. Во шестата глава обработени се полиномите од повеќе променливи, како и симетричните полиноми со нивната примена. Во седмата глава изложени се системите полиномни равенки со повеќе променливи, а во наредната

осма глава: неравенките, системите неравенки и неравенствата со повеќе променливи. Тука е даден еден заокружен приказ на основните елементарни неравенства на броеви. Докажани се многу значајни неравенства, кои имаат голема примена во најразличните области на математиката и другите науки. Во последните две глави IX и X се обработени ирационалните изрази, како и ирационалните равенки и неравенки.

Материјалот од секоја глава е разделен на одделни заокружени целини - параграфи, а секоја од нив содржи и неколку единки (точки) од таа целина. Теориското материјал е интерпретиран преку одреден број теореми (околу 120), кои се означени со T [1.1], T [3.2], T [7.4]... Записот, на пример, T [12.5] означува дека разгледуваната теорема е петта теорема од параграфот 12. Изложувањето на секоја тема - параграф е проследено со по неколку изработени примери (над 350), а на крајот на секој параграф е даден соодветен број грижливо избрани задачи за вежбање, за совладување на разгледуваниот материјал, како и задачи од неговата примена во теоријата и практиката. На крајот на книгата се дадени и дополнителни задачи за повторување на целиот материјал. Посложените задачи се означени со ѕвездичка.

На крајот се дадени одговори на сите поставени задачи (над 750), упатства за решавање, како и целосни решенија на посложените задачи и докази на речиси сите искажани тврдења во задачите. Со право може да се каже дека предложената книга претставува и мала збирка решени задачи по елементарна алгебра.

Се надевам дека многу колеги - наставници и професори по математика ќе почувствуваат потреба и ќе посакаат да пополнат една празнина од областа на алгебрата во својата скромна математичка библиотека на македонски јазик.

На крајот сакам да им искажам голема благодарност на сите оние што овозможија да се издаде книгава, особено на издавачот „Просветно дело" АД и на рецензентите за корисните сугестии при конечното обликување на книгава.

јуни 2000 г.
Скопје

Авторот

ВОВЕД

§ 1. АНАЛИТИЧКИ ИЗРАЗИ

1.1. КОРИСТЕЊЕ НА БУКВИ ЗА ОЗНАЧУВАЊЕ НА БРОЕВИ

Денес тешко може да се замисли како би изгледала математиката: без користење на цифрената симболика за природните броеви 1, 2, 3, ...; без буквената симболика за одредени објекти (броеви, точки, прави, агли и др.); без симболите за математичките операции и релации: $+, -, \cdot, :, =, >, <, \neq$, итн.

Познато е дека, при разгледувањето на одредени множества или подмножества од некоја категорија броеви, ние многу често за означување на броевите користиме букви. На пример, кога ќе кажеме: „n е природен број" (симболички $n \in \mathbb{N}$); со тоа всушност, искажуваме дека во разгледуваниот случај буквата n може да биде заменета со кој било од природните броеви 1, 2, 3... Поточно, тоа означува дека одредени искажани тврдења остануваат точни, ако буквата се замени со кој било број од некое множество броеви. На пример, често наведуваме:

а) За секој природен број n бројот $2n$ е парен, а бројот $2n+1$ е непарен број.

б) За секој реален број x, бројот x^2+1 е позитивен број. Тоа симболички го запишуваме $(\forall x \in \mathbb{R})\ (x^2 + 1 > 0)$.

в) Равенството $|x-2| = 5$ е точно, ако $x = -3$ или $x = 7$, односно, ако $x \in \{-3, 7\}$.

Во примерите а) и б) гледаме дека искажаните тврдења во нив остануваат точни за кој било природен број n, односно за кој било реален број x, а тврдењето во примерот в) е точно само ако $x = -3$ или $x = 7$.

Според тоа, со буква може да биде означен кој било број од некое множество, или само одредени (конечен број) броеви од него. Притоа треба да го имаме предвид следново: кога употребуваме една буква наместо кој било број од некое множество броеви, тогаш при размислувањата таа буква секогаш означува еден кој било, но точно определен број од тоа множество. Потоа, ако во одреден случај употребиме повеќе пати една иста буква, тогаш таа буква на сите употребени места заменува кој било (но еден ист) број од даденото множество броеви.

1.2. АНАЛИТИЧКИ ИЗРАЗИ. ДЕФИНИЦИЈА И ВИДОВИ

1. Во множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви добро ви се познати четирите основни операции: собирање, одземање, множење и делење, потоа степенувањето со показател природен и цел број (кое го разгледуваме и како специјален случај од множењето) и степенувањето со показател рационален број, односно коренувањето.

Сите тие операции со заедничко име се викаат **алгебарски операции**; од кои операциите собирање, одземање, множење, делење и степенување со показател природен и цел број, се викаат **рационални алгебарски операции**, а операцијата коренување, односно степенување со рационален показател се вика **ирационална алгебарска операција**.

Освен горниве операции, во елементарната математика ги разгледуваме и следниве т.н. **трансцедентни операции**: x^{α} (степенување со ирационален број α), a^x, $\log_a x$ (каде a е даден позитивен реален број различен од 1), $\sin x$, $\arcsin x$, $\cos x$, $\arccos x$, итн.

Да се потсетиме: операциите собирање и множење во секое од множествата броеви: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ се изводливи без ограничување. Операциите одземање и множење се инверзни операции на собирањето и множењето. Операцијата одземање во множествата $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ е исто така неограничено изводлива и секогаш може да се замени со собирање на намаленикот и спротивниот број од намалителот ($a - b = a + (-b)$. Затоа одземањето како посебна операција нема да ја споменуваме и разгле-дуваме. Делењето, пак, во множествата $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, освен делење со бројот 0, е исто така секогаш изводливо. За делењето со 0 во математиката велиме дека нема смисла. Да забележиме, ако делиме со еден број означен со цифри (различен од 0) секогаш можеме да сметаме дека (наместо делење со тој број) изведуваме множење со неговиот реципрочен број $\left(\frac{a}{5} = \frac{1}{5} \cdot a\right)$. Бидејќи степенувањето со показател природен и цел број е специјален случај на множењето ($a^3 = a \cdot a \cdot a$ и $a^0 = 1$, $a^{-3} = \left(\frac{1}{a}\right)^3$ за $\neq 0$), и тоа е секогаш изводливо, при услов основата кај степенот со показател цел број да не е еднаков на нула.

Познато е исто така дека степените со показател рационален и ирационален број (a^r, $r \in \mathbb{Q}$ и a^{α}, $\alpha \in \mathbb{I}$) имаат смисла (се дефинирани) при услов основата на степенот да е позитивен реален број.

2. Нека се дадени неколку букви, кои означуваат броеви од некое множество, и неколку броеви означени со цифри. Ако треба да се извршат одредени операции со нив во определен ред, тоа го запишуваме со соодветен симболички запис-наречен **аналитички израз** на тие броеви.

Дефиниција 1. *Аналитички израз на дадени броеви, означени со букви и цифри, се вика симболички запис од определен број алгебарски и трансцедентни операции, кои треба да се извршат конечен број пати во определен ред над тие броеви.*

Како примери на аналитички изрази можат да послужат записите:

$$3a + b, \quad a^2 - 4b^2, \quad 2a\sqrt{5 - ax}, \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x + 2y} \quad (1 + x^2)^{\pi}.$$

Значи, во составот на секој аналитички израз влегуваат одреден број броеви, од кои едни се означени со букви, а други со цифри; и одреден број алгебарски и трансцедентни операции, со кои се поврзани дадените броеви во него. Разликата меѓу броевите означени со цифри и оние означени со букви е во тоа што: за секој број означен со цифра велиме е **константа**, т.е. тој број има точно определена фиксна (непроменлива) вредност; а за секој број означен со буква велиме е **променлива**, т.е. тој е заедничка ознака за кој било (но еден ист) фиксен број - константа од некое дадено множество броеви. За тие фиксни броеви - константи, што ја заменуваат променливата велиме се **вредности** (или дозволени **вредности**) на променливата, а даденото множество броеви (од кое променливата зема вредности) се вика **домен на променливата**.

Некои позначајни константи што почесто ги користиме, исто така ги означуваме со букви - резервирани само за нив. Меѓу таквите константи се броевите: $\pi \approx 3{,}14$ и $e \approx 2{,}71$.

3. Даден аналитички израз може да го сочинуваат и само константи, т.е. тој да нема променливи. Таков израз се вика **нумерички** или **броен израз**. Очигледно е дека и секој аналитички израз за дадени вредности на променливите во него, преминува во соодветен нумерички израз.

Резултатот од извршувањето на означените операции во даден аналитички израз за дадени фиксни вредности на променливите во него, се вика **бројна** или **нумеричка вредност** на аналитичкиот израз за тие вредности на променливите.

Ако во ист израз (аналитички или нумерички) треба да извршиме две или повеќе операции, се поставува прашањето: по кој ред ќе ги извршуваме означените операции? За да нема забуна, операциите ги рангираме, и тоа:

- собирањето и одземањето се операции од I ранг,
- множењето и делењето се операции од II ранг,
- степенувањето и коренувањето се операции од III ранг, и го усвојуваме следниов договор (конвенција):

1. Операциите од ист ранг ги извршуваме по оној редослед како што се запишани во изразот.

2. Операциите од повисок ранг ги извршуваме пред операциите од понизок ранг.

3. Ако во изразот операциите треба да се извршуваат по некој друг редослед, а не по оној што е одреден со горниве две правила, тогаш тоа отстапување го означуваме со употреба на загради.

4. Ако во изразот има повеќе загради, тогаш прво ги извршуваме операциите во заградата во која внатре не содржи други загради.

Примери: а) Бројната вредност на изразот $a^2 - 4b^2$ за $a = 5$, $b = 3$ е: $a^2 - 4b^2 = 5^2 - 4 \cdot 3^2 = 25 - 4 \cdot 9 = 25 - 36 = -11$.

б) Нумеричкиот израз $A = 3(4\cdot 2 - 6:(5-2^2))$ има вредност:

$A = 3(8 - 6:(5-4)) = 3\,(8 - 6:1) = 3 \cdot (8-6) = 3 \cdot 2 = 6.$

1.3. ВИДОВИ АНАЛИТИЧКИ ИЗРАЗИ

Според бројот на променливите што ги содржи аналитичкиот израз, разликуваме: **аналитички изрази со една променлива, аналитички изрази со две променливи и аналитички изрази со три, односно *n* променливи**.

Ако во аналитичкиот израз се застапени само алгебарски операции над променливите, тој се вика **алгебарски израз** на тие променливи; ако, пак, во него покрај алгебарските операции се среќава и барем една трансцедентна операција над некоја променлива, тогаш тој се вика **трансцедентен израз** на таа променлива.

Алгебарскиот израз, од своја страна, пак, може да биде или **рационален** (ако содржи само рационални операции над променливите), или **ирационален израз** (ако ја содржи барем еднаш и операцијата коренување, односно степенување со рационален показател над некоја променлива во него). Рационалните (алгебарски) изрази ги делиме на **цели рационални** и **дробно рационални изрази**.

Дефиниција 2. *Цел рационален израз на променливите x, y, ..., v, се вика секој израз образуван од реални броеви (константи) и променливите x, y ,.....,v, a, преку извршување конечен број пати на операциите собирање и множење.*

Бидејќи степенувањето со показател природен број е всушност множење ($a^3 = a \cdot a \cdot a$), а исто така и делењето со даден реален број (различен од нула) може да се смета како множење со реципрочната вредност на тој број, затоа целиот рационален израз може да содржи и степени на променливите со показател природен број, како и делење со фиксен реален број (различен од 0), но не и делење со променлива или делење со изрази кои содржат променливи. На пример, изразите:

$$3x^4,\ -4x(x-2)^3,\ \frac{2}{5}\cdot x^2y^3,\ \frac{x^2+1}{2} - 3xy^2,\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2$$

се цели рационални изрази на променливите x и y.

Рационални изрази, кои содржат делење со променлива, или делење со изрази што содржат променлива; а исто и оние кои содржат степени на променлива со показател цел негативен број, се викаат **дробни рационални изрази**.

На пример, изразите $\frac{2x^2+1}{xy}, x - 3xy^2 + \frac{x+y}{x-y}, 5x^3y^{-2} + (x-y)^{-3},\ x^2 + x^{-2}$

се дробни рационални изрази на променливите x и y.

Забелешка. Видот на даден аналитички израз, освен по однос на множеството променливи $x, y, ..., v$ што влегуваат во него, може да се утврдува уште и одделно по однос на која било од тие променливи. Така, на пример, изразот $3xy^2 + \sqrt{1+x^2}$ по однос

на променливите x и y е ирационален. Тој е ирационален и по однос на променливата x, но по однос на y тој е рационален.

Друг пример, изразот $2x+\frac{x-1}{5}-\frac{y+1}{y}+\sqrt{2}lg7$ по однос на променливите x и y е рационален, и тоа по однос на x е цел рационален, а по однос на y - дробно рационален, покрај тоа што во него се среќава и една ирационална и една трансцедентна операција, но над константи, а не над променливи.

1.4. ДЕФИНИЦИОНА ОБЛАСТ НА АНАЛИТИЧКИТЕ ИЗРАЗИ

Во математиката аналитичките изрази обично ги разгледуваме во некое од познатите бројни множества: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. На пример, ако даден аналитички израз го разгледуваме во множеството $\mathbb{Q}$ на рационалните броеви, тоа значи дека сите фиксни реални броеви (константи), што влегуваат во состав на изразот и вредностите што ги добиваат променливите $x, y, ..., v$ во него, му припаѓаат на множеството $\mathbb{Q}$.

За пократко означување на аналитичките изрази од n променливи $x, y, ..., v$ често ги користиме ознаките $A(x, y, ..., v)$, $B(x, y, ..., v)$, $P(x, y, ..., v)$, $F(x, y, ..., v)$ итн.

Ако во аналитичкиот израз $A(x, y,..., v)$ од n променливи, секоја од променливите $x, y, ...,v$ добие некоја потполно определена бројна вредност: $x = x_0$, $y = y_0$,..., $v = v_0$ (од множеството во кое го разгледуваме даденият израз), тогаш можен е еден од следниве два случаја:

1. За подредената n-торка вредности на променливите $(x_0, y_0, ..., v_0)$, како резултат од извршувањето на сите назначени операции во даденият израз, добиваме некој потполно определен број од истото множество во кое го разгледуваме изразот, или

2. За подредената n-торка вредности $(x_0, y_0, ..., v_0)$ на променливите, добиваме дека некои од назначените операции во изразот $A(x, y, ..., v)$ се неизводливи во множеството броеви во кое го разгледуваме изразот.

Во првиот случај за подредената n-торка броеви $(x_0, y_0, .., v_0)$ велиме дека е **допуштен систем (набор) вредности на променливите** во него. Во тој случај соодветната вредност на изразот $A(x, y, ..., v)$ за $x = x_0$, $y = y_0$, ..., $v = v_0$ ја означуваме со симболот $A(x_0, y_0,...,v_0)$ и се вика **вредност на аналитичкиот израз** за системот вредности $(x_0, y_0,..., v_0)$, или во точката $(x_0, y_0,..,v_0)$.

Во вториот случај за подредената n-торка броеви $(x_0, y_0,..,v_0)$ велиме дека е **недопуштен систем вредности** на променливите во изразот $A(x, y,..., v)$, односно дека тој **во точката** $(x_0, y_0,..., v_0)$ **е недефиниран**.

Познато е дека: подредената двојка броеви (x_0, y_0) често ја споредуваме со точка во рамнината, а подредената тројка броеви (x_0,y_0,z_0) - со точка во тридимензионалниот простор. Аналогно на тоа подредената n-торка броеви $(x_0,y_0,...,v_0)$ ја споредуваме со точка во n-димензионалниот простор.

Дефиниција 3. *Множеството од сите допуштени системи вредности на променливите во еден аналитички израз, се вика област на дефинираност (или дефиниционa област) на тој израз.*

Со други зборови, дефиниционa област на еден израз е множеството од сите точки во кои тој има смисла.

Примери: 1. За изразот $\frac{3}{x-5y}$ допуштена е секоја подредена двојка вредности на променливите x и y, освен оние за кои е $x-5y = 0$, односно $x = 5y$; бидејќи во тој случај изразот е недефиниран, односно, нема смисла. На пример, допуштени се двојките броеви (2,1), (3,2), (4,4), но не и (5, 1), (10, 2), итн. Ако даденият израз го разгледуваме во множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви, тогаш неговата дефиниционa област D ја запишуваме: $D = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge x \neq 5y\}$

2. Изразот $\sqrt{-1 - x^2 - y^2}$ разгледуван во множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви нема смисла ни за една подредена двојка (x, y) на реални броеви. Меѓутоа, во множеството $\mathbb{C}$ на комплексните броеви тој израз е дефиниран за која било подредена двојка (x, y) на комплексни броеви.

3. Изразот $xy + \lg y$ е дефиниран (има смисла) за секоја реална вредност на x и секоја позитивна реална вредност на y, т.е. тој има дефиниционa област $D = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}^+\}$.

Понекогаш, кога еден аналитички израз е формиран и добиен при разгледување на некој конкретен проблем (од геометрија, физика или др.), тогаш допуштените вредности на променливите во него ги определуваме и во зависност од природата на променливите во разгледуваниот проблем. Имено, допуштени ќе бидат не сите, но само оние системи вредности на променливите во него ги определуваме и во зависност од природата на променливите во разгледуваниот проблем. Имено, допуштени ќе бидат не сите, но само оние системи вредности на променливите за кои даденият израз има смисла во конкретниот проблем. На пример, ако при решавањето на некоја текстуална задача со x е означен бројот на животни, тогаш за променливата x допуштени вредности ќе бидат само целите ненегативни броеви.

Примери: 1. Во изразот за плоштина на топка $4\pi r^2$ бројот 4π е константа, а r - должина на радиусот е променлива. За променливата r допуштена вредност е секој позитивен реален број.

2. Во изразот за произволен двоцифрен број во декадниот броен систем: $10x + y$; допуштени системи вредности на променливите се подредените двојки броеви (x,y), каде што $x = 1,2,...9$, а $y = 0,1,2,...,9$.

Обично при задавањето на еден аналитички израз треба да бидат кажани (наведени) и допуштените вредности на секоја променлива, односно множествата од кои тие земаат вредности. Меѓутоа, ако е даден еден аналитички израз, без да се кажани допуштените вредности на променливите во него; тогаш за допуштени вредности на променливите ќе ги сметаме оние вредности за кои имаат смисла сите

операции што ги содржи изразот. На пример, во множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви допуштените вредности на променливата x во изразот $\sqrt{1-x^2}$ ги наоѓаме од условот $1-x^2 \geq 0$, за кои квадратниот корен добива реални вредности, а тоа е сегментот $[-1, 1]$.

1.5. ТРАНСФОРМАЦИИ НА АНАЛИТИЧКИТЕ ИЗРАЗИ

Честопати се случува даден аналитички израз да е составен од два или неколку одделни изрази. На пример, аналитичкиот израз $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}$ всушност претставува збир од два одделни изрази. Првиот од нив има смисла, ако $x \neq y$, а вториот - ако $x \neq -y$. Но, за аналитичкиот израз $\frac{x}{x-y}+\frac{y}{x+y}$ ќе сметаме дека има смисла, ако $x \neq \pm y$.

Значи, ако во состав на даден аналитички израз влегуваат неколку одделни аналитички изрази, тогаш неговата дефиниционa област претставува пресек од дефиниционите области на одделните изрази во неговиот состав.

Нека $A(x, y,...,v)$ и $B(x, y,...,v)$ се два аналитички изрази од дадените променливи и нека D(A) и D(B) се соодветно нивните дефиниционi области.

Дефиниција 4. *Два аналитички изрази $A(x, y,...,v)$ и $B(x, y, ...,v)$, чии дефиниционi области се совпаѓаат $(D(A)) = (D(B))$ и за произволен допуштен систем вредности на променливите тие добиваат еднакви вредности, т.е. $A(x_0, y_0,..., v_0) = B(x_0, y_0,..., v_0)$, се викаат **(апсолутно) идентични изрази**; а равенството $A(x, y,..., v) = B(x, y, ..., v)$ се вика **апсолутен идентитет**.*

Дефиниција 5. *Два аналитички изрази $A(x, y, ..., v)$ и $B(x, y, ..., v)$, чии дефиниционi области не се совпаѓаат, но во заедничкиот дел - пресекот $D(A)\cap D(B)$, за произволен допуштен систем вредности на променливите, тие добиваат еднакви вредности, се викаат **неапсолутно идентични изрази**; а равенството $A(x, y,..., v) = B(x, y, ..., v)$ - **неапсолутен идентитет** во областа $D(A)\cap D(B)$.*

Примери: 1. Равенствата: $x + y = y + x$, $xy = yx$, $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$ се апсолутни идентитети.

2. Изразот $lgxy$ има смисла за точките (x, y) од I и III квадрант во кои е $xy > 0$, а изразот $lgx + lgy$ има смисла само за точките од I квадрант. Велиме дека првиот израз има поширока дефиниционa област од вториот израз. Равенството $lgxy = lgx + lgy$ е неапсолутен идентитет, кој важи ако $x > 0$, $y > 0$.

3. Равенството $lgx^2 = 2lgx$ е неапсолутен идентитет, а равенството $lgx^2 = 2lg|x|$ е апсолутен идентитет.

Дефиниција 6. *Замената на даден аналитички израз со друг нему апсолутно идентичен израз, се вика **идентична трансформација** на дадениот аналитички израз.*

Потребно е да нагласиме дека, замената, пак, на даден израз со друг нему неапсолутно идентичен израз, може да доведе до измена на дефиниционата област на дадениот израз. На пример, при замената на изразот $\lg x^2$ со изразот $2\lg x$, дефиниционата област на $\lg x^2$ се стеснува од два интервала $(-\infty, 0)$ и $(0,\infty)$ на само еден интервал $(0,\infty)$. А обратната трансформација, пак, ќе доведе до проширување на дефиниционата област на $2\lg x$ уште со интервалот $(-\infty, 0)$.

1.6. АНАЛИТИЧКИ ИЗРАЗИ СО ПАРАМЕТРИ

Да забележиме дека некои аналитички изрази содржат две групи (врсти) променливи. Променливите од едната група обично ги означуваме со првите букви од латиницата a, b, c,... или со грчките букви α, β, γ,..., и ги викаме **параметри**; а променливите од другата група ги означуваме обично (кое не е задолжително) со последните букви од латиницата: x, y, z,... и ги викаме **аргументи**. Тие се разликуваат и препознаваат по тоа што: параметрите се букви чии вредности се константни во границите на задачата што ја разгледуваме, но во други задачи тие добиваат други, но пак, константни вредности; додека аргументите, пак, и во процесот на разгледување на истата задача непрекинато ги менуваат своите вредности.

На пример, во многу проблеми разгледуваме изрази од видот $ax^2 + bx + c$, кај кои a, b, c се дадени фиксни реални броеви, а x може да зема кои било реални вредности. Во таков случај велиме буквите a, b, c се параметри, а x - аргумент.

Друг пример. Познато е дека со равенката $(x-p)^2 + (y-q)^2 = 1$ е зададено множеството од сите кружници со единечен радиус (r =1) во рамнината xOy. За одредени вредности на p и q, на пример за $p = 3$, $q = -2$, ја добиваме равенката на една точно одредена кружница $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 1$ со единечен радиус, чиј центар е во точката $(3, -2)$. Значи, p и q се параметри во горнава равенка $(x-p)^2 + (y-q)^2 = 1$.

Разбирливо е дека секој аналитички израз не мора да содржи параметри. На пример, ако x зема кои било реални вредности, тогаш дропката $\frac{x}{x^2+1}$ е аналитички израз на аргументот x, но не содржи ниту еден параметар.

З А Д А Ч И

1. Кои реални броеви може да ги означува (заменува) буквата x во равенството:
а) $x(x+2)(x-3) = 0$, б) $|x| = x$, в) $x+1 = x$, за тоа да биде точно?

2. Покажи од каков вид е секој од следниве аналитички изрази по однос на сите променливи, како и по однос на секоја од нивните променливи:

а) $x^2 + y^2 - \sqrt{\frac{xy}{2}}$, б) $2^x - y^2 + \lg x$, в) $\frac{2x}{1-y} + 5xy^2$,

г) $\frac{x+\sqrt{2}}{y-lg5}$, д) $\frac{2x^2+3xy}{3\sqrt{3}}$ ѓ) $x^{\sqrt{2}}+3x^2y^{-1}$

3. Одреди ја дефиниционата област на секој од изразите:

а) $x^2+\lg(x-1)$ б) $\frac{3x}{x^2-4}$ в) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ г) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y-3}$.

4. Кои од следниве равенства се апсолутни идентитети, а кои од нив се неапсолутни идентитети и за кои вредности на променливата x тие важат?

а) $\sqrt{(x-1)^2}=x-1$ б) $\sqrt{(x-1)^2}=1-x$

в) $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$ г) $(x+1)^2 = x^2+2x+1$.

5. За кои вредности на параметарот a и аргументот x има смисла (е дефиниран) изразот:

а) $a^x + a^{-x}$ б) $lg\,(x-a)$ в) $\sqrt{a-x}$

г) $\frac{x}{a-2}$ д) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1$ ѓ) $\sqrt{x^2+a^2}$, ако

ги разгледуваме во множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви?

Глава I

КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Освен во множествата на целите, рационалните и реалните броеви, алгебарските изрази ќе ги разгледуваме многу често и во множеството на комплексните броеви. Со цел да се олесни следењето на книгата од страна на читателот, првата глава ја посветуваме токму на комплексните броеви, со посебно задржување на содржините што се неопходно потребни за нас.

§ 2. АЛГЕБАРСКА ФОРМА НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

2.1. ДЕФИНИЦИЈА И ОСНОВНИ ПОИМИ

Поимот комплексен број го воведуваме со следнава:

Дефиниција 1. *Изразот* $a + bi$ *или* $a + ib$, *каде што* a *и* b *се реални броеви, а* i *- имагинарна единица, се вика комплексен број.*

Имагинарната единица i е број, чиј што квадрат е -1, т.е. таков што

$$i^2 = -1$$

Комплексниот број $a + bi$ често го запишуваме и со една буква z, т.е. $z = a + bi$. Овој запис се вика **алгебарска** или **стандардна форма на комплексниот број** z. Реалните броеви a и b се викаат соодветно **реален дел** и **имагинарен дел** на комплексниот број z, што симболички го запишуваме вака:

$$Re(z) = a, \quad Im\,(z) = b$$

Комплексен број чиј имагинарен дел е еднаков на нула, е реален број, т.е. усвојуваме:

$$a + 0i = a$$

Значи, реалните броеви се подмножество од комплексните броеви. Комплексниот број $z = a + bi$, ако $b \neq 0$, се вика **имагинарен (нереален) број**; а ако $b \neq 0$, $a=0$, тогаш бројот $0 + bi$ се вика **чисто имагинарен број**. Бројот $0 + 0i$ се вика **комплексна нула** или само **нула** и се означува со познатиот знак 0. Тој е единствен комплексен број, кој може да се смета и како реален и како чисто имагинарен број.

Комплексен број, кој се добива од $z = a + bi$ со замена на знакот на имагинарниот дел во спротивен, се означува со $\bar{z}$ и се вика **конјугиран комплексен број** на бројот z.

Значи, ако $z = a + bi$, тогаш е $\bar{z} = a - bi$.

Знакот „црта", што се става над комплексниот број z, може да се смета како знак на операција, која го менува знакот на неговиот имагинарен дел. На пример:

$$\overline{3-2i} = 3+2i,\quad \overline{1+3i} = 1+3i,\quad 5 = \overline{5+0i} = 5-0i = 5,\quad \overline{2i} = \overline{0+2i} = 0-2i = -2i.$$

Комплексен број, кој се добива од $z = a + bi$ со замена на знаците на реалниот и имагинарниот дел на спротивни, симболички се означува $-z$ и се вика **спротивен комплексен број** на бројот z. Значи, ако $z = a + bi$, тогаш е $-\bar{z} = -a - bi$.

Пример: $-(2-3i) = -2 + 3i$, $-(-1+i) = 1 - i$, $-(-3i) = 3i$.

Лесно се проверува дека важат следниве зависности:

а) $\bar{\bar{z}} = z$,

б) z е реален број, ако и само ако $\bar{z} = z$,

в) z е чисто имагинарен број, ако и само ако $\bar{z} = -z$.

Една од важните карактеристики на комплексниот број $z = a + bi$ е неговиот **модул**. Тоа е реалниот ненегативен број $\sqrt{a^2+b^2}$ и се означува со $|z|$, т.е.

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Примери:

$$|2-3i| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13},$$

$$|4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5,$$

$$|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$$

$$|-2i| = |0-2i| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Очигледно е дека:

г) Броевите z и $\bar{z}$ имаат еднакви модули, т.е. $|z| = |\bar{z}|$

На пример: $|1+2i| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$; $|1-2i| = \sqrt{1^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Множеството на сите комплексни броеви го означуваме со $\mathbb{C}$, т.е. имаме дека

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

Дефиницијата на комплексните броеви за да биде потполна, потребно е таа да биде придружена и со соодветни дефиниции за еднаквост на два комплексни броја, како и за операциите собирање и множење на два комплексни броја.

Дефиниција 2. *За два комплексни броја $a + bi$ и $c + di$ усвојуваме дека се еднакви, ако и само ако тие имаат еднакви реални делови и еднакви имагинарни делови, т.е.*

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d, (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

Тоа значи дека, комплексниот број $z = a + bi$ е наполно определен со неговиот реален дел a и имагинарен дел b. Тоа е причина, што комплексниот број $z = a + bi$ често го дефинираме и како подредена двојка реални броеви $z = (a, b)$, каде a е неговиот реален дел, а b - неговиот имагинарен дел.

При споредувањето на два реални броја α и β можни се два случаја: $\alpha = \beta$, или $\alpha \neq \beta$. Во вториот случај е или $\alpha > \beta$, или $\alpha < \beta$. При споредувањето на два комплексни броја $a + bi$ и $c + di$ исто така можни се два случаја: $a + bi = c + di$, или $a+bi \neq c+di$. Но за нееднаквите комплексни броеви што не се реални, релациите „е помал од" и „е поголем од" не се воведуваат. Значи, нема смисла да се каже дека: бројот $1 + 3i$ е помал или поголем од бројот $2 + i$. Исто така во тој контекс нема смисла да се говори за позитивен или негативен комплексен број.

2.2. ОПЕРАЦИИ СО КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Во множеството на комплексните броеви, операциите собирање и множење се дефинирани со равенствата:

$$(a + bi) + (c + di) \overset{def}{=\!=} (a + c) + (b + d)i \tag{1}$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) \overset{def}{=\!=} (ac - bd) + (ad + bc)\, i \tag{2}$$

Примери: а) $(3 + 2i) + (1 - 5i) = (3+1) + (2-5)\, i = 4 - 3i$.

б) $(3 + 4i) \cdot (2 + i) = (3 \cdot 2 - 4 \cdot 1) + (3 \cdot 1 + 4 \cdot 2)i = 2 + 11i$.

Операцијата одземање на комплексни броеви ја воведуваме како инверзна операција на собирањето, имено:

Разлика на два комплексни броја $a + bi$ и $c + di$ се вика таков комплексен број $x + yi$, кој собран со намалителот го дава намаленикот, т.е.

$$(a + bi) - (c + di) = x + yi \tag{3}$$

ако и само ако $(x + yi) + (c + di) = a + bi$ (4)

Извршувајќи го собирањето на левата страна во (4), добиваме:

$$(x + c) + (y + d)i = a + bi,$$

а врз основа на дефиницијата за еднаквост на два комплексни броја, имаме:

$$x + c = a \quad \text{и} \quad y + d = b.$$

Оттука наоѓаме: $x = a - c$, $y = b - d$.

Според тоа, равенството (3) за разликата на два комплексни броја, ќе гласи:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i \tag{5}$$

Пример: $(1 + 3i) - (4 - 2i) = (1 - 4) + (3 - (-2))i = -3 + 5i$.

Да заклучиме дека, на комплексните броеви од формална гледна точка можеме да гледаме и како на биноми по однос на имагинарна единица i, па операциите собирање, одземање, множење и степенување со показател природен број (специјален случај на множење) можеме да ги извршуваме и според правилата на тие операции со биноми, а кога се има предвид дека имагинарната единица i ги задоволува условите:

$$i^m \cdot i^n = i^{m+n}, \quad i^0 = 1, i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, i^4 = 1.$$

Примери: $(-2 + 3i) - (-5 + i) = -2 + 3i + 5 - i = 3 + 2i$, $(2-3i)^2 + (1 + i)(2-4i) = 4 - 12i + 9i^2 + 2 + 2i - 4i - 4i^2 = 4 + 2 - 9 + 4 - 12i - 4i = 1 - 16i$, $(1 - 2i)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot 2i + 3 \cdot 1 \cdot (2i)^2 - (2i)^3 = 1 - 6i + 12i^2 - 8i^3 = 1 - 6i - 12 + 8i = -11 + 2i$.

Конјугирано комплексните броеви ги имаат следниве две важни својства:

Теорема [2.1]. ***Збирот и производот на конјугирано комплексните броеви*** z ***и*** $\bar{z}$ ***се реални броеви.***

Доказ. а) $z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a + 0i = 2a$,

б) $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$.

Ако земеме предвид дека и $|z|^2 = (\sqrt{a^2 + b^2})^2 = a^2 + b^2$, тогаш равенството б) може да го запишеме во видот:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \tag{6}$$

Операцијата делење на комплексни броеви ја дефинираме како инверзна операција на операцијата множење, имено:

Количник на комплексните броеви $a + bi$ и $c + di \neq 0$ е таков комплексен број $x + yi$, кој помножен со делителот го дава деленикот, т.е.

$$\frac{a+bi}{c+di} = x + yi, \text{ ако и само ако } (x + yi)(c + di) = a + bi \tag{7}$$

Врз основа на дефиницијата за еднаквост на два комплексни броја лесно се покажува дека, при услов $c^2 + d^2 \neq 0$ за x и y добиваме: $x = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}$, $y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$.

Според тоа, равенството (7) за количникот на два комплексни броја, ќе гласи:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i \tag{8}$$

До истото ова равенство можеме полесно да дојдеме и со примена на равенството (6) вака:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bc-adi-bdi^2}{c^2-d^2i^2} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} i$$

Примери: $\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i-i+i^2}{1-i^2} = \frac{0-2i}{2} = -i$,

$$\frac{3-2i}{1+3i}=\frac{3-2i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i}=\frac{3-2i-9i+6i^2}{1-9i^2}=\frac{-3-11i}{10}=\frac{-3}{10}-\frac{11}{10}i$$

$$\frac{2+3i}{i}=\frac{2+3i}{i}\cdot\frac{i}{i}=\frac{2i+3i^2}{i^2}=\frac{-3+2i}{-1}=3-2i$$

Ќе покажеме дека, операцијата „црта“ (одредување на конјугирано комплексен број) дејствува над збирот, производот и количникот на следниов начин:

а) $$\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2 \tag{9}$$

б) $$\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2 \tag{10}$$

в) $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2},\ z_2\neq 0 \tag{11}$$

Доказ. Нека $z_1=a+bi, z_2=c+di$. Тогаш

а) $z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i=a+c-(b+d)i=$

$=(a-bi)+(c-di)=\overline{z}_1+\overline{z}_2.$

б) $z_1\cdot z_2=(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i=(ac-bd)-(ad+bc)i=$

$=(a-bi)\cdot(c-di)=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2.$

в) Од идентитетот $\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2=z_1$, $(z_2\neq 0)$, односно $\overline{\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2}=\overline{z_1}$ со примена на (10)

$\overline{\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1}$, а оттука следува $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

Да покажеме уште дека, за модулот од производ и количник на два комплексни броја важат равенствата:

а) $$|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2| \tag{12}$$

б) $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},\ (z_2\neq 0) \tag{13}$$

Доказ. а) Со примена на равенствата (6) и (10), добиваме:

$|z_1\cdot z_2|^2=z_1\cdot z_2\cdot\overline{z_1\cdot z_2}=z_1\cdot z_2\cdot\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2=(z_1\cdot\overline{z}_1)\cdot(z_2\cdot\overline{z}_2)=|z_1|^2\cdot|z_2|^2$, а од $|z_1\cdot z_2|^2=|z_1|^2\cdot|z_2|^2$ следува равенството (12), штд.

б) Поаѓајќи од идентитетот $\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2=z_1$, $(z_2\neq 0)$, односно $\left|\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right|=|z_1|$, а со примена на равенството (12), добиваме:

$\left|\frac{z_1}{z_2}\cdot z_2\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \cdot |z_2| = |z_1|$, а оттука следува дека $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $(z_2 \neq 0)$.

2.3. ПОЛЕ НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

Во множеството $\mathbb{C}$ на комплексните броеви со соодветни дефиниции, воведовме две операции собирање и множење. Ќе покажеме дека тие операции ги имаат сите својства, што ги имаат и во множеството на реалните и во множеството на рационалните броеви.

Операцијата собирање во множеството $\mathbb{C}$ на комплексните броеви ги има следниве својства:

1^0. **Комутативност.** За секои комплексни броеви z_1 и z_2 важи:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

Доказ. Врз основа на дефиницијата на операцијата собирање во множеството $\mathbb{C}$, и комутативноста на собирањето на реалните броеви, добиваме:

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i = (c + di) + (a + bi) = z_2 + z_1$.

2^0. **Асоцијативност.** За секои $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, важи:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

Доказ. Ако $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_3 = e + fi$ се произволни комплексни броеви. Врз основа на асоцијативноста на собирањето на реалните броеви, имаме:

$(z_1 + z_2) + z_3 = [(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) = [(a + c) + e] + [(b + d) + f]i = [a + (c + e)] + [b + (d + f)]i = (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)] = z_1 + (z_2 + z_3)$.

3^0. **Постоење на неутрален елемент (нула).** Комплексната нула $0 + 0i$ има својство за секој број $z \in \mathbb{C}$ да важи:

$$z + 0 = 0 + z = z.$$

Доказ. Ако $z = a + bi$ е кој било комплексен број. Тогаш $z + (0 + 0i) = a + bi + 0 + 0i = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi = z$, со што го докажавме равенството $z + (0 + 0i) = z$, а врз основа на комутативноста ќе важи и равенството $(0 + 0i) + z = z$.

Значи, комплексната нула е неутрален елемент (нула) во операцијата собирање на комплексните броеви.

4^0. **Постоење на спротивен елемент.** Секој комплексен број z има свој **спротивен елемент**. Тоа е бројот $-z$, за кој важи: $z + (-z) = 0 + 0i$

Доказ. Од $z = a + bi \in \mathbb{C}$ следува дека $-z = -a - bi \in \mathbb{C}$, при што ќе важи:

$a + bi + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)\,i = 0 + 0i$.

Последново својство овозможува воведување на инверзна операција на собирањето - одземањето. Имено: одземањето од бројот z_1 на бројот z_2 го воведуваме како собирање на бројот z_1 со бројот $(-z_2)$ - што е спротивен на бројот z_2, т.е.

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

Операцијата множење во множеството $\mathbb{C}$ ги има својствата:

5⁰. **Комутативност.** За секои два комплексни броја z_1 и z_2 важи:

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

Доказ. Согласно равенството (2) за множење во множеството $\mathbb{C}$ и комутативноста на множењето на реални броеви, имаме:

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i = (ca - db) + (cb + da)i = (c + di) \cdot (a + bi) = z_2 \cdot z_1$.

6⁰. **Асоцијативност.** За секои $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, важи:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

Користејќи ја асоцијативноста на множењето на реалните броеви, предлагаме асоцијативноста на множењето на комплексните броеви да ја докажете сами.

7⁰. **Постоење на неутрален елемент (единица).** Комплексниот број $1 + 0i$ има својство да за секој $z \in \mathbb{C}$ важи:

$$z \cdot (1 + 0i) = (1 + 0i) \cdot z = z$$

Доказ. Нека $z = a + bi$ е кој било комплексен број. Тогаш $z \cdot (1 + 0i) = (a + bi) \cdot (1 + 0i) = (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i = a + bi = z$. Со тоа го докажавме равенството $z \cdot (1 + 0i) = z$, а врз основа на комутативноста на множењето ќе важи и $(1 + 0i) \cdot z = z$.

Според тоа, комплексниот број $1 + 0i$ е неутрален елемент во множеството $\mathbb{C}$ по однос на операцијата множење.

8⁰. **Постоење на инверзен елемент (реципрочен број).** Реципрочен број на комплексниот број $z \neq 0$, што го означуваме со $\frac{1}{z}$ или z^{-1}, е таков комплексен број за кого важи $z \cdot \frac{1}{z} = 1 + 0i$. Ќе покажеме дека, за секој комплексен број $z = a + bi \neq 0$ постои единствен негов реципрочен број

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

Доказ. Нека $z = a + bi$ е произволен комплексен број различен од нула, и ако постои негов реципрочен број z^{-1}; на пример нека е тоа бројот $x + yi$, таков што да важи $(a + bi)(x + yi) = 1 + 0i$.

Тогаш од $(a + bi) \cdot (x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i = 1 + 0i$ врз основа на дефиницијата за еднаквост на два комплексни броја, го добиваме системот равенки $\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$ (14)

При услов $a + bi \neq 0$, односно $a^2 + b^2 \neq 0$ системот (14) има единствено решение $x = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$. Така добиваме: $z^{-1} = (a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i$.

Последново својство овозможува воведување на инверзна операција на множењето - делењето. Имено, делењето на бројот z_1 со бројот $z_2 \neq 0$ го дефинираме

како множење на бројот z_1 со бројот $\frac{1}{z_2}$ што е реципрочен на бројот z_2, т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \ (z_2 \neq 0).$$

Покрај горниве својства (одделно по четири) на секоја од операциите собирање и множење, ќе покажеме дека тие се сврзани и со законот на дистрибутивност, односно дека важи својството:

9⁰. **Дистрибутивност на множењето во однос на собирањето.** За секои $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ важи $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Доказ. Нека $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z_3 = e + fi$ се произволни комплексни броеви. Тогаш:

$z_1 (z_2 + z_3) = (a + bi) . [(c + di) + (e + fi)] = (a + bi) \cdot [(c + e) + (d + f)i] = [a(c + e) - b(d + f)] + [a(d + f) + b(c + e)]i = (ac + ae - bd - bf) + (ad + af + bc + be)i$, а исто така и:

$z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 = (a + bi)(c + di) + (a + bi)(e + fi) = [(ac - bd) + (ad + bc)i] + [(ae - bf) + (af + be)i] = (ac - bd + ae - bf) + (ad + bc + af + be)i$.

Оттука следува дека: $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$. Поради комутативноста на множењето, за секои $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ важи и равенството $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

Од досега изложеното заклучуваме дека, воведените операции собирање и множење во множеството на комплексните броеви, обете се: комутативни и асоцијативни, сврзани со законот за дистрибутивност, секоја од нив има неутрален елемент (нула за собирањето и единица за множењето) и за секоја од нив постои инверзна операција: одземање и делење (освен делење со 0).

Познато ни е дека, кое било множество (бројно или друго) со две зададени операции (собирање и множење) во него, кои ги имаат сите горе наведени својства, велиме е **поле**. Според тоа, докажавме дека важи следнава:

Теорема [2.2]. ***Множеството на сите комплексни броеви со операциите собирање и множење е бројно поле.***

Бројот 0 и во полето на комплексните броеви при множењето и делењето има посебно место. Така, производот на кој било комплексен број со бројот нула е еднаков на нула. Делењето, пак, со бројот нула нема смисла (е недефинирано). Важно својство на множењето е тоа што: ако производот на два броја е еднаков на нула, тогаш барем еден од нив е нула.

2.4. КВАДРАТЕН КОРЕН ОД КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

Нека е даден комплексен број $z = a + bi$. Квадратен корен од тој број $\left(\sqrt{a + bi}\right)$ ако постои, е таков комплексен број $x + yi$, што го задоволува равенството $(x + yi)^2 = a + bi$, односно:

$$x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi \qquad (15)$$

Од (15) врз основа на еднаквоста на два комплексни броја следува системот равенки:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \tag{16}$$

Квадрирајќи ги двете страни на секоја од равенките во системот (16), а потоа собирајќи ги нивните соодветни страни, добиваме:

$(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$

Оттука $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ (17)

каде што левата страна е позитивна, бидејќи x и y се реални броеви, па затоа и десната страна е позитивна.

Од равенството (17) и првото од равенствата (16), добиваме:

$$x^2 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2}), \quad y^2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2}),$$

односно: $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})}$; $y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}$. (18)

Забележуваме дека, за x и y добиваме по две реални вредности, што се разликуваат само по знакот. Нив не смееме да ги комбинираме произволно, бидејќи нивниот производ согласно второто од равенствата (16) треба да има исти знак со бројот b.

Според тоа, ако е $b > 0$, тогаш x и y мораат да имаат исти знак, а ако е $b < 0$, тогаш x и y мораат да имаат спротивни знаци. Кога го имаме предвид тоа тогаш за квадратниот корен од комплексен број добиваме две вредности, што се разликуваат само по својот знак:

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}\right), \; b > 0 \tag{19}$$

или

$$\sqrt{a + bi} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - i\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})}\right), \; b < 0$$

Пример. Да ги одредиме квадратните корени: а) $\sqrt{5 + 12i}$, б) $\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$

Решение. Согласно равенствата (19), добиваме:

$$\text{а)}\sqrt{5 + 12i} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5^2 + 12^2})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-5 + \sqrt{5^2 + 12^2})}\right) =$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(5 + 13)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-5 + 13)}\right) = \pm(3 + 2i)$$

$$\text{б)}\ \sqrt{1 - i\sqrt{3}} = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(1 + 2)} - \sqrt{\frac{1}{2}(-1 + 2)}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

ЗАДАЧИ

1. За кои реални броеви x и y важат равенствата:

а) $x + 2 - yi = 3 - i$, б) $x + y + 5i + (x - y)i = 7$.

2. Изврши ги назначените операции во изразот:

а) $(1 + i)^3 + (2 - i)^2$, б) $\frac{3 - i}{2 + i} - \frac{2 - i}{3 + i}$, в) $\frac{(1 + i)^2 - (1 - i)^2}{(\sqrt{3} - i)^2}$

3. Дадени се броевите: $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = 1 + 2i$. Одреди ги изразите: а) $\overline{z}_1^2 + \overline{z}_2^2$,

б) $z_1^2 + z_2^2$, в) $z_1 \cdot \overline{z}_2 + \overline{z}_1 \cdot z_2$, г) $z_1^2 + z_1 z_2$.

4*. Докажи дека, за секој број $z \in \mathbb{C}$, важат равенствата:

а) $\overline{(-z)} = -\overline{z}$, б) $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$, $(z \neq 0)$

5. Даден е комплексен број $z = \sqrt{3} - 2i$. Одреди ги броевите:

а) $z + \overline{z}$, б) $z - \overline{z}$, в) $z \cdot \overline{z}$, г) $\frac{z}{\overline{z}}$ д) $\overline{z} - z$

6. Одреди го реалниот и имагинарниот дел на бројот z:

а) $z = \frac{5 + i}{6 - i}$, б) $z = \frac{6}{1 + i}$, в) $z = \frac{5i}{5 + i}$.

7. Дадени се броевите $z_1 = \sqrt{5} + 2i$ и $z_2 = 2 - i\sqrt{5}$. Одреди ги модулите:

а) $|z_1 \cdot z_2|$, б) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

8*. Докажи дека: ако $|z| = 1$, тогаш $\frac{1}{z} = \overline{z}$

9. Докажи дека, за секој комплексен број $z \neq 0$ важи $\left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = 1$

10. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $|z| + z \cdot \overline{z}$, ако $z = 1 - i$, б) $(z - \overline{z}) \cdot (1 + z \cdot \overline{z})$, ако $z = 1 - i\sqrt{2}$.

11. Докажи дека, за кој било реален број x, важи равенството:

а) $\left|\frac{x + i}{x - i}\right| = 1$ б) $\left|\frac{1 - xi}{1 + xi}\right| = 1$

12. Покажи дека, за кои било реални броеви x и y важи: $\left|\frac{x + yi}{x - yi}\right| = 1$

13. Докажи: а) $\mathrm{Re}(iz) = -Im(z)$, б) $\mathrm{Im}(iz) = \mathrm{Re}(z)$.

14. Нека $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}} = \{(a + bi) \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Провери дали множеството $\mathbb{C}_{\mathbb{Q}}$ со операциите собирање и множење е бројно поле.

15. Одреди го квадратниот корен:

а) $\sqrt{3+4i}$ б) $\sqrt{21-20i}$ в) $\sqrt{24-7i}$ г) $\sqrt{5-12i}$

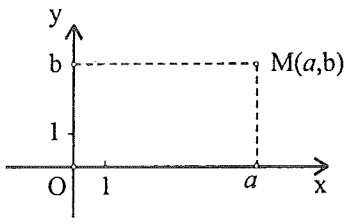
16*. Одреди ги вредностите на корените:

а) $\sqrt{2-i\sqrt{5}}$ б) $\sqrt{i}$ в) $\sqrt[4]{i}$

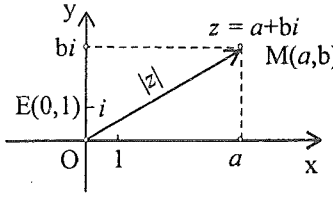
17. Докажи го равенството $\sqrt{1+i\sqrt{3}}+\sqrt{1-i\sqrt{3}}=\sqrt{6}$.

§3. ГЕОМЕТРИСКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

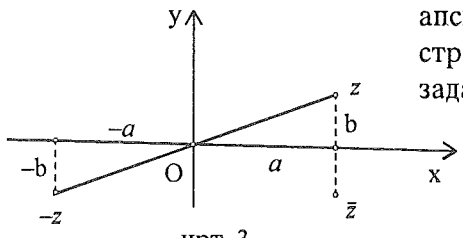
Множеството на сите реални броеви може да се претстави и како множество на сите точки од некоја права, која во таков случај ја викаме **координатна права** или **бројна оска**. Тогаш велиме: меѓу множеството на реалните броеви и множеството на сите точки на бројната оска постои **биекција**, имено: На секој реален број му одговара една и само една точка од бројната оска, и обратно: секоја точка од бројната оска е претставник (геометриски репрезент) точно на еден реален број. Соодветството меѓу броевите и точките во математиката суштински во ништо не се разликува од соодветството меѓу гласовите и буквите во нашиот јазик, при што ние често наместо зборот „глас" говориме „буква" и обратно. Слично на тоа, пак, во математиката многу често наместо зборот „број" ќе говориме „точка" и обратно. Затоа не правиме битна разлика меѓу координатната права (бројната оска) и множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви.



црт. 1



црт. 2



црт. 3

Понесени од желбата и комплексните броеви да ги претставуваме со точки, доаѓаме до сознанието дека, биекција може да се воспостави и меѓу множеството на комплексните броеви и множеството точки од координатната рамнина xOy. Имено: во рамнината П нека е зададен правоаголен координатен систем x0y. Тогаш на секоја точка M∈П може да ѝ се придружи подредената двојка реални броеви (a, b), каде што a е апсциса, а b- ордината на точката M (црт. 1). Од друга страна, со подредената двојка реални броеви (a, b), зададен е еден и само еден комплексен број $z = a + bi$.

Според тоа, природно се наметнува и следново просто геометриско претставување на комплексните броеви:

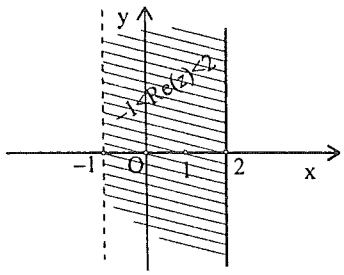
На комплексниот број $z = a + bi$, односно $z = (a, b)$ му одговара (му ја придружуваме) точката M (a, b) од координатната рамнина xOy (црт.1), и обратно: точката M (a, b) од координатната рамнина xOy е слика (геометриски претставник) на комплексниот број $z = a + bi$. Затоа координатната рамнина xOy, користена за геометриско претставување на комплексните броеви, се вика и **комплексна рамнина**.

Реалните броеви $z = a + 0i = a$ на комплексната рамнина ги претставуваме со точките на Ox-оската, а чисто имагинарните броеви $z = 0 + bi = bi$ со точките на Oy-оската (црт. 2). Затоа Ox-оската се вика уште и **реална оска**, а Oy-оската - **имагинарна оска**. На имагинарната единица $i = 0 + 1i$ ѝ одговара точката E(0,1), а на комплексната нула $0 + 0i = 0$ – координатниот почеток O (0,0) (црт. 2).

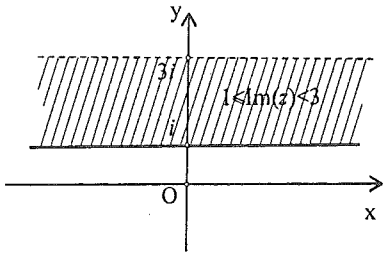
Конјугирано комплексните броеви z и $\bar{z}$ секогаш се расположени симетрично спрема реалната оска Ox, а спротивните еден на друг комплексни броеви z и $-z$ се расположени симетрично спрема координатниот почеток O(0,0) (црт. 3).

Очигледно е дека модулот $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ на комплексниот број $z = a + bi$ е еднаков на растојанието од точката M(a, b) што му одговара на z, до координатниот почеток O (црт. 2).

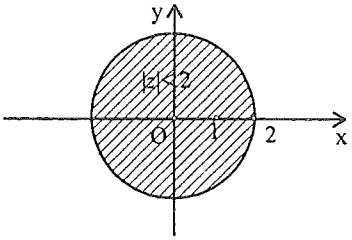
Множеството на сите комплексни броеви со ист реален дел претставува права паралелна на Oy-оската; множеството на сите комплексни броеви со ист имагинарен дел е права паралелна со Ox-оската, а множеството на сите комплексни броеви со ист модул $|z| = r$, $r > 0$ претставува кружница со центар во координатниот почеток O(0,0) и радиус r.



црт. 4



црт. 5

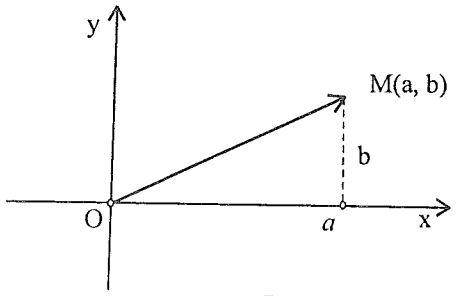


црт. 6

Пример 1. Деловите од комплексната рамнина xOy на кои лежат сите точки $z = x + yi$, што ги задоволуваат условите:

а) $-1 < \mathrm{Re}\,(z) \le 2$, б) $1 \le \mathrm{Im}\,(z) < 3$, в) $|z| \le 2$ на црт. 4, 5 и 6 соодветно дадени се шрафирано.

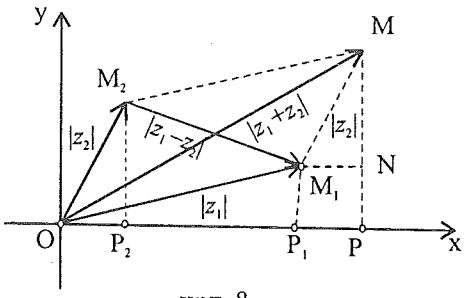
На комплексните броеви може да им се даде и друга геометриска интерпретација. Секоја точка M(a, b) од рамнината xOy, може да се доведе во еднозначно соодветство (биекција) со нејзиниот радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, т.е. со векторот што поаѓа од координатниот почеток O(0,0), а завршува во точката M(a, b) (црт. 7). Затоа, секој



црт. 7

комплексен број $z = a + bi$, што одговара на точката $M(a, b)$, може да се разгледува и како вектор $\overrightarrow{OM}$ со координати (a, b). Очигледно е дека, така воспоставеното соодветство меѓу множеството на сите комплексни броеви и множеството на сите радиус-вектори во координатната рамнина xOy, претставува биекција, бидејќи на секој комплексен број $z = a + bi$ $(z \neq 0)$ му одговара по еден и само еден вектор $\overrightarrow{OM}$, и обратно: секој вектор $\overrightarrow{OM}$ е слика (претставник) точно на еден број $z = a + bi$.

Ваквото геометриско претставување на комплексните броеви овозможува операциите собирање и одземање на комплексните броеви да се сведат на соодветните операции со вектори. На пример, ако се дадени броевите $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$. Нивниот збир е еднаков на бројот $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.



црт. 8

Ако на комплексниот број z_1 му одговара вектор $\overrightarrow{OM}_1$ со координати на крајната точка $M_1(a_1, b_1)$, а на комплексниот број z_2 - вектор $\overrightarrow{OM}_2$ со крајна точка M_2 (a_2, b_2), тогаш збирот на векторите $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{OM}_2$ ќе биде векторот $\overrightarrow{OM}$ со почеток во координатниот почеток O и крај во четвртото теме на паралелограмот, што е конструиран над векторите $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{OM}_2$ (црт. 8).

Од складноста на триаголниците OP_2M_2 и M_1NM следува дека точката M - крајна точка на векторот $\overrightarrow{OM}$ ќе има координати:

апсциса: $\overline{OP} = \overline{OP}_1 + \overline{P_1P} = \overline{OP}_1 + \overline{OP}_2 = a_1 + a_2$ и

ордината: $\overline{PM} = \overline{PN} + \overline{NM} = \overline{P_1M_1} + \overline{P_2M_2} = b_1 + b_2$.

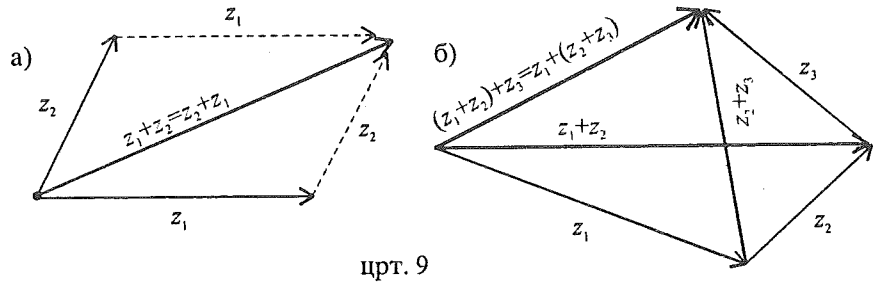
Според тоа, точката M, односно векторот $\overrightarrow{OM}$ ќе му одговара на комплексниот број $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, т.е. на збирот на комплексните броеви $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$.

Значи, ако на бројот z_1 му одговара вектор $\overrightarrow{OM}_1$, а на бројот z_2 вектор $\overrightarrow{OM}_2$, тогаш на збирот $z_1 + z_2$ ќе му одговара збирот на векторите $\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2$, а на разликата $z_1 - z_2$ (аналогно може да се докаже) ќе ѝ одговара разликата на векторите $\overrightarrow{OM}_1 - \overrightarrow{OM}_2$.

Од триаголникот OM_1M, чии страни се $|z_1|$, $|z_2|$ и $|z_1+z_2|$ (црт. 8) следуваат следниве важни неравенства:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad (1)$$

т.е. модулот на збирот од два комплексни броја е помал или еднаков на збирот од модулите на собироците, но е поголем или еднаков на разликата од тие модули.



црт. 9

Неравенствата (1) се во полна согласност со познатата теорема во елементарната геометрија за односот меѓу страните на триаголникот. Од неравенствата (1), имајќи предвид дека $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ и $|-z_2| = |z_2|$ следуваат и неравенствата:

$$|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2| \qquad (2)$$

т.е. за модулот на разликата на два комплексни броја важат исти такви неравенства како и за модулот на збирот. Тоа е разбирливо кога се има предвид дека $|z_1 - z_2|$ - должина на другата дијагонала на паралелограмот OM_1MM_2 е исто страна на триаголник, чии други две страни се $|z_1|$ и $|z_2|$ (црт. 8).

Знаците на еднаквост во (1) и (2) ќе важат само во посебен случај, кога точките O, z_1 и z_2 лежат на една права.

Пример 2. Да го одредиме множеството точки z на комплексната рамнина, кои го задоволуваат условот: а) $|z - a| = r$, $r > 0$ каде што a е фиксна точка од истата рамнина, а r - позитивен реален број, б) $|z - a| = |z - b|$, $a \neq b$, каде што a и b се фиксни точки од истата рамнина.

Решение. Нека z_1 и z_2 се две точки на комплексната рамнина. Тогаш $|z_1 - z_2|$ или $|z_2 - z_1|$ е должината на дијагоналата M_1M_2 на паралелограмот OM_1MM_2 (црт. 8) што ги сврзува точките z_1 и z_2, односно, растојанието меѓу тие две точки. Според тоа, $|z - a|$ е растојанието на променливата точка z од една фиксна точка a во комплексната рамнина. Оттука следува: множеството точки што го задоволуваат условот:

а) $|z - a| = r$, $r > 0$ е кружница со центар точката a и радиус r,

б) $|z - a| = |z - b|$, $a \neq b$ е симетралата на отсечката чии крајни точки се фиксните точки a и b.

Ако комплексните броеви z_1, z_2 и z_3 ги третираме како вектори, лесно може да се покаже дека за собирањето на комплексните броеви важат комутативниот и асоцијативниот закон (црт. 9, а, б).

ЗАДАЧИ

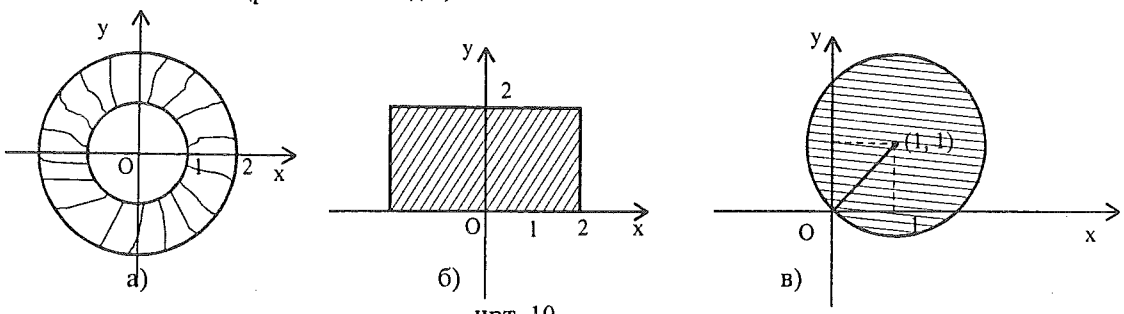
1. Запиши ги во алгебарска форма комплексните броеви, што им одговараат на точките:

   A (–2, 1), B (0, –5), C (–4, 0), D (2, $2\sqrt{3}$)

2. Одреди го множеството од сите точки $z = x + yi$ од комплексната рамнина, кои ги задоволуваат условите: а) $Re(z) \le 0$, б) $-2 < Re(z) \le 5$, в) $Im(z) \ge 3$, г) $1 \le Im(z) < 5$, д) $|z| = 3$, ѓ) $|z| \le 4$, е) $1 \le |z| \le 3$, ж) $Re(z) \ge 0$, $Im(z) \ge 0$, $|z| \le 2$.

3*. Одреди го множеството на сите точки z од комплексната рамнина, кои ги задоволуваат условите: а) $|z-3i| = 5$, б) $|z-3+i| \le 2$, в) $\left|\frac{z-1}{z-4}\right| = 1$, г) $z \cdot \bar{z} + 3z + 3\bar{z} = 0$.

4. Одреди ги условите кои ги задоволуваат сите точки (и само тие) од шрафираната област на цртежот 10 под а, б и в.



црт. 10

5*. Докажи дека, за кои било комплексни броеви z_1, z_2 важи равенката:
$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

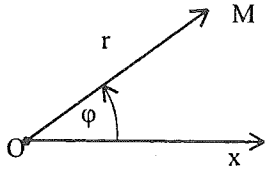
6. Како се распоредени векторите, што им одговараат на комплексните броеви z_1 и z_2, ако: а) $|z_1-z_2| = |z_1| - |z_2|$, б) $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2|$.

7. Одреди ја должината на отсечката, што ги соединува точките, што им одговараат на броевите $-5+3i$ и $-2-i$.

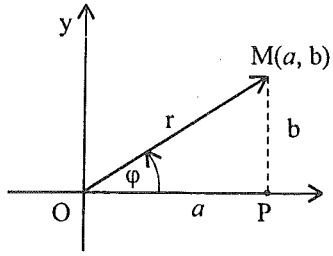
8. На комплексните броеви z_1 и z_2 им одговараат точките А (a, b) и С (c, d). Одреди го комплексниот број $z = x + yi$, што ѝ одговара на средината М на отсечката АС.

§ 4. ТРИГОНОМЕТРИСКА ФОРМА НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

1. Положбата на која било точка М на рамнината со помош на Декартовиот координатен систем ја определуваме (или задаваме) со нејзините декартови координати - со апсцисата и ординатата. Покрај овој координатен систем често користиме и друг систем, наречен **поларен координатен систем.** Него го определуваме, кога во рамнината избираме фиксна точка О **(пол)** и полуправа Ох **(поларна оска)** што излегува од полот О. Положбата на точката М на рамнината ја определуваме со два броја - **поларни координати: должината r на векторот** $\overrightarrow{OM}$ **и аголот** φ (мерен во радијани), што тој вектор го зафаќа со поларната оска (црт. 11).



црт. 11



црт. 12

Да ја одредиме врската помеѓу декартовите координати (a, b) и поларните координати (r, φ) на иста точка од рамнината. За таа цел поларниот координатен систем го поставуваме така, што неговиот пол О да се совпадне во координатниот почеток О (0, 0), а поларната оска - со позитивната насока на апсцисната оска на Декартовиот координатен систем (црт. 12). Во таков случај, согласно дефинициите на тригонометриските функции, од правоаголниот триаголник ОМР на црт. 12, имаме:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi \tag{1}$$

Оттука, при $r > 0$, следува:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{2}$$

Релациите (1) и (2) овозможуваат да се добијат декартовите координати со помош на поларните координати, и обратно.

2. Видовме, на секој комплексен број z му одговара само една точка М на координатната рамнина. При записот на бројот z во неговата алгебарска форма $z = a + bi$, гледаме дека се користат декартовите координати (a, b) на точката М што му одговара на бројот z.

Со примена на формулите (1), комплексниот број z можеме да го запишеме и во следнава форма $z = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)i$, или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{3}$$

Овој запис на комплексниот број z се вика негова **тригонометриска форма.**

Должината r на радиус векторот $\overrightarrow{OM}$ се вика **модул** или **апсолутна вредност** на комплексниот број z и се означува со $|z|$, а радијанската мера на аголот φ, што радиус векторот $\overrightarrow{OM}$ го гради со позитивната насока на Ox - оската, се вика **аргумент** на комплексниот број z и се означува со $\operatorname{Arg} z$. Според тоа, $|z| = r$, $\operatorname{Arg} z = \varphi$, каде што r и φ се поларни координати на точката М, што му одговара на бројот z.

Модулот r на кој било комплексен број z не е негативен реален број, при што тој е еднаков на нула само за $z = 0$. Тој е еднозначно определен со положбата на точката М, т.е. за него важи $r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (4)

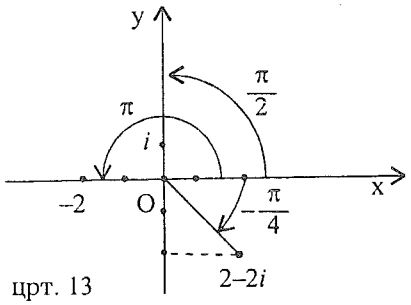
Аголот φ, односно аргументот $\operatorname{Arg} z$, може да ги добие кои било реални вредности - позитивни или негативни, при што позитивните агли имаат насока спротивна на движењето на стрелките на часовникот. Аргумент не е определен само за бројот $z = 0$.

Аргументот на кој било комплексен број $z \neq 0$ има бесконечно многу вредности, кои се разликуваат една од друга за цел број k пати 2π. Значи, ако φ е аргумент на бројот z, тогаш и $\varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ е исто така аргумент на тој број. Од сите тие вредности, обично ја избираме вредноста на φ, што го задоволува условот $-\pi < \varphi \leq \pi$. Таа вредност се вика **главна вредност** на аргументот на бројот z и се означува со $\arg z$, т.е. $-\pi < \arg z \leq \pi$. Меѓутоа, понекогаш главната вредност на φ се дефинира со: $0 \leq \arg z < 2\pi$.

Ако комплексниот број е реален број, т.е. $z = a + 0i = a$, тогаш

$\varphi = 0$ (ако $a > 0$), или $\varphi = \pi$ (ако $a < 0$).

Да заклучиме, множеството од сите комплексни броеви z со исти аргумент φ е полуправа ОМ, која со позитивната насока на Ox - оската зафаќа агол φ, а множеството пак од сите комплексни броеви z со ист модул $|z| = r$ (од порано знаеме) е кружница со центар во почетокот (полот) О и радиус r.



црт. 13

Аргументот и модулот на комплексниот број $z = a + bi \neq 0$ ги одредуваме од формулите (2), при што од знаците на cosφ и sinφ, односно, од знаците на a и b утврдуваме во кој квадрант лежи бараната вредност на аргументот. Понекогаш, при одредувањето на r и φ пожелно е да користиме и соодветен цртеж. На пример, со помош на цртежот 13, лесно добиваме:

$|2-2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$; $arg\,(2-2i) = -\frac{\pi}{4}$

$|i| = |0+i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$, $arg\, i = \frac{\pi}{2}$,

$|-2| = 2$, arg(–2) = π. Според тоа: $2 - 2i = 2\sqrt{2}\,[cos(-\frac{\pi}{4}) + (isin(-\frac{\pi}{4})]$,

$i = cos\,\frac{\pi}{2} + isin\,\frac{\pi}{2}$, $\qquad -2 = 2(cos\pi + isin\pi)$

Пример 1. Комплексниот број $z = 1 + i\sqrt{3}$ да го запишеме во тригонометриска форма.

Решение: Со помош на формулите (2) добиваме

$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$, $sin\,\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos\,\varphi = \frac{1}{2}$.

Оттука $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Значи: $1 + i\sqrt{3} = 2(cos\,\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3})$.

Пример 2. Да се претстави во тригонометриска форма комплексниот број:

а) $z = -2\,(\sin\frac{\pi}{5} - i\cos\frac{\pi}{5})$, б) $w = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{3}{4}\pi)$.

Решение: а) Комплексниот број z не е зададен во тригонометриска форма, затоа што модулот на тој број не може да биде (–2), и затоа што коефициентот на имагинарниот дел во заградата е $-\cos\frac{\pi}{5}$, а не $\sin\frac{\pi}{5}$. Да го претставиме даденият број z прво в о видот $z = 2\,(-\sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5})$. За да го претставиме бројот z во тригонометриска форма, за негов аргумент треба да се најде таков агол φ, за кој ќе биде: $\cos\varphi = -\sin\frac{\pi}{5}$, $\sin\varphi = \cos\frac{\pi}{5}$.

Земајќи во предвид дека аголот φ е во II квадрант и за него функцијата преминува во кофункција, тогаш не е тешко да утврдиме дека $\varphi = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}=\frac{7\pi}{10}$.

Навистина, $cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5})=-\sin\frac{\pi}{5}$, $\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5})=\cos(\frac{\pi}{5})$.

Значи, бројот z во тригонометриска форма ќе гласи:

$$z=2\,(\cos\frac{7\pi}{10}+i\sin\frac{7\pi}{10}).$$

б) Комплексниот број w не е зададен во тригонометриска форма затоа што под знаците на cos и sin не стои ист агол φ . Овде наидуваме на потешкотии кај кои во најголем број случаи (при преминот од алгебарска во тригонометриска форма на комплексниот број, и обратно) е невозможно според дадените вредности на синусот и косинусот да се одреди точно аголот φ, а за даден агол да се напишат точните вредности на неговиот синус и косинус. Ова е еден од таквите случаи.

3. Бидејќи е $\cos\varphi=\cos(\varphi+2k\pi)$, $\sin\varphi=\sin(\varphi+2k\pi)$, затоа тригонометриската форма (3) на комплексниот број z, може да се запише и во видот:

$$z=r\,[\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)],\ k\in\mathbb{Z} \qquad (5)$$

Оттука следува дека: Два комплексни броја $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ претставени во тригонометриска форма

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$$

се еднакви, ако и само ако:

$$r_1=r_2 \text{ и } \varphi_1=\varphi_2+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \qquad (6)$$

За модулите и аргументите на два конјугирано комплексни броја z и $\bar{z}$ важат релациите: $\bar{r}=r, \bar{\varphi}=-\varphi$, односно,

$$|\bar{z}|=|z|,\ arg\ \bar{z}=-arg\ z.$$

Значи, тригонометриската форма на конјугирано комплексниот број $\bar{z}$ на бројот $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, ќе гласи:

$$\bar{z}=r[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]=r(\cos\varphi-i\sin\varphi). \qquad (7)$$

ЗАДАЧИ

1. Одреди го модулот и аргументот на комплексните броеви:

$z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_4 = 2 + i\sqrt{12}$, $z_5 = 1 + i$.

2*. Претстави го во тригонометриска форма комплексниот број:

а) $z_1 = 1 - i\,\mathrm{tg}\alpha$, б) $z_2 = 1 + \sin\alpha + i\cos\alpha$, в) $z_3 = -3(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6})$.

3. Претстави ги комплексните броеви во алгебарска форма:

а) $3(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$, б) $8(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$.

4*. Претстави ги во тригонометриска форма броевите:

а) $-i$, б) $3i$, в) $2 + 2i$, г) $3\cos\frac{\pi}{6} - 3i\sin\frac{\pi}{6}$ д) $\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}$.

5. Даден е бројот $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, претстави ги во тригонометриска форма броевите: $\bar{z}$ и z^{-1}.

6. Утврди, кој услов е потребен за да е $z^2 = (\bar{z})^2$.

7. Одреди го множеството на сите точки $z = x + yi$ од комплексната рамнина, што ги задоволуваат условите:

а) $0 < |z| \le 3$, б) $arg\, z = \frac{\pi}{4}$, в) $|z| = 1$, г) $0 \le arg\, z \le \frac{\pi}{2}$, д) $0 \le |z| \le 5$ и $arg\, z \le \pi$.

§5. ОПЕРАЦИИ СО КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ ВО ТРИГОНОМЕТРИСКА ФОРМА

5.1. МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Множењето и делењето на комплексните броеви многу се поедноставува, ако се зададени во тригонометриска форма.

Нека $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ (1)

се два комплексни броја зададени во тригонометриска форма. Тогаш

$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$r_1 r_2 [\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)]$

Од тригонометријата ви се познати формулите:

$\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$

$\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ и според тоа:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]} \quad (2)$$

Ако ги споредиме (1) и (2), ги добиваме равенствата:

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ (3)

$Arg(z_1 \cdot z_2) = Argz_1 + Argz_2$ (4)

Според тоа, **при множењето на комплексните броеви, нивните модули се множат, а аргументите се собираат.**

Равенството (2) лесно може да се прошири и за производ од n множители, т.е. ќе важи:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots r_n [\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)] \quad (5)$$

Пример1. Да го одредиме производот на комплексните броеви:

$$z_1=3(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}),\quad z_2=2\sqrt{2}\ (\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}),\quad z_3=\sqrt{2}\ (\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$$

Решение. $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\,[\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}+\frac{5\pi}{6})] =$

$$= 12(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}) = 12[\cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{3})] =$$

$$= 12(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) = 12(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 6(1 - i\sqrt{3}).$$

Производот на два конјугирано комплексни броја z и $\bar{z}$ ќе биде:

$z \cdot \bar{z} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)] = r^2[(\cos(\varphi - \varphi) + i\sin(\varphi - \varphi)] =$

$r^2(\cos 0 + i\sin 0) = r^2(1 + i0) = r^2$, т.е. $z \cdot \bar{z} = r^2 = |z|^2$.

Оттука, во посебен случај, ако $r = 1$, имаме:

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot (\cos\varphi - i\sin\varphi) = 1} \quad (6)$$

Со аналогна постапка за количникот на комплексните броеви (1) при $z_2 \neq 0$, односно, при $r_2 \neq 0$, добиваме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot [(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \cos\varphi_2 \cdot \sin\varphi_2)]$$

или $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad (7)$$

Оттука: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $Arg(\frac{z_1}{z_2}) = \varphi_1 - \varphi_2 = Argz_1 - Argz_2$

Според тоа, **при делењето на комплексните броеви модулите се делат, а аргументите се одземаат.**

Пример 2. Да се одреди количникот на комплексните броеви:

$$z_1=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}) \text{ и } z_2=\sqrt{2}\,(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})$$

Решение. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{\sqrt{2}}[\cos(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12})+i\sin(\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12})]=$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})=\frac{2}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=1+i$$

Пример 3. Да го одредиме реципрочниот број $\frac{1}{z}$ за бројот $z\neq 0$.

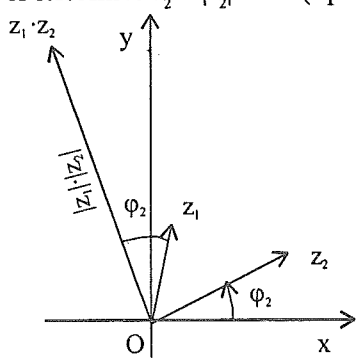
Решение. $\frac{1}{z}=\frac{\cos 0+i\sin 0}{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{1}{r}[(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)]$ т.е.

$$\frac{1}{z}=z^{-1}=r^{-1}[\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)] \tag{8}$$

Оттука: $|z^{-1}|=|z|^{-1}$, $\quad Arg(z^{-1})=-Argz$ (9)

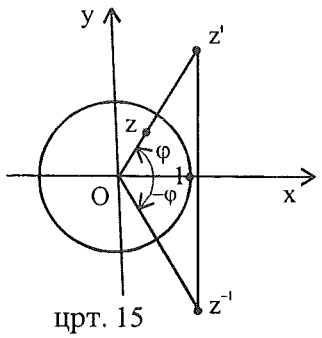
Да се задржиме сега на геометриската интерпретација на множењето и делењето на комплексните броеви.

Имајќи ги предвид формулите (3) и (4), точката што му одговара на производот $z_1\cdot z_2$ на комплексните броеви $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ ќе ја добиеме, ако прво радиус-векторот што одговара на z_1 го ротираме околу почетокот О во позитивна насока за агол $\varphi_2=\mathrm{Arg}z_2$ а потоа модулот на тој вектор $|z_1|=r_1$ го зголемиме $r_2=|z_2|$пати (при $0\le r_2<1$ тоа ќе биде всушност намалување) (црт. 14).



црт. 14

Секој количник $\frac{w}{z}$ можеме да го претставиме како производ $\frac{w}{z}=w\cdot\frac{1}{z}=w\cdot z^{-1}$, затоа доволно е да покажеме како од точката z ја добиваме точката $\frac{1}{z}=z^{-1}$. Точката z^{-1} ќе ја добиеме, ако согласно формулите (8) и (9), од точката z прво преминеме во онаа точка z' која лежи на растојание r^{-1} од почетокот О на истата полуправа на која лежи и точката z (црт. 15), а потоа преминуваме кон точката што со z' е симетрична



црт. 15

спрема реалната оска (црт. 15). Тоа е бараната точка z^{-1}. Очигледно е дека точката z' ќе се совпадне со z, ако и само ако $|z| = 1$. Потоа, ако z' лежи на единичниот круг, тогаш z' ќе лежи надвор од него, и обратно.

5.2. СТЕПЕНУВАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ. МОАВРОВА ФОРМУЛА

Од формулата (5) при $z_1 = z_2 = ... = z_n = z$, следува дека ако $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогаш за секој природен број n важи:

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),} \qquad (10)$$

Според тоа, **при степенувањето на комплексен број z со показател природен број n, модулот се степенува со тој показател, а аргументот се множи со показателот на степенот,** т.е.

$|z^n| = |z|^n = r^n$, $\quad \mathrm{Arg}\,(z)^n = n\mathrm{Arg}z = n\varphi$

Пример 4. Да го одредиме степенот $(1 + i)^{12}$.

Решение. $(1 + i)^{12} = [\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})]^{12} = 2^6(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 64(\cos\pi + i\sin\pi) =$

$= 64(-1 + i \cdot 0) = -64.$

При r = 1 формулата (10) го добива видот:

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi} \qquad (11)$$

Оваа формула игра голема улога во елементарната математика и се вика **Моаврова формула**. Таа важи и кога степеновиот показател е кој било цел негативен број, т.е.

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi), \qquad (12)$$

Значи, имајќи предвид дека $z^{-n} = (z^{-1})^n$, а со примена на Моавровата формула врз бројот z^{-1}, чија тригонометриска форма е дадена со формулата (8), при r = 1 ќе ја добиеме формулата (12).

Со помош на Моавровата формула изразите $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ лесно можат да се изразат преку синус и косинус на аголот φ.

Пример 5. Да ги изразиме $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ преку $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

Решение. При $n = 3$ од формулата (11) добиваме:

$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi \cdot i\sin\varphi + 3\cos\varphi \cdot i^2\sin^2\varphi + i^3\sin^3\varphi$, т.е.

$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi - \sin^3\varphi)$

Но од еднаквоста на два комплексни броја следува и еднаквоста на нивните реални и имагинарни делови. Затоа ќе важат:

$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \cdot \sin^2\varphi$,

$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi \sin\varphi - \sin^3\varphi$.

5.3. КОРЕНУВАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Во §2 покажавме како наоѓаме квадратен корен од комплексен број, зададен во алгебарска форма $z = a + bi$. Меѓутоа, ако се обидеме по таков начин да добиеме кубен, 4-ти корен, или друг некој корен од комплексен број во алгебарска форма, ќе наидеме на компликувана постапка и на некои непремостливи потешкотии. Од друга страна, пак, тригонометриската форма се покажува посебно погодна за добивање на кој било n-ти корен од комплексен број, во кое нешто подолу ќе се увериме.

Да најдеме n-ти корен од комплексен број $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Да претпоставиме дека бараниот n-ти корен од z е некој комплексен број $w = \rho(\cos\Theta + i\sin\Theta)$ со модул ρ и аргумент Θ.

Ако бројот w постои, тој мора да ја задоволува релацијата $w^n = z$, односно $[\rho(\cos\Theta + i\sin\Theta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ или $\rho^n(\cos n\Theta + i\sin n\Theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Оттука, врз основа на еднаквоста на два комплексни броја во тригонометриска форма, следуваат релациите: $\rho^n = r$, $n\Theta = \varphi + 2k\pi$, или

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \Theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \ (k \in \mathbb{Z})$$

За модулот ρ добиваме единствена ненегативна вредност $\rho = \sqrt[n]{r}$, бидејќи $\sqrt[n]{r}$ го разгледуваме како аритметички корен. Меѓутоа за аргументот Θ на бараниот комплексен број w се добиваат бесконечно многу вредности, во зависност од целиот број k. Според тоа, бараниот комплексен број w (n-ти корен од даденият комплексен број z), ќе биде:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\varphi}{n}\right), \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad (13)$$

каде што со w_k ја означуваме онаа вредност на w што му одговара на избраниот цел број k.

Меѓутоа, за различни вредности на k не секогаш ќе добиваме и различни комплексни броеви w_k. Всушност, при зголемување на k за 1, аргументот

$$\Theta_k = \mathrm{Arg}w_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

ќе се зголеми за $\frac{2\pi}{n}$ радијани, а при зголемување на k за n единици, Θ_k ќе се зголеми за 2π. Но бидејќи тригонометриските функции синус и косинус се периодични со најмал период 2π, тогаш ќе биде: $w_{k+n} = w_k$.

Според тоа, формулата (13) определува само n различни комплексни броеви w_k, кои можат да се добијат кога на k му даваме кои било n последователни цели вредности, на пример:

k = 0, 1, 2, ...,n - 1. Така доаѓаме до формулата:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \boxed{w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)} \qquad (14)$$

k = 0, 1, 2, ..., n – 1.

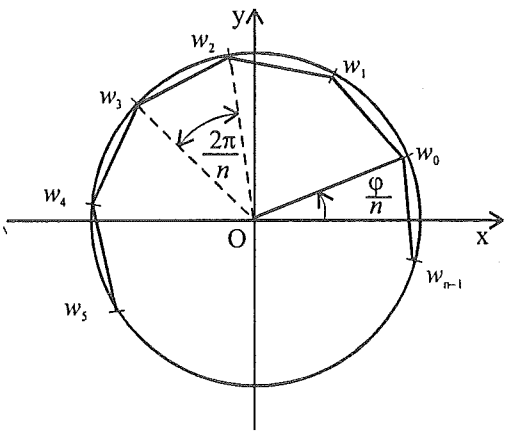
Значи, n-ти корен од кој било комплексен број (реален или имагинарен) има точно n различни вредности, кои се добиваат од формулата (14) за k = 0, 1, 2, ..., n – 1, т.е.

$$\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, w_2, \ldots\ldots, w_{n-1}\}$$

Да заклучиме дека кај n-ти корен од имагинарен број сите негови n вредности се имагинарни броеви, а кај n-тиот корен од реален број a, од сите негови n различни вредности, реални броеви се само два, еден или ниту еден, во зависност од знакот на a и парноста на n. Така на пример, n-тиот корен од позитивен реален број $a > 0$ има две реални вредности (кои се разликуваат само по знакот) ако n е парен број; или само една (позитивна) реална вредност, ако n е непарен број. Додека пак, n-ти корен од негативен реален број има само една (негативна) реална вредност, ако n е непарен број; или нема ниту една реална вредност, ако n е парен број.

Ако z е реален број, тогаш при употребата на симболот $\sqrt[n]{z}$ може да настане недоразбирање; имено, $\sqrt[n]{z}$ во множеството на реалните броеви е еднозначно определен број, но (за $z \neq 0$) во множеството на комплексните броеви тоа е множество од n елементи. За да го избегнеме тоа недоразбирање, често ќе пишуваме $\sqrt[n]{z}$ кога работиме во множеството на комплексните броеви, за разлика од $\sqrt[n]{z}$ кога работиме во множеството на реалните броеви.

Забележуваме дека модулите на сите n вредности на w_k во формулата (14) се еднакви на $\sqrt[n]{r}$, а аргументите: $\frac{\varphi}{n}, \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \frac{\varphi + 4\pi}{n}, \ldots$им се разликуваат еден од друг за по $\frac{2\pi}{n}$. Тоа покажува дека точките, што им одговараат на сите n вредности на n-ти корен од комплексниот број z лежат на една иста кружница со центар во координатниот почеток и радиус еднаков на $\rho = \sqrt[n]{r}$, а кружницата ја делат на n складни лаци (црт. 16).



црт. 16

Според тоа, сите n вредности на n-тиот корен од комплексен број $z \neq 0$ (реален или имагинарен) во комплексната рамнина претставуваат темиња на еден правилен n-аголник што е впишан во кружница со радиус $\sqrt[n]{r}$ и центар во почетокот О.

Пример 6. Да ги одредиме сите вредности на $\sqrt[3]{i}$.

Решение. Знаеме дека $i = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2}$. Тогаш бараните вредности на $\sqrt[3]{i}$ ги добиваме од: $w_k = cos\frac{\frac{\varphi}{2} + 2k\pi}{3} + isin\frac{\frac{\varphi}{2} + 2k\pi}{3}$ за k=0,1,2.

$$w_0 = cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\ i,$$

$$w_1 = cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) = cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6} = cos(\pi - \frac{\pi}{6}) + isin(\pi - \frac{\pi}{6}) =$$

$$= -cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_2 = cos(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) + isin(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) = cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2} = 0 - i \cdot 1 = -i$$

Пример 7. Да ги одредиме сите вредности на $\sqrt[3]{-8}$.

Решение. Бројот –8 има тригонометриска форма 8 (cosπ + isinπ). Бараните вредности на $\sqrt[3]{-8}$ ги добиваме од равенството:

$$w_k = \sqrt[3]{8}(cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + isin\frac{\pi + 2k\pi}{3}),\ \text{k= 0, 1, 2}$$

Тоа се: $w_0 = 2(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$,

$$w_1 = 2(cos\,\pi + isin\,\pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2,$$

$$w_2 = 2(cos\frac{5\pi}{3} + isin\frac{5\pi}{3}) = 2(cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + isin(2\pi - \frac{\pi}{3})) =$$

$$= 2(cos\frac{\pi}{3} - isin\frac{\pi}{3}) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Според тоа, $\sqrt[3]{-8} = \{1 + i\sqrt{3}, -2,\ \ 1 - i\sqrt{3}\}$.

Пример 8. Да ги одредиме сите вредности на $\sqrt[4]{-2 + 2i\sqrt{3}}$.

Решение. Претходно бројот $z=-2+2i\sqrt{3}$ го претставуваме во тригонометриска форма: $r=\sqrt{4+12}=4$, а од $cos\varphi=-\frac{1}{2}$ и $sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ имаме дека $\varphi=\frac{2\pi}{3}$. Значи:

$-2+2i\sqrt{3}=4(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3})$.

Тогаш бараните вредности на коренот, ќе бидат:

$$w_k=\sqrt[4]{4}(cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}+isin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{4}),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

$$w_0=\sqrt{2}(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6})=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i),$$

$$w_1=\sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})+isin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}))=\sqrt{2}(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i),$$

$$w_2=\sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{6}+\pi)+isin(\frac{\pi}{6}+\pi))=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i),$$

$$w_3=\sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2})+isin(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}))=\sqrt{2}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

5.4. *n*-ти КОРЕНИ НА ЕДИНИЦАТА

Од посебен интерес и важност е *n*-тиот корен од бројот 1. Тој како и другите корени има *n* различни вредности.

Согласно равенството (14), а имајќи предвид дека

1 = cos0 + isin0 сите *n* вредности на $\sqrt[n]{1}$ се дадени со:

$$E_k=\sqrt[n]{1}=cos\frac{2k\pi}{n}+isin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n-1 \qquad (15)$$

Реалните вредности на $\sqrt[n]{1}$ се добиваат при k = 0 и $k=\frac{n}{2}$ ако *n* е парен број; и при k = 0, ако *n* е непарен број.

Точките, што им одговараат на сите вредности на $\sqrt[n]{1}$, лежат на кружница со центар во почетокот О и радиус r = 1. Тие кружницата ја делат на *n* еднакви лаци, а една од нив е што му одговара на бројот 1 на Ох-оската. Оттука следува дека точките, што им одговараат на имагинарните вредности на $\sqrt[n]{1}$, се симетрично расположени

спрема реалната оска. Значи, вредностите на $\sqrt[n]{1}$, што не се реални, се по парови конјугирано комплексни.

Квадратниот корен од единица има две вредности: 1 и –1.

Четвртиот корен од единицата има четири вредности: 1, i, –1, $-i$, т.е. множеството од сите 4-ти корени на единицата е: $E_4 = \{1, i, -1, -i\}$. Кубните корени од единицата ги наоѓаме од формулата (15):

$$E_k = cos\frac{2k\pi}{3} + isin\frac{2k\pi}{3},\ \text{k=0, 1, 2.}$$

Освен $\varepsilon_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$ има уште две вредности:

$$\varepsilon_1 = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (16)$$

$$\varepsilon_2 = cos\frac{4\pi}{3} + isin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Овие вредности на кубниот корен $\sqrt[n]{1}$ е пожелно да се запаметат, поради нивното почесто користење понатаму.

Со помош на формулата (15) лесно наоѓаме: множество од сите вредности на 6-тите корени од единицата е:

$$E_6 = \{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

Забележуваме дека секој кубен корен од единицата е и 6-ти корен од единицата, но не секој 4-ти корен од единицата е и 6-ти корен од единицата. Во врска со ова ќе покажеме дека важи следнава:

Теорема [5.1]. ***Секој m-ти корен од единицата е и n-ти корен од единицата, ако m е делител на n,*** т.е. ако $n = m \cdot s$.

Доказ. Ако $n = m{\cdot}s$, каде m, $s \in \mathbb{N}$. Ако α е m-ти корен од единицата, т.е. ако $\alpha^m = 1$, тогаш ќе биде и $\alpha^n = \alpha^{ms} = (\alpha^m)^s = 1^s = 1$.

Меѓутоа, за секој n постојат и такви n-ти корени од единицата, кои не се корени од единица на ниту еден друг корен со показател помал од n. Таквите корени се викаат **примитивни n-ти корени од единица**. За нив ја усвојуваме следнава:

Дефиниција. *Секој n-ти корен на единицата кој не е и m-ти корен на единицата за секој природен број m помал од n, се вика примитивен n-ти корен на единицата.*

На пример, броевите i и $-i$ се примитивни 4-ти корени на единицата, бидејќи тие не се ниту 3-ти, ниту 2-ри корени на единицата.

Постоењето на примитивни n-ти корени на единицата произлегува од формулата (15). За нивно изнаоѓање се повикуваме на следнава важна теорема, што ќе ја прифатиме без доказ.

Теорема [5.2.]. ***Комплексниот број*** $E_k = cos\frac{2k\pi}{n} + isin\frac{2k\pi}{n}$ ***е примитивен n-ти корен на единицата, ако и само ако бројот k е заемно прост со n.***

На пример, бројот $\varepsilon_1 = cos\frac{2\pi}{n} + isin\frac{2\pi}{n}$ е примитивен n-ти корен на единицата, бидејќи k = 1 е заемно прост со секој природен број $n \geq 2$.

Од Т [5.2] следува дека, примитивни n-ти корени на единицата има толку, колку што има природни броеви помали од n и заемно прости со n. Тој број се означува со $\varphi(n)$ и се вика **Ојлерова функција** на пример: $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$.

Теорема [5.3.]. ***Ако ε е примитивен n-ти корен на единицата, тогаш со*** $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, ..., \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n = 1$ ***се исцрпува множеството*** E_n ***од сите n-ти корени на единицата.***

Доказ. Нека ε е примитивен n-ти корен на единицата. Гледаме дека секој од низата $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, ..., \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n$ е n-ти корен на единицата, бидејќи $(\varepsilon^k)^n = (\varepsilon^n)^k = 1^k = 1$.

Треба уште да докажеме дека никои два члена од таа низа не се еднакви. Ако е $\varepsilon^m = \varepsilon^s$ за $s < m < n$, тогаш ќе имаме $\varepsilon^{m-s} = 1$. Меѓутоа, тоа не е можно бидејќи $m - s < n$, а ε е примитивен n-ти корен од единицата. Според тоа, сите броеви од низата $\varepsilon, \varepsilon^2, ..., \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n$ се различни, штд.

Пример 9. Во $E_4 = \{1, i, -1, -i\}$ примитивни се i и $-i$, а 1 и -1 не се примитивни корени. Ако еден (кој било) од примитивните корени: i или $-i$ го означиме со ε, тогаш сите останати 4-ти корени од единицата можеме да ги изразиме како негови степени. На пример, ако $\varepsilon = i$, тогаш: $\varepsilon^2 = i^2 = -1$, $\varepsilon^3 = i^3 = -i$, $\varepsilon^4 = i^4 = 1$; или ако $\varepsilon = -i$, тогаш: $\varepsilon^2 = (-i)^2 = i^2 = -1$, $\varepsilon^3 = (-i)^3 = -i^3 = -(-i) = i$, $(-i)^4 = i^4 = 1$.

Каква важна улога играат n-тите корени на единицата може да се види оттаму што:

Сите вредности на n-ти корен од кој било комплексен број z можеме да ги добиеме, кога една од вредностите на $\sqrt[n]{z}$ се помножи со сите n-ти корени на единицата.

Навистина, нека α е една од вредностите на $\sqrt[n]{z}$ т.е. нека $\alpha^n = z$, а ε нека е примитивен n-ти корен од единицата, т.е. $\varepsilon^n = 1$. Тогаш од $(\alpha\varepsilon)^n = \alpha^n\varepsilon^n = z \cdot 1 = z$ следува дека αε е една од вредностите на $\sqrt[n]{z}$. Множејќи го α со секој од n-тите корени на единицата ќе ги добиеме сите вредности на $\sqrt[n]{z}$, т.е. ќе биде: $\sqrt[n]{z} = \{\alpha, \alpha\varepsilon, \alpha\varepsilon^2, ..., \alpha\varepsilon^{n-1}\}$.

Да го докажеме и следново важно својство:

Теорема [5.4]. ***Множеството*** E_n ***на сите n-ти корени на единицата е затворено множество по однос на операцијата множење.***

Доказ. Ако ε и η се две кои било вредности на n-ти корен од единицата, т.е. $\varepsilon, \eta \in E_n$ и $\varepsilon^n = 1$, $\eta^n = 1$. Тогаш: од $(\varepsilon\cdot\eta)^n = \varepsilon^n \cdot \eta^n = 1 \cdot 1 = 1$ следува дека $\varepsilon\eta \in E_n$.

ЗАДАЧИ

1. Одреди ги производот и количникот на комплексните броеви:

а) $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\cdot\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$, б) $(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}):\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$

2. Да се одредат броевите:

а) $z_1\cdot z_2$, б) $\frac{z_1}{z_2}$, в) $\frac{z_2}{z_1}$, ако $z_1 = 2(\cos 75^0 + i\sin 75^0)$, $z_2 = \sqrt{2}\ (\cos 45^0 + i\sin 45^0)$.

3. Како се променува модулот и аргументот на комплексниот број z, ако тој: а) се помножи со i, б) се подели со i.

4. Даден е комплексен број $z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})$. Одреди ги броевите: а) z^4, б) z^6, в) z^{10}.

5. Одреди ја вредноста на изразот: а) z^3 за $z = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, б) z^4+1 за $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

6. Упрости ги изразите: а) $(1+i\sqrt{2})^5-(1-i\sqrt{2})^5$ б) $(\sqrt{3}+i)^6-(\sqrt{3}-i)^6$, в) $(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$.

7. Докажи дека броевите $(a+bi)^n$ и $(a-bi)^n$, $n\in\mathbb{N}$ се конјугирано комплексни.

8*. Одреди ги вредностите на корените: а) $\sqrt[4]{\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}}$, б) $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$, в) $\sqrt[3]{-4\sqrt{3}-4i}$, г) $\sqrt{2+i\sqrt{2}}$, д) $\sqrt{1-12i\sqrt{2}}$.

9. Пресметај: а) $i^{\frac{3}{4}}$, б) $(\sqrt{3}+i)^{\frac{2}{3}}$, в) $(\sqrt{3}-i)^{\frac{4}{5}}$.

10. Пресметај: а) $[\sqrt{3}(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)]^{-3}$, б) $\sqrt[4]{-16}$, в) $\sqrt[6]{-1}$.

11*. Изврши ги назначените операции со комплексните броеви:

а) $(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^{10}$, б) $(\frac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}})^{30}$ в) $\sqrt{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

12. Одреди ги комплексните броеви, кои им одговараат на темињата на квадрат, што е впишан во кружница со радиус $r=\sqrt{2}$ и центар во координатниот почеток, ако едно теме му лежи во точката (1, 1)

13. Одреди го множеството од сите вредности на $\sqrt[8]{1}$.

14*. Докажи дека количникот на кои било две вредности на $\sqrt[n]{1}$ е пак вредност на $\sqrt[n]{1}$.

15*. Докажи дека реципрочната вредност на која било вредност на $\sqrt[n]{1}$ е пак вредност на $\sqrt[n]{1}$.

16. Покажи дека за вредностите на: $\sqrt[3]{1}$ ($\varepsilon_0=1$, ε_1 и ε_2). важат релациите:

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2, \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\varepsilon_2}, \quad \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$$

17*. Правилен шестаголник впишан е во кружница со центар во координатниот почеток и радиус r = 1. Ако едно теме му лежи на: а) реалната оска, б) имагинарната оска; одреди ги комплексните броеви, што им одговараат на останатите темиња на шестаголникот.

Глава II

ПОЛИНОМИ ОД ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

§ 6. ОСНОВНИ ПОИМИ ЗА ПОЛИНОМИ

1. Дадени се изразите:

$(x-1)(x+1)^2$; $(x^2-1)(x+1)$,

$(x^2+2x+1)(x-1)$; $x^4-3(x^3+1)+2(x-1)^2$.

Сите тие се цели рационални алгебарски изрази на променливата x. По ослободување од заградите и сведување на сличните членови, лесно се покажува дека секој од првите три изрази е идентичен со целиот рационален израз:

x^3+x^2-x-1, а четвртиот е идентичен со изразот:

$x^4-3x^3+2x^2-4x-1$.

Дефиниција 1. *Изразот*

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0 \qquad (1)$$

каде што $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ се дадени броеви, n е природен број, а x-променлива (аргумент) е цел алгебарски израз, кој уште се вика ***полином од n-ти степен по x.***

Броевите $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ се викаат **коефициенти** на полиномот, или поточно - коефициенти пред соодветните степени на променливата x во полиномот (1). Согласно дефиницијата, полиномот (1) е од n-ти степен, само при услов $a_0 \neq 0$. Затоа велиме дека бројот a_0 е **водечки** (или **најстар**) **коефициент** на полиномот (1), а коефициентот a_n се вика **слободен член**. Ако $a_0 = 1$, тогаш за полиномот велиме дека е во **сведен вид**.

За скратено означување на полиномите од променливата x, често ги користиме симболите: $P(x)$, $Q(x)$, $f(x)$, $g(x)$, или $P_n(x)$, $Q_n(x)$, $f_n(x)$, итн. ако сакаме да истакнеме дека тој е од n-ти степен. Така на пример, равенството

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0 \qquad (2)$$

ќе го сфаќаме и читаме како: „$P(x)$ е полином што стои на десната страна од (2)“, или „полиномот (1) е означен со $P(x)$“. Значи, знакот „=“ тука ни појаснува само што е означено со $P(x)$.

Полиноми од трет, втор и прв степен од x-соодветно се:
$P_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$, $(a_0 \neq 0)$,
$P_2(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$, $(a_0 \neq 0)$, $P_1(x) = a_0x + a_1$, $(a_0 \neq 0)$.

Најнискиот степен на еден полином од x би требало да е прв, меѓутоа, во работата со полиноми, посебно кај операциите со нив, целисходно е да сфатиме дека имаме и полиноми од нулти степен. $P_0(x)$ - полином од нулти степен ќе го викаме секој број различен од нула. Навистина, бројот $a_n \neq 0$ може да се запише во видот a_nx^0, бидејќи $x^0 = 1$. Значи: $P_0(x) = a_0$, $(a_0 \neq 0)$.

Од истите причини (при операциите со полиноми) бројот нула ќе го викаме **нула-полином** или **нулти полином** (не мешај го со полиномот од **нулти степен**). Тоа е единствен полином, на кој не му припишуваме никаков степен. Затоа полиномот (1) кај кој е $a_0 \neq 0$ се вика уште **ненула полином**. Меѓутоа, под зборот полином секогаш ќе подразбираме ненула полином, без тоа посебно да го нагласуваме.

По однос на коефициентите на полиномот (1) со дефиницијата 1 ставен е само еден услов: $a_0 \neq 0$, што значи дека некои (или сите останати) коефициенти можат да бидат и еднакви на нула. Така на пример, во полиномот од четврти степен $5x^4 + 1$ сите коефициенти, освен водечкиот и слободниот член се еднакви на нула. Тој всушност, би требало да гласи: $5x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$.

Да забележиме дека полиномот од n-ти степен, покрај неговото запишување во видот (2), т.е. по опаднувачките степени на променливата x; понекогаш ќе ни биде допуштено да го запишуваме по растечките степени на x:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n, \quad (a_n \neq 0) \tag{3}$$

2. Ако a_0, a_1, a_2, ..., a_n се реални броеви, полиномот (1) односно (3) се вика **полином со реални коефициенти,** или **реален полином**. Ако барем еден од коефициентите a_0, a_1, a_2, ..., a_n е комплексен број, тогаш полиномот (1) се вика **полином со комплексни коефициенти**, или **комплексен полином**.

Ако сите коефициенти на еден полином се цели броеви, тој се вика **полином со цели коефициенти или целоброен полином**, а ако сите коефициенти му се рационални броеви, тогаш тој е **полином со рационални коефициенти** или **рационален полином**. Очигледно е дека секој полином со цели коефициенти, во исто време е и со рационални, па дури и со реални коефициенти, но обратното не е.

Даден полином можеме да го разгледуваме во различни бројни множества. При тоа: ако полиномот $P(x)$ сакаме да го разгледуваме над множеството на целите броеви $\mathbb{Z}$, тогаш тој мора да е со цели коефициенти и променливата x може да зема вредности само од множеството на целите броеви, т.е. $x \in \mathbb{Z}$. Ако пак полиномот $P(x)$ го разгледуваме **над полето на рационалните** (односно **реалните**) **броеви**, тогаш неговите коефициенти треба да се дадени рационални (односно реални) броеви и променливата x може да зема кои било рационални (односно реални) вредности.

Тоа значи, дека даден полином $P(x)$ со цели коефициенти, освен над множеството на целите броеви можеме да го разгледуваме и во полето на рационалните и во полето на реалните броеви, па дури и над полето на комплексните броеви.

3. Нека $P(x)$ е некој полином на променливата x, a c - некој број од полето над кое го разгледуваме полиномот $P(x)$. Со $P(c)$ го означуваме бројот

$$a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_{n-1}c + a_n,$$

што се добива кога во изразот - полиномот (1) променливата x се замени со c и се извршат сите назначени операции. Бројот $P(c)$ се вика **вредност на полиномот $P(x)$ при $x = c$,** или вредност на $P(x)$ во точката c. Процесот на одредување на бројот $P(c)$ се вика **пресметување** (или **наоѓање**) **вредноста** на полиномот $P(x)$ за $x = c$ (или во точката c).

Секој број (или точка) $x = c$, за кој полиномот $P(x)$ добива вредност нула, т.е. $P(c) = 0$, се вика **нула на полиномот** $P(x)$. На пример, бројот $x = 2$ е нула на полиномот $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$, бидејќи за $x = 2$ е $P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 6 = 0$.

§7. ХОРНЕРОВА ШЕМА

1. Пресметувањето на вредноста на полиномот $P(x)$ за $x = c$ преку равенството:

$$P(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \ldots + a_{n-1}c + a^n \qquad (1)$$

е лесно само кога c е еден од броевите: $-2, -1, 0, 1, 2$. При голем степен n и големи коефициенти $a_0, a_1, \ldots, a_n$, директното пресметување на $P(c)$ преку равенството (1) е непрактично.

Сега ќе изложиме една класична шема-табела за побрзо и поедноставно пресметување вредноста на полиномот за која било вредност на променливата $x = c$, таканаречена **Хорнерова шема**.

Нека е даден еден полином од петти степен:

$$P(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$$

Бројот $P(c)$ го наоѓаме со помош на следнава шема:

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
$c \rightarrow$	a_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	$= P(c)$

каде што b_1, b_2, b_3, b_4 и b_5 ги одредуваме еден по друг со помош на равенствата:

$$\begin{aligned} c \cdot a_0 + a_1 &= b_1 \\ c \cdot b_1 + a_2 &= b_2 \\ c \cdot b_2 + a_3 &= b_3 \\ c \cdot b_3 + a_4 &= b_4 \\ c \cdot b_4 + a_5 &= b_5 \text{ при што } P(c) = b_5 \end{aligned} \qquad (2)$$

Доказ. Равенствата (2) да ги помножиме (двете страни) соодветно со c^4, c^3, c^2, c, 1, па добиваме:

Потоа, со собирање на левите и десните страни на овие равенства добиваме:

$a_0c^5 + a_1c^4 = b_1c^4$
$b_1c^4 + a_2c^3 = b_2c^3$
$b_2c^3 + a_3c^2 = b_3c^2$
$b_3c^2 + a_4c = b_4c$
$b_4c + a_5 = b_5$

$a_0c^5 + a_1c^4 + a_2c^3 + a_3c^2 + a_4c + a_5 = b_5$, а тоа е точно бараната вредност P(c) на полиномот P(x) за $x = c$.

За значењето на броевите a_0, b_1, b_2, b_3 и b_4 од втората редица на шемата (2) ќе стане збор во една од наредните лекции.

Пример 1. Да ја одредиме вредноста на полиномот
P(x) = $x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 12x + 8$ за $x = 4$.

Решение. Со користење на Хорнеровата шема добиваме:

	1	5	–7	12	8
4	1	9	29	128	520

,т.е. P(4) = 520,

а исто и директно:

P(4) = $4^4 + 5 \cdot 4^3 - 7 \cdot 4^2 + 12 \cdot 4 + 8 = 256 + 320 - 112 + 48 + 8 = 632 - 112 = 520$.

Пример 2. Да одредиме P(3) за полиномот:
P(x) = $x^6 - 15x^4 + 8x^3 + 51x^2 - 72x + 27$

Решение.

	1	0	–15	8	51	–72	27
3	1	3	–6	–10	21	–9	0

Добиваме дека P(3) = 0. Тоа значи дека, полиномот P(x) во точката $x = 3$ се анулира, или $x = 3$ е нула на дадениот полином.

Пример 3. Да ја одредиме вредноста на полиномот
P(x) = $x^4 + 2ix^3 + 3 = x^4 + 2ix^3 + 0x^2 + 0x + 3$ за $x = 1 - i$.

Решение.

	1	2i	0	0	3
$1-i$	1	$1+i$	2	$2-2i$	$3-4i$

Така добиваме дека: P($1 - i$) = $3 - 4i$.

2. Кога сме кај вредностите, кои ги добива даден полином, од посебен интерес се таканаречените **целовредностни полиноми**.

Дефиниција. *Полиномот P(x) се вика целовредностен, ако за секоја цела вредност на променливата x, и тој добива цели вредности, т.е.*
ако за секој $n \in \mathbb{Z}$ *важи* $P(n) \in \mathbb{Z}$.

Очигледно е дека секој целоброен полином е целовредностен, но обратното не е точно.

Пример 4. Полиномот $P(x) = \frac{1}{6}\cdot x^3 - \frac{1}{6}\cdot x$ не е целоброен, но тој е целовредностен.

Доказ Пред сé имаме: $P(0) = 0 \in \mathbb{Z}$. Со разложување на множители, добиваме:

$$P(x) = \frac{1}{6}\cdot x\,(x^2 - 1) = \frac{1}{6}\cdot(x-1)\cdot x\cdot(x+1)$$

Очигледно е дека за секој $x = n \in \mathbb{Z}$, производот на три сукцесивни цели броеви $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ секогаш е делив со 2 и со 3, па според тоа и со 6.

Значи, $P(x) = \frac{1}{6}(x-1)\,x\,(x+1)$ добива цели вредности за секој $x = n \in \mathbb{Z}$.

За да утврдиме дали даден полином $P(x)$ е цело вредностен или не, често ја користиме следнава:

Теорема [7.1]. Полиномот $P(x)$ од n-ти степен е целовредностен, ако и само ако броевите $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(n)$ се цели броеви.

Оваа теорема ќе ја прифатиме без доказ. При нејзиното користење, наместо вредностите $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ можеме да земеме произволна редица од вредности на $P(x)$ за $n+1$ последователни целивредности на променливата x.

Пример 4. Полиномот $P(x) = \frac{1}{6}\cdot x(x+1)\,(2x+1)$ од трети степен е целовредностен, бидејќи вредностите

$$P(0) = 0,\ P(1) = 1,\ P(2) = \frac{1}{6}\cdot 2\cdot 3\cdot 5 = 5 \text{ и } P(3) = \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 4\cdot 7 = 14 \text{ се цели броеви.}$$

ЗАДАЧИ

1. Директно одреди ја вредноста на полиномот:
а) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ за $x = -2$,
б) $Q(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 5x + 10$ за $x = 1$,
в) $R(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ за $x = 2$

2. Одреди ја вредноста на полиномот со помош на Хорнеровата шема:
а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 5$ за $x = -3$,
б) $g(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^3 - 3x + 1$ за $x = 5$.

3. Провери дали $x_1 = -1$ и $x_2 = 4$ се нули на полиномот
$P(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$.

4*. Со помош на Хорнеровата шема одреди ја вредноста на полиномот
$P(x) = x^5 + (1+2i)x^4 - (1+3i)x^2 + 7$ за: а) $x = 1$, б) $x = i$, в) $x = -i$, г) $x = 2 - i$.

5. Докажи дека полиномот: а) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$,

б) $Q(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x$ е целовредностен.

6*. Провери дали полиномот е целовредностен:

а) $P(x) = \frac{1}{30}x(x+1)(2x+1)(x^2+x+3)$,

б) $f(x) = \frac{1}{6}x(2x-1)(x^2-1)$,

в) $g(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{6}x(x-3)(x+1)$

§8. ИДЕНТИЧНОСТ НА ПОЛИНОМИТЕ

8.1. ПОЛИНОМ, ИДЕНТИЧКИ ЕДНАКОВ НА НУЛА

Изразот $0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0$, (1)

кој има структура на полином $P(x)$ од n-ти степен, очигледно е дека за секоја вредност на x, добиваме вредност нула. Затоа за изразот (1) велиме дека за секоја вредност на x, добива вредност нула. Затоа за изразот (1) велиме дека тој е **полином идентички еднаков на нула** или **нула-полином** и пишуваме $P(x) \equiv 0$.

Ќе докажеме дека важи следнава:

Теорема [8.1]. ***Полиномот***

$P(x) = a_0x^n + a_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ (2)

е идентички еднаков на нула, односно е нула полином, ако и само ако сите негови коефициенти се еднакви на нула, т.е.

$a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$

Доказ. *Потребен услов:* $P(x) \equiv 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$

Нека полиномот $P(x)$ е еднаков на нула за секој x, тогаш тој е еднаков на нула и за $x = 0$, па добиваме:

$P(0) = 0 + a_n = 0$, а оттука $a_n = 0$.

Полиномот $P(x)$ значи се сведува на:

$P(x) = x(a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + a_2x^{n-3} + \ldots + a^{n-1}) \equiv 0$.

Производот на десната страна за да би имал вредност нула за секој x, мора да е:

$a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \equiv 0$ (3)

Бидејќи полиномот (3) треба да е еднаков на нула за секој x, затоа тој ќе биде еднаков на нула и за $x = 0$, од каде имаме:

$0 + a_{n-1} = 0$, односно, дека $a_{n-1} = 0$

Продолжувајќи така, може да се докаже дека и другите коефициенти $a_{n-2}, a_{n-3}, \ldots, a_0$ се еднакви на нула, штд.

Доволен услов: $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0 \Rightarrow P(x) \equiv 0$.

Очигледно е дека вредноста на нула-полиномот $0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x + 0$ за секоја вредност на x е еднаква на нула.

Според тоа, $P(x) \equiv 0$, штд.

Теоремата [8.1] всушност, утврдува дека, ниту еден полином, претставен во каноничен вид, освен нула-полиномот не може да биде идентичен еднаков на нула.

8.2. ИДЕНТИЧНИ ПОЛИНОМИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

За полиномите

$$A(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \ (a_0 \neq 0) \quad (4)$$

$$B(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m, \ (b_0 \neq 0) \quad (5)$$

велиме дека се идентично еднакви и пишуваме $A(x) \equiv B(x)$, ако тие добиваат еднакви вредности за која било вредност на x.

Симболот „$\equiv$“ наместо „ = “ ќе го користеме за да не дојде до мешање на поимите „еднакви вредности“ и „идентични полиноми“. За идентичните полиноми важи следнава:

Теорема [8.2.]. ***Два полинома $A_n(x)$ и $B_m(x)$ се идентични, ако и само ако тие имаат еднакви степени и коефициентите на сличните членови (пред еднаквите степени на x) се соодветно еднакви***, т.е.

$$n = m, a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_m \quad (6)$$

Тоа значи дека условите (6) се и потребен и доволен услов за да биде

$$A_n(x) \equiv B_m(x).$$

Доказ. а) Потребен услов:

$A_n(x) \equiv B_m(x) \Rightarrow (n = m), a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_m)$

Ако $A_n(x) \equiv B_m(x)$, тогаш разликата $R(x) = A_n(x) - B_m(x) \equiv 0$ е нула полином. Полиномите $A_n(x)$ и $B_m(x)$ не можат да имаат различни степени, бидејќи ако $n \neq m$, тогаш водечкиот коефициент на полиномот $R(x)$ би бил еден од броевите a_0 или b_0. Значи, еден од тие коефициенти ќе биде еднаков на нула; а тоа противречи на претпоставката дека $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$. Според тоа: $n = m$, па ќе биде:

$$R(x) = (a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \ldots + (a_n - b_n) \equiv 0 \quad (7)$$

Но бидејќи $R(x)$ е нула полином, затоа од (7) следува:

$$\begin{cases} a_0 - b_0 = 0 \\ a_1 - b_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n - b_n = 0 \end{cases}, \text{ односно } \begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 \\ \cdots\cdots \\ a_n = b_n \end{cases}, \text{ штд.}$$

б) Д о в о л е н у с л о в: Ако полиномите $A(x)$ и $B(x)$ имаат еднакви степени и коефициентите на сличните членови им се соодветно еднакви, тогаш очигледно е дека тие два полинома потполно се совпаѓаат, па според тоа тие се идентично еднакви, штд (што треба да се докаже).

З А Д А Ч И

1. Покажи дека важат идентитетите:
   а) $(x-1)(x+1)(x^2+1) \equiv x^4-1$
   б) $x^4+x^2+1 \equiv (x^2+x+1)(x^2-x+1)$,
   в) $x^6-1 \equiv (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.
2. Одреди ги непознатите коефициенти, така што да важат идентитетите:
   а) $a_0x^2-2x+1 \equiv b_0x^3-4x^2+b_2x+b_3$,
   б) $Ax^3+3x^2+Cx-5 \equiv 2x^3+Dx^2-x+F$
   в) $(x-a)^2+c \equiv x^2-6x+7$

§ 9. ОПЕРАЦИИ СО ПОЛИНОМИ

9.1. СОБИРАЊЕ И МНОЖЕЊЕ НА ПОЛИНОМИ

1. Нека $A_n(x)$ и $B_m(x)$ се два полинома со реални или комплексни коефициенти. Од практични причини да ги запишеме по растечките степени на променливата x:

$$A_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,\ a_n \neq 0 \quad (1)$$

$$B_m(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m,\ b_m \neq 0 \quad (2)$$

Дефиниција 1. *Збир на полиномите $A_n(x)$ и $B_m(x)$, ако, на пример, $n \geq m$, ќе го викаме полиномот:*

$$A_n(x) + B_m(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1} + c_nx^n, \quad (3)$$

чии коефициенти се добиваат со собирање на коефициентите на $A_n(x)$ и $B_m(x)$ што стојат пред еднаквите степени на x, т.е.

$$c_i = a_i + b_i,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n \quad (4)$$

при што при $n > m$, коефициентите $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n$ ќе сметаме дека се еднакви на нула.

Очигледно е дека степенот на збирот $A_n(x) + B_m(x)$ ќе биде еднаков на n, ако $n > m$, но при $n = m$ тој во специјален случај може да биде и помал од n, кога е $b_n = -a_n$.

Дефиниција 2. *Производ на полиномите (1) и (2) ќе го викаме полиномот*

$$A_n(x) \cdot B_m(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + \ldots + d_{n+m-1}x^{n+m-1} + d_{n+m}x^{n+m} \qquad (5)$$

чии коефициенти ги определуваме на следниов начин:

$$d_i = \sum_{k+s=i} a_k b_s\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n+m-1, n+m \qquad (5')$$

Да забележиме дека согласно (5') коефициентот d_i е еднаков на збирот од производите на оние коефициенти на полиномот $A_n(x)$ и $B_m(x)$, на кои збирот од индексите им е еднаков на i.

Затоа: $d_0 = a_0b_0$, $d_1 = a_0b_1 + a_1b_0$, $d_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$, . . ., $d_{n+m} = a_nb_m$.

Бидејќи $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$, затоа ќе биде и $a_n \cdot b_m \neq 0$, а оттука следува дека:

Степенот на производот на два ненула - полиноми е еднаков на збирот од степените на полиномите - множители.

Од дефинициите 1 и 2 следува дека операциите собирање и множење на полиномите всушност се сведуваат на операции со нивните коефициенти. На пример, собирањето на два полинома се сведува на собирање на коефициентите при еднаквите степени на x, а множењето - на множење и собирање на нивните коефициенти.

Оттука можеме да заклучиме дека:

Основните својства на собирањето и множењето на реалните (или комплексни) броеви важат и за полиномите, т.е. важат идентитетите:

$A + B = B + A$; $\qquad AB = BA$

$(A + B) + C = A + (B + C)$; $\qquad (AB)C = A(BC)$

$(A + B)\,C = AC + BC$,

каде што A, B и C се произволни (поради краткост променливата x е испуштена) полиноми.

Во множеството на сите полиноми на променливата x, при операцијата собирање на полиноми, улогата на неутрален елемент ја игра бројот нула, односно нула - полиномот. Така за секој полином $P(x)$, важи:

$$P(x) + 0 = 0 + P(x) = P(x) \qquad (6)$$

Потоа, во множеството на сите полиноми од x, за секој полином $P(x)$ постои на него спротивен полином $-P(x)$, за кој важи

$$P(x) + (-P(x)) \equiv 0 \qquad (7)$$

Нека $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

е даден полином, а на него спротивен нека е полиномот

$-P(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$

Него го одредуваме од условот (7), т.е.

$P(x) + (-P(x)) = (a_0 + b_0)x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + \ldots + (a_n + b_n) \equiv 0$

од каде:

$$\begin{array}{ll} a_0 + b_0 = 0 & b_0 = -a_0 \\ a_1 + b_1 = 0 & b_1 = -a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \text{односно} & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n + b_n = 0 & b_n = -a_n \end{array}$$

Според тоа, полиномот $-P(x)$, што е спротивен на полиномот $P(x)$, ќе биде

$$-P(x) = -a_0x^n - a_1x^{n-1} - \ldots - a_n \qquad (8)$$

Тој се добива кога сите коефициенти на $P(x)$ се заменат со нивните спротивни броеви.

Одземањето на полиноми го дефинираме како обратна (инверзна) операција на собирањето на полиноми, имено:

Разликата на полиномите $A(x) - B(x)$ се вика полиномот $R(x)$ што го задоволува условот $B(x) + R(x) \equiv A(x)$.

Ако кон двете страни на тој идентитет додадеме $-B(x)$ ќе добиеме

$R(x) = A(x) + (-B(x))$

Според тоа, одземањето на полиномот $B(x)$ го заменуваме со дадавање на неговиот спротивен полином $-B(x)$.

Да забележиме дека улогата на **единица** (неутрален елемент) при множењето на полиноми ја игра бројот 1, разгледуван како полином од нулти степен. Да видиме уште дали за секој полином $P(x)$ постои негов обратен (инверзен) елемент $P^{-1}(x)$, за кој важи

$$P(x) \cdot P^{-1}(x) = 1 \qquad (9)$$

Ќе покажеме дека, полиномот $P(x)$ има свој инверзен елемент $P^{-1}(x)$, ако и само ако $P(x)$ е полином од нулти степен. Навистина, ако $P(x) = a_0 \neq 0$, тогаш неговиот инверзен елемент е бројот $a_0^{-1} = \frac{1}{a_0}$.

Ако, пак, полиномот P(x) има степен $n \geq 1$, тогаш левата страна на равенството (9), ако постои полиномот $P^{-1}(x)$, ќе има степен непомал од n, додека пак десната страна е полином од нулти степен. Значи, таков полином $P^{-1}(x)$ не постои ако $n \geq 1$. Оттука следува дека за операцијата множење на полиноми не постои обратната операција делење. Од изложеното досега заклучуваме дека важи:

Теорема [9.1]. ***Множеството полиноми на променливата x со реални (или комплексни) коефициенти со операциите собирање и множење во него, образува прстен.***

Оттука и големата сличност (аналогија) што ја забележуваме помеѓу множеството полиноми и множеството цели броеви.

2. При конкретните пресметувања на производот на два полинома корисно е да се користат и табели. На пример, да го одредиме производот на полиномите:

$A(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ и $B(x) = b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$.

За $A(x) \cdot B(x)$ ја формираме следнава табела од нивните коефициенти:

	b_0	b_1	b_2	b_3		
a_0	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	a_0b_3		
a_1		a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	
a_2			a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3

Забележуваме дека во секоја колона од табелата се наоѓаат само производите на оние коефициенти на $A(x)$ и $B(x)$ на кои збирот од индексите им е ист. Тоа е во согласност со (5), па така со сумирање по колони, добиваме:

$A(x) \cdot B(x) = a_0b_0x^5 + (a_0b_1 + a_1b_0)x^4 + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^3 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1)x^2 + (a_1b_3 + a_2b_2)x + a_2b_3$.

За производот $B(x)$ табелата ќе го има видот:

	a_0	a_1	a_2			
b_0	b_0a_0	b_0a_1	b_0a_2			
b_1		b_1a_0	b_1a_1	b_1a_2		
b_2			b_2a_0	b_2a_1	b_2b_2	
b_3				b_3a_0	b_3a_1	b_3b_2

Потоа со собирање по колони го добиваме истиот резултат.

Пример 1. Да ги помножиме полиномите:
$A(x) = x^3 + 5x + 2$ и $B(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 7$.

Решение. Бараниот производ $A(x) \cdot B(x)$ лесно го одредуваме со помош на табелава.

	2	–3	4	0	7			
1	2	–3	4	0	7			
0	0	0	0	0	0			
5			10	–15	20	0	35	
2				4	–6	8	0	14
	2	–3	14	–11	21	8	35	14

$A(x) \cdot B(x) = 2x^7 - 3x^6 + 14x^5 - 11x^4 + 21x^3 + 8x^2 + 35x + 14$

Полиномите множители можат да бидат подредени и по растечките степени на x: $A(x) = 2 + 5x + 0x^2 + x^3$, $B(x) = 7 + 0x + 4x^2 - 3x^3 + 2x^4$. Тогаш и производот $A(x) \cdot B(x)$ ќе биде подреден по растечките степени на променливата x.

	7	0	4	–3	2			
2	14	0	8	–6	4			
5		35	0	20	–15	10		
0			0	0	0	0	0	0
1				7	0	4	–3	2
	14	35	8	21	–11	14	–3	2

$A(x) \cdot B(x) = 14 + 35x + 8x^2 + 21x^3 - 11x^4 + 14x^5 - 3x^6 + 2x^7$

Често се случува даден полином $P(x)$ да треба да го помножиме со биномот $x + \alpha$. За одредување на производот $(x + \alpha) \cdot P(x)$ наместо табелата:

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n	
1	a_0	a_1	a_2	....	a_{n-1}	a_n	
α		αa_0	αa_1		αa_{n-2}	αa_{n-1}	αa_n
	a_0	$\alpha a_0 + a_1$	$\alpha a_1 + a_2$		.....	$\alpha a_{n-1} + a_n$	αa_n

т.е. $(x+\alpha)\cdot P(x) = a_0x^{n+1} + (\alpha a_0 + a_1)x^n + (\alpha a_1 + a_2)x^{n-1} + \ldots + (\alpha a_{n-1} + a_n)x + \alpha a_n$
ја користиме следнава покуса табела, која наликува на Хорнеровата шема, но има поинаква смисла:

α	a_0	a_1	a_2	.....	a_{n-1}	a_n	0
	a_0	b_1	b_2	.....	b_{n-1}	b_n	b_{n+1}

каде што: $b_1 = \alpha a_0 + a_1$; $b_2 = \alpha a_1 + a_2$; $b_3 = \alpha a_2 + a_3$, ... $b_n = \alpha a_{n-1} + a_n$; $b_{n+1} = \alpha a_n + 0$ (11)

Пример 2. Да го пресметаме производот
$(x+3)(x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 6)$

Решение. Во првата редица на табелата (10) ги запишуваме коефициентите на полиномот што го множиме со биномот $(x+3)$, а втората редица ја пополнуваме согласно равенствата (11)

3	1	–4	2	–5	6	0
	1	–1	–10	1	–9	18

Тогаш: $(x+3)(x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 5x + 6) = x^5 - x^4 - 10x^3 + x^2 - 9x + 18$.

Табелата (10) ја има таа предност што може да се применува и едно по друго при пресметувањето на производи со повеќе множители.

Пример 3. Да го пресметаме производот
$(x+3)^2(x+2)(x-2)(x^2 - 2x + 3)$.

Решение. Ја применуваме едно по друго табелата (10):

–2	1	–2	3	0			
2	1	–4	7	–6	0		
3	1	–2	1	8	–12	0	
3	1	1	–5	11	12	–36	0
	1	4	–2	–4	45	0	–108

Значи $(x+3)^2(x+2)(x-2)(x^2 - 2x + 3) = x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 45x^2 - 108$
Од истата табела ги имаме и равенствата:
$(x-2)(x^2 - 2x + 3) = x^3 - 4x^2 + 7x - 6$,
$(x+2)(x-2)(x^2 - 2x + 3) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 8x - 12$,
$(x+3)(x+2)(x-2)(x^2 - 2x + 3) = x^5 + x^4 - 5x^3 + 11x^2 + 12x - 36$.

9.2. ДЕЛЕЊЕ НА ПОЛИНОМИ СО ОСТАТОК

За разлика од операциите собирање и множење на полиноми, операцијата делење на полиноми не е секогаш изводлива. Значи, ако $f_n(x)$ и $g_m(x)$ се два произволни полинома, тогаш не секогаш може да се одреди трет полином $q(x)$, таков што да важи: $f_n(x) = g_m(x) \cdot q(x)$. Во тој поглед множеството полиноми многу наликува на множеството цели броеви. Слично како кај множеството цели броеви и кај множеството полиноми постои **алгоритам за делење со остаток**, кое го воведуваме со следнава:

Дефиниција 3. *Да се подели полиномот* $f_n(x)$ *со полиномот* $g_m(x) \not\equiv 0$, *значи да се одредат два нови полинома* $q(x)$ - *неполн количник и* $r(x)$ - *остаток, такви што да важи идентитетот*

$$f_n(x) = g_m(x) \cdot q(x) + r(x) \qquad (12)$$

и степеноt на $r(x)$ *да е барем за единица помал од степеноt на* $g_m(x)$ *или да е* $r(x) \equiv 0$.

Очигледно е дека степенот на полиномот $q(x)$ ќе биде еднаков на разликата од степените на полиномите $f_n(x)$ и $g_m(x)$, т.е. на $n - m$. Се поставува прашањето: делењето со остаток дали секогаш е возможно и еднозначно определено? Или со други зборови: за секои два дадени полинома $f_n(x)$ и $g_m(x)$ дали секогаш постојат такви два полинома $q(x)$ и $r(x)$ за кои да важи идентитетот (12) и степенот на $r(x)$ да не е поголем од $m - 1$ или да е $r(x) \equiv 0$? И ако такви полиноми постојат дали тие се еднозначно определени?

Потврден одговор на тие прашања ни дава следнава:

Теорема [9.2]. ***За кои било два полинома*** $f_n(x)$ ***и*** $g_m(x) \equiv 0$ ***секогаш постои и тоа единствена двојка полиноми*** $q(x)$ ***и*** $r(x)$ ***што ги задоволуваат условите:***

(i) ***да важи идентитетот*** $f_n(x) \equiv g_m(x) \cdot q(x) + r(x)$ **(12)** ***и***

(ii) ***степеноt на*** $r(x)$ ***да не е поголем од*** $m - 1$ ***или да е*** $r(x) \equiv 0$.

Доказ: Ќе ја докажеме прво единственоста на полиномите $q(x)$ и $r(x)$. Да допуштиме дека постои уште еден пар полиноми $q_1(x)$, $r_1(x)$, за кои важи равенството:

$$f(x) \not\equiv g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) \qquad (13)$$

при што степенот на $r_1(x)$ не е поголем од $m - 1$, или е $r_1(x) \equiv 0$

Изедначувајќи ги равенствата (12) и (13) добиваме:

$$g(x) \cdot q(x) + r(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$$

или $$g(x) \cdot [q(x) - q_1(x)] = r_1(x) - r(x) \qquad (14)$$

Ако $q(x) - q_1(x) \not\equiv 0$, тогаш полиномот на левата страна од (14) има непомал степен од m, а полиномот на десната страна има степен помал од m. Меѓутоа, такво равенство на два полинома со различни степени не е можно. Според тоа, мора да биде $q(x) - q_1(x) \equiv 0$, т.е. $q(x) \equiv q_1(x)$, а тогаш ќе биде и $r_1(x) - r(x) \equiv 0$, односно $r_1(x) \equiv r(x)$. Со тоа единственоста на полиномите $q(x)$ и $r(x)$ е докажана.

Да преминеме сега и на постоењето (егзистенција) на полиномите $q(x)$ и $r(x)$, како и на алгоритмот на нивното наоѓање.

Нека се дадени кои било два полинома, подредени по опаднувачките степени на x:

$f_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a_0 \neq 0$
$g_m(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m, \qquad b_0 \neq 0$

Тие нека имаат соодветно степени n и m. Ако $n < m$, тогаш идентитетот (12) го задоволуваат полиномите $q(x) \equiv 0$, $r(x) = f_n(x)$, т.е. $f_n(x) = 0 \cdot g_m(x) + f_n(x)$.

Нека сега $n \geq m$. Водечкиот член a_0x^n на $f_n(x)$ да го поделиме со водечкиот член b_0x^m на $g_m(x)$, па добиениот количник $\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$ да го помножиме со $g_m(x)$ и производот да го одземеме од $f_n(x)$. Така го добиваме полиномот

$$f_n(x) - \frac{a_0}{b_0}x^{n-m}\, g_m(x) = f_1(x) \tag{15}$$

кој се вика **прв остаток** од делењето на $f_n(x)$ со $g_m(x)$, а чиј степен n_1 секако е помал од n.

По однос на степенот n_1 на $f_1(x)$ постојат две можности: $n_1 \leq m - 1$ или $n > n_1 \geq m$. Во првиот случај, од (15) имаме:

$$f_n(x) = \frac{a_0}{b_0}\, x^{n-m}\, g_m(x) + f_1(x), \tag{15'}$$

а споредено со (13) добиваме $q(x) = \frac{a_0}{b_0}\, x^{n-m}$ и $r(x) = f_1(x)$. Со тоа делењето на f со g е завршено.

Во вториот случај (ако $n_1 \geq m$), водечкиот коефициент на $f_1(x)$ ќе го означиме со a_{01} и ја формираме разликата:

$$f_1(x) - \frac{a_{01}}{b_0}x^{n_1-m} \cdot g_m(x) = f_2(x) \tag{16}$$

На тој начин $f_2(x)$ ќе биде полином од степен n_2 при што $n_2 < n_1$. Полиномот $f_2(x)$ се вика **втор остаток** од делењето на $f(x)$ со $g(x)$, а чиј водечки коефициент нека е a_{02}.

Аналогно, ако $n_2 \geq m$, ја формираме и разликата

$$f_2(x) - \frac{a_{02}}{b_0}x^{n_2-m} \cdot g_m(x) = f_3(x) \tag{17}$$

Бидејќи степените на полиномите-остатоци намалуваат: $n > n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$, затоа после конечен број чекори во овој процес ќе добиеме таков полином-остаток $f_k(x)$:

$$f_{k-1}(x) - \frac{a_{0k-1}}{b_0}x^{n_k-1-m} g_m(x) = f_k(x), \tag{18}$$

чиј степен n_k ќе биде помал од m, или $f_k(x) \equiv 0$. Со тоа процесот на делење завршува. На крај ги собираме равенствата (15), (16), (17), ..., (18) и добиваме:

$f(x) - (\frac{a_0}{b_0}x^{n-m} + \frac{a_{01}}{b_0}x^{n_1-m} + \frac{a_{02}}{b_0}x^{n_2-m} + \ldots + \frac{a_{0k-1}}{b_0}x^{n_k-1-m}) \cdot g_m(x) = f_k(x)$. Според тоа, полиномите:

$q(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\frac{a_{01}}{b_0}x^{n_1-m}+\ldots+\frac{a_{0k-1}}{b_0}x^{n_k-1-m}$, $r(x)=f_k(x)$ го задоволуваат идентитетот (13), при што степенот на $r(x)$ е помал од степенот на $g_m(x)$, или $r(x)\equiv 0$.

Од идентитето (13) го добиваме равенството:

$$\frac{f_n(x)}{q_m(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{q_m(x)} \qquad (19)$$

кое важи за сите вредности на x за кои $g(x)$ не се анулира.

Тука $f_n(x)$ е **полином-деленик**, $g_m(x)$ - **полином-делител**, $q(x)$ - **полином-неполн количник** (или само **количник**), а $r(x)$ - **остаток**.

Од разгледаниот **алгоритам** (постапка) на делењето со остаток заклучуваме дека, ако $f_n(x)$ и $g_m(x)$ се полиноми со реални или рационални коефициенти, тогаш коефициентите на сите остатоци $f_1(x)$, $f_2(x)$,..., па и коефициентите на количникот $q(x)$ и остатокот $r(x)$ ќе бидат исто со реални или рационални коефициенти. Ако пак полиномите $f_n(x)$ и $g_m(x)$ се со цели фоефициенти, тогаш во општ случај се добиваат полиноми $q(x)$ и $r(x)$ со дробни (рационални) коефициенти, а само во случај кога водечкиот коефициент b_0 на делителот $g(x)$ е $b_0=\pm 1$, тогаш се добиваат полиноми пак со цели коефициенти.

Пример 4. Да го извршиме делењето со остаток на полиномот
$f(x)=x^5-2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$ со $g(x)=x^2+3x+1$

Решение. Гледаме полиномите се подредени по опаднувачките степени на x, а делењето практично го извршуваме вака:

$$\begin{array}{l}
(x^5-2x^4-3x^3+4x^2-5x+6):(x^2-3x+1)=x^3+x^2-x \\
\pm x^5 \mp 3x^4 \pm x^3 \\
\hline
f_1(x)\ =x^4-4x^3+4x^2-5x+6 \\
\quad \pm x^4 \mp 3x^3 \pm x^2 \\
\hline
f_2(x)= \quad -x^3+3x^2-5x+6 \\
\quad \mp x^3 \pm 3x^2 \mp x \\
\hline
f_3(x)= \quad -4x+6=r(x)
\end{array}$$

Бидејќи третиот остаток $f_3(x)=-4x+6$ е полином со степен помал од степенот на $g(x)$, процесот на делење не може да продолжи, па така добиваме дека

$q(x)=x^3+x^2-x$ и $r(x)=-4x+6$. Значи, равенството (13) го добива видот:
$x^5-2x^4-3x^3+4x^2-5x+6\equiv(x^3+x^2-x)(x^2-3x+1)-4x+6$

9.3. ДЕЛЕЊЕ НА ПОЛИНОМ СО БИНОМ x-c. ТЕОРЕМА НА БЕЗУ

Посебен интерес претставува делењето на кој било полином $f(x)$ од n-ти степен со **линеарен полином $x-c$** (односно со биномот $x-c$), каде што c е некој број.

Во тој случај, бидејќи делителот $g(x)$ во (13) е од прв степен, затоа остатокот $r(x)$ ќе биде некој полином од нулти степен, или нула, т.е. во секој случај некој број r. При тоа ќе важи идентитетот

$$f(x) \equiv (x - c) \cdot q(x) + r, \tag{20}$$

каде $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}$

Следнава теорема ни дава можност да го одредиме остатокот r од делењето на полиномот $f(x)$ со биномот $x - c$, а без да го вршиме тоа делење.

Теорема на Безу. ***Остатокот од делењето на полиномот $f(x)$ со биномот $x-c$ е еднаков на вредноста $f(c)$ на полиномот $f(x)$ за $x = c$.***

Доказ. Идентитетот (20) важи за секој x, па според тоа ќе важи и за $x = c$. Ако во двете страни на (20) замениме $x = c$, добиваме: $f(c) \equiv (c-c) \cdot q(c) + r$, односно, $f(c) = r$.

Со тоа теоремата е докажана.

Пример 5. Да го одредиме остатокот r од делењето на полиномот $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1$ со биномот $x + 2$.

Решение. Согласно теоремата на Безу бараниот остаток r е еднаков на $f(-2)$, а вредноста $f(-2)$ ќе ја одредиме со помош на Хорнеровата шема:

	1	2	3	−1	1
−2	1	0	3	−7	15 $= f(-2)$

Бараниот остаток можеме да го одредиме и со делењето:

$$\begin{array}{l} (x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1):(x + 2) = x^3 + 3x - 7 \\ \pm x^4 \pm 2x^3 \\ \hline \qquad 3x^2 - x + 1 \\ \qquad \pm 3x^2 \pm 6x \\ \hline \qquad\quad -7x + 1 \\ \qquad\quad \mp 7x \mp 14 \\ \hline \qquad\qquad 15 = r, \end{array}$$

т.е. $x^4 + 2x^3 + 3x^2 - x + 1 \equiv (x + 2)(x^3 + 3x - 7) + 15$.

Со споредување на коефициентите на полиномот количник $q(x) = x^3 + 0x^2 + 3x - 7$ со броевите од втората редица кај Хорнеровата шема, заклучуваме дека тие се совпаѓаат. Значи, со Хорнеровата шема во втората редица: првите n броја се коефициенти на полиномот количник $q(x)$, а последниот $(n + 1)$-от број е остатокот од делењето на $f(x)$ со биномот $x - c$. Да го покажеме тоа и во општ случај.

Нека $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ и нека

$f(x) \equiv (x - c) \cdot q(x) + r$, каде $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$

Ги одредуваме прво коефициентите на производот $(x-c) \cdot q(x)$:

	b_0	b_1	b_2	....	b_{n-2}	b_{n-1}	
1	b_0	b_1	b_2	....	b_{n-2}	b_{n-1}	
–c		$-cb_0$	$-cb_1$	....	$-cb_{n-3}$	$-cb_{n-2}$	$-cb_{n-1}$
	b_0	b_1-cb_0	b_2-cb_1	....	$b_{n-2}-cb_{n-3}$	$b_{n-1}-cb_{n-2}$	$-cb_{n-1}$

Така идентитетот (20) го добива видот:

$$f(x) \equiv b_0x^n + (b_1 - cb_0)x^{n-1} + (b_2 - cb_1)x^{n-2} + \ldots + (b_{n-1} - cb_{n-2})x + r - cb_{n-1} \qquad (21)$$

Изедначувајќи ги коефициентите при еднаквите степени на x во (20) и (21), добиваме:

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = b_1 - cb_0 \\ a_2 = b_2 - cb_1 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ a_{n-1} = b_{n-1} - cb_{n-2} \\ a_n = r - cb_{n-1} \end{cases} \text{, а оттука: } \begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = cb_0 + a_1 \\ b_2 = cb_1 + a_2 \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ b_{n-1} = cb_{n-2} + a_{n-1} \\ r = cb_{n-1} + a_n \end{cases} \qquad (22)$$

При одредување на коефициентите на $q(x)$ и остатокот од равенствата (22), се служиме со познатата Хорнерова шема:

	a_0	a_1	a_2	....	a_{n-1}	a_n
c	$b_0=a_0$	$b_1=cb_0+a_1$	$b_2=cb_1+a_2$	....	$b_{n-2}=cb_{n-2}+a_{n-1}$	$r=cb_{n-1}+a_n$

Во првата редица ги запишуваме коефициентите на полиномот $f(x)$, а во втората редица - коефициентите на количникот $q(x)$ и остатокот r после нивното одредување:

При исполнувањето на втората редица: во првата колона (после c) го пренесуваме (спуштаме) коефициентот a_0 од првата редица, а кој било друг коефициент $b_k (1 \le k \le n)$ го одредуваме кога кон производот cb_{k-1} од бројот c и претходниот коефициент b_{k-1} го додаваме бројот a_k што се наоѓа над него во првата редица, т.е. $b_k = cb_{k-1} + a_k$.

Пример 6. Да го извршиме делењето со остатокот на полиномите

$f(x) = x^3 - x^2 - x$ со $g(x) = x - (1 - 2i)$.

Решение.

$$(x^3 - x^2 - x):[x - (1 - 2i)] = x^2 - 2ix - (5 + 2i)$$

$$\pm x^3 \mp (1 - 2i)x^2$$

$$-2ix^2 - x$$

$$\mp 2ix^2 \pm 2i(1 - 2i)x$$

$$-(1 + 2i - 4i^2)x = -(5 + 2i)x$$

$$\mp(5 + 2i)x \pm (1 - 2i)(5 + 2i)$$

$$-(5 - 10i + 2i - 4i^2) = -9 + 8i$$

Значи:

$x^3 - x^2 - x = [x - (1 - 2i)] \cdot [x^2 - 2ix - (5 + 2i)] - 9 + 8i.$

или со помош на Хорнеровата шема:

	1	−1	−1	0
$1-2i$	1	$-2i$	$-5-2i$	$-9+8i$

го добиваме истиот резултат.

ЗАДАЧИ

1. Да се соберат полиномите:
а) $A(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x + 1$, $B(x) = 3x^4 - x^2 + 5$,
б) $A(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 1$, $B(x) = -x^4 + x^3 - 5x^2 + 4$
в) $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4$, $Q(x) = x^2 - 3x + 1$.

2. Да се помножат полиномите:
а) $A(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$, $B(x) = x^2 - 3x + 5$,
б) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 4$, $Q(x) = -2x^3 + x^2 - 4x + 1$.

3. Изврши го множењето:
а) $(x + 2)(x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 1)$
б) $(x + 2)(x - 2)(x^2 - 3x + 2)$,
в) $(x - 2)^2 \cdot (x + 3)^2 \cdot (x + 1)$

4. Изврши ги назначените операции:
а) $(x^3 - 2x + 1)(x^2 - 1) + (x^4 - 1)(x^3 + 2x^2 - x + 2) - (x^3 + 2x^2 - x + 4)$,
б) $x(x+1)(x + 2)(x + 3) - (x^2 - 1)(x^2 + x + 1) + (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$.

5. Одреди го количникот $q(x)$ и остатокот $r(x)$ при делењето на полиномот
$2x^4 + 11x^3 + 6x^2 - 21x - 2$ со $2x^2 + 5x - 1$.

6. Изврши го делењето на полиномите со остаток:
а) $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 5):(x^2 - 3x + 1)$,
б) $(x^3 - 2x^2 + 3x - 4):(3x^2 - 2x + 1)$,
в) $(x^5 - 5x^4 + x^3 - 2x^2 + 3):(x^2 - x + 1)$,
г) $(x^7 - 1):(x^4 + x^2 + 1)$, д) $(x^5 + 1):(x^3 + x + 1)$.

7. Одреди го количникот и остатокот од делењето на полиномот
$P(x) = 2x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ со биномот $x - 3$.

8. Изврши го делењето со користење на Хорнеровата шема:
а) $2x^5 - 5x^3 - 8x$ со $x + 3$, б) $x^4 - 3x^3 + 2x - 1$ со $x - 1$,
в) $x^3 - 2x^2 + x - 1$ со $x - i$, г) $4x^3 + x^2$ со $x + 1 + i$.

9*. Одреди го остатокот од делењето на полиномот
$P(x) = x^{50} - x^{30} + 2x^{10} - 4$ со $x^2 - 1$.

10*. При делењето на полиномот $P(x)$ со $x - a$ се добива остаток α, а при делење со $x - b$ се добива остаток β. Колкав ќе биде остатокот при делење на полиномот $P(x)$ со $(x - a)(x - b)$?

§10. ДЕЛИВОСТ НА ПОЛИНОМИ

Дадени се два ненула полинома $f(x)$ и $g(x)$ со комплексни или реални коефициенти. Ако остатокот $r(x)$ од делењето на $f(x)$ со $g(x)$ е нула полином, т.е. ако $r(x) \equiv 0$, тогаш велиме дека полиномот $f(x)$ се дели без остаток со $g(x)$, или дека тој **е делив** со полиномот $g(x)$.

Дефиниција. *Полиномот $f(x)$ велиме е делив со полиномот $g(x)$, ако и само ако постои полином $q(x)$, таков што да важи идентитетот*

$$f(x) \equiv g(x) \cdot q(x) \tag{1}$$

За полиномот $g(x)$, пак, велиме дека **е делител** на полиномот $f(x)$. Всушност, ако $g(x)$ е делител на $f(x)$, тогаш $q(x)$ треба да го земеме за количник од делењето на $f(x)$ со $g(x)$. Навистина, од (1) го добиваме и равенството

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x), \tag{2}$$

кое важи за сите вредности на x, за кои $g(x)$ не се анулира.

Пример. Полиномот $x^3 + 1$ е делив со полиномот $x + 1$, бидејќи важи

$$x^3 + 1 \equiv (x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Очигледно е дека, ако важи равенството (1), тогаш и полиномот $q(x)$ е исто така делител на полиномот $f(x)$.

Во случај кога $g(x)$ е делител на $f(x)$, односно кога $f(x)$ се дели без остаток со $g(x)$, тоа често симболички го запишуваме со:

$$g(x) \mid f(x) \tag{3}$$

кое го читаме: „$g(x)$ **е делител на** $f(x)$“, или „$g(x)$ го дели $f(x)$“.

Аналоген симболички запис користиме и кај целите броеви: $4 \mid 12$, $3 \mid 18$ со кои го регистрираме фактот дека: „4 е делител на 12“, „3 го дели 18“, без да кажеме нешто за количникот.

Да забележиме дека, ако полиномот $f(x)$ и неговиот делител $g(x)$ се со реални или рационални коефициенти, тогаш и полиномот-количник $q(x)$, бидејќи го наоѓаме со помош на алгоритмот за делење, е исто така со реални, односно рационални коефициенти. Меѓутоа, полином со реални (или рационални) коефициенти може да има и делители, чии коефициенти се од друго множество броеви. Тоа го покажува, на пример, равенството:

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

Деливоста на полиноми ги има следниве поважни својства:

Теорема [10.1]. ***Ако полиномот $f(x)$ е делив со полиномот $g(x)$, тогаш постои само еден единствен полином-количник $q(x)$.***

Доказ. Да претпоставиме дека при делењето на $f(x)$ со $g(x)$ се добиваат два различни количника $q(x)$ и $q_1(x)$. Во тој случај имаме:

$f(x) \equiv g(x) \cdot q(x)$ и $f(x) \equiv g(x) \cdot q_1(x)$,

а оттука следува: $g(x) \cdot q(x) \equiv g(x) \cdot q_1(x)$ или $g(x)\,[q(x) - q_1(x)] \equiv 0$. Бидејќи по услов е $g(x) \not\equiv 0$, затоа мора да е $q(x) - q_1(x) \equiv 0$, или $q(x) \equiv q_1(x)$.

Значи, количникот $q(x)$ ако постои тој е единствен, штд.

Теорема [10.2]. ***Ако f(x) е делив со g(x), а g(x) е делив со h(x), тогаш f(x) е делив со h(x).***

Доказ. Нека о $f(x) \equiv g(x) \cdot q(x)$ и $g(x) \equiv h(x) \cdot \varphi(x)$. Тогаш

$f(x) = [h(x) \cdot \varphi(x)] \cdot q(x) \equiv h(x) \cdot [\varphi(x) \cdot g(x)]$.

Теорема[10.3]. ***Ако секој од полиномите f(x) и g(x) е делив со h(x), тогаш и нивниот збир и разлика се деливи со h(x).***

Доказ. Нека $f(x) \equiv h(x) \cdot q(x)$ и $g(x) \equiv h(x) \cdot \varphi(x)$. Тогаш

$f(x) \pm g(x) \equiv h(x) \cdot q(x) \pm h(x) \cdot \varphi(x)$ или $f(x) \pm g(x) \equiv h(x)[q(x) \pm \varphi(x)]$.

Теорема [10.4]. ***Ако f(x) е делив со φ(x), тогаш и производот на f(x) со кој било полином g(x) е исто делив со φ(x).***

Доказ. Нека $f(x) \equiv \varphi(x) \cdot q(x)$. Тогаш

$f(x) \cdot g(x) \equiv [\varphi(x) \cdot q(x)] \cdot g(x) \equiv \varphi(x)[q(x) \cdot g(x)]$.

Од Т[10.3] и Т[10.4] следува следнава:

Последица[10.1]. Ако секој од полиномите $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ е делив со $\varphi(x)$, тогаш со $\varphi(x)$ е делив и полиномот $f_1(x) \cdot g_1(x) + f_2(x) \cdot g_2(x) + \ldots + f_k(x) \cdot g_k(x)$, каде што $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_k(x)$ се произволни полиноми.

Теорема[10.5]. ***Секој полином f(x) е делив со кој било полином од нулти степен.***

Навистина: $f(x) \equiv c(\frac{a_0}{c} x^n + \frac{a_1}{c} x^{n-1} + \ldots + \frac{a_n}{c})$, каде с е произволен број различен од нула, т.е. произволен полином од нулти степен.

Теорема[10.6]. ***Ако f(x) е делив со g(x), тогаш f(x) е делив и со $c \cdot g(x)$, каде што с е произволен број различен од 0.***

Доказ. Од равенството $f(x) \equiv g(x) \cdot q(x)$ следува и равенството

$f(x) \equiv [c \cdot g(x)] \cdot [c^{-1} \cdot q(x)]$.

Теорема[10.7]. ***Два полинома $f_n(x)$ и $g_m(x)$ се деливи истовремено еден со друг, ако и само ако нивните степени се совпаѓаат.***

Доказ. Нека $f_n(x) \equiv g_m(x) \cdot q(x)$ и $g_m(x) \equiv f_n(x) \cdot h(x)$. Тогаш $f_n(x) \equiv [f_n(x) \cdot h(x)] \cdot q(x)$ или $f_n(x) \equiv f_n(x)[h(x) \cdot q(x)]$.

Последното равенство важи само ако $h(x)$ и $q(x)$ се полиноми од нулти степен, т.е. ако $m - n = n - m = 0$, односно ако $n = m$. Значи, степените на $f_n(x)$ и $g_m(x)$ се совпаѓаат. Обратно, ако $f_n(x)$ и $g_m(x)$ се полиноми од исти степен, тогаш степенот на количникот од делењето на $f_n(x)$ со $g_m(x)$ мора да биде од нулти степен, т.е.

$f_n(x) = c \cdot g_m(x)$, а оттука $g_m(x) = c^{-1} f_n(x)$. Значи, $f_n(x)$ и $g_m(x)$ се истовремено деливи еден со друг. Од Т[10.2] и Т[10.7] следува следнава

Последица[10.2]. Секој делител на еден од полиномите f(x) и $c \cdot f(x)$ е делител и на другиот полином.

На пример, $(x-2) \mid (x^3 + x - 6)$, бидејќи важи $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$. Меѓутоа,

$(x-2)\,|\,(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3)$, бидејќи $\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-3=\frac{1}{2}(x^2+x-6)=\frac{1}{2}(x-2)(x+3)$.

Пример 2. Да се докаже дека полиномот $f(x)=x^n-a^n$, $n\in\mathbb{N}$ е делив со биномот $x-a$ и да се одреди полиномот количник.

Доказ. Според теоремата на Безу при делењето на полиномот $f(x)=x^n-a^n$ со $x-a$ добиваме остаток нула: $r=f(a)=a^n-a^n=0$. Значи, $(x-a)\,|\,(x^n-a^n)$. За одредување на полиномот количник ја користиме Хорнеровата шема:

	1	0	0	0	....	0	0	$-a^n$
a	1	a	a^2	a^3	....	a^{n-2}	a^{n-1}	0

Според тоа, важи идентитетот:

$$x^n-a^n\equiv(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-2}x+a^{n-1}) \tag{4}$$

На сличен начин согласно теоремата на Безу и со помош на Хорнеровата шема лесно се докажува дека важат идентитетите:

$$x^{2k}-a^{2k}\equiv(x+a)\cdot(x^{2k-1}-ax^{2k-2}+\ldots+a^{2k-2}x-a^{2k-1}) \tag{5}$$

$$x^{2k+1}+a^{2k+1}\equiv(x+a)(x^{2k}-ax^{2k-1}+\ldots-a^{2k-1}x+a^{2k}) \tag{6}$$

ЗАДАЧИ

1. Провери дали полиномот $x^3+x^2-17x+15$ е делив со биномот:
а) $x+5$, б) $x-1$, в) $x+1$, г) $x-3$.

2. Покажи дека полиномот x^3+a^3 е делив со $x+a$, но не е делив со $x-a$.

3. Провери дали полиномот x^2+a^2, $a\in\mathbb{R}$ е делив со биномот:
а) $x+a$, б) $x-a$, в) $x+ai$, г) $x-ai$.

4. Покажи дека полиномот $x^{2k+1}-a^{2k+1}$ е делив со $x-a$ и одреди го полиномот - количник.

5*. Докажи дека полиномот: а) $P(x)=(x+a)^4-b^4$ е делив со $x+a+b$,
б) $Q(x)=(x+a)^5+b^5$ е делив со $x+a+b$.

6. Каков треба да биде природниот број n, за да биде бројот 11^n-1 делив со: а) 10, б) 12?

7*. Докажи дека полиномот $P(x)=(x+a+b)^3-x^3-a^3-b^3$ е делив со $x+a$ и со $x+b$, т.е. и со $(x+a)(x+b)$.

8. За кои вредности на k полиномот $P(x)=x^3+4x^2+kx+15$ е делив со $x+3$?

9*. Докажи дека полиномот $P(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}+2x+1$ е делив со биномот $2x+1$.

10*. Докажи дека полиномот $P(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ е делив со $x-1$ и одреди го полиномот-количник.

11. Одреди ги коефициентите a и b на полиномот $P(x)=2x^3+x^2+ax+b$, така што тој да биде делив со $x-2$ и со $x-3$.

§11. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ НА ДВА ПОЛИНОМА ЕВКЛИДОВ АЛГОРИТАМ

1. Нека $f(x)$ и $g(x)$ се два произволни ненула полиноми што одговараат на n-ти и m-ти степен. За полиномот $\varphi(x)$ велиме дека е **заеднички делител** на полиномите $f(x)$ и $g(x)$, ако тој е делител истовремено и на двата полинома, т.е. ако $\varphi(x) \mid f(x)$ и $\varphi(x) \mid g(x)$. Согласно Т[10.5] кон множеството на заедничките делители на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ следува да ги приклучиме и сите полиноми од нулти степен. Тоа значи дека, секој број $c \neq 0$ е заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$. Во општ случај, полиномите $f(x)$ и $g(x)$ можат (но не мораат) да имаат и други заеднички делители што зависат од x, т.е. што не се од нулти степен.

Два полинома, кои освен бројни делители, немаат други заеднички делители, се викаат **заемно прости**.

Два ненула полиноми обично имаат повеќе заеднички делители.

Дефиниција 1. *Најголем заеднички делител на два ненула полиноми $f(x)$ и $g(x)$ е таков нивен заеднички делител, кој е делив со секој друг заеднички делител.*

Најголемиот заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ симболички го означуваме со $D(f, g)$ или со $d(x)$. Бидејќи $D(f, g)$ треба да е делив со кој било заеднички делител на $f(x)$ и $g(x)$, затоа тој од сите нив има највисок степен. Ако полиномите $f(x)$ и $g(x)$ се заемно прости, тогаш $D(f, g)$ е од нулти степен, т.е. кој било константен број $c \neq 0$.

Горнава дефиниција го остава отворено прашањето: постои ли секогаш најголем заеднички делител за кои било два полинома?

На тоа прашање потврден одговор ни два следнава:

Теорема [11.1]. ***За кои било два ненула полиноми $f(x)$ и $g(x)$ постои најголем заеднички делител, кој е определен со точност до множител од нулти степен.***

Доказ. Нека се дадени полиномите $f(x)$ и $g(x)$ со степени n и m, при што $n \geq m$. Ако полиномот $f(x)$ е делив со $g(x)$, т.е. ако $g(x) \mid f(x)$, тогаш $D(f,g) = g(x)$. Ако пак при делењето на $f(x)$ со $g(x)$ се добие некој остаток $r_1(x) \equiv 0$, тогаш полиномот $g(x)$ го делиме со $r_1(x)$ и ако добиеме нов остаток $r_2(x) \equiv 0$, тогаш претходниот остаток $r_1(x)$ го делиме со $r_2(x)$, итн. Тој процес на делење после конечен број делења мора да доведе до делење без остаток, бидејќи секој наредени остаток во низата остатоци $r_1(x)$, $r_2(x)$, $r_3(x)$, ... е со понизок степен (барем за единица) од претходниот остаток.

Всушност, во тој процес ги добиваме следниве равенства:

$$
\begin{aligned}
&f(x) \equiv g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)\\
&g(x) \equiv r_1(x) \cdot q_2(x) + r_2(x)\\
&r_1(x) \equiv r_2(x) \cdot q_3(x) + r_3(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&r_{k-3}(x) \equiv r_{k-2}(x) \cdot q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x)\\
&r_{k-2}(x) \equiv r_{k-1}(x) \cdot q_k(x) + r_k(x)\\
&r_{k-1}(x) \equiv r_k(x) \cdot q_{k+1}(x)
\end{aligned}
\qquad (*)
$$

Ќе докажеме дека, последниот остаток $r_k(x) \equiv 0$, со кого е делив предхотниот остаток $r_{k-1}(x)$, е најголемиот заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$, т.е. $D(f, g) = r_k(x)$.

Од последното равенство во (*) заклучуваме дека $r_k(x)$ е делител на $r_{k-1}(x)$, т.е. $r_k(x) \mid r_{k-1}(x)$. Оттука следува дека, двата собирока на десната страна во претходното равенство од (*) се деливи со $r_k(x)$, па согласно последицата [10.1] и левата страна $r_{k-2}(x)$ на тоа равенство е делива со $r_k(x)$, т.е. $r_k(x) \mid r_{k-2}(x)$.

Аналогно од третото равенство одоздола:

$$r_{k-3} \equiv r_{k-2}(x) \cdot q_{k-1}(x) + r_{k-1}(x)$$

и од тоа што $r_k(x) \mid r_{k-2}(x)$ и $r_k(x) \mid r_{k-1}(x)$ следува дека $r_k(x) \mid r_{k-3}(x)$.

Продолжувајќи така нагоре во (*), ќе добиеме дека:

$r_k(x) \mid r_{k-4}(x), \ldots, r_k(x) \mid r_2(x), r_k(x) \mid r_1(x), r_k(x) \mid g(x)$ и $r_k(x) \mid f(x)$.

Значи, остатокот $r_k(x)$ е заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$.

Сега, нека $\varphi(x)$ е произволен заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$, т.е. нека $\varphi(x) \mid f(x)$ и $\varphi(x) \mid g(x)$. Тогаш од првото равенство во (*) заклучуваме дека од $\varphi(x) \mid f(x)$ и $\varphi(x) \mid g(x)$ следува дека $\varphi(x) \mid r_1(x)$. Преминувајќи на второто и наредните равенства од (*) на ист начин добиваме дека $\varphi(x)$ е делител и на остатоците $r_2(x)$, $r_3(x)$, ..., $r_{k-2}(x)$, $r_{k-1}(x)$ и $r_k(x)$.

Значи, $\varphi(x) \mid r_k(x)$, односно $r_k(x)$ е делив со $\varphi(x)$. Според тоа, $r_k(x)$ всушност е најголем заеднички делител на $f(x)$ и $g(x)$. Останува уште да докажеме дека најголемиот заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ е определен со точност до множител од нулти степен.

Ако $d_1(x)$ и $d(x)$ се два најголеми заеднички делители на $f(x)$ и $g(x)$, тогаш согласно дефиницијата 1 треба да важи $d_1(x) \mid d(x)$ и $d(x) \mid d_1(x)$, а оттука следува дека $d_1(x)$ и $d(x)$ се полиноми од исти степен, т.е. ќе важи $d_1(x) = c \cdot d(x)$, $c \neq 0$.

Со тоа теоремата [11.1] е целосно докажана.

Постапката изложена во Т[11.1] за одредување на најголемиот заеднички делител на два полинома е позната како **Евклидов алгоритам** за одредување на $D(f, g)$. Таа постапка покажува дека, ако полиномите $f(x)$ и $g(x)$ се со рационални или реални коефициенти, тогаш и $D(f, g)$ ќе биде со рационални, односно реални коефициенти.

Од друга страна, пак, ако $d(x)$ е најголем заеднички делител на $f(x)$ и $g(x)$, тогаш за $D(f, g)$ може да се избере исто така и полиномот $c \cdot d(x)$, каде c е произволен константен број различен од нула. Имајќи го предвид тоа, може да усвоиме дека водечкиот коефициент на $d(x)$ може да биде секогаш еднаков на единица. Користејќи го тој услов можеме да кажеме: **два полинома $f(x)$ и $g(x)$ се заемно прости, ако и само ако нивниот најголем заеднички делител е еднаков на единица**, т.е. $D(f, g) = 1$.

На пример, ако полиномите $f(x)$ и $g(x)$ се заемно прости, тогаш $D(f, g) = c$, каде c е кој било број различен од нула. Но за $D(f, g)$ може да се избере и $c^{-1}D(f, g) = c^{-1} \cdot c = 1$.

Во поглед на гореизнесеново, при примената на Евклидовиот алгоритам кај полиномите со цели коефициенти, со цел да се избегнат дробни коефициенти во

количникот, често прибегнуваме кон множење или скратување на деленикот, делителот, или остатоците со погоден број различен од нула.

Пример 1. Да го одредиме најголемиот заеднички делител за полиномите: $f(x) = x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1$ и $g(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.

Решение. Го делиме полиномот $f(x)$ со $g(x)$:

$$(x^5 + x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1):(x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1) = x + 3 = q_1(x)$$
$$\pm x^5 \mp 2x^4 \mp x^3 \mp 2x^2 \pm x$$
$$3x^4 - x^2 - 4x - 1$$
$$\pm 3x^4 \mp 6x^3 \mp 3x^2 \mp 6x \pm 3$$
$$r_1(x) = 6x^3 + 2x^2 + 2x - 4$$

Сега полиномот $g(x)$ треба да го делиме со $r_1(x)$. Но, за да избегнеме дробни коефициенти во количникот, претходно полиномот $g(x)$ го множиме со 3, а остатокот $r_1(x)$ го скратуваме со 2, па потоа делиме:

$$(3x^4 - 6x^3 - 3x^2 - 6x + 3):(3x^3 + x^2 + x - 2) = x$$
$$\pm 3x^4 \pm x^3 \pm x^2 \pm 2x$$
$$-7x^3 - 4x^2 - 4x + 3$$

Овој остаток го множиме со 3, а делителот – со 7, па го продолжуваме делењето:

$$(-21x^3 - 12x^2 - 12x + 9):(21x^3 + 7x^2 + 7x - 14) = -1$$
$$\mp 21x^3 \mp 7x^2 \mp 7x \pm 14$$
$$r_2(x) = -5x^2 - 5x - 5$$

Така го добиваме и вториот остаток, кој по скратувањето со -5, ќе биде $r_2(x) = x^2 + x + 1$.

Потоа првиот остаток $r_1(x) = 3x^3 + x^2 + x - 2$ го делиме со вториот остаток $r_2(x) = x^2 + x + 1$, и добиваме:

$$(3x^3 + x^2 + x - 2):(x^2 + x + 1) = 3x - 1$$
$$\pm 3x^3 \pm 3x^2 \pm 3x$$
$$-2x^2 - 2x - 2$$
$$\mp 2x^2 \mp 2x \mp 2$$
$$r_3(x) \equiv 0$$

Според тоа, $D(f, g) = r_2(x) = x^2 + x + 1$

2. Сега ќе докажеме едно важно својство на најголемиот заеднички делител на два полинома.

Теорема [11.2]. ***Ако $d(x)$ е најголем заеднички делител на полиномите $f(x)$ и $g(x)$, тогаш постојат полиноми $A(x)$ и $B(x)$, такви што:***

$$f(x) \cdot A(x) + g(x) \cdot B(x) = d(x) \qquad (1)$$

Доказ. Доказот се заснова на равенствата (*). Првите три равенства од (*) да ги запишеме во видот:

$r_1(x) = f(x) - g(x) \cdot q_1(x)$ (2)

$r_2(x) = -r_1(x) \cdot q_2(x) + g(x)$ (3)

$r_3(x) = -r_2(x) \cdot q_3(x) + r_1(x)$ (4)

Ако во равенството (3) $r_1(x)$ го замениме со изразот за него од (2), добиваме:

$r_2(x) = [f(x) - g(x) \cdot q_1(x)] \cdot [-q_2(x)] + g(x)$ или

$r_2(x) = f(x) \cdot [-q_2(x)] + g(x) \cdot [1 + q_1(x) \cdot q_2(x)]$ (3')

Равенството (2), ставајќи во него $A_1(x) = 1$ и $B_1(x) = -q_1(x)$, го добива видот:

$r_1(x) = f(x) \cdot A_1(x) + g(x) \cdot B_1(x)$ (2')

Равенството (3'), ставајќи во него $A_2(x) = -q_2(x)$ и $B_2(x) = 1 + q_1(x) \cdot q_2(x)$ и тоа го добива видот:

$r_2(x) = f(x) \cdot A_2(x) + g(x) \cdot B_2(x)$ (3'')

На ист начин равенството (4), заменувајќи ги во него $r_1(x)$ и $r_2(x)$ со соодветните изрази за нив од (2) и (3), и тоа може да се доведе во видот:

$r_3(x) = f(x) \cdot A_3(x) + g(x) \cdot B_3(x)$ (4')

Продолжувајќи така надолу во (*), на крај ќе дојдеме до равенството:

$r_k(x) = d(x) = f(x) \cdot A_k(x) + g(x) \cdot B_k(x)$, (1')

што требаше да го докажеме.(1')

Да забележиме дека, ако полиномите $f(x)$ и $g(x)$ имаат соодветно степени $n \geq 1$ и $m \geq 1$, тогаш степенот на $A(x)$ мора да е помал од степенот на $g(x)$, а степенот на $B(x)$ мора да е помал од степенот на $f(x)$. Во спротивно, левата страна на равенството (1) би имала степен непомал од степенот на $f(x) \cdot g(x)$, додека степенот на $d(x)$ е секако помал степен од него, што не смее да биде.

Пример 2. Користејќи го Евклидовиот алгоритам да се изберат полиноми $A(x)$ и $B(x)$ што ќе го задоволуваат равенството (1) за полиномите:

$f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1$ и $g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$.

Решение.

$$(x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1) : (x^4 + 2x^3 + x + 2) = x + 1 = q_1(x)$$

$$\pm x^5 \pm 2x^4 \qquad \pm x^2 \pm 2x$$

$$x^4 + x^3 + x + 1$$

$$\pm x^4 \pm 2x^3 \pm x \pm 2$$

$$r_1(x) = -x^3 - 1$$

$$(x^4 + 2x^3 + x + 2) : (-x^3 - 1) = -x - 2 = q_2(x)$$

$$\pm x^4 \qquad \pm x$$

$$2x^3 + 2$$

$$\pm 2x^3 \pm 2;$$

$$0 \qquad r_2(x) = 0$$

Според тоа, $D(f, g) = d(x) = r_1(x) = -(x^3 + 1)$, $q_1(x) = x + 1$ и $q_2(x) = -(x + 2)$, па согласно (2) имаме:

$-(x^3 + 1) = f(x) - g(x) \cdot (x + 1)$, односно

$f(x) \cdot (-1) + g(x) \cdot (x + 1) = x^3 + 1$.

Значи: $A(x) = -1$, $B(x) = x + 1$ и $d(x) = x^3 + 1$.

Од теоремата [11.2] следува следнава:

Последица [11.1]. Полиномите $f(x)$ и $g(x)$ се заемно прости, ако и само ако може да се најдат полиноми $A(x)$ и $B(x)$ што ќе го задоволуваат равенството:

$$f(x) \cdot A(x) + g(x) \cdot B(x) = 1 \qquad (5)$$

Да нагласиме дека, при наоѓањето на полиномите $A(x)$ и $B(x)$ што го задоволуваат равенството (1), односно (5), со помош на Евклидовиот алгоритам, при делењето не е допуштено количниците и остатоците да ги множиме ниту скратуваме со цел да се избегнат дробни коефициенти.

Пример 3. Да покажеме дека полиномите $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$ и $g(x) = x^2 - x - 1$ се заемно прости и да најдеме полиноми $A(x)$ и $B(x)$ што ќе го задоволуваат равенството (5).

Решение. $(x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1):(x^2 - x - 1) = x^2 - 3 = q_1(x)$

$$\begin{array}{r} \pm x^4 \mp x^3 \mp x^2 \\ \hline -3x^2 + 4x + 1 \\ \mp 3x^2 \pm 3x \mp 3 \\ \hline x - 2 = r_1(x) \end{array}$$

$(x^2 - x - 1):(x - 2) = x + 1 = q_2(x)$

$$\begin{array}{r} \pm x^2 \mp 2x \\ \hline x - 1 \\ \pm x \mp 2 \\ \hline 1 = r_2(x) \end{array}$$

Според тоа: $D(f, g) = r_2(x) = 1$, $q_1(x) = x^2 - 3$, $q_2(x) = x + 1$, па согласно (3') имаме: $1 = f(x) \cdot (-x - 1) + g(x) \cdot [1 + (x^2 - 3)(x + 1)]$.

Значи: $A(x) = -x - 1$, $B(x) = x^3 + x^2 - 3x - 2$

Потпирајќи се на равенството (5) ќе покажеме дека важат следниве три важни својства на заемно простите полиноми:

1°. **Ако полиномот $f(x)$ е заемно прост со секој од полиномите $g(x)$ и $h(x)$, тогаш тој е заемно прост и со нивниот производ.**

Доказ. Од тоа што полиномот $f(x)$ е заемно прост со $g(x)$ согласно (5) постојат полиноми $A(x)$ и $B(x)$, такви што

$f(x) \cdot A(x) + g(x) \cdot B(x) = 1$

Ако ова равенство го помножиме со $h(x)$, добиваме:

$f(x) \cdot [A(x) \cdot h(x)] + [g(x) \cdot h(x)] \cdot B(x) = h(x)$

Оттука следува дека, секој заеднички делител на $f(x)$ и $g(x) \cdot h(x)$ би бил делител и на $h(x)$. Меѓутоа по услов е $D(f(x), h(x)) = 1$, што значи дека и $D(f(x), g(x) \cdot h(x)) = 1$.

2°. Ако производот на полиномите $f(x)$ и $g(x)$ е делив со $h(x)$, но $f(x)$ и $h(x)$ се заемно прости, тогаш $g(x)$ е делив со $h(x)$.

Доказ. Од $D(f(x), h(x)) = 1$ согласно со (5) имаме $f(x) \cdot A(x) + h(x) \cdot B(x) = 1$.

Множејќи го ова равенство со $g(x)$, добиваме:

$[f(x) \cdot g(x)] \cdot A(x) + h(x)\,[B(x) \cdot g(x)] = g(x)$.

Гледаме дека двата собирока на левата страна се деливи со $h(x)$, што значи дека и десната страна (т.е. $g(x)$) е делива со $h(x)$.

3°. Ако $f(x)$ е делив со секој од полиномите $g(x)$ и $h(x)$, кои меѓу себе се заемно прости, тогаш $f(x)$ е делив со производот $g(x) \cdot h(x)$.

Доказ. Од $f(x) = g(x) \cdot q_1(x)$ и $f(x) = h(x) \cdot q_2(x)$, односно $g(x) \cdot q_1(x) - h(x) \cdot q_2(x)$ следува дека производот $g(x) \cdot q_1(x)$ е делив со $h(x)$. Но, согласно со својството 2°, $q_1(x)$ е делив со $h(x)$ бидејќи $D(g(x) \cdot h(x)) = 1$), т.е. ќе важи $q_1(x) = h(x) \cdot q_3(x)$. Оттука имаме

$$f(x) = g(x) \cdot q_1(x) = g(x) \cdot [h(x) \cdot q_3(x)],$$

односно $f(x) = [g(x) \cdot h(x)] \cdot q_3(x)$.

Значи, $f(x)$ е делив со производот $g(x) \cdot h(x)$, штд.

3. Дефиницијата за најголем заеднички делител може да се прошири и за конечен број полиноми.

Дефиниција 2. *Најголем заеднички делител на полиномите $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_n(x)$ е оној заеднички делител $d(x)$ на тие полиноми, кој е делив со секој друг нивен заеднички делител.*

Неговото постоење произлегува од следнава:

Теорема [11.3]. ***Најголемиот заеднички делител на полиномите $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n-1}(x), f_n(x)$ е еднаков на најголемиот заеднички делител на полиномот $f_n(x)$ и најголемиот заеднички делител на полиномите $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n-1}(x)$.***

Доказ. За $n = 2$ теоремата е очигледна. Претпоставуваме дека за $n - 1$ теоремата важи, т.е. дека постои најголем заеднички делител $d_{n-1}(x)$ за полиномите $f_1(x), f_2(x), \ldots f_{n-1}(x)$. Нека $d(x)$ е најголем заеднички делител на полиномите $d_{n-1}(x)$ и $f_n(x)$. Очигледно е дека тој $-d(x)$ ќе биде заеднички делител на сите дадени полиноми $f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, f_n$. Од друга страна, пак, тој $d(x)$ како најголем заеднички делител на $d_{n-1}(x)$ и $f_n(x)$ ќе биде делив и со секој друг нивен заеднички делител, па затоа ќе биде делив и со секој заеднички делител на дадените полиноми. Значи, $d(x)$ е најголем заеднички делител на дадените полиноми $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, штд.

Докажаната Т[11.3] ни го дава и начинот на одредување на најголемиот заеднички делител на полиномите $f_1, f_2, \ldots, f_n$, имено: прво го наоѓаме $D(f_1, f_2) = d_2(x)$, потоа го наоѓаме $D(d_2, f_3) = d_3(x)$, итн. Така, во последниот чекор го наоѓаме и $D(d_{n-1}, f_n) = d(x)$ - најголемиот заеднички делител на дадените полиноми.

Ако најголемиот заеднички делител на полиномите $f_1, f_2, \ldots f_n$, е полином од нулти степен, т.е. ако $d(x) = 1$, тогаш велиме дека тие се **заемно прости** полиноми.

Да заклучиме, кај три или повеќе заемно прости полиноми, разгледувани во парови, тие може и да не се заемно прости. На пример, полиномите $f(x)=x^3-5x^2+2x+8$, $g(x)=x^3-2x^2-11x+12$ и $h(x)=x^2+x-6$ се заемно прости, и покрај тоа што $D(f, g)=x-4$, $D(f, h)=x-2$, $D(g, h)=x+3$.

ЗАДАЧИ

1. Да се одреди најголемиот заеднички делител за полиномите:
   а) $f(x)=x^3+8x^2+19x+12$ и $g(x)=x^3+9x^2+26x+24$,
   б) $A(x)=x^5+6x^4+13x^3+14x^2+12x+8$ и $B(x)=x^5-6x^3+5x$.
2. Да се одреди $D(f, g)$ за полиномите:
   а) $f(x)=x^6-7x^4+8x^3-7x+x$, $g(x)=3x^5-7x^3+3x^2-7$,
   б) $f(x)=x^4+7x^3+19x^2+23x+10$, $g(x)=x^4+7x^3+18x^2+22x+12$,
   в) $f(x)=x^4-4x^3+1$, $g(x)=x^3-3x^2+1$,
   г) $f(x)=x^4-6x^2-8x-3$, $g(x)=x^4-4x^3+8x+3$.
3. Да се изберат полиноми $A(x)$ и $B(x)$, такви што $f(x)\cdot A(x)+g(x)\cdot B(x)=d(x)$, каде $d(x)=D(f, g)$, ако:
   а) $f(x)=x^6-4x^5+11x^4-27x^3+37x^2-35x+35$,
   $g(x)=x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25$,
   б) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$, $g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$.

4*. Да се изберат полиноми $A(x)$ и $B(x)$, такви што $f(x)\cdot A(x)+g(x)\cdot B(x)=1$, ако $D(f, g)=1$ и:
   а) $f(x)=3x^3-2x^2+x+2$, $g(x)=x^2-x+1$,
   б) $f(x)=3x^4-5x^3+4x^2-2x+1$, $g(x)=3x^3-2x^2+x-1$.

5*. Да се изберат полиноми $A(x)$ и $B(x)$ од најнизок степен, кои ќе го задоволуваат равенството:
   $(x^4+2x^3+x+1)\cdot A(x)+(x^4+x^3-2x^2+2x-1)\cdot B(x)=x^3-2x$.

§12. МЕТОД НА НЕОПРЕДЕЛЕНИ КОЕФИЦИЕНТИ

При операциите со полиноми и трансформациите на полиномите од еден во друг вид, многупати се служиме со таканаречениот **метод на неопределени коефициенти**. Обично го применуваме во случаите кога сакаме даден израз да трансформираме во друг идентичен израз од определен вид, со коефициенти, што треба да се определат.

Бараните бројки коефициенти ги означуваме со букви и ги третираме како непознати. Потоа, користејќи го условот дека дадениот и трансформираниот израз треба да се идентични, даваме произволни (избрани) вредности на аргументот (променливата) и добиените вредности на двата израза ги споредуваме. Така добиваме одреден број равенки за наоѓање на непознатите коефициенти. Ако се работи за

полиноми, тогаш равенките за наоѓање на бараните непознати коефициенти ги добиваме со споредување на соодветните коефициенти на дадениот и трансформираниот полином. Како тоа го остваруваме во практика ќе покажеме на следниве неколку примери.

Пример 1. Производот $(x + 3)(x - 2)(x + 4)$ да го трансформираме во вид на полином.

Решение. Очигледно е дека дадениот производ е полином од трет степен, чиј коефициент пред водечкиот член е еднаков на 1, а слободниот член е еднаков на -24. Значи, треба да важи идентитетот $(x + 3)(x - 2)(x + 4) \equiv x^3 + ax^2 + bx - 24$.

За одредување на коефициентите a и b, на аргументот x згодно е да дадеме вредности $x = -3$ и $x = 2$. Притоа ги добиваме равенките $9a - 3b - 51 = 0$ и $4a + 2b - 16 = 0$, во кои непознати се бараните коефициенти a и b. Кога ќе го решиме добиениот систем равенки $\begin{cases} 3a - b = 17 \\ 2a + b = 8 \end{cases}$ наоѓаме: $a = 5$, $b = -2$.

Според тоа, $(x + 3)(x - 2)(x + 4) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$.

Пример 2. Полиномот $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 8x - 1$ да го поделиме со полиномот $g(x) = 2x^2 + x - 1$.

Решение. Во нашиот случај бараниот количник $q(x)$ ќе биде полином од втор степен, што со помош на неопределени коефициенти го запишуваме $q(x) = ax^2 + bx + c$. Остатокот $r(x)$ ќе биде од прв степен, па според тоа ќе го има видот $r(x) = dx + e$. Во таков случај од идентитетот:

$2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 1 \equiv (2x^2 + x - 1)(ax^2 + bx + c) + dx + e$ или

$2x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x - 1 \equiv 2ax^4 + (a + 2b)x^3 + (2c + b - a)x^2 + (d + c - b)x + e - c$,

согласно со теоремата [8.2], добиваме:

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ a + 2b = -3 \\ 2c + b - a = 3 \\ d + c - b = 8 \\ e - c = -1 \end{cases}, \quad \text{оттука} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \\ d = 3 \\ e = 2 \end{cases}$$

Според тоа: $q(x) = x^2 - 2x + 3$ и $r(x) = 3x + 2$

Пример 3. Со методот на неопределени коефициенти да се изберат полиноми $A(x)$ и $B(x)$ такви што да важи

$f(x) \cdot A(x) + g(x) \cdot B(x) = 1$, за $f(x) = x^3$, $g(x) = (x - 1)^2$

Решение. Полиномот $A(x)$ може да биде најмногу од прв степен, а полиномот $B(x)$ - најмногу од втор степен. (Зошто)? Нека $A(x) = ax + b$ и $B(x) = cx^2 + dx + e$. Од равенството

$x^3(ax + b) + (x - 1)^2 \cdot (cx^2 + dx + e) = 1$,

кое по ослободување од заградите и подредување на левата страна по степените на x:

$(a + c)x^4 + (b - 2c + d)x^3 + (c - 2d + e)x^2 + (d - 2e)x + e \equiv 1$, добиваме

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b-2c+d=0 \\ c-2d+e=0 \\ d-2e=0 \\ e=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \\ c=3 \\ d=2 \\ e=1 \end{cases}$$

Според тоа, $A(x) = -3x + 4$, $B(x) = 3x^2 + 2x + 1$

ЗАДАЧИ

1. Одреди ги коефициентите m и n така што полиномот $x^4 - 3x^3 + 3x^2 + mx + n$ да биде делив со $q(x) = x^2 - 3x + 2$.

2. Да се одредат коефициентите a и b на полиномот $x^3 - 2x^2 + ax + b$, така што тој да биде делив со $x-1$, а при делењето со $x-2$ да се добие остаток 4.

3*. Одреди ги параметрите p и k така што полиномот $x^4 + px^2 + k$ биде делив со полиномот $x^2 + px + k$.

4. При кои услови полиномот $x^3 + ax + b$ ќе биде делив со полиномот $x^2 + cx - 1$?

5*. За кои вредности на коефициентите a и b полиномот $x^6 + ax^2 + bx + 1$ е делив со $x^2 - 1$?

6. За кои вредности на a и b полиномот $x^3 + 8x^2 + 5x + a$ е делив со полиномот $x^2 + 3x + b$?

7. Да се одредат коефициентите p и k така што полиномот $2x^5 - px^4 + kx^2 - 7$ поделен со $x - 2$ да даде остаток 61, а поделен со $x - 1$ да даде остаток 2.

8.*. Да се изберат полиноми $A(x)$ и $B(x)$ од најнизок степен, кои ќе го задоволуваат равенството

$(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 6x + 1) \cdot A(x) + (x^3 - 5x - 3) \cdot B(x) = x^4$

9. Да се определат коефициентите a и b така што триномот $ax^4 + bx^3 + 1$ да биде делив со $(x - 1)^2$.

§13. НУЛИ НА ПОЛИНОМИТЕ

13.1. ЕДНОКРАТНИ НУЛИ

За различни вредности на аргументот x, полиномот

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0 \qquad (1)$$

добива, исто така, различни вредности. Од сите вредности на аргументот x, за нас посебен интерес претставуваат вредностите на x за кои полиномот $f(x)$ добива вредност нула. Тие вредности на аргументот x се викаат **нули** или **корени на полиномот** $f(x)$.

Според тоа, бројот c се вика нула (корен) на полиномот (1), ако $f(c) = 0$.

Да видиме каква врска постои меѓу нулите на полиномот $f(x)$ и неговите **линеарни делители**, т.е. со делителите од видо $x - c$. Таа врска ја утврдува следнава важна

Теорема[13.1]. ***Бројот c е нула на полиномот $f(x)$, ако и само ако $f(x)$ е делив со $x - c$, т.е. ако $(x - c) \mid f(x)$.***

Доказ. а) Нека бројот c е нула на полиномот $f(x)$, т.е. нека $f(c) = 0$. Но, според теоремата на Безу, остатокот од делењето на $f(x)$ со $x - c$ е еднаков на $r = f(c)$. Бидејќи е $f(c) = 0$, затоа ќе биде и $r = 0$. Според тоа, полиномот $f(x)$ е делив со $x - c$.

б) Нека полиномот $f(x)$ е делив со $x - c$, тогаш ќе важи идентитетот $f(x) \equiv (x - c) \cdot q(x)$. Во тој случај за $x = c$ имаме $f(c) = (c - c) \cdot q(c) = 0$. Значи, бројот c е нула на $f(x)$.

Со тоа Т[13.1] е докажана. Според тоа, одредувањето на нулите на полиномот $f(x)$ е еквивалентно со одредувањето на линеарните делители (фактори) на $f(x)$. Затоа гореспоменатата теорема ја викаме и **теорема на факторизација на полиномот.**

Теорема [13.2]. ***Ако полиномот $f(x)$ од n - ти степен има k ($k \leq n$) различни нули $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$, тогаш $f(x)$ е делив со производот $(x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_k)$.***

Доказ. Бидејќи c_1 е нула на полиномот $f(x)$, тогаш врз основа на дефиницијата за деливост на полиноми, имаме

$$f(x) \equiv (x - c) \cdot q_1(x) \qquad (2)$$

Бидејќи и c_2 е нула на $f(x)$, затоа ќе биде

$$f(c_2) = (c_2 - c_1) \cdot q_1(c_2) = 0$$

Меѓутоа $c_2 \neq c_1$, затоа мора да е $q_1(c_2) = 0$. Тоа значи дека c_2 е нула на полиномот $q_1(x)$, па затоа тој е делив со $x - c_2$, т.е. $q_1(x) \equiv (x - c_2) \cdot q_2(x)$ (3)

Со замена на $q_1(x)$ од (3) во (2), добиваме:

$$f(x) \equiv (x - c_1)(x - c_2) \cdot q_2(x) \qquad (4)$$

Бидејќи и c_3 е нула на полиномот $f(x)$, затоа:

$$f(c_3) = (c_3 - c_1)(c_3 - c_2) \cdot q_2(c_3) = 0$$

Но бидејќи $c_3 \neq c_2 \neq c_1$, затоа мора да биде $q_2(c_3) = 0$, а тоа значи дека c_3 е нула на полиномот $q_2(x)$, па затоа тој е делив со $x - c_3$, т.е.

$$q_2(x) \equiv (x - c_3)\, q_3(x) \qquad (5)$$

Со замена на $q_2(x)$ од (5) во (4), добиваме:

$$f(x) \equiv (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)\, q_3(x) \qquad (6)$$

Ако оваа постапка ја продолжиме, ќе го добиеме идентитетот

$$f(x) \equiv (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \ldots (x - c_k)\, q_k(x), \qquad (7)$$

каде што $q_k(x)$ е полином од (n – k)-ти степен, чиј водечки коефициент е еднаков на a_0. Со тоа Т[13.2] е докажана.

Користа од примената на равенството (7) ќе ја согледаме при решавањето на следниов пример:

Пример 1. Да докажеме дека полиномот $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$ е делив со $g(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$.

Решение. Задачата по редовен пат ќе ја решиме кога прво ќе го извршиме множењето $(x - 1)(x + 2)(x - 3) = g(x)$, а потоа делењето на $f(x)$ со $g(x)$, па ако добиеме остаток нула, заклучуваме дека $g(x) \mid f(x)$. Меѓутоа, равенството (7) овозможува задачата да се реши само преку пресметување на вредностите f(1), f(–2), f(3).

Тие вредности на полиномот $f(x)$ лесно ги одредуваме со помош на Хорнеровата шема. А ако се има предвид својството:

$$(x - c_2) \mid (x - c_1) \cdot q(x) \Rightarrow (x - c_2) \mid q(x), \qquad c_1 \neq c_2$$

тогаш со примена на Хорнеровата шема прво по однос на $c_1 = 1$, потоа по однос на $c_2 = -2$ и накрај по однос на $c_3 = 3$, добиваме:

	1	–2	–4	4	–5	6
1	1	–1	–5	–1	–6	0
–2	1	–3	1	–3	0	
3	1	0	1	0		

Според тоа, $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x - 3)(x^2 + 1)$

Од истата шема следуваат и следниве равенства:

$x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6)$

$x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x + 2)(x^3 - 3x^2 + x - 3)$,

$x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = (x + 2)(x^3 - 3x^2 + x - 3)$,

$x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)(x^2 + 1)$

и $x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x - 3)(x^2 + 1)$

13.2. ПОВЕЌЕКРАТНИ НУЛИ

Видовме дека, ако c е нула на полиномот $f(x)$, т.е. ако $f(c) = 0$, тогаш тој е делив со $x - c$. Меѓутоа, полиномот $f(x)$ понекогаш може да е делив освен со $(x - c)$, и со $(x - c)^k$, каде што $1 < k < n$. Во тој случај велиме дека бројот c е **повеќекратна нула** на полиномот.

Дефиниција. *За бројот $x = c$ велиме дека е повеќекратна нула со кратност k (или k-кратна нула) на полиномот $f(x)$, ако $f(x)$ е делив со $(x - c)^k$, но не е делив со $(x - c)^{k+1}$.*

Очиглено, ако c е k-кратна нула на полиномот f(x), тој може да се запише во видот

$$f(x) \equiv (x - c)^k \cdot g(x) \tag{8}$$

каде $g(x)$ е полином за кого е $g(c) \neq 0$.

Ако е $k = 1$, тогаш велиме дека c е **еднократна нула** или **проста нула** на $f(x)$.

Пример 2. Да утврдиме $x = 2$ колку кратна нула е на полиномот $f(x) = x^5 - 6x^4 + 13x^3 - 14x^2 + 12x - 8$.

Решение. Ја применуваме Хорнеровата шема едно по друго врз $f(x)$ и добиваме количници при нивното делење со $x - 2$:

	1	–6	13	–14	12	–8
2	1	–4	5	–4	4	0
2	1	–2	1	–2	0	
2	1	0	1	0		

Гледаме дека последниот количник $q_3(x) = x^2 + 1$ не е делив со $x - c$, бидејќи $q_3(2) = 5$. Според тоа, полиномот $f(x)$ е делив со $(x - 2)^3$, но не е делив со $(x - 2)^4$. Значи $x = 2$ е трикратен корен на $f(x)$ и запишуваме: $f(x) \equiv (x - 2)^3(x^2 + 1)$.

13.3. ТЕОРЕМИ ЗА ИДЕНТИЧНОСТ НА ПОЛИНОМИТЕ

Порано во §8 усвоивме дека, полиномот $f(x)$ кој за секоја вредност на x добива вредност нула, се вика нула полином, а со T[8.1] утврдивме дека $f(x)$ е нула полином, ако и само ако сите негови коефициенти се еднакви на нула.

Сега ќе покажеме како може да се утврди и на друг поедноставен начин дали полином $f(x)$ е нула полином или не.

Теорема [13.3]. ***Ако полиномот $f(x)$, чиј степен не е поголем од n, добива вредност нула за $n + 1$ различни вредности на x, тогаш $f(x)$ е нула полином.***

Доказ. Да претпоставиме дека $f(x)$ не е нула полином. Според условот на теоремата тој има степен непоголем од n. Но бидејќи тој има $n + 1$ различна нула: $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$, затоа согласно со T[13.2] тој е делив со производот

$(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_{n+1})$, т.е. имаме

$f(x) \equiv (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_{n+1}) \cdot \varphi(x)$.

А тоа значи дека полиномот $f(x)$ има степен непомал од $n + 1$. Гледаме дека дојдовме во контрадикција со условот на теоремата. Тоа покажува дека нашата претпоставка дека $f(x)$ не е нула полином е неточна.

Според тоа, точно е тврдењето на теоремата.

Порано со Т[8.2] утврдивме дека, два полинома $f(x)$ и $g(x)$ се идентични, ако и само ако тие имаат еднакви степени и коефициентите пред еднаквите степени на x, им се еднакви. Ќе покажеме како идентичноста на два полинома може да се утврди и на многу поедноставен начин.

Теорема [13.4]. ***(Теорема за идентификација). Два полинома f(x) и g(x), чии степени не се поголеми од n, се идентични, ако за n + 1 различни вредности на x тие добиваат соодветно еднакви вредности.***

Доказ. Да ја разгледаме разликата $R(x) = f(x) - g(x)$. Согласно условот на теоремата, полиномот $R(x)$ ќе има степен што не е поголем од n и за $n + 1$ различни вредности на x ќе има вредност нула. Тоа според Т[13.3] полиномот $R(x) = f(x) - g(x)$ е нула полином, т.е. $R(x) = f(x) - g(x) \equiv 0$, односно, $f(x) \equiv g(x)$, штд.

Пример 3. Да провериме дали полиномот $f(x) = 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{9}{2}x - 1$ и целиот рационален израз $g(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)(x-2) + \frac{1}{3}(x+2)(x+1)(x-2) + \frac{1}{6}(x+1)(x-1)(x+2) + (x+2)(x+1)(x-1)$ се идентични изрази.

Решение. Испитувањето може да се изврши на два начина. Првиот начин би бил: изразот $g(x)$ да се трансформира во канонична (полиномна) форма (извршувајќи ги сите назначени операции во него) и всушност, да се добие $f(x)$. Вториот начин е да провериме: дали $g(x)$ е од трет степен како и $f(x)$; и дали за четири (3 + 1) различни вредности на x тие добиваат еднакви вредности. Во нашиот случај вториот начин е поедноставен.

Коефициентот пред x^3 во $g(x)$ ќе биде: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+1 = 2$, колку што е и пред x^3 во $f(x)$. Од структурата на $g(x)$ очигледно е дека најпогодни за пресметување на неговата вредност се четирите точки: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ и $x_4 = 2$, бидејќи за секоја од нив три од собироците на $g(x)$ се анулираат.

Така лесно наоѓаме дека: $f(-2) = g(-2) = -2$, $f(-1) = g(-1) = 3$, $f(1) = g(1) = -2$ и $f(2) = g(2) = 12$. Според тоа, $f(x) \equiv g(x)$.

Теорема [13.5]. ***Еден полином f(x) од n-ти степен е потполно определен, ако се познати неговите вредности за n + 1 различни вредности на аргументот x.***

Доказ. Знаеме дека полиномот $f(x)$ од n-ти степен е потполно определен, ако се познати неговите коефициенти $(a_0, a_1, ..., a_n)$. Од друга страна, согласно условот на теоремата, ако се познати броевите $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_{n+1})$, тогаш со нивна помош и со броевите $x_1, x_2, ..., x_n$ и x_{n+1}, за кои претпоставуваме дека се различни, го составуваме системот:

$$\begin{cases} a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + a_2x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x_1 + a_n = f(x_1) \\ a_0x_2^n + a_2x_2^{n-1} + a_2x_2^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x_2 + a_n = f(x_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0x_{n+1}^n + a_1x_{n+1}^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1}x_{n+1} + a_n = f(x_{n+1}) \end{cases} \quad (*)$$

од $n + 1$ равенки, во кои непознати се коефициентите a_0, a_1, a_2, ..., a_n, кои исто така на број ги има $n + 1$. Кога ќе го решиме системот (*), ќе ги добиеме бараните коефициенти на f(x). Значи, полиномот f(x) е определен.

Пример 4. Да се определи полином f(x) од втор степен, кој за $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$ добива вредности f(–1) = 1, f(2) = – 2 и f(3) = 5.

Решение. Бараниот полином нека е $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$. Го составуваме системот

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 1 \\ 4a_0 + 2a_1 + a_2 = -2 \\ 9a_0 + 3a_1 + a_2 = 5 \end{cases}$$

и по неговото решавање добиваме дека има единствено решение (2, –3, –4), односно, $a_0 = 2$, $a_1 = -3$, $a_2 = -4$. Според тоа, бараниот полином е $f(x) = 2x^2 - 3x - 4$.

ЗАДАЧИ

1. Даден е полиномот $f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$. Испитај кои од броевите: –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 се негови нули.

2. Дадени се полиномите $f(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ и $g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$. Испитај кои од броевите –1, 3, $\frac{1}{2}$ се заеднички нули на полиномите f(x) и g(x).

3. Даден е полиномот $f(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$. Испитај дали $x = -2$ е негова нула и ако е, одреди колку кратна нула е на полиномот f(x).

4. Одреди ги коефициентите a и b на полиномот $f(x) = 5x + ax^2 + bx + 1$ така што бројот –1 да е барем двократна негова нула.

5. Одреди колку кратна нула е бројот 5 на полиномот $f(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125$.

6. Испитај дали полиномот $f(x) = x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6$ е делив со производот $(x + 1)(x + 2)(x - 3)$, и ако е делив, одреди го полиномот количник.

7*. Испитај дали изразот $f(x) = 1 + 2(x - 1) + 3(x - 1)(x - 2) + 4(x - 1)(x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ е идентичен со полиномот $\varphi(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 15x + 5$.

8*. Одреди го полиномот f(x) од трет степен, кој за вредностите на x: –1, 0, 1, 2 добива соодветни вредности: f(–1) = 0, f(0) = 6, f(1) = 10, f(2) = 24.

9*. Докажи дека целиот рационален израз

$$P(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} - 1,$$

каде што $a \neq b \neq c$ се дадени броеви, е нула полином.

10. Одреди полином P(x) од четврти степен, за кој P(–1) = 3, P(0) = 5, P(1) = 5, P(2) = –3, P(3) = – 1.

§14. ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АЛГЕБРАТА

Од равенството $(x-1)(x+2)(x+3)(x+4) = x^4 + 8x^3 + 17x^2 - 2x - 24$ гледаме дека полиномот $f(x) = x^4 + 8x^3 + 17x^2 - 2x - 24$ од четврти степен има точно четири нули. Меѓутоа, се поставува прашањето: дали секој полином од четврти или друг степен има воопшто барем една нула? Тоа е прашање што треба поопстојно да се разгледа. На пример, полиномот $x^4 + 1$ во полето на реалните броеви нема ниту една нула, бидејќи за кој било (позитивен или негативен) реален број $x = x_0$ е $x_0^4 \geq 0$, а збирот $x_0^4 + 1$ е секогаш позитивен реален број. Тоа не значи, пак, дека полиномот $x^4 + 1$ и во полето на комплексните броеви нема нули. Полиномите од нулти степен, освен нула полиномот, воопшто не се анулираат, а за полиномите од прв и втор степен знаеме дека имаат нули.

Проблемот за егзистенција на нули на полиномот го решава следнава:

Основна теорема на алгебрата. ***Секој полином од степен $n \geq 1$, со бројни коефициенти во полето на комплексните броеви има барем една нула, во општ случај комплексна.***

Оваа теорема е едно од поголемите откритија во целата математика и претставува основа на теоријата на полиноми со бројни коефициенти. Затоа таа се вика **основна теорема на алгебрата**, или **Гаусова теорема** по името на германскиот математичар К. Ф. Гаус (1777 – 1852), кој прв ја докажал строго на 22 години во својата докторска дисертација.

Доказот на оваа теорема е многу сложен и тој се дава во вишата алгебра. Во сите докази (а ги има повеќе) во поголема или помала мера се користат тополошките својства на реалните и комплексните броеви - својства што се врзани со непрекинатоста.

Забелешка. Докази во кои се користи **непрекинатост, извод** и други поими, што се изградени преку поимот **лимес**, не се сметаат за алгебарски. Тоа се средства на математичката анализа, а токму такви средства се користат при доказот на теоремата на Гаус. Затоа Основната теорема на алгебрата, всушност, не е чисто алгебарска.

Ќе докажеме некои теореми, што се последица на основната теорема на алгебрата.

Теорема[14.1]. ***Секој полином $P(x)$ од n-ти степен ($n > 1$) во множеството на комплексните броеви може да се разложи на n линеарни множители.***

Доказ. Според основната теорема на алгебрата, полиномот

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

во множеството $\mathbb{C}$ има барем една нула $x = c_1$, па според тоа тој е делив со $x - c_1$, т.е.

$$P(x) \equiv (x - c_1)\, p_1(x), \tag{2}$$

каде $p_1(x)$ е некој полином од степен $n - 1$.

Ако $n - 1 \geq 1$, тогаш врз основа пак на ОТА (основната теорема на алгебрата) и полиномот $p_1(x)$ има барем една нула $x - c_2$. Значи, тој е делив со $x - c_2$, т.е.

$$p_1(x) \equiv (x - c_2)p_2(x), \tag{3}$$

каде $p_2(x)$ е полином од степен $n - 2$.

Со замена на $p_1(x)$ од (3) во (2), добиваме:

$$P(x) \equiv (x - c_1)(x - c_2)p_2(x) \qquad (4)$$

Продолжувајќи ја оваа постапка n пати, добиваме:

$$P(x) \equiv (x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)p_n(x), \qquad (5)$$

каде $p_n(x)$ е полином од степен $n - n = 0$, т.е. некоја константа.

Бидејќи, водечките коефициенти на полиномите $p_1(x), p_2(x), p_3(x), \dots$ се еднакви на водечкиот коефициент a_0 на $P(x)$, затоа и $p_n(x) = a_0$. Според тоа, идентитетот (5) го добива видот:

$$\mathbf{P(x) \equiv a_0(x - c_1)(x - c_2) \dots (x - c_n)}, \qquad (6)$$

каде $c_1, c_2, \dots, c_n$ се нули на $P(x)$, а a_0 - неговиот водечки коефициент.

Со тоа Т[14.1] е докажана.

Може да се покаже дека, **за полиномот $P(x)$ разложувањето (6) е единствено со точност до редоследот на множителите во него.**

Разбирливо е дека некои од нулите $c_1, c_2, \dots, c_n$ на полиномот $P(x)$ можат да бидат и еднакви. Ако со $c_1, c_2, \dots, c_m$ ги означиме различните нули на $P(x)$, а со $k_1, k_2, \dots, k_m$ кратноста на секоја од нив, тогаш идентитетот (6) го добива видот:

$$P_n(x) \equiv a_0(x - c_1)^{k1}(x - c_2)^{k2} \dots (x - c_m)^{km}, \qquad (7)$$

каде што $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$

Теорема[14.2]. ***Секој полином $P(x)$ од n-ти степен ($n \geq 1$) во множеството на комплексните броеви има точно n нули, при што секоја нула се брои толку пати, колку што е нејзината кратност.***

Доказ. Согласно Т[14.1] секој полином $P(x)$ од n-ти степен може да се запише како производ од n линеарни множители (6) каде што $c_1, c_2, \dots, c_n$ се нули на полиномот $P(x)$. Освен тие броеви, никој друг број с различен од нив не може да биде нула на полиномот $P(x)$, бидејќи ниту еден од множителите на десната страна на (6) не станува еднаков на нула, па затоа ќе биде $P(c) \neq 0$, штд.

Од теоремата [14.2] следува следнава:

Последица [14.1]. Полиномот $P(x)$ од n-ти степен во множеството на реалните броеви $\mathbb{R}$, а исто и во множеството на рационалните броеви $\mathbb{Q}$ може да има најмногу n нули.

Навистина, во множеството на комплексните броеви полиномот $P_n(x)$ има точно n нули. Но, помеѓу n-те комплексни нули на $P_n(x)$ се наоѓаат и сите реални, и сите рационални нули на $P_n(x)$. Според тоа, бројот на реалните и рационалните нули на $P_n(x)$ не може да биде поголем од n.

Пример. Да покажеме дека $x_1 = i$ и $x_2 = -i$ се нули на полиномот $P(x) = x^6 + 1$ и да го разложиме на множители.

Решение. $P(i) = i^6 + 1 = i^{4+2} + 1 = 1 \cdot (-1) + 1 = 0$, $P(-i) = (-i)^6 + 1 = i^6 + 1 = -1 + 1 = 0$, или со помош на Хорнеровата шема:

	1	0	0	0	0	0	1
i	1	i	$i^2=-1$	$-i$	1	i	0
$-i$	1	0	-1	0	1	0	

Според тоа, важи разложувањето: $x^6 + 1 = (x - i)(x + i)(x^4 - x^2 + 1)$

§15. ВИЕТОВИ ФОРМУЛИ

Даден е полином од n-ти степен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (1)$$

Видовме дека тој може да се изрази и како производ од n линеарни множители:

$$P(x) = a_0(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_{n-1})(x - c_n), \qquad (2)$$

каде што c_1, c_2, ..., c_{n-1}, c_n се неговите n нули (реални или комплексни). Тука ќе претпоставиме дека сите нули се прости (еднократни), но ако меѓу нив има и повеќекратни, тогаш секоја таква нула е толку пати кратна колку што е нејзината кратност.

Да го извршиме множењето на биномите во (2) кои се разликуваат само по вторите членови, не земајќи го предвид коефициентот a_0 (или сметајќи дека е $a_0 = 1$).

Прво ќе го одредиме производот на првите два множителя:

$p_2 = (x - c_1)(x - c_2) = x^2 - (c_1 + c_2)x + c_1c_2$, потоа

$p_3 = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) = x^3 - (c_1 + c_2 + c_3)x^2 + (c_1c_2 + c_1c_3 + c_2c_3)x - c_1c_2c_3$,

$p_4 = (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3)(x - c_4) = x^4 - (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)x^3 + (c_1c_2 + c_1c_3 + c_1c_4 + c_2c_3 + c_2c_4 + c_3c_4)x^2 - (c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + c_1c_3c_4 + c_2c_3c_4)x + c_1c_2c_3c_4$.

Множејќи и понатаму на тој начин, ќе го добиеме и производот

$$p_n = (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_n) = x^n - (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)x^{n-1} + (c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n)x^{n-2} - (c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \ldots + c_{n-2}c_{n-1}c_n)x^{n-3} + \ldots + (-1)^k(c_1c_2 \ldots c_k + c_1c_2 \ldots c_{k-1}c_{k+1} + \ldots)x^k + \ldots + (-1)^n c_1c_2 \ldots c_n \qquad (3)$$

Ако полиномот p_n го помножиме со a_0, согласно (2) добиваме полином идентичен со $P(x)$, т.е.

$a_0p_n = P(x)$, односно,

$$a_0x^n - a_0(c_1 + c_2 + \ldots + c)x^{n-1} + a_0(c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n)x^{n-2} - a_0(c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \ldots + c_{n-2}c_{n-1}c_n)x^{n-3} + \ldots + (-1)^k a_0(c_1c_2 \ldots c_k + c_1c_2 \ldots c_{k-1}c_{k+1} + \ldots)x^k + \ldots + (-1)^n a_0c_1c_2 \ldots c_n \equiv a_0x^n + a_1x_{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (4)$$

Со споредување на коефициентите пред еднаквите степени на x во левата и десната страна на идентитетот (4) ги добиваме равенствата:

$$c_1 + c_2 + \ldots + c_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$c_1c_2 + c_1c_3 + \ldots + c_{n-1}c_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$c_1c_2c_3 + c_1c_2c_4 + \ldots + c_{n-2}c_{n-1}c_n = -\frac{a_3}{a_0}, \qquad (5)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1c_2 \ldots c_{n-1} + c_1c_2 \ldots c_{n-2}c_n + \ldots + c_2c_3 \ldots c_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_0},$$

$$c_1c_2c_3 \ldots c_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Овие равенства, кои ни ја даваат врската меѓу нулите и коефициентите на полиномот $P(x)$ од n-ти степен, се викаат **Виетови формули**.

Забележуваме дека левата страна кај k-тото равенство (k = 1, 2, 3, ..., n) претставува збир од семожните производи од по k различни нули, земен со знак плус или минус, во зависност од парноста или непарноста на бројот k.

Виетовите формули може да се користат за одредување на полиномот, ако се познати неговите нули.

Пример 1. Да се најде полином од четврти степен, кој има прости нули 2 и –5 и една двократна нула 3.

Решение. Нули на бараниот полином се: $x_1 = 2, x_2 = -5, x_3 = 3, x_4 = 3$, а a_0 нека е 1. Од равенствата (5) добиваме:

$a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -(2 - 5 + 3 + 3) = -3,$
$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -10 + 6 + 6 - 15 - 15 + 9 = -19,$
$a_3 = -(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) = -(-30 - 30 + 18 - 45) = 87,$
$a_4 = x_1x_2x_3x_4 = -90.$

Според тоа, бараниот полином е $P(x) = x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 87x - 90$.

Меѓутоа, оваа задача може да се реши и поедноставно, директно со пресметување на производот

$P(x) = (x - 2)(x + 5)(x - 3)(x - 3)$

Со користење на следнава табела (види табела (10) во §9):

5	1	–2			
–3	1	3	–10		
–3	1	0	–19	30	
	1	–3	–19	87	–90

добиваме дека $a_1 = -3$, $a_2 = -19$, $a_3 = 87$, $a_4 = -90$, т.е.

$P(x) = x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 87x - 90$

Пример 2. За полиномот $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$ да се одреди збирот од квадратите на неговите нули.

Решение. Нека x_1, x_2 и x_3 се нули на даденият полином. Според Виетовите правила (5) имаме:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2x_3 = 3 \end{cases} \tag{6}$$

Од идентитетот $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ и равенствата (6), добиваме

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2^2 - 2 \cdot 1 = 2$

ЗАДАЧИ

1. Да се формира полином од четврти степен, чии корени се: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.
2. Напиши ги Виетовите формули за полиномот $x^3 + ax + b$ и одреди ги неговите нули, ако една од нив е двократна.
3. Одреди ги коефициентите a и b на полиномот $P(x) = ax^4 + bx^2 + 1$, ако се знае дека има двократна нула $x = 1$.
4. Кој услов треба да го задоволуваат коефициентите a, b и c на полиномот $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, така што за неговите нули да важи релацијата $x_1 + x_2 = x_3$.

5*. Формирај полином P(y) од трет степен по y, чии нули се $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_2 + x_3$, $y_3 = x_3 + x_1$, каде што x_1, x_2 и x_3 се нули на полиномот $Q(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

6*. Даден е полиномот $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$. Одреди го збирот: а) од реципрочните вредности на неговите нули, б) од квадратите на неговите нули.

7*. Полиномот $P(x) = x^3 - 2x^2 + 25x - 50$ има две нули со еднаква апсолутна вредност, но спротивни по знак. Одреди ги неговите нули.

§16. ПОЛИНОМИ СО КОМПЛЕКСНИ И РЕАЛНИ КОЕФИЦИЕНТИ

1. Даден е полономот од n-ти степен:

$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq 0$ (1)

Ако сите негови коефициенти $a_0, a_1, ..., a_n$ се реални броеви, а променливата x се менува во полето на комплексните броеви, тогаш велилме дека P(x) е **реален полином со комплексна променлива**. Ако, пак еден од коефициентите е комплексен и $x \in \mathbb{C}$, тогаш велиме дека P(x) е полином со комплексни коефициенти од комплексна променлива. Во тој случај, ако означиме $a_k=\alpha_k+\beta_k i$ $(k=0,1,2,...,n)$ и замениме во (1), добиваме

$P(x)=(\alpha_0+\beta_0 i)x^n+(\alpha_1+\beta_1 i)x^{n-1}+...+(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}i)x+(\alpha_n+\beta_n i)=$

$=(\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+...+\alpha_{n-1}x+\alpha_n)+i(\beta_0x^n+\beta_1x^{n-1}+...+\beta_{n-1}x+\beta_n)$, каде што полиномите

$A(x)=\alpha_0x^n+\alpha_1x^{n-1}+...+\alpha_{n-1}x+\alpha_n$ и

$B(x)=\beta_0x^n+\beta_1x^{n-1}+...+\beta_{n-1}x+\beta_n$ се реални коефициенти, т.е. реални.

Според тоа, секој полином со комплексни коефициенти може да се запише во видот $P(x)=A(x)+iB(x)$, каде што $A(x)$ и $B(x)$ се реални полиноми.

На пример, за комплексниот полином

$P(x)=x^4+(1-2i)x^3+(3+i)x^2-4x+2-3i$ имаме:

$P(x)=x^4+x^3+3x^2-4x+2+i(-2x^3+x^2-3)$ т.е.

$A(x)=x^4+x^3+3x^2-4x+2,\ B(x)=-2x^3+x^2-3.$

За комплексни полиноми важи следнава интересна:

Теорема[16.1]. ***Ако еден комплексен полином P(x) од n-ти степен добива реални вредности за n+1 реални и различни вредности на x, тогаш тој е реален полином.***

Доказ: Видовме дека комплексниот полином P(x) од n може да се запише во видот $P(x)=A(x)+iB(x)$, каде што $B(x)$ е реален полином со степен не поголем од n. Нека $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ се $n+1$ различни реални броеви, за кои и соодветните вредности на $P(x)$: $P(x_1), P(x_2), ..., P(x_n), P(x_{n+1})$ се исто така реални броеви.

Бидејќи $P(x_k)=A(x_k)+iB(x_k)$, $k=(1, 2, 3, ..., n, n+1)$ се реални броеви, следува дека $B(x_1)=B(x_2)=...=B(x_n)=B(x_{n+1})=0$. Тогаш согласно со T[13.3] B(x) е нула полином, а оттука следува дека P(x) е реален полином.

2. Ќе се задржиме на неколку важни последици од Основната теорема на алгебрата, а што се однесуваат на полиномите со реални коефициенти.

Теорема[16.2]. ***За секој реален полином P(x) и секој комплексен број α важи равенството*** $P(\overline{\alpha})=\overline{P(\alpha)}$ (2)

Доказ. Нека полиномот (1) е со реални коефициенти. Бидејќи $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви, тогаш $a_k=a_k$ (k = 0, 1, 2, ..., n), па ќе имаме:

$$P(\overline{\alpha}) = a_0\overline{\alpha}^n + a_1\overline{\alpha}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\overline{\alpha} + a_n = \overline{a}_0\,\overline{a^n} + \overline{a}_1\,\overline{a^{n-1}} + \ldots + \overline{a}_{n-1}\overline{\alpha} + \overline{a}_n =$$

$$\overline{a_0\alpha^n} + \overline{a_1\alpha^{n-1}} + \ldots + \overline{a_{n-1}\alpha} + \overline{a}_n = \overline{a_0\alpha^n + a_1\alpha_{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha + a_n} = \overline{P(\alpha)}.$$

Тука ги користевме својствата на конјугирано комплексните броеви:

$(\overline{z})^n = \overline{z^n}$, $\overline{z}\cdot\overline{w} = \overline{z\cdot w}$ и $\overline{z}+\overline{w} = \overline{z+w}$.

Според равенството (2), ако ја знаеме вредноста P(α) тогаш вредноста $P(\overline{\alpha})$ без посебно пресметување добиваме дека $P(\overline{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.

Пример 1. За полиномот $P(x)=x^2-x+3$ имаме:
$P(2+i)=(2+i)^2-(2+i)+3=4+4i+i^2-2-i+3=4+3i$. Тогаш

$P(2-i)=\overline{P(2+i)}=\overline{4+3i}=4-3i$.

Теорема [16.3]. ***Ако комплексниот број $x_0=\alpha+\beta i$ (каде што $\beta\neq 0$) е нула на реалниот полином P(x), тогаш и $\overline{x_0}=\alpha-\beta i$ е нула на P(x).***

Доказ. Нека $x_0=\alpha-\beta i$ е нула на реалниот полином P(x). Тогаш е $P(x_0)=0$, па согласно (2) ќе имаме, $P(\overline{x_0})=\overline{P(x_0)}=\overline{0}=0$ т.е. $P(\overline{x}_0)=0$, односно $\overline{x_0}=\alpha-\beta i$ е исто така нула на P(x),

Теоремата [16.3] го изразува едно од основните својства на реалните полиноми. Од неа следува дека ако x_0 и $\overline{x_0}$ се еден пар конјугирано комплексни нули на реалниот полином, P(x), тогаш тој е делив со квардратнит трином

$$g(x) = (x-x_0)(x-\overline{x}_0) = x^2-(x_0+\overline{x}_0)x + x_0\cdot\overline{x}_0 = x^2+px+q \qquad (3)$$

чии коефициенти се реални, бидејќи $(x_0+\overline{x}_0), x_0\cdot\overline{x}_0 \in \mathbb{R}$.

Може да се докаже дека важи и следнава:

Теорема [16.4]. ***Ако $x_0=\alpha+\beta i$ е k-кратна нула на реалниот полином P(x), тогаш и конјугираната нула $\overline{x}_0=\alpha-\beta i$ е исто така k-кратна на P(x).***

Доказ. Да го претпоставиме спротивното: дека x_0 е k-кратна а $\overline{x}_0$ – l - кратна нула, при што $k<l$. Тогаш полиномот P(x) ќе биде делив со полиномот $g^k(x)$, т.е. ќе важи

$P(x) = g^k(x)\cdot q(x)$, каде $g^k(x) = (x-x_0)^k(x-\overline{x}_0)^k$

Овде q(x), како количник на два реални полинома исто така е реален полином; но тоа е во противречност со Т[16.3], имено: за него бројот $\overline{x}_0$ е $(l-k)$-кратна нула, а нему конјугираниот број $\overline{\overline{x_0}} = x_0$ не е негова нула. Оттука следува дека $l=k$.

Од теоремите Т[16.3] и Т[16.4] следуваат следниве:

Последица [16.1]. Комплексните нули на секој реален полином се попарно конјугирани.

Последица [16.2]. Ако реалниот полином P(x) има комплексни нули, тогаш нив ги има парен број.

Последица [16.3]. Секој реален полином од непарен степен има барем еден реален корен.

Пример 2. Да се состави реален полином со можно најнизок степен, што ќе има нули $x_1=2$ и $x_2=1-3i$.

Решение. Врз основа на теоремата [16.3], бараниот полином $P(x)$, освен нулата $x_2 = 1 - 3i$ мора да има и нула $x_3 = 1 + 3i$. Според тоа, бараниот реален полином од најнизок степен ќе биде:

$$P(x) = (x-2)(x-1+3i)(x-1-3i) = x^3 - 4x^2 + 14x - 20.$$

3. Расудувајќи слично како за комплексните нули на реален полином, ќе покажеме дека слично својство имаат и реалните нули од видот $u + \sqrt{v}$ на полином со рационални коефициенти.

Теорема [16.5]. ***Ако реалниот број $x_0 = u + \sqrt{v}$, каде u и v се рационални броеви, а v не е квадрат на некој рационален број, е нула на полином $P(x)$ со рационални коефициенти, тогаш и $x_0 = u - \sqrt{v}$ е исто така нула на полиномот $P(x)$.***

Доказ. Нека $x = u + \sqrt{v}$, каде $u, v \in \mathbb{Q}$ и v не е квадрат на некој рационален број, е нула на полиномот $P(x)$ со рационални коефициенти, т.е. нека:

$$P(u+\sqrt{v}) = a_0(u+\sqrt{v})^n + a_1(u+\sqrt{v})^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(u+\sqrt{v}) + a_n = 0$$

Ако ги развиеме сите степени на биномот $u + \sqrt{v}$ и ги групираме одделно членовите кои не го содржат ирационалниот број $\sqrt{v}$, а одделно - членовите кои го содржат бројот $\sqrt{v}$, ќе добиеме:

$$P(u+\sqrt{v}) = A + B\sqrt{v} = 0, \qquad (4)$$

каде A е збирот на сите членови без $\sqrt{v}$, а $B\sqrt{v}$ е збирот од сите членови со $\sqrt{v}$. Бидејќи коефициентите $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, а исто и u и v се рационални броеви, затоа и изразите A и B ќе бидат рационални броеви.

Да заклучиме дека равенството $A + B\sqrt{v} = 0$ може да постои само ако $A = 0$ и $B = 0$, бидејќи ирационалниот број $\sqrt{v}$ не може да биде еднаков на рационалниот број $-\frac{A}{B}$.

Ако сега ја побараме вредноста на $P(x)$ за $x = u - \sqrt{v}$, ќе добиеме

$$P(u-\sqrt{v}) = A - B\sqrt{v}.$$

Но бидејќи е $A = B = 0$, затоа равенството (5) ќе биде $P(u - \sqrt{v}) = 0$, а оттука следува дека и $x = u - \sqrt{v}$ е нула на полиномот $P(x)$ со рационални коефициенти.

Пример 3. Да се состави полином $P(x)$ со рационални коефициенти со најнизок степен што ќе има нули $x_1 = 5$ и $x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Решение. Бараниот полином освен дадените нули, ќе ги има и нулите: $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $-\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $-\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

Според тоа, бараниот полином со рационални коефициенти од најнизок степен ќе биде:

$$P(x) = (x-5)(x-3+\sqrt{2})(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-\sqrt{2}) =$$

$$= (x-5)\,[(x-\sqrt{3})^2-2][(x+\sqrt{3})^2-2] = (x-5)(x^2-2\sqrt{3}x+1)(x^2+2\sqrt{3}x+1) =$$

$$= (x-5)[(x^2+1)^2-(2\sqrt{3}x)^2] = (x-5)(x^4+2x^2+1-12x), \text{ т.е.}$$

$$P(x) = x^5-5x^4+2x^3-22x^2+61x-5.$$

ЗАДАЧИ

1. Да се состави полином со реални коефициенти од најнизок степен, кој да има нули: $x_1 = 2-3i$ и $x_2 = -1+i$.
2. Да се состави полином со реални коефициенти од најнизок степен, на кој $x = 1$, да е двократна нула, а $x = i$ да е трикратна нула.
3. Да се одредат нулите на полиномот x^4+4, ако се знае дека бројот $1-i$ е една негова нула.
4*. Одреди ги нулите на полиномот $P(x) = x^3-7x-6$, ако се знае дека за неговите нули важи: $x_3 = 2x_1$.
5. Да се состави полином со рационални коефициенти со најнизок степен, што ќе има нули: $x = 2-\sqrt{3}$ и $x = 1+\sqrt{5}$.

§17. РАЗЛОЖУВАЊЕ НА ПОЛИНОМИТЕ НА МНОЖИТЕЛИ

17.1 РАЗЛОЖЛИВИ И НЕРАЗЛОЖЛИВИ ПОЛИНОМИ

Во § 10 усвоивме дека полиномот $f(x)$ е делив со полиномот $g(x)$, ако и само ако постои трет полином $q(x)$, за кај важи идентитетот

$$f(x) \equiv g(x) \cdot q(x) \qquad (1)$$

За полиномот $g(x)$ велиме дека е **делител** на полиномот $f(x)$.

Со равенството (1), всушност, полиномот $f(x)$ е трансформиран во производ на полиномите $g(x)$ и $q(x)$. Затоа за полиномите $g(x)$ и $q(x)$, често велиме дека се **множители** на полиномот $f(x)$. Идентичната трансформација на даден полином $f(x)$ во производ од не помалку од два полинома со степен не помал од првиот, се вика **разложување на полиномот** $f(x)$ на множители.

Забележуваме дека, секој полином не може да се разложи на множители, чии коефициенти се броеви од дадено множество. Според тоа, разликуваме таканаречени **разложливи и неразложливи полиноми во дадено множество броеви.**

Дефиниција. *Полиномот $f(x)$ велиме е неразложлив во дадено бројно поле P, ако тој нема делители од ненулти степен со коефициенти од тоа поле.*

Во спротивен случај, **полиномот $f(x)$ е разложлив во полето P, ако тој има барем еден делител од ненулти степен со коефициенти од полето P.**

Видовме дека, согласно Т[14.1] во полето на комплексните броеви секој полином од n-ти степен ($n > 1$) е разложлив на n линеарни множители.

Секој полином од прв степен е неразложлив, бидејќи во спротивен случај тој би требало да се претстави во вид на производ од не помалку од два множителa со степени не помали од прв; а тоа е невозможно.

По однос на разложливоста на реалните полиноми во полето на реалните броеви, важи следнава:

Теорема [17.1]. ***Секој реален полином $f_n(x)$ може на единствен начин да се разложи на множители (со точност до редоследот на множителите): од водечкиот коефициент a_0 и неколку линеарни множители од видот $x - \alpha$, што одговараат на неговите реални нули, и квадратни множители од видот $x^2 + px + q$, што одговараат на конјугирано комплексните негови нули.***

Доказ. Нека $f_n(x)$ е кој било реален полином од n-ти степен. Согласно Т[14.1] полиномот $f_n(x)$ во полето на комплексните броеви може да се разложи на n линеарни множители, т.е. $f_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, каде што $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се сите n нули (реални и имагинарни) на полиномот $f_n(x)$.

Да ги промениме ознаките на нулите. Со $a_1, a_2, \ldots, a_k$ да ги означиме сите реални нули на $f_n(x)$, а со $\beta_1 = u_1 + v_1 i$, $\overline{\beta}_1 = u_1 - v_1 i$, ..., $\beta_s = u_s + v_s i$, $\overline{\beta}_s = u_s - v_s i$ - сите имагинарни нули на $f_n(x)$. Притоа мора да биде $k + 2s = n$.

Очигледно е дека на секоја реална нула α_k ќе одговара по еден линеарен множител $x - \alpha_k$, а на секој пар конјугирано комплексни нули β_s и $\overline{\beta}_s$ ќе одговара по еден производ од два множителa: $(x - \beta_s)(x - \overline{\beta}_s)$, кој пак претставува квадратен трином со реални коефициенти.

Навистина: $(x - \beta_s)(x - \overline{\beta}_s) = x^2 - (\beta_s + \overline{\beta}_s)x + \beta_s\overline{\beta}_s = x^2 - 2u_s x + (u_s^2 + v_s^2) = x^2 + px + q$, каде $p = -2u_s$, $q = u_s^2 + v_s^2$, т.е. на квадратен трином со имагинарни нули.

На тој начин, ако сите парови множители, што им одговараат на конјугирано комплексните нули на полиномот, ги замениме соодветните на нив квадратни триноми, ќе добиеме:

$$f_n(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_k)(x^2 + p_1 x + q_1)\ldots(x^2 + p_s x + q_s)$$

Ако, пак, некои од реалните и комплексните нули се повеќе кратни, тогаш ќе важи:

$$f_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}\ldots(x - \alpha_r)^{k_r}(x^2 + p_1 x + q_1)^{s_1}(x^2 + p_2 x + q_2)^{s_2}\ldots(x^2 + p_t x + q_t)^{s_t};$$

каде што $k_1, k_2, \ldots, k_r, s_1, s_2, \ldots, s_t$ се природни броеви, такви што

$k_1 + k_2 + \ldots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \ldots + s_t) = n$.

Значи, во полето на реалните броеви неразложливи се само полиномите од прв степен и полиномите од втор степен, што имаат имагинарни нули. Во посебен случај при

разложувањето на полиномите во полето на реалните броеви можат да отсуствуваат или линеарните множители, или квадратните множители со конјугирано комплексни нули.

17.2. РАЗЛОЖЛИВОСТ НА ПОЛИНОМИТЕ ВО ПОЛЕТО НА РАЦИОНАЛНИТЕ БРОЕВИ

Нека f(x) е полином со рационални (цели и дробни) коефициенти, а s - најмалиот заеднички именител на сите негови дробни коефициенти. Ако полиномот f(x) го помножиме со s, ќе го добиеме полиномот s·f(x), чии коефициенти се сите цели броеви. Очевидно е дека полиномите f(x) и s f(x) имаат еднакви нули и истовремено ќе бидат разложливи или неразложливи во полето на рационалните броеви.

Во однос на разложливоста и неразложливоста на полиномите со рационални (па дури и со цели) коефициенти во полето на рационалните броеви се поставуваат повеќе прашања. На пример, полиномот g(x) со цели коефициенти нека е разложлив во полето на рационалните броеви. Дали оттука следува дека полиномот g(x) е разложлив и во множеството на целите броеви? Или со други зборови, полиномот g(x), што е разложлив во полето на рационалните броеви, може ли во множеството на целите броеви да биде неразложлив? Одговор на тие прашања ни дава следнава:

Теорема (17.2). ***Ако полиномот g(x) со цели коефициенти е неразложлив во множеството на целите броеви, тогаш тој е неразложлив и во полето на рационалните броеви.***

Оваа теорема нема да ја докажуваме.

За полиномите g(x) со цели коефициенти ќе претпоставуваме дека неговите коефициенти $a_0, a_1, \ldots, a_n$ се заемно прости цели броеви, т.е. дека тие немаат заеднички делители различни од 1 и –1. Таквиот полином со цели коефициенти ќе го викаме примитивен целоброен полином.

Да забележиме дека, произволен полином f(x) со рационални коефициенти, еднозначно може да се изрази како производ од нескратлива (редуцирана) дропка и некој примитивен целоброен полином g(x): $f(x) = \frac{a}{b} \cdot g(x)$

Тоа го постигнуваме кога сите коефициенти на f(x) ќе ги доведеме на најмал заеднички именител b, а потоа заедничкиот множител a на бројателите на тие коефициенти и $\frac{1}{b}$ т.е. $\frac{a}{b}$ го извлечеме пред заграда. На пример:

$$f(x) = 2x^5 - \frac{4}{3}\cdot x^4 + 4x^3 + 2x^2 - \frac{2}{3}\cdot + 6 = \frac{6}{3}x^5 - \frac{4}{3}x^4 + \frac{12}{3}x^3 + \frac{6}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{18}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}(3x^5 - 2x^4 + 6x^3 + 3x^2 - x + 9) = \frac{2}{3}\cdot f(x),$$

каде што g(x) е примитивен целоброен полином.

Може да се покаже дека, **производот на два примитивни целобројни полинома е исто така примитивен целоброен полином.**

Видовме дека, секој реален полином со степен поголем од два во полето на реалните броеви е разложлив, меѓутоа, сосема поинаква е ситуацијата со разложливоста на полиномите со рационални и цели коефициенти во полето на рационалните броеви. Ќе покажаме дека важи следнава:

Теорема [17.3]. ***За секој природен број n постои полином од n-ти степен со рационални (па и цели) коефициенти, што е неразложлив во полето на рационалните броеви.***

Доказот на ова тврдење се засновува на следниов доволен признак за неразложливоста на полиномите во полето на рационалните броеви, наречен

Ејзенштејнов критериум: Нека е даден полиномот

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n \ (a_0 \neq 0) \qquad (3)$$

со цели коефициенти. Ако на кој било начин може да се најде прост број p, за кој важат условите:

(i) ***водечкиот коефициент a_0 не е делив со*** p,

(ii) ***сите останати коефициенти се деливи со*** p,

(iii) ***слободниот член a_n е делив со p, но не е делив со*** p^2,

тогаш полиномот $f(x)$ е неразложлив во полето на рационалните броеви.

Доказ: Да претпоставиме дека и при исполнетост на горенаведените услови, полиномот $f(x)$ е разложлив во полето на рационалните броеви. Тогаш тој може да се разложи на два множителa од пониски степени со цели коефициенти, т.е. ќе важи:

$$f(x) = (b_0x^k + b_1x^{k-1} + ... + b_k)(c_0x^s + c_1x^{s-1} + ... + c_s), \qquad (4)$$

каде што k + s = n. Оттука со споредување на коефициентите во двете страни на равенството (4), добиваме:

$$\begin{aligned} a_n &= b_kc_s \\ a_{n-1} &= b_kc_{s-1} + b_{k-1}c_s \\ a_{n-2} &= b_kc_{s-2} + b_{k-1}c_{s-1} + b_{k-2}c_s \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0 &= b_0c_0 \end{aligned} \qquad (*)$$

Од првото равенство во (*) заклучуваме: бидејќи a_n по услов е делив со p, а p е прост број, тогаш еден од множителите b_k, c_s мора да е делив со p, и тоа само еден од нив, затоа што a_n не е делив со p^2. Нека, на пример, b_k е делив со p па затоа е заемно прост со c_s. Да го разгледаме второто од равенствата (*). Неговата лева страна и првиот собирок на десната страна се деливи со p, па затоа мора да е делив со p и вториот собирок, односно производот $b_{k-1}c_s$. Бидејќи c_s не е делив со p, затоа b_{k-1} ќе биде делив со p. На сличен начин, разгледувајќи го третото равенство во (*) заклучуваме дека b_{k-2} е делив со p, итн. На крај, од (k+1)-то равенство во (*) заклучуваме дека и b_0 е делив со p; а од последното равенство во (*) следува дека и p е делив со a_0, кое пак противречи на претпоставката. Значи, важи критериумот на Ејзенштајн.

За секој n лесно може да се состави целоброен полином од n-ти степен, чии коефициенти ги исполнуваат условите на критериумот на Ејзенштејн.

На пример, за полиномот $x^n + 3$ применлив е критериумот на Ејзенштејн при $p = 3$. Значи, согласно со Т [17.3] за секој $n \in \mathbb{N}$ полиномот $x^n + 3$ е неразложлив во полето на рационалните броеви.

Нагласивме дека критериумот на Ејзенштејн дека е доволен услов, но не и потребен, за неразложливост на даден полином во полето на рационалните броеви. Значи, ако за даден полином $f(x)$ со цели коефициенти не може да се најде таков прост број p што ќе ги задоволува условите на критериумот на Ејзенштајн, тогаш тој може да е разложлив, како $x^2 + x - 6$; но може да биде и неразложлив, како $x^4 + 1$.

Покрај критериумот на Ејзенштајн постојат и други критериуми за неразложливост на полиномите во полето на рационалните броеви. За испитување дали даден (кој било) полином со цели коефициенти е разложлив или неразложлив во полето на рационалните броеви, постои и еден општ метод - **метод на Кронекер**. Тој метод е доста гломазен за примена, и затоа практично е неприменлив.

Пример. Да се докаже дека полиномот $x^5 - 12x^3 + 36x - 12$ е неразложлив во полето на рационалните броеви.

Решение. Исполнет е критериумот на Ејзенштејн за $p = 3$, имено: водечкиот коефициент $a_0 = 1$ не е делив со 3, сите останати коефициенти: 0, –12, 0, 36, –12 се деливи со 3, и слободниот член –12 не е делив со $p^2 = 9$. Според тоа, дадениот полином е неразложлив во полето на рационалните броеви.

ЗАДАЧИ

1. Докажи ја неразложливоста на полиномите, користејќи го критериумот на Ејзенштејн: а) $f(x) = x^5 - 2x^4 + 4x^2 + 6$, б) $g(x) = x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 6x + 2$, в) $h(x) = x^6 + 15$.
2*. Покажи при кои услови полиномот $x^4 + px + q$ со рационални коефициенти е разложлив во полето на рационалните броеви.
3. Докажи дека полином од трет степен е неразложлив во полето на рационалните броеви, ако тој нема рационални нули.

§18. ПОЛИНОМИ СО ЦЕЛИ КОЕФИЦИЕНТИ

За полиномот со цели коефициенти:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

ќе покаже дека важат следниве поважни теореми:

Теорема [18.1]. ***Секоја цела нула на полиномот f(x) со цели коефициенти е делител на слободниот член на тој полином.***

Доказ. Нека $x = \alpha$ е цела нула на $f(x)$. Тогаш ќе важи: $f(x) \equiv (x - \alpha)\cdot q(x)$, или

$$f(x) \equiv (x - \alpha)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-2}x + b_{n-1}) \qquad (2)$$

каде што коефициентите на $q(x)$ (одредени со Хорнеровата шема) се цели броеви, во тој склоп и бројот b_{n-1}.

Согласно равенството (2), имаме:

$a_n = -\alpha \cdot b_{n-1} = \alpha \cdot (-b_{n-1})$.

Оттука следува дека, целата нула на $f(x)$ е делител на неговиот слободен член a_n, штд.

Според тоа, согласно Т[18.1], ако целобројниот полином $f(x)$ има цели нули, тогаш нив треба да ги бараме помеѓу сите можни делители (и позитивни и негативни) на слободниот член a_n на $f(x)$. Испитувањето на сите делители на слободниот член a_n во некои случаи (кога нивниот број е голем) претставува голема работа. Но, постои начин во голема мера тие пресметувања да се намалат. Очигледно е дека, броевите 1 и –1 се делители на слободниот член на кој било полином $f(x)$. Ги пресметуваме $f(1)$ и $f(-1)$ и воедно утврдуваме дали броевите 1 и –1 се или не се нули на полиномот $f(x)$. Потоа, ако целиот број α е нула на $f(x)$, тогаш ќе важи равенството (2). Бидејќи сите коефициенти на количникот $q(x)$ се цели броеви, затоа и количниците

$$\frac{f(1)}{1-\alpha} = q(1),\quad \frac{f(1)}{-1-\alpha} = q(-1) \text{ или } \frac{f(1)}{\alpha-1} = -q(1),\quad \frac{f(-1)}{\alpha+1} = -q(-1) \qquad (3)$$

мораат да бидат цели броеви. Според тоа, од сите делители на слободниот член a_n дали се нули на полиномот $f(x)$, вршиме испитување само на оние делители α, за кои количниците (3) се цели броеви.

Пример 1. Да ги одредиме целите нули (ако има такви) на полиномот

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 4x + 6$.

Решение. Гледаме, делители на слободниот член 6 се: ±1, ±2, ±3, ±6. Бидејќи $f(1) = 1-2-5+4+6 = 4$, $f(-1) = 1+2-5-4+6 = 0$, заклучуваме дека бројот 1 не е нула, а –1 е нула на полиномот. Потоа броевите $\frac{4}{1+2}$, $\frac{4}{1-6}$ и $\frac{4}{1+6}$ не се цели броеви, па затоа делителите –2, 6 и –6 ги отфрламе од натамошно испитување. А бидејќи количниците $\frac{4}{1-2}, \frac{0}{-1-2}, \frac{4}{1-3}, \frac{0}{-1-3}, \frac{4}{1+3}, \frac{0}{-1+3}$ се цели броеви, затоа за секој од останатите делители 2, 3 и –3 вршиме натамошно испитување со помош на Хорнеровата шема дали е нула на полиномот:

а)

	1	–2	–5	4	6	
2	1	0	–5	–6	–6	т.е. $f(2) = -6$

б)

	1	–2	–5	4	6	
–3	1	–5	10	–26	84	т.е. $f(-3) = 84$

в)

	1	–2	–5	4	6
3	1	1	–2	–2	0

т.е. $f(3) = 0$

Значи, делителот 3 е нула на полиномот $f(x)$. Истовремено ние ги најдовме и коефициентите на количникот од делењето на $f(x)$ со $x - 3$; т.е.

$f(x) = (x - 3)(x^3 + x^2 - 2x - 2)$.

Видовме дека и –1 е цела нула на $f(x)$. Очигледно е дека –1 е нула и на полиномот-количник $x^3 + x^2 - 2x - 2$:

	1	1	–2	–2
–1	1	0	–2	0

, т.е. $x^3 + x^2 - 2x - 2 = (x + 1)(x^2 - 2)$.

Лесно уочуваме дека, новиот количник $x^2 - 2$ нема цели нули, т.е. тој е неразложлив во множеството на целите броеви.

Според тоа, $f(x) = (x - 3)(x + 1)(x^2 - 2)$.

Ако сите коефициенти на полиномот $f(x)$ не се цели броеви, туку меѓу нив има и дропки, тогаш полиномот го множиме со најмалиот заеднички именител s на дробните коефициенти, па ќе добиеме полином $sf(x)$ со цели коефициенти, кој што има исти нули како и полиномот $f(x)$. Според тоа, за да ги одредиме целите нули на $f(x)$, доволно е да ги одредиме целите нули на $sf(x)$.

Пример 2. Да ги одредиме целите нули на полиномот

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{2} \cdot x^3 - x^2 - \frac{5}{4} \cdot x - \frac{3}{2}$$

Решение. Тука е s = 4. Го множиме $f(x)$ со 4, па добиваме:

$4f(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$

Делители на слободниот член –6 се: ±1, ±2, ±3 и ±6. За делителите 1 и –1 со директна замена добиваме:

$4f(1) = 1 + 2 - 4 - 5 - 6 = -12$, $4f(-1) = 1 - 2 - 4 + 5 - 6 = -6$.

Лесно се уверивме дека, за делителите 2, –2 и –3 количниците (3) се цели броеви, а за 3, 6 и –6 тие се дропки.

Така, на пример, за $\alpha = 6$ количникот $\frac{4f(1)}{1-\alpha} = \frac{-12}{1-6} = \frac{-12}{-5}$ не е цел број. Значи, натамошно испитување (дали се нули на $4f(x)$ вршиме само за делителите: 2, –2 и –3:

	1	2	–4	–5	–6
2	1	4	4	3	0

, т.е. $4f(2) = 0$.

Значи, делителот 2 е нула на $4f(x)$, па добиваме:

$4f(x) = (x - 2)(x^3 + 4x^2 + 4x + 3)$

Бројот –2 не може да биде нула, бидејќи слободниот член 3 на количникот $q(x)$ не е делив со –2. Останува уште да провериме за бројот –3 дали е нула на количникот $x^3 + 4x^2 + 4x + 3$.

	1	4	4	3
–3	1	1	1	0

, т.е. $q(-3) = 0$

Според тоа: $4f(x) = (x - 2)(x + 3)(x^2 + x + 1)$, т.е. полиномот $4f(x)$ има само две цели нули $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = -3$. Тоа се целите нули и на даденият полином $f(x)$ со рационални (дробни) коефициенти.

Сега да преминеме на прашањето за одредување на рационалните (нецели) нули на полином со цели коефициенти. Тоа се заснова на

Теорема [18.2]. ***Ако полиномот (1) со цели коефициенти има рационална нула*** $\frac{p}{q}$ ***, каде p и q се заемно прости, тогаш p е делител на слободниот член*** a_n***, а q е делител на водечкиот коефициент*** a_0***, на полиномот f(x).***

Доказ. Ако $x = \frac{p}{q}$ е нула на $f(x)$, тогаш со негова замена во $f(x)$ и множење со q^n, добиваме:

$$a_0p^n + a_1qp^{n-1} + a_2q^2p^{n-2} + \ldots + a_{n-1}q^{n-1}p + a_nq^n = 0. \quad (4)$$

Оттука

$$a_nq^n = p(-a_0p^{n-1} - a_1qp^{n-2} - a_2q^2p^{n-3} - \ldots - a_{n-1}q^{n-1}) \quad (5)$$

Бидејќи $p, q, a_0, a_1, \ldots, a_n$ се цели броеви, затоа изразот во заградата на десната страна во (5) е цел број. Од равенството (5) следува дека производот a_nq^n е делив со p, а бидејќи p и q се заемно прости, следува дека a_n е делив со p.

Равенството (4) да го запишеме во видот:

$$a_0p^n = q(-a_1p^{n-1} - a_2qp^{n-2} - \ldots - a_{n-1}q^{n-2}p - a_nq^{n-1}) \quad (6)$$

Оттука следува дека производот a_0p^n е делив со q, но бидејќи p и q се заемно прости, следува дека a_0 е делив со q.

Со тоа Т[18.2] е докажана. Од неа следува и следнава:

Теорема [18.3]. ***Секоја рационална нула на полиномот f(x) со цели коефициенти и со водечки коефициент*** $a_0 = 1$***, е цел број.***

Значи, ако $a_0 = 1$, а согласно Т[18.2] q е делител на a_0, тогаш мора да е $q = \pm 1$.

Според тоа, рационалната нула $\frac{p}{q}$ е цел број.

Оваа теорема [18.3] упатува на: за наоѓањето на сите рационални (дробни и цели) нули на целобројен полином $f(x)$, чиј водечки коефициент е $a_0 \neq 1$, треба тој да се трансформира во целобројен полином со водечки коефициент еднаков на единица. Тоа го постигнуваме на следниов начин:

Полиномот $f(x)$ го множиме со a_0^{n-1} и добиваме полином $a_0^{n-1}f(x)$, што ги има истите нули како и даденият полином $f(x)$:

$$a_0^{n-1}f(x) = a_0^n x^n + a_1a_0^{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}a_0^{n-1}x + a_0^{n-1}a_n \quad (7)$$

или

$$a_0^{n-1}f(x) = (a_0x)^n + a_1(a_0x)^{n-1} + \ldots + a_0^{n-2}a_{n-1}(a_0x) + a_0^{n-1}a_n \qquad (8)$$

Потоа во (8) изразот a_0x го заменуваме со нов аргумент $y = a_0x$, на полиномот $a_0^{n-1}f(x)$ го добива видот:

$$a_0^{n-1}f(x) = \varphi(y) = y^n + a_1y^{n-1} + a_0a_1y^{n-2} + \ldots + a_0^{n-2}a_{n-1}y + a_0^{n-1}a_n \qquad (9)$$

Согласно Т[18.3] сите рационални нули на полиномот (9) се цели броеви. Кога ќе ги одредиме сите цели нули на полиномот (9), со помош на равенството $x = \frac{y}{a_0}$ ќе ги одредиме и сите рационални нули на полиномот $f(x)$.

Пример 3. Да ги одредиме рационалните нули на полиномот

$f(x) = 3x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 15x + 6$.

Решение. Го множиме полиномот $f(x)$ со 3^3:

$$3^3f(x) = 3^3 \cdot 3x^4 - 5 \cdot 3^3x^3 - 11 \cdot 3 \cdot 3^2x^2 + 15 \cdot 3^2 \cdot 3x + 3^3 \cdot 6$$

или $$3^3f(x) = (3x)^4 - 5(3x)^3 - 33(3x)^2 + 135(3x) + 162,$$

односно: $$3^3f(x) = \varphi(y) = y^4 - 5y^3 - 33y^2 + 135y + 162. \qquad (10)$$

Потоа проверуваме за 1 и –1 дали се нули на $\varphi(y)$:

$\varphi(1) = 1 - 5 - 33 + 135 + 162 = 260$, $\varphi(-1) = 1 + 5 - 33 - 135 + 162 = 0$.

Значи, –1 е нула на (y). Тоа се потврдува и со Хорнеровата шема:

	1	–5	–33	135	162
–1	1	–6	–27	162	0

и добиваме: $\varphi(y) = (y + 1)(y^3 - 6y^2 - 27y + 162)$.

Од $162 = 2 \cdot 3^4$ заклучуваме дека делители на 162 покрај ±1 се и ±2, ±3, ±6, ±9 и др.

Проверуваме дека за $\alpha = \pm2$ и $\alpha = \pm3$ количниците $\frac{\varphi(1)}{\alpha - 1}, \frac{\varphi(-1)}{\alpha + 1}$ се дропки, според тоа, тие не се цели нули на $\varphi(x)$, а за $\alpha = 6$: $\frac{\varphi(1)}{\alpha - 1} = \frac{260}{6 - 1} = 52$, $\frac{\varphi(-1)}{\alpha + 1} = \frac{0}{6 + 1} = 0$ се цели броеви. За $\alpha = 6$ со Хорнеровата шема наоѓаме:

	1	–6	–27	162
6	1	0	–27	0

, т.е. $q(6) = 0$.

Значи, $\varphi(y) = (y + 1)(y - 6)(y^2 - 27)$.

Според тоа, полиномот $\varphi(y)$ има само две цели нули –1 и 6. Оттука, бараните рационални нули на дадениот полином $f(x)$ се: $-\frac{1}{3}$ и 2, и само тие. Разложувањето на $f(x)$ ќе гласи:

$3^3 f(x) = (3x + 1)(3x - 6)(9x^2 - 27)$, откаде:

$f(x) = (3x + 1)(x - 2)(x^2 - 3)$.

Да напоменеме дека овој метод е применлив само кон полиномите со цели коефициенти и тоа само за одредување на нивните рационални нули.

Теорема [18.4]. ***Полиномот f(x) со цели коефициенти, ако за x = 0 и x = 1 има непарни вредности, тогаш тој нема цели нули.***

Доказ. Да го претпоставиме спротивното: нека $x = \alpha$ е цела нула на f(x), т.е. нека $f(\alpha) = 0$, покрај тоа што f(0) и f(1) се непарни броеви.

Очигледно е дека, количникот $\frac{f(1)}{\alpha - 1}$ при непарен броител f(1) може да биде цел број само ако α е парен број. Од $f(\alpha) = 0$, односно од $a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, добиваме $a_n = -\alpha(a_0\alpha^{n-1} + a_1\alpha^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$.

Според тоа, слободниот член a_n е парен број (бидејќи α е парен број). Од друга страна, пак, $f(0) = a_n$ по услов е непарен број. Оваа противречност ја докажува теоремата.

Пример 4. Полиномот $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^2 - x + 5$ има непарни вредности за $x = 0$ и $x = 1$: $f(0) = 5$ и $f(1) = 2 - 3 + 4 - 1 + 5 = 7$. Значи, тој нема цели нули.

ЗАДАЧИ

1. Одреди ги целите нули на полиномот, ако има такви

а) $x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x + 12$, б) $x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$,

в) $x^5 - 20x^3 - 21x - 20$, г) $x^3 - 2x^2 + x - 2$.

2. Одреди ги рационалните нули на полиномите:

а) $4x^3 - 7x^2 - x + 3$, б) $3x^4 + 5x^3 + x^2 + 5x - 2$,

в) $2x^3 + x^2 + x - 1$, г) $9x^4 - 3x^3 + 7x^2 - 3x - 2$.

3. Разложи ги следниве полиноми на неразложливи множители:

а) $f(x) = x^5 + 6x^4 + 13x^3 + 14x^2 + 12x + 8$,

б) $g(x) = x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6$,

в) $\varphi(x) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12$.

4*. Испитај кои од следниве полиноми со цели коефициенти немаат цели нули:

$A(x) = x^4 - x^3 + 2x + 3$, $B(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $C(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 5x + 1$,

$E(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 6$.

5. Одреди ги целите нули на полиномот:

$$P(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{7}{4}x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x + 9, \quad Q(x) = \frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}.$$

6*. Докажи дека $n^5 - 5n^3 + 4n$ е делив со 120, ако n е природен број.

§19. ТРАНСФОРМАЦИИ НА ПОЛИНОМИТЕ

Да го трансформираме полиномот $P(x)$ значи, да формираме (и му придружиме) друг полином, на пример, $P^*(x)$, чии нули да зависат точно на одреден начин само од нулите на дадениот полином $P(x)$ и од видот на трансформацијата. Според тоа, трансформацијата на полиномите всушност претставува еден вид пресликување во множеството на полиномите. Ако $P(x)$ е некој полином и $P^*(x)$ е соодветниот му полином при дадена трансформација, тоа симболички го запишуваме

$$P(x) \to P^*(x) \tag{1}$$

Ваквите трансформации се корисни особено, ако трансформираниот полином е попрост од дадениот, што подразбира и полесно одредување на неговите нули. Една таква трансформација користевме, во примерот 3 од претходниот параграф, при одредување на рационалните нули на полином, чиј водечки коефициент е $a_0 \neq 1$.

Постојат најразлични трансформации на полиномите во зависност од барањето што го поставуваме пред нив. Меѓутоа, ние ќе се ограничиме само на најосновните, кои истовремено се најкорисни и најпримењувани.

Нека е даден е полиномот $P(x)$ од n-ти степен ($n \geq 1$), што ќе го запишуваме во двете форми:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,\ a_0 \neq 0 \tag{2}$$

$$\text{и } P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_n), \tag{3}$$

каде $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се n-те реални или комплексни нули на $P(x)$.

Ќе ги разгледаме следниве три трансформации:

$P(x) \to P^*(x) = P(\alpha x)$, $\alpha = \text{const}$

$P(x) \to P^*(x) = P(x - h)$, $h = \text{const}$

$P(x) \to P^*(x) = x^nP(\frac{1}{x})$

19.1 ТРАНСФОРМАЦИЈА $P(x) \to P^*(x) = P(\alpha x)$, $\alpha = \text{const}$

Нека е даден е полином $P(x)$ од n-ти степен, а α - некој фиксен комплексен број, различен од нула и единица.

Трансформацијата $P(x) \to P^*(x) = P(\alpha x)$, $\alpha = \text{const}$. не доведува според (2) и (3) до полиномите:

$$P^*(x) = P(\alpha x) = a_0(\alpha x)^n + a_1(\alpha x)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(\alpha x) + a_n =$$
$$= a_0\alpha^n x^n + a_1\alpha^{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\alpha x + a_n \tag{4}$$

$$\text{и } P^*(x) = P(\alpha x) = a_0(\alpha x - x_1)(\alpha x - x_2)\ldots(\alpha x - x_n) = a_0\alpha^n(x - \frac{x_1}{\alpha})(x - \frac{x_2}{\alpha})\ldots(x - \frac{x_n}{\alpha})$$

Ако означиме $a^*_0 = a_0\alpha^n$, $x^*_k = \frac{x_k}{\alpha}$, ($k = 1, 2, \ldots$) добиваме:

$$P^*(x) = P(\alpha x) = a^*_0(x - x^*_1)(x - x^*_2) \ldots (x - x^*_n) \tag{5}$$

Од равенствата $x_k = \alpha x^*_k$ (k = 1, 2, 3, ..., n) во зависност од α имаме:

$$|\alpha| \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} 1 \Leftrightarrow |x_k| \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} |x^*_k|, \quad (k = 1, 2, ..., n)$$

Според тоа, нулите на трансформираниот полином $P^*(x)$ имаат соодветно помал модул (ако $|\alpha| > 1$) или соодветно поголем модул (ако $0 < |\alpha| < 1$). Оттука заклучуваме:

Ако α е позитивен реален број, тогаш трансформацијата $P(x) \to P(\alpha x)$ ги намалува α пати ($\alpha > 1$), или ги зголемува α пати (ако $0 < \alpha < 1$) модулите на нулите на полиномот $P(x)$. Затоа трансформацијата $P(x) \to P(\alpha x)$ често ја викаме: трансформација на полиномот $P(x)$ во полином, чии нули имаат α пати помал (поголем) модул од нулите на $P(x)$.

Пример 1. Полиномот $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x - 1$ да го трансформираме во полином, чии нули ќе имаат 2 пати помал модул од нулите на $P(x)$, а аргументот да им остане непроменет.

Решение. Барањата за модулот и аргументот на нулите на трансформираниот полином наведуваат бројот α да ги исполнува условите $|\alpha| = 2$, $\varphi = arg\alpha = 0$, т.е. $\alpha = 2$. Тогаш согласно (4) добиваме:

$$P^*(x) = P(2x) = (2x)^4 - 2(2x)^3 + 3(2x)^2 - (2x) - 1 = 16x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 2x - 1.$$

Бидејќи е $P(1) = 0$, би требало бројот $\frac{1}{2}$ да е нула на $P^*(x)$.

Навистина:

	16	−16	12	−2	−1
$\frac{1}{2}$	16	−8	8	2	0

, т.е. $P^*(\frac{1}{2}) = 0$.

Нека сега α е комплексен број со модул единица, т.е. нека $\alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Нулите на полиномот $P(x)$ да ги означиме со $x_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, (k = 1, 2, 3, ..., n). Тогаш

$$x^*_k = \frac{x_k}{\alpha} = r_k \frac{\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = r_k[\cos(\varphi_k - \varphi) + i\sin(\varphi_k - \varphi)] \qquad (6)$$

Според тоа, нулите на трансформираниот полином $P^*(x) = P(\alpha x)$ ги добиваме кога сите нули на $P(x)$ ќе ги завртиме за агол φ во негативна насока.

Пример 2. Да ја извршиме трансформацијата $P(x) \to P(ix)$ на полиномите: а) $P(x) = x^2 + 1$, б) $P(x) = x^4 + x^2 + 1$, в) $P(x) = x^4 + 1$.

Решение. а) $P^*(x) = P(ix) = (ix)^2 + 1 = i^2x^2 + 1 = -x^2 + 1$, б) $x^4 + x^2 + 1 \to x^4 + 1$, в) $x^4 + 1 \to x^4 + 1$.

Ако земеме предвид дека, $\alpha = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; заклучуваме дека, нулите на трансформираниот полином $P^*(x) = P(ix)$ се ротираните (завртени) нули на $P(x)$ за 90^0 во насока на движењето стрелките на часовникот. Така, на пример, нули на $P(x) = x^2 + 1$ се $x_1 = i$ и $x_2 = -i$, а нули на $P^*(x) = P(ix) = -x^2 + 1$ се $x^*_1 = 1$ и $x^*_2 = -1$.

Теорема [19.1]. ***Трансформацијата*** $P(x) \to P(ix)$ ***ги има следниве својства:*** *а)* ***Ако нулиште на*** $P(x)$ ***лежаат во областа*** $Re(x) > 0$, ***тогаш нулиште на*** $P(ix)$ ***лежаат во областа*** $Im(x) > 0$ ***и обратно,*** *б)* ***Ако нулиште на*** $P(x)$ ***лежаат во областа*** $Re(x) < 0$, ***тогаш нулиште на*** $P(ix)$ ***лежаат во*** $Im(x) < 0$, ***и обратно.*** *в)* ***Ако нулиште на*** $P(x)$ ***лежаат на*** $Im(x) = 0$, ***тогаш нулиште на*** $P(ix)$ ***лежаат на*** $Re(x) = 0$, ***и обратно.***

Доказ. Според (6), каде што $\varphi = \frac{\pi}{2}$, нулите x_k^* на $P(ix)$ се добиваат од нулите x_k на $P(x)$ со нивно завртување за 90^0 во насока на движење на стрелките на часовникот. Ако нулите x_k лежат во $Re(x) > 0$ (случај а) - тогаш нулите x_k^* ќе лежат во $Im(x) > 0$.

Ако равенството (6) го запишеме во видот

$$x_k = \alpha\, x_k^{x} = (\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k) = r_k[\cos(\varphi_k + \varphi) + i\sin(\varphi_k + \varphi)]$$

забележуваме дека важи и обратното тврдење, имено: ако нулите на $P(ix)$ лежат во $Im(x) > 0$, тогаш нулите на $P(x)$ ќе лежат во $Re(x) > 0$.

Кај полиномите со цели коефициенти и водечки коефициент $a_0 \neq 0$ оваа трансформација најчесто ја користиме за нивна трансформација во полиноми со цели коефициенти, но со водечки коефициент единица.

19.2. ТРАНСФОРМАЦИЈА $P(x) \to P^*(x) = P(x - h)$, $h = const$

Трансформацијата $P(x) \to P^*(x) = P(x - h)$, каде $h \neq 0$ е некој комплексен или реален број, не доведува според (2) и (3) до полиномите:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{7}$$

$$P^*(x) = P(x - h) = A_0(x - h)^n + A_1(x - h)^{n-1} + \ldots + A_n \tag{8}$$

и $$P^*(x) = P(x - h) = A_0(x - h - x_1)(x - h - x_2) \ldots (x - h - x_n) =$$

$$A_0[x - (x_1 + h)][x - (x_2 + h)] \ldots [x - (x_n + h)] = A_0(x - x^*_1)(x - x^*_2) \ldots (x - x^*), \tag{9}$$

каде што $x^*_k = x_k + h$, $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ (10)

Според тоа, нулите x^*_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ на трансформираниот полином $P^*(x) = P(x - h)$ ги добиваме кога нулите x_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ на $P(x)$ ги транслатираме (паралелно поместиме) за вектор со почеток - координатниот почеток O и крај во точката што му одговара на комплексниот број h.

Трансформацијата $P(x) \to P(x - h)$, $h = const$ всушност, претставува **развивање на полиномот $P(x)$ по степените на $x - h$,** односно негово претставување во видот:

$$P(x) = A_0(x - h)^n + A_1(x - h)^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x - h) + A_n, \tag{11}$$

каде $A_0, A_1, \ldots, A_n$ се некои броеви - коефициенти. Наша непосредна задача е коефициентите $A_0, A_1, \ldots, A_n$ да ги изразиме преку $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ и h, при што да важи равенството (11). Претходно да забележиме дека од (11) непосредно следува дека $A_0 = a_0$. Одредувањето на другите коефициенти $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ на полиномот $P(x - h)$ освен по методот на неопределени коефициенти, ќе покажеме дека, многу полесно може да се изврши и со помош на Хорнеровата шема, имено:

Ако равенството (11) го поделиме со $x - h$, добиваме

$$\frac{P(x)}{x - h} = A_0(x - h)^{n-1} + A_1(x - h)^{n-2} + \ldots + A_{n-1} + \frac{A_n}{x - h},$$

кое покажува дека A_n е остаток од делењето на $P(x)$ со $x - h$, а полиномот $P_1(x) = A_0(x-h)^{n-1} + A_1(x-h)^{n-2} + \ldots + A_{n-2}(x-h) + A_{n-1}$ е делумен количник од тоа делење.

На ист начин со делење на полиномот $P_1(x)$ со $x - h$ добиваме:

$\frac{P_1(x)}{x-h} = A_0(x-h)^{n-2} + A_1(x-h)^{n-3} + \ldots + A_{n-2} + \frac{A_{n-1}}{x-h}$ и забележуваме дека A_{n-1} е остаток од делењето на $P_1(x)$ со $x - h$.

Продолжувајќи го делењето на претходните делумни остатоци до $x - h$, едно по друго ги добиваме коефициентите $A_{n-2}, A_{n-3}, \ldots, A_2, A_1, A_0$ ($A_0 = a_0$). Но, тие делења ги извршуваме и при Хорнеровата шема. Ќе го илустрираме тоа на еден пример.

Пример 3. Да го развиеме полиномот $P(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 3x + 5$ по степените на $x - 2$.

Решение. Согласно Хорнеровата шема вршиме последователно делење на даденият полином $P(x)$ со биномот $x - 2$, па имаме:

	1	–4	0	2	3	5
2	1	–2	–4	–6	–9	$-13 = A_5$
2	1	0	–4	–14	–37	$= A_4$
2	1	2	0	$-14 = A_3$		
2	1	4	$8 = A_2$			
2	1	$6 = A_1$				
	$1 = A_0$					

Според тоа,

$x^5 - 4x^4 + 2x^2 + 3x + 5 = (x-2)^5 + 6(x-2)^4 + 8(x-2)^3 - 14(x-2)^2 - 37(x-2) - 13$,

односно $P^*(x) = P(x-2) = y^5 + 6y^4 + 8y^3 - 14y^2 - 37y - 13$, каде $y = x - 2$.

На крај можеме да заклучиме: ако h е позитивен реален број, тогаш трансформацијата $P(x) \to P(x-h)$ ги поместува нулите на $P(x)$ на десно на растојаните h, а трансформацијата $P(x) \to P(x+h)$ ги поместува нулите на $P(x)$ на лево на растојание h. Трансформацијата $P(x) \to P(x - ih)$, пак, ги поместува нулите на $P(x)$ вертикално надолу, а $P(x) \to P(x + ih)$ - вертикално нагоре (паралелно со имагинарната оска) на растојание h.

Да забележиме дека, со помош на оваа трансформација, кој било коефициент (освен водечкиот) на трансформираниот полином $P^*(x)$, избирајќи погодно h, може да го направиме да стане нула. Ќе го покажеме тоа на еден пример.

Пример 4. Полиномот $P(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ да го трансформираме во полином $P^*(x)$ кој нема да го содржи членот со x^2.

Решение. Ќе ја користиме трансформацијата $P(x) \to P(x-h)$, при што да важи равенството

$$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = A_0(x-h)^3 + A_1(x-h)^2 + A_2(x-h) + A_3.$$

Бројот h ќе го избереме така што $A_1 = 0$. Со помош на Хорнеровата шема, добиваме:

1	–6	5	12
h	1	h–6	h^2-6h+5 $h^3-6h^2+5h+12=A_3$
h	1	2h–6	$3h^2-12h+5 = A_2$
h	1	$3h-6 = A_1$	
	$1 = A_0$		Од $A_1 = 3h - 6 = 0$ имаме $h = 2$

а останатите коефициенти ќе бидат $A_2 = 12 - 24 + 5 = -7$ и $A_3 = 6$.

Според тоа, трансформираниот полином ќе биде:

$P(x-2) = (x-2)^3 - 7(x-2) + 6$, односно $P^*(y) = y^3 - 7y + 6$, каде што $y = x - 2$.

Одредувањето на нулите на овој полином е многу полесно. Тоа се:

$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = -3$, а даденият полином $P(x)$ ќе има нули ($x = y + 2$):

$x_1 = 3, x_2 = 4, x_3 = -1$.

Пример 5. Да се докаже дека полиномот $P(x) = \dfrac{x^5-1}{x-1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ е неразложлив во полето на рационалните броеви.

Решение. Даденият полином по неговото развивање по степени на x–1 го добива видот: $P(x-1) = (x-1)^4 + 5(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 10(x-1) + 5$, односно

$P^*(y) = y^4 + 5y^3 + 10y^2 + 10y + 5$, каде што $y = x - 1$.

Заклучуваме дека, за полиномот $P^*(y)$ е исполнет критериумот на Ејзенштејн за простиот број $p = 5$. Според тоа, тој и даденият полином се неразложливи во полето на рационалните броеви.

19.3. ТРАНСФОРМАЦИЈА $P(x) \to P^*(x) = x^nP(\frac{1}{x})$

Оваа трансформација според (2) и (3) не доведува до полиномите

$$P^*(x) = x^nP(\frac{1}{x}) = x^n[a_0(\frac{1}{x})^n + a_1(\frac{1}{x})^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(\frac{1}{x}) + a_n] = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \qquad (12)$$

и $$P^*(x) = x^nP(\frac{1}{x}) = x^n[a_0(\frac{1}{x} - x_1)(\frac{1}{x} - x_2)\ldots(\frac{1}{x} - x_n)] = a_0(1 - x_1x)(1 - x_2x)\ldots(1 - x_nx) \qquad (13)$$

Равенството (13) покажува дека нулите x^*_k на трансформираниот полином $P^*(x)$, од $1 - x_kx^*_k = 0$ следува дека, ќе бидат

$$x^*_k = \frac{1}{x_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (14)$$

претпоставка дека ниту една нула: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на $P(x)$ не е еднаква на нула.

Во специјален случај за полиномот $P(x) = a_0x^n$, $a_0 \neq 0$, имаме $P^*(x) = x^nP(\frac{1}{x}) = a_0$.

Ќе покажеме дека оваа трансформација ги има својствата:

Теорема [19.2]. ***Ако нулите на P(x) лежат во кругот*** $|x| \leq 1$ ***и*** $P(0) \neq 0$, ***тогаш нулите на*** $P^*(x) = x^nP(\frac{1}{x})$ ***лежат во областа*** $|x| \geq 1$, ***и обратно.***

Доказ. Од (14) следува $|x_k| \le 1 \Leftrightarrow |\frac{1}{x_k}| = |x^*_k| \ge 1$, (k = 1, 2, ..., *n*) и

$\arg x^*_k = \arg \frac{1}{x_k} = -\arg x_k$, кое покажува дека радиус-векторите определени со $x_к$ и $x^*_к$ со реалната оска зафаќаат еднакви, но спротивни агли.

Теорема [19.3]. ***Ако нулите на P(x) лежат на кружницата*** $|x| = 1$, ***тогаш и нулите на полиномот*** $P^*(x) = x^n P(\frac{1}{x})$ ***лежат на истата кружница и се конјугирано комплексни со нив.***

Доказ. Нулите на $P(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$ нека лежат на кружницата $|x_k| = 1$, (k = 1, 2, 3, ... *n*). Тогаш за нулите на $P^*(x) = x^n P(\frac{1}{x})$ согласно со (14) ќе важи:

$|x_k^*| = \left|\frac{1}{x_k}\right| = \frac{1}{|x_k|} = \frac{1}{1} = 1$. Од друга страна имаме

$$x_k^* = \frac{1}{x_k} = \frac{1}{x_k} \cdot \frac{\bar{x}_k}{\bar{x}_k} = \frac{\bar{x}_k}{x_k \cdot \bar{x}_k} = \frac{\bar{x}_k}{|x_k|^2} = \bar{x}_k ,$$

бидејќи $|x_k| = |x_k|^2 = 1$. Со тоа теоремата е докажана.

Пример 6. Да ги одредиме рационалните нули на полиномот $P(x) = x^3 + \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{5}{8} \cdot x + \frac{1}{8}$ со примена на трансформацијата $8P(x) \to P^*(y) = y^3 P(\frac{1}{y})$.

Решение. Полиномот $P(x)$ и $8P(x) = 8x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ имаат исти нули. Потоа со замена на променливата x со $x = \frac{1}{y}$ полиномот $8P(x)$ го трансформираме во

$P^*(y) = y^3 P(\frac{1}{y}) = y^3 [8(\frac{1}{y})^3 + 2(\frac{1}{y})^2 - 5(\frac{1}{y}) + 1] = y^3 - 5y^2 + 2y + 8$. Согласно T[18.3] секоја рационална нула на $P^*(y)$ е цел број, а нулите на дадениот полином $P(x)$, односно, $8P(x)$ ќе бидат еднакви (согласно смената $x = \frac{1}{y}$) на реципрочните вредности од нулите на трансформираниот полином $P^*(y) = y^3 - 5y^2 + 2y + 8$. Лесно добиваме дека $P^*(y)$ има три цели нули $y_1 = -1$, $y_2 = 2$ и $y_3 = 4$. Оттука следува дека дадениот полином има рационални нули: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{2}$ и $x_3 = \frac{1}{4}$.

Интересно е прашањето: Постојат ли полиноми кои при трансформацијата $P(x) \to x^n P(\frac{1}{x})$ остануваат непроменети, т.е. кои се трансформираат сами на себе. Одговорот на ова прашање е потврден. На пример, такви се полиномите $P(x) = x^5 + 1$, $Q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1$ и др. Така за полиномот $P(x)$ имаме:

$$P(x) = x^5 + 1 = x^5 P(\frac{1}{x}) = x^5[(\frac{1}{x})^5 + 1] = x^5(\frac{1}{x^5} + 1) = 1 + x^5.$$

Равенството $P(x) = x^n P(\frac{1}{x})$, согласно (2) и (12) ќе биде исполнето, ако $P(0) \neq 0$ и ако важи:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \qquad (15)$$

Оттука со изедначување на коефициентите пред еднаквите степени на x од двете страни, добиваме:

$$a_0 = a_n,\ a_1 = a_{n-1},\ a_2 = a_{n-2}, \ldots,\ a_k = a_{n-k}, (k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (16)$$

Значи, равенството $P(x) = x^n P(\frac{1}{x})$ е возможно, ако меѓу коефициентите на полиномот $P(x)$ постои симетрија изразена со (16).

ЗАДАЧИ

1. Трансформирај го полиномот: а) $P(x) = 3x^3 - \frac{2}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{9}$,

   б) $Q(x) = x^3 - \frac{5}{6} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x + \frac{1}{6}$ во полином со цели коефициенти и водечки коефициент единица, а потоа одреди ги неговите рационални нули.
2. Одреди ги рационалните нули на полиномот: а) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x - 1$, б) $Q(x) = 3x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 16x - 8$.
3. Изврши ја трансформацијата $P(x) \to P(ix)$ врз полиномот: а) $P(x) = 2x^8 + 4x^6 + 3x^4 + 2x^2 + 1$, б) $P(x) = x^5 - 4x^3 + x - 2$.

4*. Изврши ја трансформацијата $P(x) \to P(\alpha x)$ ($\alpha = 1 + i$) врз полиномот $P(x) = x^4 + 1$.

5*. Даден е полиномот $P(x) = x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$. Формирај полином $P^*(y)$, чии нули ќе бидат: а) за 3 помали, б) за 2 поголеми од нулите на $P(x)$.

6. Даден е полиномот $P(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x + 1$. Трансформирај го во полином $P^*(y)$, кој нема да го содржи членот од трет степен.

7*. Докажи дека полиномите: а) $P(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, б) $Q(x) = \frac{x^7 - 1}{x - 1}$ се неразложливи во полето на рационалните броеви.

8*. Докажи дека, ако полиномот $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ е неразложлив, тогаш и полиномот $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ е неразложлив.

§20. ИНТЕРПОЛАЦИОНЕН ПОЛИНОМ

Со теоремата [13.5] докажавме дека еден полином од n-ти степен е еднозначно определен, ако се познати неговите вредности за $n + 1$ различни вредности на променливата x. Со други зборови тоа значи, ако земеме кои било $n + 1$ броеви (точки) $x_0, x_1, ..., x_n$ и си поставиме задача да најдеме полином $P(x)$, кој што ќе ги добива соодветно вредностите $y_0, y_1, ..., y_n$, тогаш согласно Т[13.5] постои нé повеќе од еден полином $P(x)$, таков што $P(x_k) = y_k$ ($k = 0, 1, 2, ..., n$). Меѓутоа, се поставува прашањето: постои ли барем еден таков полином.

Често пати $y_0, y_1, ..., y_n$ се вредности на некоја набљудувана непозната величина y, што се добиени експериментално, а броевите $x_0, x_1, ..., x_n$ се точките - вредностите на променливата величина x, од чија промена ја испитуваме и промената на величината y. Ако во поставената задача бараниот полином $P(x)$, што ги задоволува равенствата $P(x_k) = y_k \cdot k = 0, 1, 2, ..., n$, постои, тогаш тој може да се искористи за пресметување на вредностите на y и за сите други вредности на x, што се различни од користените во експериментот: $x_0, x_1, ..., x_n$.

Поради тоа, бараниот полином ќе го викаме **интерполационен полином.**

Забележуваме дека тој е единствен полином и од степен не поголем од n; но начините на неговото претставување можат да бидат различни. Ние ќе се задржиме само на два од нив: **интерполационен полином на Лагранж** и **интерполационен полином на Њутн.**

20.1. ИНТЕРПОЛАЦИОНЕН ПОЛИНОМ НА ЛАГРАНЖ

Да го разгледаме изразот:

$$L(x) = y_0 \cdot \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)...(x_0-x_n)} +$$

$$+ y_1 \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)....(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)....(x_x-x_n)} + \quad (1)$$

$$+ y_n \cdot \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)....(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)....(x_n-x_{n-1})}$$

Тој всушност претставува збир од $n + 1$ дропки, од кои секоја е помножена соодветно со броевите $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$.

Во броителот на дропката со множител (коефициент) y_k влегуваат сите множители-биноми: $x - x_0, x - x_1, x - x_2, ..., x - x_n$, освен множителот $x - x_k$. Именителот, пак, се добива од броителот со замена на x со x_k.

Бидејќи секој броител во изразот (1) е производ од n линеарни множители, значи тој е полином од n-ти степен; затоа изразот $L(x)$ ќе претставува полином со степен кој не

е поголем од n. Степенот на $L(x)$ може да биде и помал од n, ако по ослободување од заградите и сведување на сличните членови неговиот водечки коефициент (пред x^n) стане нула. Ќе покажеме дека полиномот $L(x)$ во точките $x = x_k$, $k = 0, 1, 2, ..., n$ добива соодветно вредности: $y_0, y_1, ..., y_n$. Нека $x = x_k$. Бидејќи множителот $x - x_k$ влегува во броителот на секоја дропка со коефициент y_k, затоа сите тие дропки за $x = x_k$ добиваат вредност нула. А во дропката со коефициент y_k броителот и именителот се совпаѓаат, па затоа таа добива вредност 1, а самиот собирок - вредност y_k. Според тоа, за полиномот $L(x)$ важи $L(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, 2, ..., n$. Полиномот $L(x)$ се вика **интерполационен полином на Лагранж.**

Пример 1. Да се одреди полином од 4-ти степен, за кој

$L(-1) = 2$, $L(0) = -5$, $L(1) = -8$, $L(2) = -7$, $L(3) = 22$.

Решение.

$$L(x) = 2 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)(-1-3)} - 5 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)}{(0+1)(0-1)(0-2)(0-3)} -$$

$$- 8 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-2)(x-3)}{(1+1)(1-0)(1-2)(1-3)} - 7 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-3)}{(2+1)(2-0)(2-1)(2-3)} +$$

$$+ 22 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-2)}{(3+1)(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{2}{24} \cdot x(x-1)(x-2)(x-3) +$$

$$+ \frac{5}{6}(x+1)(x-1)(x-2)(x-3) - \frac{8}{4}(x+1) \cdot x(x-2)(x-3) +$$

$$+ \frac{7}{6}(x+1) \cdot x(x-1)(x-3) + \frac{22}{24}(x+1) \cdot x(x-1)(x-2) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 5$$

Значи, бараниот полином е $L(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 5$.

Пример 2. Да се одреди полином $L(x)$, за кој $L(-2) = 13$, $L(-1) = 6$, $L(1) = -2$, $L(2) = -3$.

Решение.

$$L(x) = 13 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(-2+1)(-2-1)(-2-2)} + 6 \cdot \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{(-1+2)(-1-1)(-1-2)} -$$

$$- 2 \cdot \frac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(1+2)(1+1)(1-2)} - 3 \cdot \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(2+2)(2+1)(2-1)} =$$

$$= \frac{13}{12}(x+1)(x-1)(x-2) + \frac{6}{6}(x+2)(x-1)(x-2) +$$

$$+ \frac{2}{6}(x+2)(x+1)(x-2) - \frac{3}{12}(x+2)(x+1)(x-1) =$$

$$= -\frac{13}{12}(x^3 - 2x^2 - x + 2) + (x^3 - x^2 - 4x + 4) +$$

$$+ \frac{1}{3}(x^3 + x^2 - 4x - 4) - \frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - x - 2) = x^2 - 4x + 1$$

Значи, добиваме $L(x) = x^2 - 4x + 1$, чиј степен е за две единици помал од бројот $n + 1$ (= 4) на податоците.

20.2. ИНТЕРПОЛАЦИОНЕН ПОЛИНОМ НА ЊУТН

Сега ќе запознаеме друг, познат под името, **интерполационен полином на Њутн.** Него го запишуваме во видот:

$$y = N(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \quad (2)$$

каде што коефициентите $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ ги определуваме така што за $x = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ да добиеме соодветно $y = y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Според тоа, согласно (2), ќе имаме:

$$\begin{cases} y_0 = c_0 \\ y_1 = c_0 + c_1(x - x_0) \\ y_2 = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) \\ y_n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots + c_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) \end{cases} \quad (3)$$

Од системот (3) со последователна замена лесно ги одредуваме коефициентите $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Но, решавањето на системот (3) по однос на $c_0, c_1, \ldots, c_n$, во голема мера го поедноставува користењето на следнава шема:

$$\begin{array}{c|ccc} x_0 & y_0 & & \\ x_1 & y_1 & y_1^I & \\ x_2 & y_2 & y_2^I & y_2^{II} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & y_n^I & y_n^{II} \end{array}$$

Првите две колони ги формираме од дадените произволни $n + 1$ вредности $x_0, x_1, \ldots, x_n$ на променливата x и познатите соодветни вредности $y_0, y_1, \ldots, y_n$ на полиномот $N(x)$.

Колоната $y^I_1, y^I_2, \ldots, y^I_n$ ја формираме врз основа на соседните две колони од лево, согласно правилата:

$$y_1^I = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \quad y_2^I = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}, \ldots, \quad y_n^I = \frac{y_n - y_0}{x_n - x_0}$$

Наредната колона $y^{II}_2, y^{II}_3, \ldots y^{II}_n$ ја формираме врз основа на колоните $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots y_n$, т.е. од шемата:

$$\begin{array}{c|cc} x_1 & y_1^I & \\ x_2 & y_2^I & y_2^{II} \\ x_3 & y_3^I & y_3^{II} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n^I & y_n^{II} \end{array}$$

Согласно истите правила:

$$y_2^{II} = \frac{y_2^I - y_1^I}{x_2 - x_1}\ ,\ y_3^{II} = \frac{y_3^I - y_1^I}{x_3 - x_1}\ ,\ \ldots\ y_n^{II} = \frac{y_n^I - y_1^I}{x_n - x_1}$$

Со така добиената колона и шемата:

$$\begin{array}{c|cc} x_2 & y_2^{II} & \\ x_3 & y_3^{II} & y_3^{III} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n^{II} & y_n^{III} \end{array}$$

ја формираме колоната y^{III}_3, y^{III}_4, ... y^{III}_n, итн.

На таков начин добиваме: $c_0 = y_0$, $c_1 = y_1$, $c_2 = y_2$, $c_3 = y_3$, ... итн.

Пример 3. Според податоците во примерот 1:

$x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ и $y_0 = 2$, $y_1 = -5$, $y_2 = -8$, $y_3 = -7$, $y_4 = 22$ да го формираме соодветниот интерполационен полином на Њутн.

Решение. Ја формираме шемата

–1	(2)	=	c_0				
0	–5	(–7)	=	c_1			
1	–8	–5	(2)	=	c_2		
2	–7	–3	2	(0)	=	c_3	
3	22	5	4	1	(1)	=	c_4

Потоа го составуваме полиномот (2):

$y = N(x) = 2 - 7(x + 1) + 2(x + 1)(x - 0) + 0(x + 1)\,x\,(x - 1) + 1\,(x + 1)\,x\,(x - 1)(x - 2)$
$= 2 - 7(x + 1) + 2(x^2 + x) + (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x - 5$

Со овој пример се потврди дека бараниот интерполационен полином при дадени исти податоци е еден единствен, па било да е тој добиен по Лагранж или по Њутн.

Пример 4. Да се формира интерполационен полином на Њутн според податоците: N(0) = 2, N(1) = 0, N(2) = 3, N(3) = 4.

Решение. Ја формираме шемата

0	2			
1	0	–2		
2	3	1/2	5/2	
3	4	2/3	8/6	–7/6

Потоа: $N(x) = 2 - 2(x - 0) + \frac{5}{2}(x - 0)(x - 1) - \frac{7}{6}\,(x - 0)(x - 1)(x - 2) =$

$$= 2 - 2x + \frac{5}{2}(x^2 - x) - \frac{7}{6}\,(x^3 - 3x^2 + 2x) = \frac{7}{6} \cdot x^3 + 6x^2 - \frac{41}{6}\,x + 2.$$

Од овој пример забележуваме дека, покрај тоа што податоците $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $y_0, y_1, \ldots, y_n$ се цели броеви, интерполациониот полином може (но не мора) да е со цели коефициенти. Но, ако $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $c_0, c_1, \ldots, c_n$ се цели броеви, тогаш интерполациониот полином сигурно е целоброен.

ЗАДАЧИ

1. Користејќи го методот на Лагранж да се одреди полином од најмал можен степен според дадената табела:

а)

x	–1	0	1	2	3
L(x)	1	5	3	1	6

б)

x	1	2	3	4
L(x)	2	1	4	3

в)

x	1	i	–1	$-i$
L(x)	1	2	3	4

2. Користејќи го методот на Њутн да се формира полином од најнизок можен степен според дадената табела на вредности:

а)

x	–1	0	1	2	3
y	6	5	0	3	2

б)

x	1	4	9	16
y	1	2	3	4

в)

x	1	2	3	4	6
y	5	6	4	–4	10

3. Формирај полином од најнизок степен според табелата:

x	0	1	2	3	4
y	1	2	4	9	16

4. Формирај полином од најнизок степен според табелата:

x	1	2	3	4	5
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

5*. Докажи го идентитетот:

а) $$\frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-x\equiv 0$$

б) $$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\equiv x^2$$

Глава III

ДРОБНИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

§ 21. РАЦИОНАЛНИ ДРОПКИ

Познато е дека рационалните изрази можат да бидат **цели рационални** или **дробни рационални**. Целите рационални изрази ги нарековме полиноми.

Рационалниот израз се вика **дробен**, ако содржи операција делење со израз што содржи променлива. На пример, изразите:

$\frac{2x}{x^2+1}$, $\frac{3}{x^2-1}$, $2x-\frac{x^2}{x-1}$, $x^2+2y+\frac{1}{x-y}-\frac{2x}{y+1}$, се дробни рационални и тоа првите три се со една променлива, а четвртиот - со две променливи.

Ако променливите добиваат одредени бројни вредности, тогаш рационалниот израз, по правило, ќе добива некои точно определени вредности. Исклучок прават само случаите, кога при пресметувањата би се дошло до делење со нула, кое знаеме не е можно, односно, нема смисла. Затоа изразите, како што се: $\frac{x+1}{x-x}$, $\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2-x^2-2xy-y^2}$ не ги сметаме за рационални изрази, бидејќи тие немаат бројни вредности за некои вредности на променливите.

Ние овде ќе се задржиме на рационалните (цели и дробни) изрази само со една променлива.

Дефиниција. *Количникот од два полинома* $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, *каде што* $g(x)$ *е ненеула полином* ($g(x)\not\equiv 0$), *се вика рационална или алгебарска дропка.*

Рационалната дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$, (1)

во зависност од полиномот-броител $f(x)$ и полиномот-именител $g(x)$ може да е со

рационални, реални или комплексни коефициенти, а да биде разгледувана во различни бројни полиња, во зависност од тоа во кое бројно поле земаат вредности променливата x и рационалната дропка (1).

Дефиниционa област (домен) на рационалната дропка (1) е множеството на сите реални (односно комплексни) броеви, освен нулите на полиномот-именител $g(x)$. На пример, дефиниционa област на рационалната дропка $\frac{x-1}{x^2+1}$ разгледувана во полето на рационални (или реални) броеви, е множеството на сите рационални (реални) броеви. Доменот, пак, на истата дропка во полето на комплексните броеви е множеството на сите комплексни броеви, освен броевите $-i$ и i, т.е. $D = \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

Ќе покажеме дека, алгебарските операции и сите други трансформации над рационалните дропки ги вршиме согласно истите закони како и над рационалните броеви, т.е. како и над обичните дропки со броител и именител - цели броеви. Исто така и еднаквоста на две рационални дропки ќе ја дефинираме како и еднаквоста на две дропки во аритметиката. На пример:

За две обични дропки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, каде $a, b \neq 0, c, d \neq 0 \in \mathbb{Z}$, важи еквиваленцијата:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc \qquad (2)$$

Аналогно усвојуваме: За две рационални дропки $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ и $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ $(\psi(x) \neq 0)$ важи еквиваленцијата: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot \psi(x) = g(x) \cdot \varphi \cdot (x)$ (3)

Теорема [21.1]. ***Ако полиномите броител и именител на рационалната дропка (1) имаат заеднички неконстантен делител*** $\lambda(x) \neq 0$, ***тогаш делејќи ги нив со тој делител ќе добиеме дропка, еднаква со даденатa,*** т.е. $\frac{\lambda(x) \cdot f(x)}{\lambda(x) \cdot g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lambda(x) \neq 0$ (4)

Доказ. Рационалните дропки (4) се еднакви, бидејќи тие го задоволуваат потребниот услов (3), т.е. важи:

$(\lambda(x) \cdot f(x)) \cdot g(x) = (\lambda(x) \cdot g(x)) \cdot f(x)$

Трансформацијата (4) се вика **скратување**, а обратната операција **– проширување на рационалните дропки.**

Да заклучиме дека, скратувањето на дропките може да ја прошири (измени) нивната дефиниционa област. Имено: дефиниционата област на дропката $\frac{\lambda(x)f(x)}{\lambda(x)g(x)}$ ја одредуваме од два услова $\lambda(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, а за дропката добиена по скратувањето, условот $\lambda(x) \neq 0$ отпаѓа.

Рационалната дропка (1) се вика нескратлива, ако нејзиниот броител и именител се заемно прости полиноми, т.е. ако тие (освен бројни) немаат други заеднички делители. Очигледно е дека, секоја рационална дропка ако се скрати со најголемиот заеднички делител на нејзиниот броител и именител, ќе се добие еднаква нескратлива дропка. Замената на која било рационална дропка со нејзината еднаква нескратлива дропка се вика нејзино **претставување во канонична форма.**

Пример. Да ја претставиме рационалната дропка во канонична форма

$$\frac{\frac{1}{6}\cdot x^2-\frac{5}{6}\cdot x+1}{\frac{1}{6}\cdot x^2-x+\frac{4}{3}}$$

Решение.

$$\frac{\frac{1}{6}\cdot x^2-\frac{5}{6}\cdot x+1}{\frac{1}{6}\cdot x^2-x+\frac{4}{3}}=\frac{6(\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{6}x+1)}{6(\frac{1}{6}x^2-x+\frac{4}{3})}=\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}=\frac{x-3}{x-4}$$

Со еднаквоста на дадена рационална дропка и нејзината нескратлива, односно, канонична форма, всушност, вршиме извесна корекција на договорот за дефиниционa област на рационалните дропки. Имено, рационалната дропка ја дефинираме (осмислуваме) и за оние вредности на x, што се нули и на броителот и на именителот, чија што кратност е иста. Со други зборови, ако рационалната дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$ за $x = x_0$ нема смисла, но еднаквата нејзина нескратлива дропка $\frac{p(x)}{q(x)}$ за $x = x_0$ има смисла и добива вредност $\frac{p(x_0)}{q(x_0)}$ ($q(x_0) \neq 0$), тогаш за вредност на $\frac{f(x)}{g(x)}$ за $x = x_0$ ја земаме вредноста $\frac{p(x_0)}{q(x_0)}$, т.е. ќе сметаме дека важи: $\frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$

ЗАДАЧИ

1. Одреди ја дефиницоната област на рационалната дропка $\frac{x+2}{(x+3)(x^2+4)}$ во полето на: а) реалните, б) комплексните броеви.

2. Рационалните дропки: а) $\frac{x^2+1}{x^4-1}$, б) $\frac{x^2+1+x}{x^3-1}$, в) $\frac{x^4-x^2+1}{x^6+1}$ претстави ги во нивната канонична форма.

3. Дропките: а) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$, б) $\frac{x^3+y^3}{x^4-y^4}$ доведи ги во нивната канонична форма.

4. Дадени се рационалните дропки $\frac{x-1}{x+1}$ и $\frac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}$. Провери дали тие се еднакви, и ако се еднакви одреди ја нивната вредност за $x = -2$.

5*. Покажи дека дропката $\frac{x^{n-1}-a^{n+1}}{x-a}$ е идентична на полиномот

$$P(x)=x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$$

6. Провери кои од следниве дропки: а) $\frac{n^2+5n+4}{n+1}$, б) $\frac{2n^2-n+3}{2n-2}$, в) $\frac{n^3+3n^2+n+2}{n-2}$ се природни броеви за секој $n \in \mathbb{N}$.

§ 22. ПОЛЕ НА РАЦИОНАЛНИ ДРОПКИ

Познато ни е дека множеството $\mathbb{Q}$ на сите рационални броеви е поле во однос на операциите собирање и множење во него. Да провериме дали и множеството на сите рационални дропки е поле.

Во множеството рационални дропки, за елементите-дропки

$\frac{f(x)}{g(x)}$, $(g(x) \neq 0)$ и $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $(\psi(x) \neq 0)$ усвоивме дека се еднакви:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \text{ ако и само ако } f(x) \cdot \psi(x) = g(x) \cdot \varphi(x) \qquad (1)$$

Ќе покажеме дека важи следнава:

Теорема [22.1]. ***Еднаквоста на рационалните дропки е релација на еквивалентност, т.е. таа ги има својствата на:***

1°. **Рефлексивност:** $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$

2°. **Симетричност:** Ако $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ тогаш $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$

3°. **Транзитивност:** Ако $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ и $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$, тогаш $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$

Доказ. Точноста на својствата 1° и 2° е очигледна. Ќе го докажеме својството 3°. Согласно условот (1) за еднаквост, имаме: $f(x) \cdot \psi(x) = g(x) \cdot \varphi(x)$ и $\varphi(x) \cdot q(x) = \psi(x) \cdot p(x)$. Множејќи ги соодветните страни страни на равенствата, добиваме:

$$[f(x) \cdot \psi(x)] \cdot [\varphi(x) \cdot q(x)] = [g(x) \cdot \varphi(x)] \cdot [\psi(x) \cdot p(x)] \text{ или}$$

$$f(x) \cdot q(x) \cdot [\varphi(x) \cdot \psi(x)] = g(x) \cdot p(x) \cdot [\varphi(x) \cdot \psi(x)].$$

Оттука, ако ги поделиме двете страни со $\varphi(x) \cdot \psi(x)$, добиваме:

$$f(x) \cdot q(x) = g(x) \cdot p(x) \text{ или } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ штд.}$$

Од Т[22.1] следува дека, релацијата еднаквост на рационалните дропки го разбива множеството на сите рационални дропки на дисјунктни **класи на еквивалентност**. На пример, нека $\frac{f(x)}{g(x)}, (g(x) \neq 0)$ е една рационална дропка, тогаш сите рационални дропки еднакви со неа образуваат едно подмножество (класа) од множеството на сите рационални дропки. Ако избереме друга дропка $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}, (\psi(x) \neq 0)$, што не е еднаква со $\frac{f(x)}{g(x)}$, тогаш сите еднакви со $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ рационални дропки ќе образуваат друго подмножество (класа). Тие две класи немаат заеднички елементи, т.е. тие се дисјунктни.

Во множеството М на сите рационални дропки операциите собирање и множење се воведени (дефинирани) така што, множеството М да биде поле во однос на нив. Имајќи го предвид тоа усвоени се следниве дефиниции за собирање и множење на две рационални дропки со ненула именители:

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{f(x) \cdot \psi(x) + g(x) \cdot \varphi(x)}{g(x) \cdot \psi(x)} \tag{2}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{f(x) \cdot \varphi(x)}{g(x) \cdot \psi(x)}, \; g(x) \neq 0 \text{ и } \psi(x) \neq 0 \tag{3}$$

Треба уште да покажеме дека, со замената на собироците (или множителите) со еднакви на нив дропки, ќе се замени и нивниот збир (или производ) со еднаква дропка на него.

Нека $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_0(x)}{g_0(x)}, \quad \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi_0(x)}{\psi_0(x)}$

Согласно условот (1) за еднаквост, имаме:

$$f(x) \cdot g_0(x) = g(x) \cdot f_0(x), \quad \varphi(x) \cdot \psi_0(x) = \psi(x) \cdot \varphi_0(x) \tag{4}$$

Ако двете страни на првото равенство од (4) ги помножиме со $\psi(x) \cdot \psi_0(x)$, а двете страни на второто равенство - со $g(x) \cdot g_0(x)$, а потоа ги собереме соодветните страни на тие равенства, добиваме: $f(x) \cdot g_0(x) \cdot \psi(x) \cdot \psi_0(x) + \varphi(x) \cdot \psi_0(x) \cdot g(x) \cdot g_0(x) = g(x) \cdot f_0(x) \cdot \psi(x) \cdot \psi_0(x) + \psi(x) \cdot \varphi_0(x) \cdot g(x) \cdot g_0(x)$ или $[f(x) \cdot \psi(x) + g(x) \cdot \varphi(x)] \cdot g_0(x) \cdot \varphi_0(x) = [f_0(x) \cdot \psi_0(x) + g_0(x) \cdot \varphi_0(x)] \cdot g(x) \cdot \psi(x)$, односно:

$$\frac{f(x)\cdot\psi(x)+g(x)\cdot\varphi(x)}{g(x)\cdot\psi(x)} = \frac{f_0(x)\cdot\psi_0(x)+g_0(x)\cdot\varphi_0(x)}{g_0(x)\cdot\psi_0(x)} \tag{5}$$

Ако, пак, ги помножиме соодветните страни на равенствата (4), ќе добиеме: $f(x) \cdot g_0(x) \cdot \varphi(x) \cdot \psi_0(x) = g(x) \cdot f_0(x) \cdot \psi(x) \cdot \varphi_0(x)$, кое е еквивалентно со

$$\frac{f(x)\cdot\varphi(x)}{g(x)\cdot\psi(x)} = \frac{f_0(x)\cdot\varphi_0(x)}{g_0(x)\cdot\psi_0(x)} \tag{6}$$

Од равенствата (5) и (6) заклучуваме дека: на кои било две рационални дропки, земени од две дадени класи (на еднакви меѓу себе) дропки, им одговараат еднозначно определени: **дропка - збир** и **дропка-производ**, од кои секоја ѝ припаѓа на некоја трета класа. Едната се вика **збир**, а другата **производ** на дадените две класи.

Збирот и производот на рационалните дропки ги имаат познатите својства на **комутативност, асоцијативност** и **дистрибутивност**:

1°. $\dfrac{f(x)}{g(x)} + \dfrac{h(x)}{p(x)} = \dfrac{h(x)}{p(x)} + \dfrac{f(x)}{g(x)}$,

2°. $\dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \dfrac{h(x)}{p(x)} = \dfrac{h(x)}{p(x)} \cdot \dfrac{f(x)}{g(x)}$,

3°. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)} + \dfrac{h(x)}{p(x)}\right] + \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} + \left[\dfrac{h(x)}{p(x)} + \dfrac{u(x)}{v(x)}\right]$,

4°. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \dfrac{h(x)}{p(x)}\right] \cdot \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \left[\dfrac{h(x)}{p(x)} \cdot \dfrac{u(x)}{v(x)}\right]$,

5°. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)} + \dfrac{h(x)}{p(x)}\right] \cdot \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \dfrac{u(x)}{v(x)} + \dfrac{h(x)}{p(x)} \cdot \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

Својствата 1°, 2° и 4° следуваат непосредно од равенствата (2) и (3), а во точноста на својствата 3° и 5° се уверуваме на следниов начин:

3°. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)} + \dfrac{h(x)}{p(x)}\right] + \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{f(x)\cdot p(x)+g(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot p(x)} + \dfrac{u(x)}{v(x)} =$

$$= \frac{f(x)\cdot p(x)\cdot \nu(x)+g(x)\cdot h(x)\cdot \nu(x)+g(x)\cdot p(x)\cdot u(x)}{g(x)\cdot p(x)\cdot \nu(x)} =$$

$$= \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{h(x)\cdot \nu(x)+p(x)\cdot u(x)}{p(x)\cdot \nu(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} + \left[\frac{h(x)}{p(x)} + \frac{u(x)}{\nu(x)}\right]$$

$$5^{o}.\ \left[\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{h(x)}{p(x)}\right]\cdot \frac{u(x)}{\nu(x)} = \frac{f(x)\cdot p(x)+g(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot p(x)}\cdot \frac{u(x)}{\nu(x)} =$$

$$= \frac{\left[f(x)\cdot p(x)+g(x)\cdot h(x)\right]\cdot u(x)}{g(x)\cdot p(x)\cdot \nu(x)} = \frac{f(x)\cdot p(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot h(x)\cdot u(x)}{g(x)\cdot p(x)\cdot \nu(x)} =$$

$$= \frac{f(x)\cdot p(x)\cdot u(x)\cdot \nu(x)+g(x)\cdot h(x)\cdot u(x)\cdot \nu(x)}{g(x)\cdot p(x)\cdot \nu^{2}(x)} =$$

$$= \frac{f(x)\cdot u(x)}{g(x)\cdot \nu(x)} + \frac{h(x)\cdot u(x)}{p(x)\cdot \nu(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}\cdot \frac{u(x)}{\nu(x)} + \frac{h(x)}{p(x)}\cdot \frac{u(x)}{\nu(x)}.$$

Согласно дефиницијата за еднаквост на рационалните дропки следува дека сите дропки, чиј броител е нула полином, односно сите дропки од видот $\frac{0}{p(x)}$ се еднакви меѓу себе и формираат посебна класа на еднакви дропки. Таа класа ќе ја наречеме **нула класа** и ќе докажеме дека таа ја игра улогата на **неутрален елемент** или **нула** во собирањето на рационалните дропки.

Навистина, за произволна дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$ важи:

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{p(x)} = \frac{f(x)\cdot p(x)+0\cdot g(x)}{g(x)\cdot p(x)} = \frac{f(x)\cdot p(x)}{g(x)\cdot p(x)} = \frac{f(x)}{g(x)},$$ т.е.

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{p(x)} = \frac{0}{p(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (7)$$

Ќе покажеме дека класата дропки еднакви со дропката $\frac{-f(x)}{g(x)}$ е спротивна за класата дропки еднакви со $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Тоа непосредно следува од равенството:

$$\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{-f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)}{g^2(x)}=\frac{0}{g^2(x)}.$$

Постоењето на спротивен елемент овозможува и операцијата одземање да биде изводлива во множеството М на сите рационални дропки. Имено, според дефиницијата на одземањето, разлика на две дропки $\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\frac{h(x)}{p(x)}$ е дропка $\frac{u(x)}{v(x)}$ што ќе го задоволува условот $\frac{h(x)}{p(x)}+\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}$. (8)

Но, тој услов го задоволува дропката (и секоја дропка еднаква со неа):

$$\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}+\left(-\frac{h(x)}{p(x)}\right)=\frac{f(x)}{g(x)}+\frac{-h(x)}{p(x)}=\frac{f(x)\cdot p(x)-g(x)\cdot h(x)}{g(x)\cdot p(x)},$$ бидејќи

$$\frac{h(x)}{p(x)}+\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{h(x)}{p(x)}\left[\frac{f(x)}{g(x)}+\left(-\frac{h(x)}{p(x)}\right)\right]=\frac{f(x)}{g(x)}+\left[\frac{h(x)}{p(x)}+\left(-\frac{h(x)}{p(x)}\right)\right]=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

Забележуваме дека, дропките од видот $\frac{f(x)}{f(x)}$, чиј броител и именител се еден ист ненула полином, се еднакви меѓу себе и образуваат одделна класа. Таа класа се вика **единична класа** и ја игра улогата на **неутрален елемент** или **единица** во множењето на рационални дропки:

$$\frac{f(x)}{f(x)}\cdot\frac{h(x)}{p(x)}=\frac{f(x)\cdot h(x)}{f(x)\cdot p(x)}=\frac{h(x)}{p(x)}$$

Да забележиме уште дека ако дропката $\frac{f(x)}{g(x)}$ не ѝ припаѓа на нула класата, т.е. ако $f(x)\neq 0$, тогаш секогаш постои и дропка $\frac{g(x)}{f(x)}$, за која нејзиниот производ со појдовната дропка:

$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)\cdot f(x)}$ да ѝ припаѓа на единичната класа. Во тој случај за класата дропки еднакви со дропката $\frac{g(x)}{f(x)}$ велиме дека е **обратна** (инверзна) на класата дропки еднакви со дропката $\frac{f(x)}{g(x)}$.

За секој ненула елемент, постои негов обратен (инверзен) елемент, што ја овозможува изводливоста и на операцијата делење на рационалните дропки (освен делење со дропка од нула класата). Имено, според дефиницијата на делењето, количник на дропките $\frac{f(x)}{g(x)}$ и $\frac{h(x)}{p(x)}$ е дропката $\frac{u(x)}{v(x)}$, што го задоволува условот

$$\frac{h(x)}{p(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \tag{9}$$

Но, тој услов го задоволува дропката (и секоја еднаква со неа):

$\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{p(x)}{h(x)} = \frac{f(x) \cdot p(x)}{g(x) \cdot h(x)}$, бидејќи

$$\frac{h(x)}{p(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{h(x)}{p(x)} \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{p(x)}{h(x)} \right) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left[\frac{h(x)}{p(x)} \cdot \frac{p(x)}{h(x)} \right] = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Од досега изложеното заклучуваме дека, множеството на сите рационални дропки од променливата x со реални (или комплексни) коефициенти со дефинираните операции собирање и множење во него, образува поле.

Порано докажавме дека, множеството на сите полиноми од променливата x со дефинираните операции собирање и множење во него образува **прстен**. Останува уште да докажеме дека конструираното поле на рационалните дропки го содржи прстенот на сите полиноми од променливата x, како и дека дефинираните операции собирање и множење во полето се во склад со соодветните операции во прстенот полиноми.

Усвоено е дека, секој полином $f(x)$ може да го разгледуваме и како рационална дропка со именител единица: $\frac{f(x)}{1}$. На тој начин, множеството на сите полиноми е вклучено како подмножество во множеството рационални дропки. Лесно се покажува дека и воведените операции собирање и множење во полето на рационалните дропки се во полн склад и со истите својства како и соодветните операции со полиноми. Навистина, од равенството $\frac{f(x)}{1} = \frac{h(x)}{1}$ следува дека $f(x) \cdot 1 = 1 \cdot h(x)$, т.е. $f(x) = h(x)$.

Потоа: $\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x) \cdot 1 + g(x) \cdot 1}{1^2} = \frac{f(x) + g(x)}{1}$, $\frac{f(x)}{1} \cdot \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x) \cdot g(x)}{1}$.

Од изложеното следува дека, за рационалните дропки важат истите правила, кои важат и за обичните аритметички дропки со кои ги изразуваме рационалните броеви.

Во практиката собирањето на рационалните дропки го вршиме на следниов начин:

а) Полиномите именители на дропките-компоненти ги разложуваме на неразложливи множители (во полето во кое ги разгледуваме дропките),

б) Го одредуваме најмалиот заеднички содржател за полиномите-именители, што се претходно разложени на множители. Н.з.с. на полиномите-именители е еднаков на производот од сите заеднички и незаеднички множители од највисок степен, што влегуваат во разложувањето на секој полином-именител.

в) Потоа дропките - компоненти ги доведуваме на заеднички именител по пат на проширување до најмалиот заеднички именител.

г) На крајот ја составуваме дропката-збир со броител еднаков на збирот од броителите и со именител еднаков на заедничкиот именител на дропките-собироци.

Пример. Да ги извршиме означените операции со дропките:

$$\frac{1}{x-3}-\frac{x+1}{x^2-9}+\frac{2}{x^2+6x+9}.$$

Решение.

$$\frac{1}{x-3}-\frac{x+1}{(x-3)(x+3)}+\frac{2}{(x+3)^2}=$$

$$=\frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)^2}-\frac{(x+1)(x+3)}{(x-3)(x+3)^2}+\frac{2(x-3)}{(x-3)(x+3)^2}=$$

$$=\frac{(x+3)^2-(x+1)(x+3)+2(x-3)}{(x-3)(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+9-(x^2+4x+3)+2x-6}{(x-3)(x+3)^2}=$$

$$=\frac{4x}{(x-3)(x+3)^2}=\frac{4x}{x^3+3x^2-9x-27}.$$

ЗАДАЧИ

Изврши ги означените операции во изразите (1 – 7):

1. а) $\frac{2}{x^4-1}+\frac{x}{1-x^2}+\frac{1}{x+1}$, б) $\left(\frac{x+3}{x-3}-\frac{x-3}{x+3}\right)\cdot(x^2-9)$.

2. а) $\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2x}{x^4-1}\right)\cdot(x+1+\frac{2}{x-1})$, б) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$.

3. $\left(\frac{2x}{x+2}+\frac{2x}{6-3x}+\frac{8x}{x^2-4}\right):\frac{4-x}{2-x}$

4. а) $(1-x+\frac{x^2-3}{x-1})\cdot\frac{1-x^2}{2-x}$ б) $(\frac{1}{3}+\frac{2}{x-3})\cdot(x-\frac{x^2+9}{x+3})$.

5. $\left(\frac{x}{x-3}+\frac{10}{x-3}+\frac{25}{x^2-2x}\right):\left(\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x}+\frac{1}{5}\right)$

6. $\frac{x^3-3x^2+3x+9}{x^3+x^2-2x-2}\cdot\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^3+x^2-3x-3}-\frac{x^2-5x+2}{x^2+2x+1}$

7. $\frac{x^4+x^3+x+1}{x^3-x^2+x-1}\cdot\frac{2x^2+2}{x^3+1}-\frac{x+3}{x-1}$

§ 23. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА РАЦИОНАЛНИТЕ ДРОПКИ ВО ВИД НА ЗБИР ОД ПРОСТИ ДРОПКИ

Рационалната дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$ се вика **права**, ако степенот на броителот f(x) е помал од степенот на именителот g(x). Ако, пак, степенот на броителот f(x) не е помал од степенот на именителот, тогаш дропката се вика **неправа**.

Теорема[23.1]. ***Секоја неправа рационална дропка може да се претстави (на единствен начин) како збир од полином и права дропка.***

Доказ. Нека $\frac{f(x)}{g(x)}$ е неправа дропка. Со делење на броителот f(x) со именителот g(x) $\neq 0$ го добиваме равенството

$$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x) \quad \text{или} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = q(x)+\frac{r(x)}{g(x)} \tag{1}$$

каде што остатокот r(x) има помал степен од степенот на именителот g(x). Останува да ја докажеме единственоста на q(x) и $\frac{r(x)}{g(x)}$.

Да претпоставиме дека постои и равенството $\frac{f(x)}{g(x)} = q_1(x)+\frac{h(x)}{p(x)}$ каде што степенот на h(x) е помал од степенот на p(x). (2)

Од (1) и (2) следува равенството:

$$q(x)-q_1(x)=\frac{h(x)}{p(x)}-\frac{r(x)}{g(x)}=\frac{h(x)\cdot g(x)-p(x)\cdot r(x)}{p(x)\cdot g(x)}.$$

Тоа е невозможно, бидејќи на неговата лева страна стои полином, а на десната страна - права дропка; а можно е само ако

$$q(x)-q_1(x)\equiv 0 \quad \text{и} \quad \frac{h(x)}{p(x)}-\frac{r(x)}{g(x)}\equiv 0,$$

од каде добиваме: $q_1(x) = q(x)$ и $\frac{h(x)}{p(x)}=\frac{r(x)}{g(x)}$.

Пример 1. Да ја трансформираме неправата рационална дропка $\frac{x^3+2x+5}{x^2-x+3}$.

Решение. $(x^3 + 2x + 5) : (x^2 - x + 3) = x + 1 + \frac{2}{x^2-x+3}$.

Да се потсетиме, во полето на реалните броеви неразложливи се само полиномите од прв степен $x-a$ и полиномите од втор степен $x^2 + px + q$, каде што p и q се реални броеви, за кои $p^2 - 4q < 0$. Меѓутоа, во полето на комплексните броеви неразложливи се само полиномите од прв степен $x - \alpha$, каде што α е кој било комплексен број.

Сега ќе воведеме посебен назив за еден специјален вид рационални дропки, имено: Права дропка од видот $\frac{A}{(x-a)^k}$ се вика **проста дропка од прв вид**, при што A и a се дадени реални броеви, а k - даден природен број. **Проста дропка од втор вид**, пак, се вика секоја права дропка од видот $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^{k'}}$, каде што A, B, p и q се дадени реални броеви, а k - даден природен број, за кои $p^2 - 4q < 0$.

Правите рационални дропки го имаат следново важно својство:

Теорема [23.2]. ***Секоја права рационална дропка може да се претстави како збир од прости дропки.***

Доказ. Нека $\frac{f(x)}{g(x)}$ е нескратлива рационална дропка со реални коефициенти, при што степенот на f(x) да е помал од степенот на g(x). По однос на нулите на полиномот-именител g(x) постојат неколку можности:

а) сите нули на g(x) да се реални и различни,

б) некои од реалните нули да се повеќекратни,

в) g(x) да има еднократни или повеќекратни комплексни нули.

Во секој од тие случаи теоремата ќе ја докажеме одделно:

I. **Случај кога сите нули на именителот g(x) се реални и различни.**

Ако $x = a$ е една проста нула на именителот g(x), тогаш

$g(x) = (x - a) \cdot g_1(x)$, при што $g_1(a) \neq 0$.

Ќе покажеме дека постојат реален број A и полином $f_1(x)$, чиј степен е помал од степенот на $g_1(x)$, за кој да важи равенството:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \tag{3}$$

Со множење на двете страни на (3) со $g(x)$ $(= (x-a)\cdot g_1(x))$, добиваме

$$f(x) = A \cdot g_1(x) + (x-a) f_1(x) \tag{4}$$

Ставајќи $x = a$, имаме $f(a) = Ag_1(a)$, а оттука $A = \frac{f(a)}{g_1(a)}$, (5)

со што константата A е еднозначно одредена.

Потоа, кога константата A е одредена, од $f(a) = A \cdot g(a)$, односно $f(a) - Ag_1(a) = 0$ заклучуваме дека $x = a$ е нула на полиномот $f(x) - A \cdot g_1(x)$.

Тоа значи дека тој е делив со $x - a$, т.е. дека и $\frac{f(x) - A \cdot g_1(x)}{x-a}$ е исто така полином, а согласно (4) тој е токму бараниот полином

$$f_1(x) = \frac{f(x) - A \cdot g_1(x)}{x-a} \tag{6}$$

Очигледно е дека степенот на $f_1(x)$ е за единица помал од степенот на броителот $f(x) - A \cdot g_1(x)$. Меѓутоа степенот на $f(x)$ е помал од степенот на $g(x)$. Тоа својство го има и полиномот $A \cdot g_1(x)$. Значи, степенот на броителот-полиномот $f(x) - A \cdot g_1(x)$ е понизок од степенот на полиномот $g(x)$, па според тоа степенот на полиномот $f_1(x)$ е понизок од степенот на $g(x)$ најмалку за две единици.

Според тоа, полиномот $f_1(x)$ има степен помал од $g_1(x)$, а тоа значи дека $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ е права дропка. Со тоа го докажавме равенството (3).

Ако именителот $g_1(x)$ на правата дропка $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ има една проста нула $x = b$, тогаш $g_1(x) = (x - b) \cdot g_2(x)$, па и врз неа можеме да го примениме истиот метод, и ќе добиеме:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{B}{x-b} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, \tag{7}$$

каде што константата B и полиномот $f_2(x)$ ги одредуваме на ист начин како и A и $f_1(x)$.

Ако $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ од (7) ја замениме во (3), добиваме:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \tag{8}$$

Продолжувајќи натаму, конечно добиваме:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \ldots + \frac{L}{x-l} \tag{9}$$

каде што a, b, c, ..., l сите се нули на именителот $g(x)$.

На секоја реална нула на именителот $g(x)$ одговара по еден собирок од видот $\frac{A}{x-a}$ и со тоа правата рационална дропка ја претставуваме како збир од прости дропки.

II. **Случај кога некои од реалните нули на именителот $g(x)$ се повеќекратни.**
Ако $x = a$ е k-кратна ($k \geq 1$) реална нула на именителот $g(x)$, тогаш
$g(x) = (x-a)^k g_1(x)$, при што $g_1(a) \neq 0$.

Ќе покажеме дека правата дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$ може да се претстави во вид на збир од една проста и друга права дропка:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot g_1(x)} \tag{10}$$

Константата A_k и полиномот $f_1(x)$ ги одредуваме така што равенството (10) да биде идентитет.

Го множиме идентитетот (10) со $g(x)$ $(= (x-a)^k g_1(x))$ и тој преминува во видот:

$$f(x) = A_k g_1(x) + (x-a) \cdot f_1(x) \tag{11}$$

Ставајќи во него $x = a$ добиваме:

$f(a) = A_k g_1(a)$, а оттука $\qquad A_k = \frac{f(a)}{g_1(a)}$ (12)

Заклучуваме дека, полиномот $f(x) - A_k g_1(x)$ (или нему еднаквиот $(x-a) f_1(x)$ очигледно има помал степен од $g(x)$ (како разлика на два полинома, од кои секој има помал степен од $g(x)$ и тоа: $f(x)$ - по услов, а $A_k g_1(x)$ - затоа што $g_1(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^k}$, каде што $k \geq 1$). Значи, дропката $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot g_1(x)}$, која што е еднаква со $\frac{f(x) - A_k g_1(x)}{g(x)}$, е исто ака права дропка. Тогаш (сметајќи дека $k > 1$) и врз дропката $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot g_1(x)}$ можеме да ја повториме истата постапка, како и со дропката $\frac{f(x)}{g(x)}$, па ќе добиеме:

$$\frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1} \cdot g_1(x)} \equiv \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{k-2} \cdot g_1(x)}, \tag{13}$$

каде што $A_{k-1} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)}$ (може да биде $A_{k-1} = 0$) и $f_2(x)$ - некој полином.

Со замена од (13) во (10), добиваме:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \equiv \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{f_2(x)}{(x-a)^{k-2} \cdot g_1(x)} \tag{14}$$

Продолжувајќи така, на крајот ќе добиеме:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \equiv \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \frac{A_{k-2}}{(x-a)^{k-2}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{f_k(x)}{g_1(x)}. \tag{15}$$

Според тоа, ако именителот $g(x)$ на правата рационална дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$, има повеќекратна реална нула $x = a$ со кратност k, тогаш ќе важи равенството (15), каде што $A_k \neq 0$, A_{k-1}, A_{k-2}, ..., A_1 се реални константи и $f_k(x)$ - некој полином.

Понатаму, ако $g(x)$ има уште и повеќекратна нула (реална) $x = b$ со кратност s, тогаш $g(x) = (x-a)^k (x-b)^s g_2(x)$, каде $g_2(b) \neq 0$ и $g_1(x) = (x-b)^s g_2(x)$.

Повторувајќи ја истата постапка и за правата дропка $\frac{f_k(x)}{g_1(x)}$ по однос на s-кратната реална нула $x = b$, добиваме:

$$\frac{f_k(x)}{g_1(x)} \equiv \frac{B_s}{(x-b)^s} + \frac{B_{s-1}}{(x-b)^{s-1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{f_s(x)}{g_2(x)}, \tag{16}$$

каде што $B_s \neq 0$, B_{s-1}, B_{s-2}, ..., B_1 се исто така реални константи и $g_s(x)$ - некој полином, а дропката $\frac{f_s(x)}{g_2(x)}$ е исто така нескратлива права, во колку е $f_s(x) \neq 0$.

Со замена од (16) во (15), добиваме:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \equiv \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \frac{B_{s-1}}{(x-b)^{s-1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \frac{f_s(x)}{g_2(x)} \tag{17}$$

Ако $\frac{f_s(x)}{g_2(x)} \neq 0$, тогаш процесот продолжува и со другите повеќекратни реални нули, а во колку е $\frac{f_s(x)}{g_2(x)} \equiv 0$, тогаш процесот на разложување на дропката $\frac{f(x)}{g(x)}$ е завршен.

III. Случај кога именителот $g(x)$ има еднократни или повеќекратни комплексни нули.

Да претпоставиме дека $\alpha = a + bi$ е комплексна нула на именителот $g(x)$ на нескратливата права дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$, чии коефициенти се реални броеви. Тогаш, знаеме дека, нула на полиномот $g(x)$ ќе биде и конјугирано комплексниот број $\overline{\alpha} = a - bi$, при што нивната кратност е иста. Нека секоја од нулите α и $\overline{\alpha}$ е со кратност s. Тогаш именителот $g(x)$ е делив со полиномот:

$$[(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})]^s = [x^2 - (\alpha+\overline{\alpha})x + \alpha\cdot\overline{\alpha}]^s = [x^2 - 2ax + a^2 + b^2] = (x^2 + px + q)^s,$$

односно важи равенството

$$g(x) = (x^2 + px + q)^s \cdot g_1(x), \tag{18}$$

при што $g_1(\alpha) \neq 0$, $g_1(\overline{\alpha}) \neq 0$.

Ќе покажеме дека постојат реални броеви B и C и полином $f_1(x)$, чиј степен е помал од степенот на полиномот $(x^2 + px + q)^{s-1} \cdot g_1(x)$, такви што да важи равенството:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \equiv \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^s} + \frac{f_1(x)}{(x^2 + px + q)^{s-1} \cdot g_1(x)} \tag{19}$$

Со множење на двете страни на равенството (19) со $g(x)$, тоа го добива видот:

$$f(x) = (Bx + C) \cdot g_1(x) + (x^2 + px + q) f_1(x) \tag{20}$$

За одредување на броевите B и C, ставаме $x = \alpha$ и $x = \overline{\alpha}$, па добиваме:

$$f(\alpha) = (B\alpha + C)\, g_1(\alpha), f(\overline{\alpha}) = (B\overline{\alpha} + C)\, g_1(\overline{\alpha}),$$

Оттука: $B\alpha + C = \frac{f(\alpha)}{g_1(\alpha)}$, $B\overline{\alpha} + C = \frac{f(\overline{\alpha})}{g_1(\overline{\alpha})}$ (21)

Бидејќи полиномите $f(x)$ и $g_1(x)$ се со реални коефициенти, затоа броевите $\frac{f(\alpha)}{g_1(\alpha)}$ и $\frac{f(\overline{\alpha})}{g_1(\overline{\alpha})}$ ќе бидат конјугирано комплексни, т.е. $\frac{f(\alpha)}{g_1(\alpha)} = M + Ni$, $\frac{f(\overline{\alpha})}{g_1(\overline{\alpha})} = M - Ni$

Значи, равенствата (21) можеме да ги запишеме и вака:

$$B\alpha + C = M + Ni,\ B\overline{\alpha} + C = M - Ni \tag{22}$$

Со одземање и собирање на соодветните страни на (22) добиваме:

$B(\alpha - \overline{\alpha}) = 2Ni$, или $2bBi = 2Ni$, односно $B = \frac{N}{b}$, и $B(\alpha + \overline{\alpha}) + 2C = 2M$, или $aB + C = M$,

односно $C = M - aB = M - \frac{aN}{b}$.

Заклучуваме дека броевите B и C се реални. Потоа, откако се одредени броевите B и C од (20) го одредуваме и полиномот

$$f_1(x)=\frac{f(x)-(Bx+C)\cdot g_1(x)}{x^2+px+q}. \tag{23}$$

Доказот дека степенот на полиномот $f_1(x)$ е помал од степенот на полиномот $(x^2+px+q)^{s-1}\cdot g_1(x)$, односно дека дропката $\frac{f_1(x)}{(x^2+px+q)^{s-1}\cdot g_1(x)}$ во (19) е права, го вршиме исто како и за дропката $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{k-1}\cdot g_1(x)}$ во (10).

Тогаш (ако е $s>1$) и врз дропката $\frac{f_1(x)}{(x^2+px+q)^{s-1}\cdot g_1(x)}$ можеме да ја повториме истата постапка како и за дропката $\frac{f(x)}{g(x)}$, па ќе добиеме:

$$\frac{f_1(x)}{(x^2+px+q)^{s-1}\cdot g_1(x)}\equiv\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^{s-1}}+\frac{f_2(x)}{(x^2+px+q)^{s-2}\cdot g_1(x)}. \tag{24}$$

Со замена од (24) во (19), добиваме:

$$\frac{f(x)}{g(x)}\equiv\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}+\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^{s-1}}+\frac{f_2(x)}{(x^2+px+q)^{s-2}\cdot g_1(x)}.$$

Продолжувајќи така на крајот ќе добиеме:

$$\frac{f(x)}{g(x)}\equiv\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s}+\frac{Dx+E}{(x^2+px+q)^{s-1}}+\ldots+\frac{Rx+T}{x^2+px+q}+\frac{f_s(x)}{g_1(x)}. \tag{25}$$

Ако $\frac{f_s(x)}{g_1(x)}\neq 0$, тогаш процесот на разложување продолжува и со другите еднократни или повеќекратни комплексни нули на $g(x)$. А во колку е $\frac{f_s(x)}{g_1(x)}=0$, тогаш процесот на разложување на правата дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$ во збир на прости дропки е завршен.

Со тоа теоремата Т[23.2] во потполност е докажана.

Непознатите реални коефициенти во равенствата (9), (17) и (25) во практика ги одредуваме со помош на познатиот метод на неопределени коефициенти.

Како правите нескратливи рационални дропки ги разложуваме во збир од прости дропки ќе покажеме на следниве примери.

Пример 2. Да ја разложиме во збир од прости дропки од прв вид правата рационална дропка $\frac{10x^3-3x^2-19x+6}{x^4-5x^2+4}$.

Решение. Прво именителот на дропката го разложуваме на неразложливи множители. За таа цел ги одредуваме рационалните нули на полиномот $x^4 - 5x^2 + 4$. Тоа се: $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2, x_4 = -2$. Според тоа, разложувањето на дадената дропка во збир од прости дропки ќе го има видот:

$$\frac{10x^3-3x^2-19x+6}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}. \tag{26}$$

Оттука следува равенството:

$10x^3 - 3x^2 - 19x + 6 \equiv A(x + 1)(x - 2)(x + 2) + B(x - 1)(x - 2)(x + 2) + C(x - 1)(x + 1)(x + 2) + D(x - 1)(x + 1)(x - 2)$ (27)

или

$10x^3 - 3x^2 - 19x + 6 \equiv A(x^3 + x^2 - 4x - 4) + B(x^3 - x^2 - 4x + 4) + C(x^3 + 2x^2 - x - 2) + (x^3 - 2x^2 - x + 2)$. (27')

Според методот на неопределени коефициенти, броевите A, B, C и D од равенството (27), односно (27') ги одредуваме, кога неговата десна страна прво ја подредиме по опаднувачките степени на x: $10x^3 - 3x^2 - 19x + 6 \equiv (A + B + C + D)x^3 + (A - B + 2C - 2D)x^2 + (-4A - 4B - C - D)x - 4A + 4B - 2C + 2D$, (28)

а потоа ги изедначуваме соодветните коефициенти при еднаквите степени на x во двете страни на равенството (28).

Така добиваме систем од услови - линеарни равенки во кои како непознати се јавуваат константите A, B, C и D:

$$\begin{cases} A+B+C+D=10 \\ A-B+2C-2D=-3 \\ -4A-4B-C-D=-19 \\ -4A+4B-2C+2D=6 \end{cases} \tag{29}$$

Системот на линеарни равенки (29) (ќе видиме понатаму) секогаш има единствено решение. Во нашиот случај системот (29) има решение: A = 1, B = 2, C = 3, D = 4. Со замена на овие вредности во (26), добиваме:

$$\frac{10x^3-3x^2-19x+6}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} \equiv \frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}.$$

Во случај кога именителот $g(x)$ на правата рационална дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$ има само реални различни нули, определувањето на непознатите константи A, B, C, ..., L во разложувањето (9) секогаш го вршиме со помош на таканаречениот **метод на посебни вредности**, кој се состои во следново:

Равенството (27) сакаме да биде идентитет, што значи дека треба да важи за секој реален број x. Оттука следува дека тоа мора да важи и за некои посебно избрани вредности на x. Во овој пример тоа се вредностите $x = 1, -1, 2$ и -2. Така, заменувајќи во (27) $x = 1$ доаѓаме до равенството $-6 = A(-6)$, од каде $A = 1$. Потоа, заменувајќи во (27) едно по друго: $x = -1$, $x = 2$, $x = -2$, добиваме: $12 = 6B$, $36 = 12C$, $-48 = -12D$, односно $B = 2$, $C = 3$, $D = 4$.

Пример 3. Да ја разложиме правата дропка $\dfrac{x^3 - 2x - 1}{(x+2)^3(x-1)^2}$ во збир од прости дропки од прв вид.

Решение. Согласно равенството (17), имаме:

$$\frac{x^3 - 2x - 1}{(x+2)^3(x-1)^2} \equiv \frac{A_3}{(x+2)^3} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x-1} \tag{30}$$

Од (30) следува равенството без именители:

$$x^3 - 2x - 1 \equiv A_3(x-1)^2 + A_2(x+2)(x-1)^2 + A_1(x+2)^2(x-1)^2 + B_2(x+2)^3 + B_1(x+2)^3(x-1) \tag{31}$$

Методот на посебни вредности можеме да го примениме во овој случај само за одредување на некои константи. Така, заменувајќи во (31) $x = 1$, добиваме: $-2 = B_2 \cdot 27$, или $B_2 = -\dfrac{2}{27}$. Потоа за $x = -2$ добиваме $-5 = A_3 \cdot 9$, или $A_3 = -\dfrac{5}{9}$.

За одредување на константите A_2, A_1 и B_1, а кога ги знаеме A_3 и B_2; заменувајќи во (31) едно по друго, на пример, $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$ и $A_3 = -\dfrac{5}{9}$, $B_2 = -\dfrac{2}{27}$ги добиваме равенките:

$$\begin{cases} -1 = -\dfrac{5}{9} + 2A_2 + 4A_1 - \dfrac{16}{27} - 8B_1 \\ 0 = -\dfrac{20}{9} + 4A_2 + 4A_1 - \dfrac{2}{27} - 2B_1 \\ 3 = -\dfrac{5}{9} + 4A_2 + 16A_1 - \dfrac{128}{27} - 64B_1 \end{cases} \tag{32}$$

или

$$\begin{cases} A_2 + 2A_1 - 4B_1 = \dfrac{2}{27} \\ 2A_2 + 2A_1 - B_1 = \dfrac{31}{27} \\ A_2 + 4A_1 + 16B_1 = \dfrac{56}{27} \end{cases} \tag{33}$$

По решавањето на системот равенки (33) ги одредуваме и вредностите на константите: $A_1 = -\frac{1}{9}$, $A_2 = \frac{20}{27}$ и $B_1 = \frac{1}{9}$.

Според тоа, бараното разложување на дадената права рационална дропка на прости дропки, гласи:

$$\frac{x^3-2x-1}{(x+2)^3(x-1)^2} \equiv -\frac{5}{9(x+2)^3}+\frac{20}{27(x+2)^2}-\frac{1}{9(x+2)}-\frac{5}{9(x-1)^2}+\frac{1}{9(x-1)}.$$

Пример 4. Правата рационална дропка $\frac{1}{x^4+x^2+1}$ да се разложи во збир од прости дропки од втор вид.

Решение. Прво во полето на реалните броеви го разложуваме именителот на неразложливи множители: $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Според тоа, разложувањето ќе го има видот:

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} \equiv \frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1} \tag{34}$$

каде што A, B, C и D се реални константи што треба да ги одредиме така што равенството (34) да претставува идентитет.

Идентитетот (34) без именители ќе гласи:

$1 \equiv (Ax + B)(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x^2 + x + 1)$, или

$$1 \equiv (A + C)x^3 + (-A + B + C + D)x^2 + (A - B + C + D)x + (B + D) \tag{35}$$

Со примена на методот на неопределени коефициенти од идентитетот (35) го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -A+B+C+D=0 \\ A-B+C+D=0 \\ B+D=1 \end{cases}$$

по чие решавање, добиваме: $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, $C = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\frac{-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}}{x^2-x+1}$$

Пример 5. Да се разложи во збир од прости дропки од прв и втор вид правата дропка $\frac{x^3-2x^2+x+4}{(x^3-x^2+x-1)^2}$.

Решение. Именителот на дропката го разложуваме на множители $x^3-x^2+x-1=x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^2+1)$. Потоа дадената дропка ја претставуваме во вид на збир од прости дропки:

$$\frac{x^3-2x^2+x+4}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\equiv\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1} \tag{35}$$

Равенството (35) го запишуваме без именители:

$x^3-2x^2+x+4\equiv A(x^2+1)^2+B(x-1)(x^2+1)^2+(Cx+D)(x-1)^2+(Ex+F)(x-1)^2(x^2+1)$, или

$$x^3-2x^2+x+4\equiv(B+E)x^5+(A-B-2E+F)x^4+(2B+C+2E-2F)x^3+$$
$$(2A-2B-2C+D-2E+2F)x^2+(B+C+E-2F)x+F. \tag{36}$$

Според методот на неопределени коефициенти од (36), имаме:

$$\begin{cases} B+E=0 \\ A-B-2E+F=0 \\ 2B+C+2E-2F=1 \\ 2A-2B-2C+D-2E+2F=-2 \\ B+C+E-2F=1 \\ A-B+D+F=4 \end{cases}$$

Пред да почнеме овој систем да го решаваме, заклучуваме дека тој може да се запише и во видот:

$$\begin{cases} B+E=0 \\ A-B+F=2E \\ 2(B+E)+C-2F=1 \\ 2(A-B+F)-2E+2C+D=-2 \\ (B+E)+C-2F=1 \\ (A-B+F)+D=4, \end{cases} \tag{37}$$

кое овозможува негово упростување и полесно решавање.

Од системот (37) добиваме: $A=1$, $B=-2$, $C=3$, $D=0$, $E=2$ и $F=1$. Според тоа:

$$\frac{x^3-2x^2+x+4}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\equiv\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)}+\frac{3x}{(x^2+1)^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Пример 6. Да се разложи правата дропка $\frac{2x}{x^2+1}$ во збир од прости дропки од прв вид.

Решение. Именителот x^2+1 во полето на комплексните броеви го разложуваме на линеарни множители: $x^2+1=(x+i)(x-i)$, па ќе биде:

$$\frac{2x}{x^2+1}\equiv\frac{2x}{(x+i)(x-i)}=\frac{A}{x+i}+\frac{B}{x-i}, \tag{38}$$

каде што константите A и B може и да не се реални броеви.

Равенството (38) без именители гласи:

$2x \equiv A(x-i) + B(x+i)$, или $2x \equiv (A+B)x + (B-A)$. (39)

Од (39) следува дека A + B = 2, B – A = 0 , откаде, пак, добиваме A = B = 1.

Значи, добиваме: $\frac{2x}{x^2+1} \equiv \frac{1}{x+i} + \frac{1}{x-i}$.

Да забележиме дека, претставувањето на правите рационални дропки во полето на реалните броеви во збир од прости дропки има широка примена во вишата математика, поточно при интегрирањето на дробно рационалните функции.

ЗАДАЧИ

1. Разложи ги рационалните дропки во збир од прости дропки:

а) $\frac{3x-1}{x^2+x-6}$, б) $\frac{2x-1}{x^2-3x+2}$, в) $\frac{4x^2-x-15}{x^3-4x^2-x+4}$, г) $\frac{x^2-3x-8}{x^3-7x-6}$.

2. Разложи во збир на прости дропки од прв вид:

а) $\frac{x}{x^3-3x+2}$, б) $\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}$, в) $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}$.

3. Разложи во збир на прости дропки од прв и втор вид:

а) $\frac{1}{(x^3-3x^2+5x-3)^2}$, б) $\frac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}$, в) $\frac{x^2}{x^4-16}$.

4*. Во полето на комплексните броеви претстави ги како збир од прости дропки од прв вид, правите рационални дропки:

а) $\frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}$, б) $\frac{1}{x^3-1}$, в) $\frac{1}{x^4+4}$, г) $\frac{1}{(x^4-1)^2}$.

5*. За кои природни броеви n, и следниве дропки се природни броеви:

а) $\frac{n^2-n+2}{n+1}$, б) $\frac{2n^2+3n-3}{n-2}$, в) $\frac{2n^3+3n^2-8n+9}{n+3}$.

Глава IV

ПОЛИНОМНИ РАВЕНКИ ОД ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Овде ќе се задржиме на еден од основните проблеми на теоријата на полиномите, сврзан со одредувањето на нивните нули, што е во тесна врска со поимот **полиномна или алгебарска равенка од една променлива.**

§ 24. ОПШТИ ПОИМИ ЗА ПОЛИНОМНИТЕ РАВЕНКИ

Со $P(x)$ да го означиме полиномот

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$, $(a_0 \neq 0)$.

Изразот $P(x) = 0$, или

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0, \ (a_0 \neq 0) \qquad (1)$$

се вика **полиномна или алгебарска равенка** од n-ти степен на променливата x. Броевите $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ се викаат **коефициенти на равенката** (1).

Бидејќи $a_0 \neq 0$, очигледно е дека полиномите $P(x)$ и $\frac{1}{a_0} \cdot P(x)$ имаат исти нули.

Тоа ни дава за право да прифатиме дека $a_0 = 1$ и равенката (1) да ја запишуваме во видот

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0 \qquad (2)$$

Кога коефициентите $a_0, a_1, ..., a_n$ се познати конкретни броеви, равенката (1) се вика **нумеричка полиномна равенка или алгебарска равенка со бројни коефициенти,** а кога сите коефициенти се запишани со букви (општи броеви), тогаш равенката (1) се вика **општа полиномна равенка од *n*-ти степен.**

Ако еден од коефициентите на равенката (1) е конкретен број, или ако меѓу нив постои некоја зависност, тогаш соодветната равенка се вика **посебен (специјален) случај на општата равенка.** На пример, равенките од четврти степен:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0, \qquad x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0, \qquad ax^4 + bx^2 + c = 0$$

се специјални случаи од општата полиномна равенка од четврти степен.

Нулите на полиномот $P(x)$, со кои е образувана полиномната равенка $P(x) = 0$, се викаат **корени на равенката.** Аналогно, како кај полиномите, равенките можат да имаат реални, комплексни, прости и повеќекратни корени.

Постапката, односно алгоритмот преку кои ги наоѓаме корените на дадена равенка, се вика **решавање на равенката,** а множеството од сите добиени корени - **решение на равенката**. Под решение на равенката често го подразбираме и текот на целиот процес на решавањето на равенката.

Основната теорема на алгебрата и последиците од неа, како што видовме, за секој полином од n-ти степен утврдува само постоење од n комплексни нули, но тие не даваат никакви методи на нивното практично одредување. Потрагата по такви методи за решавање на општите полиномни равенки ја воделе и многу видни математичари уште од најстари времиња.

Квадратните равенки биле познати на Старите Грци. Во VI-та книга на Евклид дадено е решение на равенката од видот $x^2 + ax = b^2$, но чисто геометриски. Арабјаните веќе во IX век ја применувале познатата формула за корените на квадратната равенка

$$x^2 + px + q = 0: \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Во XVI век биле откриени од италијанските математичари Џ. Кардано и Л. Фераро соодветни формули за решавање на општите полиномни равенки од трети и четврти степен.

Добиените формули за корените на општите равенки од втор, трет и четврти степен покажуваат дека, корените на тие равенки можеме да ги изразиме како функции од нивните коефициенти со помош на алгебарските операции (собирање, одземање, множење, делење, степенување и коренување). Таквиот метод на решавање на полиномните равенки се вика **алгебарски метод**.

Од средината на 16-ти век до почетокот на 18-тиот век упорно се трагало да се откријат соодветни формули и за корените на општите равенки од петти и повисок степен ($n \geq 5$). Меѓутоа, сите напори останале безуспешни, и конечно тие престанале, откако со трудовите на Абел, Галуа, Гаус и други било строго докажано дека, општите полиномни равенки од петти и повисок степен алгебарски се нерешливи.

Паралелно со трагањето за алгебарско решавање на полиномните равенки биле вршени и други испитувања за изнаоѓање на разни **нумерички** и **графички методи** за решавање на тие равенки.

Денес постојат такви методи и со нивна помош сме во состојба да ги одредиме сите корени на дадена полиномна равенка со која било сакана точност.

Во многу случаи и равенките од трети и четврти степен не ги решаваме алгебарски, бидејќи формулите, што ни ги даваат соодветните корени бараат специјални и доста комплицирани испитувања за да се дојде до бараните корени. Тоа бара да ја промениме и смислата на поимот решавање на полиномните равенки, имено:

Секое правило, што овозможува да конструираме таква низа броеви $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ која се стреми кон одреден корен x_0 на равенката $P(x) = 0$, се вика **правило за решавање**, или кратко **решение на равенката**.

Да забележиме дека, за секоја конкретна нумеричка равенка и за секој нејзин корен (прост или повеќекратен) може да се најде правило за негово одредување. Методите за наоѓање на таквите правила се предмет на изучување на посебна дисциплина „Нумеричка математика“, на која тука нема да се задржуваме.

§ 25. РЕШАВАЊЕ НА РАВЕНКИТЕ ОД ПРВ И ВТОР СТЕПЕН

25.1. ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Равенките од прв степен со една променлива го имаат видот:

$$ax + b = 0, (a \neq 0) \qquad (1)$$

каде што a и b се произволни реални или комплексни броеви.

Оваа равенка во полето на комплексните броеви, во која е $a \neq 0$, има еден единствен корен $x = -\frac{b}{a}$.

Тој корен му припаѓа на истото бројно поле на кое му припаѓаат и коефициентите a и b.

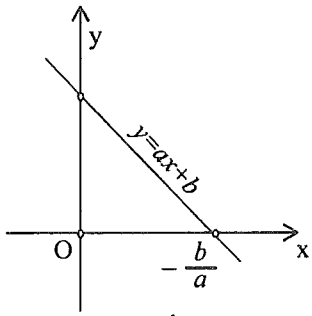
Пример 1. Да ја решиме равенката $2x - 1 = i(x + 2)$.

Решение. Равенката прво ја сведуваме во каноничен вид:

$$(2 - i)x = 1 + 2i$$

Оттука $x = \frac{1+2i}{2-i} = \frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+4i+i+2i^2}{4-i^2} = \frac{5i}{5} = i$.

Во множеството на реалните броеви познато е дека функцијата $f(x) = ax + b$, ($a, b \in \mathbb{R}$) има график права линија и без ограничувањето $a \neq 0$. Затоа усвоено е равенката од прв степен со реални коефициенти да ги викаме уште и **линеарни равенки.**



црт. 1

Кај нив во зависност од коефициентите a и b, разликуваме три случаи: 1°. $a \neq 0$. При произволен коефициент $a \neq 0$ и кој било слободен член b во секое бројно поле, равенката (1) има единствен корен $x = -\frac{b}{a}$. Ако $a, b \in \mathbb{R}$ тогаш $x = -\frac{b}{a}$ е апсцисата на пресечната точка на графикот на функцијата $f(x) = ax + b$ со Ox-оската (црт. 1)

2^0. $a = 0$, $b \neq 0$. Во овој случај равенката (1) се сведува на равенката $0x + b = 0$, која очигледно е невозможна, бидејќи не постои таков број x (во ниедно бројно поле) кој при $b \neq 0$ да ја задоволи равенката $0x + b = 0$. Од друга страна, знаеме дека графикот на функцијата $f(x) = 0x + b$, $(b \neq 0)$ е права паралелна со Ox-оската, која нема ниту една заедничка точка со неа.

3^0. $a = 0$, $b = 0$. Во овој случај равенката (1) го добива видот $0x + 0 = 0$, а таа е задоволена за секоја вредност на x.

Значи, таа има бесконечно многу корени и затоа велиме дека е **неодредена**.

Графикот, пак, на функцијата $f(x) = 0x + 0$ е исто така права, која се совпаѓа со самата Ox-оска.

25.2. КВАДРАТНИ РАВЕНКИ СО КОМПЛЕКСНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Општата равенка од втор степен го има видот:

$$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0) \qquad (2)$$

во која коефициентите a, b, c се произволни реални или комплексни броеви, а исто така и променливата има произволни реални или комплексни вредности.

При испитувањето на квадратниот трином

$$ax^2 + bx + c, (a \neq 0) \qquad (3)$$

аналогно и при решавањето на квадратната равенка (2) често ја користиме трансформацијата т.н. **„издвојување на полн квадрат“**:

$$ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a}) = a\left[(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a^2}\right] + \frac{c}{a} =$$

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Според тоа, квадратната равенка (2) е еквивалентна со равенката:

$$= a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right], \text{ или } (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{D}{4a^2}, \qquad (4)$$

каде што $D = b^2 - 4ac$ се вика **дискриминанта** на квадратната равенка, односно на квадратниот трином (3).

Во §2 точка 2.4 видовме дека од комплексниот број $\frac{D}{4a^2}$ секогаш може да се извлече квадратен корен па од (4) добиваме:

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \text{ или } x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \qquad (5)$$

Тука за $\sqrt{D}$ се можни два случаја:

1°. $D=b^2-4ac\neq 0$. Тогаш во полето на комплексните броеви $\sqrt{D}$ има две различни комплексни вредности, кои се спротивни една на друга, па квадратната равенка (2) ќе има два различни комплексни корена x_1 и x_2 што ги одредуваме со формулата:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{6}$$

при што со $\sqrt{b^2-4ac}$ е означена една од вредностите на $\sqrt{b^2-4ac}$.

2°. Ако $D=b^2-4ac=0$, тогаш коренот $\sqrt{D}=\sqrt{0}$ има единствена вредност еднаква на нула, па квадратната равенка (2) ќе има еден двократен корен $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$.

За „сведениот вид" на квадратната равенка

$$x^2+px+q=0 \tag{7}$$

формулата (6) го добива видот:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}, \tag{8}$$

Пример 2. Да ја решиме равенката $x^2-2ix+2-4i=0$

Решение. Со примена на формулата (8), добиваме:

$$x_{1,2}=\frac{2i}{2}\pm\sqrt{i^2-(2-4i)}=i\pm\sqrt{-1-2+4i}=i\pm\sqrt{-3+4i}.$$

Потоа согласно првата формула од (19) во §2, добиваме:

$$\sqrt{-3+4i}=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{9+16}\right)}+i\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{25}\right)}\right)=\pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}(-3+5)}+i\sqrt{\frac{1}{2}(3+5)}\right)=\pm(1+2i)$$ и

продолжуваме $x_{1,2}=i\pm\sqrt{-3+4i}=i\pm(1+2i)$ па ги добиваме бараните корени на дадената квадратна равенка: $x_1=1+3i$, $x_2=-1-i$.

Пример 3. Да ја решиме равенката $x^2-2(2-i)x+3-4i=0$.

Решение.

$$x_{1,2}=2-i\pm\sqrt{(2-i)^2-(3-4i)}=2-i\pm\sqrt{4-4i+i^2-3+4i}=2-i\pm\sqrt{0}=2-i.$$

Значи, дадената равенка има двократен корен $x_{1,2}=2-i$.

Знаеме, секој квадратен трином (3) во полето на комплексните броеви се разложува на два линеарни множители:

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-x_1)(x-x_2), \tag{9}$$

каде што x_1 и x_2 се нулите на триномот (3).

По извршувањето на множењето на десната страна во идентитетот (9) и со изедначување на соодветните коефициенти во двете страни, добиваме:

$b = -a(x_1 + x_2)$, $c = ax_1x_2$, а оттука:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} \tag{10}$$

Овие две равенства се познатите Виетови формули за квадратниот трином (3). Во специјален случај за сведениот квадратен трином $x^2 + px + q$ тие гласат:

$$x_1 + x_2 = -p, \qquad x_1x_2 = q \tag{11}$$

25.3. КВАДРАТНИ РАВЕНКИ СО РЕАЛНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Општата равенка (2) и сведениот вид (7) нека се со реални коефициенти. Нив можеме да ги разгледуваме освен во полето на реалните броеви, овозможувајќи променливата x да добие кои било од реалните вредности; уште и во полето на комплексните броеви, ако допуштиме x да добие кои било од комплексните вредности.

И во двата случаја корените на квадратната равенка ги одредуваме според формулата (6), односно (8), во кои коефициентите a, b, с, односно р, q се дадени реални броеви, па според тоа и дискриминантата $D = b^2 - 4ac$ е некој одреден реален број.

Да ја разгледаме квадратната равенка (2) во полето на реалните броеви. Во формулата (6) тогаш за дискриминантата D можни се следниве три случаи:

1⁰. Ако $D = b^2 - 4ac > 0$, тогаш во полето на реалните броеви $\sqrt{D}$ има две реални вредности еднакви по апсолутна вредност, но со спротивни знаци. Во тој случај квадратната равенка (2) ќе има два различни реални корена.

2⁰. Ако $D = b^2 - 4ac < 0$, тогаш $\sqrt{D}$ во полето на реалните броеви нема смисла, бидејќи не постои реален број, чиј квадрат е негативен број. Значи, ако $D < 0$, тогаш во полето на реалните броеви квадратната равенка нема корени.

3⁰. Ако $D = b^2 - 4ac = 0$, тогаш $\sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$, па квадратната равенка (2) ќе има еден двократен корен $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$.

Оттука следува дека, квадратниот трином (3) во полето на реалните броеви е разложлив на линеарни множители, ако тој има реални корени, т.е. ако $b^2 - 4ac \geq 0$; а е неразложлив ако $b^2 - 4ac < 0$.

Во посебен случај, ако коефициентите на квадратната равенка се рационални броеви, тогаш таа има рационални корени, ако и само ако $\sqrt{D}$ е рационален број, т.е. ако дискриминантата D е точен квадрат на некој рационален број.

Ако ја разгледуваме квадратната равенка со реални коефициенти во полето на комплексните броеви, тогаш, во случај кога $b^2 - 4ac \geq 0$, таа има исто два различни, односно еднакви реални корена, а во случај $b^2 - 4ac < 0$, тогаш формулата (6) дава два конјугирано комплексни корена:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Пример 4. Да ја решиме равенката $x^2 - (4 - \sqrt{2})x + 7\sqrt{2} - 9 = 0$

Решение. Претходно ја одредуваме дискриминантата:

$D = (4 - \sqrt{2})^2 - 4(7\sqrt{2} - 9) = 16 - 8\sqrt{2} + 2 - 28\sqrt{2} + 36 = 54 - 36\sqrt{2} = 9(6 - 4\sqrt{2}) =$

$= 9(4 - 4\sqrt{2} + 2) = 9(2 - \sqrt{2})^2.$

Потоа согласно со формулата (6), добиваме:

$$x_{1,2} = \frac{4 - \sqrt{2} \pm \sqrt{9\left(2 - \sqrt{2}\right)^2}}{2} = \frac{4 - \sqrt{2} \pm 3(2 - \sqrt{2})}{2}, \text{ т.е.}$$

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{2} + 6 - 3\sqrt{2}}{2} = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{2} = 5 - 2\sqrt{2},$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{2}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}.$$

Значи, дадената равенка има корени: $x_1 = 5 - 2\sqrt{2}$, $x_2 = -1 + \sqrt{2}$.

Пример 5. Да се состави квадратна равенка со реални коефициенти, ако е познат еден нејзин корен: $x_1 = 2 - i\sqrt{3}$.

Решение. Знаеме дека ако квадратната равенка со реални коефициенти, има еден комплексен корен $x = 2 - i\sqrt{3}$, тогаш нејзиниот корен е и конјугирано комплексниот број $x = 2 + i\sqrt{3}$. Значи, равенката што треба да ја составиме има корени $x_1 = 2 - i\sqrt{3}$ и $x_2 = 2 + i\sqrt{3}$. Согласно Виетовите формули (11) имаме:

$p = -(x_1 + x_2) = -[(2 - i\sqrt{3}) + (2 + i\sqrt{3})] = -4$, и $q = x_1x_2 = (2 - i\sqrt{3})(2 + i\sqrt{3}) = 2^2 - (i\sqrt{3})^2$ $= 4 + 3 = 7$. Бараната равенка е $x^2 - 4x + 7 = 0$.

ЗАДАЧИ

Реши ги равенките во полето на комплексните броеви (1 - 8):

1. а) $(x - 4)i = 5 - 3xi$, б) $(1 - x)i = 3(x + 2i)$,

2. а) $2x - ix = (1 + i)x - 3$, б) $2 + 3x + 2i = (4 - x)i$.

3. а) $x^2 - (2 + i)x + 2i = 0$, б) $x^2 - (5 + 2i)x + 5 - 5i = 0$

4. а) $x^2 - 3x + (3 - i) = 0$, б) $x^2 + 2ix + 2 + 4i = 0$.

5. а) $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$, б) $x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0$

6. а) $x^2 - 3x - (1 + \sqrt{3}) = 0$, б) $x^2 - (3 - \sqrt{5})x - 3\sqrt{5} = 0$.

7. а) $(x + 1)^2 + (x + 3)^2 = (3x - 5)^2$, б) $\frac{x + 1}{3} - (x - 3)^2 = \frac{7 - 3x}{4}$.

8. $(x - 1)(x - 2) + (x - 2)(x - 3) + (x - 3)(x - 1) = 0$.

9. Разложи го квадратниот трином на линеарни множители:
а) $2x^2 - 7x - 4$, б) $8x^2 - 2x - 1$, в) $x^2 - 4x + 5$.

10. Да се состави квадратна равенка со рационални коефициенти која ќе има еден корен: а) $3 - \sqrt{2}$, б) $1 + 2\sqrt{3}$, в) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

§ 26. РЕШАВАЊЕ НА РАВЕНКИ ОД ТРЕТ СТЕПЕН

Општата равенка од трет степен

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, (a_0 \neq 0) \quad (1)$$

е еквивалентна со равенката $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, (2)

каде што $a = \frac{a_1}{a_0}$, $b = \frac{a_2}{a_0}$, $c = \frac{a_3}{a_0}$.

Познато е дека полиномот $x^3 + ax^2 + bx + c$ во равенката (2) можеме да го трансформираме во таков полином, кој нема да го содржи квадратниот член ax^2. Тоа го постигнуваме кога во (2) променливата x ќе ја замениме со нова променлива y со помош на смената $x = y - \frac{a}{3}$. (3)

Лесно се покажува дека, со смената (3) равенката (2) се трансформира во следнава редуцирана равенка

$$y^3 + py + q = 0, \quad (4)$$

каде што $p = b - \frac{a^2}{3}$, $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$.

Очигледно е дека, ако ги одредиме корените на равенката (4), тогаш, со нивна замена во смената (3) ќе ги добиеме и корените на дадената равенка (2), односно (1).

26.1. КУБНА РАВЕНКА СО КОМПЛЕКСНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Методот на решавање на општата равенка од трет степен ќе го изложиме на нејзината **редуцирана равенка**

$$x^3 + px + q = 0, \quad (5)$$

каде што p и q се дадени комплексни броеви.

Во равенката (5) ќе воведеме две помошни променливи u и v со смената

$$x = u + v, \quad (6)$$

па таа го добива видот $(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$, односно

$$u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0 \quad (7)$$

Ако променливите u и v ги врземе со релацијата

$3uv + p = 0$, односно $uv = -\frac{p}{3}$ (8)

тогаш равенката (7) се сведува на равенката:

$$u^3 + v^3 = -q. \tag{9}$$

Од друга страна, пак, од (8) следува $u^3v^3 = \frac{p^3}{27}$ (10)

Равенките (9) и (10) покажуваат дека, броевите u^3 и v^3 (согласно Виетовите правила) се корени на квадратната равенка

$$z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \tag{11}$$

со комплексни коефициенти.

Според тоа, од корените на равенката (11)

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

ги добиваме и вредностите на u^3 и v^3, т.е.

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}; \qquad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Оттука:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}; \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{12}$$

а согласно смената (6), ја добиваме следнава **формула на Кардано**:

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{13}$$

Таа ги изразува корените на редуцираниот вид на кубната равенка (5) како функција од нејзините коефициенти p и q преку квадратни и кубни корени.

Бидејќи кубниот корен во полето на комплексните броеви има три вредности, затоа согласно формулите (12) ќе добиеме по три вредности за u и за v: u_1, u_2, u_3 и v_1, v_2, v_3. Со комбинирање на тие вредности можеме да образуваме девет парови (u, v), при што врз основа на смената $x = u + v$ привидно би добиле девет решенија на равенката (5). Но, тоа е нереално, бидејќи равенката (5) има само три решенија (корени).

Според тоа, од трите вредности на кубниот корен u и трите вредности на кубниот корен v, за да би ги формирале врз основа на смената $x = u + v$, трите решенија на равенката (5) треба да ги избереме оние, кои ќе ја задоволуваат релацијата (8), т.е. за кои ќе важи $uv = -\frac{p}{3}$.

Од друга страна, ако u_1 е една која било од трите вредности на кубниот корен u (во 12), тогаш другите две негови вредности u_2 и u_3 согласно Т[5.3] ќе бидат еднакви

на: $u_2 = \varepsilon u_1$ и $u_3 = \varepsilon^2 u_1$,

каде што ε е еден примитивен трети корен на единицата, т.е. $\varepsilon \in \left\{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Ако со v_1 ја означиме онаа од трите вредности на кубниот корен v, што и ѝ одговара на вредноста u_1, т.е. за која $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$; тогаш другите две вредности v_2 и v_3, пак, согласно Т[5.3] ќе бидат $v_2 = \varepsilon v_1$ и $v_3 = \varepsilon^2 v_1$

Ако земеме предвид дека $\varepsilon^3 = 1$, воочуваме дека на вредноста u_2 ѝ одговара вредноста v_3; а на u_3 вредноста v_2.

Навистина: $u_2 v_3 = \varepsilon u_1 \cdot \varepsilon^2 v_1 = \varepsilon^3 u_1 v_1 = 1 \cdot (-\frac{p}{3}) = -\frac{p}{3}$.

Аналогно: $u_3 \cdot v_2 = \varepsilon^2 u_1 \cdot \varepsilon v_1 = \varepsilon^3 u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$.

Според тоа, трите корени на кубната равенка (5) согласно (12), ќе бидат:

$$x_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \qquad (14)$$

$x_2 = u_2 + v_3 = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 v_1$; $x_3 = u_3 + v_2 = \varepsilon^2 u_1 + \varepsilon v_1$, каде што

$$\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

Пример 1. Да ја решиме кубната равенка $x^3 + 3x - 2i = 0$ со комплексни коефициенти.

Решение. Тука е $p = 3$, $q = -2i$. Потоа добиваме:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{i + \sqrt{i^2 + 1^3}} = \sqrt[3]{i+0} = \sqrt[3]{i}, \quad v = \sqrt[3]{i-0} = \sqrt[3]{i}$$

По една од трите вредности на $u = \sqrt[3]{i}$ и $v = \sqrt[3]{i}$ се:

$u_1 = -i$ и $v_1 = -i$ (бидејќи $(-i)^3 = i$). Тие се и соодветни една на друга, бидејќи ја задоволуваат релацијата $u_1 \cdot v_1 = -\frac{p}{3}$.

Според тоа, согласно (14) дадената равенка ги има корените:

$x_1 = u_1 + v_1 = -i - i = -2i$,

$x_2 = -i\varepsilon - i\varepsilon^2 = -i(\varepsilon + \varepsilon^2) = -i(-1) = i$,

$x_3 = -i\varepsilon^2 - i\varepsilon = -i(\varepsilon^2 + \varepsilon) = -i(-1) = i$

26.2. КУБНИ РАВЕНКИ СО РЕАЛНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Редуцираната кубна равенка $x^3 + px + q = 0$ (5)
нека е со реални коефициенти, т.е ако $p, q \in \mathbb{R}$.

Во тој случај равенката (5) секогаш има барем еден реален корен, а другите два корена се или конјугирано комплексни броеви, или и тие се реални броеви. Равенката (5) дали ќе има еден или три реални (прости или повеќекратни) корени, зависи од изразот што се наоѓа под квадратниот корен во формулата на Кардано. Тој израз $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ се вика **дискриминанта на кубната равенка** (5). За неа постојат три можности: $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$.

I. Ако $D > 0$. Тогаш квадратните корени во формулата на Кардано се реални броеви, а оттука следува дека и решенијата на кубните корени во (13) се реални броеви. Меѓутоа, кубниот корен од реален број има една реална и две конјугирано комплексни вредности. Со u_1 да ја означиме реалната вредност на коренот u, а со v_1 нејзе соодветната вредност на коренот v, што ја задоволува релацијата $u_1 \cdot v_1 = -\frac{p}{3}$. Оттука и од u_1, $p \in \mathbb{R}$ следува дека v_1 е исто така реалната вредност на коренот v.

Според тоа, првиот корен на равенката (5) $x_1 = u_1 + v_1$ е реален број . Другите два корена ги добиваме кога во (14) ќе замениме $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $\varepsilon^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$:

$$x_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2 = u_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v_1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{u_1+v_1}{2} + i\sqrt{3}\cdot\frac{u_1-v_1}{2}$$

$$x_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon = u_1 \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v_1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{u_1+v_1}{2} - i\sqrt{3}\cdot\frac{u_1-v_1}{2}$$

Забележуваме дека тие се конјугирано комплексни броеви, бидејќи од $D > 0$ следува дека $u_1 \neq v_1$. Според тоа,

Ако $D > 0$, тогаш равенката (5) има еден реален и два конјугирано комплексни корена.

Пример 2. Да ја решиме равенката $x^3 + 9x - 26 = 0$.

Решение. Тука е $p = 9$, $q = -26$, $D = 13^2 + 3^3 = 196 > 0$.

Потоа добиваме: $u = \sqrt[3]{13 + \sqrt{96}} = \sqrt[3]{13+14} = \sqrt[3]{27}$, $v = \sqrt[3]{13+14} = \sqrt[3]{-1}$.

Реалните вредности на кубните корени u и v се соодветно $u_1 = 3$ и $v_1 = -1$. Тие се и соодветни една на друга вредност, значи $u_1 \cdot v_1 = 3 \cdot (-1) = -3 = -\frac{p}{3}$. Дадената равенка согласно (14) има корени: $x_1 = u_1 + v_1 = 3 + (-1) = 2$,

$$x_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2 = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}+ +i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\cdot\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + 2i\sqrt{3},$$

$$x_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon = 3\cdot\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1\left(-\frac{1}{2}+ i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - 2i\sqrt{3}.$$

II. Ако $D = 0$. Тогаш $u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$. Нека $u_1 = v_1$ се реалните вредности на u и v. Со нивна замена во формулите (14) и имајќи предвид дека $\varepsilon + \varepsilon^2 = -1$, добиваме:

$x_1 = u_1 + v_1 = 2u_1$, $x_2 = u_1\varepsilon + u_1\varepsilon^2 = u_1(\varepsilon + \varepsilon^2) = u_1\cdot(-1) = -u_1$,

$x_3 = u_1\varepsilon^2 + u_1\varepsilon = u_1(\varepsilon^2 + \varepsilon) = u_1(-1) = -u_1$.

Според тоа, **ако D = 0, тогаш трите корени на равенката (5) се реални, и тоа еден е прост и еден двократен.**

Пример 3. Да се реши равенката $x^3 - 12x + 16 = 0$

Решение. Тука е $p = -12$, $q = 16$, $D = \left(\frac{16}{2}\right)^2 + \left(\frac{-12}{2}\right)^3 = 64 - 64 = 0$. Потоа

$u = v = \sqrt[3]{-\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{-8}$, т.е. $u_1 = v_1 = -2$. Според тоа: $x_1 = -4$, $x_2 = x_3 = -(-2) = 2$.

III. Ако $D < 0$. Тогаш $-D > 0$ и $\sqrt{D} = i\sqrt{-D}$. Според тоа, радикандите на кубните корени во формулата на Кардано се конјугирано комплексни броеви:

$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + i\sqrt{-D}}$, $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - i\sqrt{-D}}$. А тоа значи дека и трите вредности на u и v се комплексни броеви. Но, равенката (5) бидејќи е со реални коефициенти и со непарен степен, таа мора да има барем еден реален корен. Нека е тоа коренот $x_1 = u_1 + v_1$, каде што $u_1 \cdot v_1 = -\frac{p}{3}$.

Бидејќи и збирот и производот на комплексните броеви u_1 и v_1 се реални броеви, затоа тие мора да се конјугирано комплексни. Но тогаш и броевите $u_1\varepsilon$ и $v_1\varepsilon^2$; а исто така и броевите $u_1\varepsilon^2$ и $v_1\varepsilon$ ќе бидат конјугирано комплексни. Оттука следува дека, и другите два корена на равенката (5): $x_2 = u_1\varepsilon + v_1\varepsilon^2$, $x_3 = u_1\varepsilon^2 + v_1\varepsilon$ се исто така реални броеви. Значи, трите корени на равенката (5) се реални броеви. Може да се покаже дека сите тие се различни.

Според тоа, **ако D < 0, тогаш равенката (5) има три различни реални корени.**

Овој случај (при $D < 0$) покажува дека, покрај тоа што сите корени на кубната равенка (5) со реални коефициенти се реални броеви, нивното одредување со помош на формулата на Кардано се сведува на извлекување на кубни корени од комплексни броеви. Меѓутоа, за извлекување на кубен корен од комплексен број неопходно е потребно тој да се изрази во неговата тригонометриска форма. Така, конјугирано комплексните броеви, што се наоѓаат под знаците на кубен корен во u и v, прво ги изразуваме во нивната тригонометриска форма:

$$-\frac{q}{2}+i\sqrt{-D}=r(\cos\varphi+i\sin\varphi) \qquad (15)$$

$$-\frac{q}{2}-i\sqrt{-D}=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)$$

каде што $r=\sqrt{\left(-\frac{q}{2}\right)^2+\left(\sqrt{-D}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}=\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}$,

$\cos\varphi=\frac{-\frac{q}{a}}{r}=-\frac{q}{2r}$, $\sin\varphi=\frac{\sqrt{-D}}{r}$.

Потоа за кубните корени u и v согласно формулата (14) во §5, добиваме:

$$u=\sqrt[3]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right) \text{ за } k=0,\ 1,\ 2$$

$$v=\sqrt[3]{r(\cos\varphi-i\sin\varphi)}=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3}-i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{3}\right) \text{ за } k=0,\ 1,\ 2.$$

А, од нив согласно формулата на Кардано, ја добиваме формулата:

$$x=u+v=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi+2k\pi}{3},\ k=0,\ 1,\ 2 \qquad (16)$$

Од неа за $k=0$, 1 и 2 добиваме сé на сé три различни вредности, а тие се токму корените на кубната равенка (5):

$$x_1=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi}{3},\ x_2=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi+2\pi}{3},\ x_3=2\sqrt[3]{r}\cos\frac{\varphi+4\pi}{3}. \qquad (17)$$

Пример 4. Да се реши равенката $x^3-6x+4=0$.

Решение. Тука е $p=-6, q=4, D=2^2+(-2)^3=4-8=-4<0$, $r=\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3}=\sqrt{-(-2)^3}=\sqrt{8}$,

$\cos\varphi=-\frac{q}{2r}=-\frac{4}{2\sqrt{8}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi=\frac{4}{2\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, а од $\cos\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ имаме дека $\varphi=\frac{3\pi}{4}=135^\circ$. Според тоа, дадената равенка согласно (17) има корени:

$$x_1=2\sqrt[3]{\sqrt{8}}\cdot\cos\frac{135^\circ}{3}=2\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2,$$

$$x_2 = 2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{135^\circ + 360^\circ}{3} = 2\sqrt{2}\cdot\cos(45^\circ + 120^\circ) =$$

$$= 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ\cdot\cos 120^\circ - \sin 45^\circ\cdot\sin 120^\circ) = 2\sqrt{2}\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$$

$$= -1 - \sqrt{3} \approx -2{,}73205$$

$$x_3 = 2\sqrt{2}\cdot\cos\frac{135^\circ + 720^\circ}{3} = 2\sqrt{2}\cdot\cos(45^\circ + 240^\circ) =$$

$$= 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ\cos 240^\circ - \sin 45^\circ\sin 240^\circ) = 2\sqrt{2}\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\right] =$$

$$= -1 + \sqrt{3} \approx 0{,}73205\cdot$$

Да забележиме дека, дадената равенка може многу поедноставно да се реши ако прво утврдиме дека таа има и еден цел корен $x_1 = 2$, кој е делител на коефициентот $q = 4$, потоа полиномот $x^3 - 6x + 4$ го делиме со $x - 2$ и добиваме $(x - 2)(x^2 + 2x - 2) = 0$. Другите два корена ги наоѓаме кога ќе ја решиме квадратната равенка $x^2 + 2x - 2 = 0$, т.е. $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}$.

ЗАДАЧИ

Реши ги кубните равенки со помош на формулата на Кардано:

1. а) $x^3 - 6ix + 4(1 - i) = 0$, б) $x^3 + 3x + 2i = 0$.

2. а) $x^3 + 6x^2 + 30x + 25 = 0$, б) $x^3 + 9x^2 + 18x + 28 = 0$.

3. а) $x^3 - 6x + 9 = 0$, б) $x^3 + 12x + 63 = 0$.

4. а) $x^3 - 6x - 5 = 0$, б) $x^3 - 3x + 2 = 0$.

5. а) $x^3 + 24x - 56 = 0$, б) $x^3 + 45x - 98 = 0$.

6. а) $x^3 - 7x + 6 = 0$, б) $x^3 - 21x - 20 = 0$.

7. Состави полиномна равенка со реални коефициенти од најнизок можен степен, за која броевите: а) $-2, 1, 4$; б) -3, i да се нејзини корени, потоа обиди се да ја решиш.

8. Состави полиномна равенка од најнизок можен степен, за која бројот $-i$ да е нејзин трикратен корен.

9. Состави полиномна равенка со рационални коефициенти од најнизок можен степен, за која броевите: а) $1 + \sqrt{3}$ и -2, б) $\sqrt{2}$, -3 да се нејзини корени, потоа реши ја равенката.

§ 27. РЕШАВАЊЕ НА РАВЕНКИ ОД ЧЕТВРТИ СТЕПЕН

Општата равенка од четврти степен

$$a_0y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4 = 0, \ (a_0 \neq 0) \tag{1}$$

е еквивалентна со равенката

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0, \tag{2}$$

каде што $a = \frac{a_1}{a_0}$, $b = \frac{a_2}{a_0}$, $c = \frac{a_3}{a_0}$, $d = \frac{a_4}{a_0}$.

Оваа равенка, пак, со смената $y = x - \frac{a}{4}$ (3)

се трансформира во следнава **редуцирана равенка** од четврти степен

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \tag{4}$$

каде што p, q и r се изразени со коефициентите на равенката (2), односно (1).

Методот на решавање на општата равенка од *IV* степен, познат како **метод на Ферари,** ќе го изложиме прво на нејзината редуцирана равенка (4), каде што p, q и r се дадени комплексни броеви.

Основната идеја на тој метод се состои во следново: левата страна на равенката (4) да ја трансформираме како разлика на квадрати. За таа цел таа страна, со помош на помошниот параметар λ, прво ја трансформираме во видот:

$$x^4 + px^2 + qx + r = \left(x^2 + \frac{p}{2} + \frac{\lambda}{2}\right)^2 + qx + r - \frac{p^2}{4} - \frac{\lambda^2}{4} - \lambda x^2 - \frac{p\lambda}{2} \text{ или}$$

$$\left(x^2 + \frac{p}{2} + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left[\lambda x^2 - qx + \left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{p\lambda}{2} - r + \frac{p^2}{4}\right)\right] = 0 \tag{5}$$

Параметарот λ да го избереме така што полиномот од втор степен во средната заграда да стане потполн квадрат. Тоа ќе биде, ако и само ако дискриминантата D на тој полином е еднаква на нула, т.е. ако е точно равенството $D = q^2 - 4\lambda\left(\frac{\lambda^2}{4} + \frac{p\lambda}{2} - r + \frac{p^2}{4}\right) = 0$,

или $$\lambda^3 + 2p\lambda^2 + (p^2 - 4r)\lambda - q^2 = 0. \tag{6}$$

Заклучуваме дека равенството (6) претставува кубна равенка по однос на λ со комплексни коефициенти.

Равенката (6) се вика **резолвента** на равенката (4). Таа има три комплексни корени. Нека еден (кој било) од нив го означиме со λ_0. Тој со формулата на Кардано ќе биде изразен преку коефициентите на равенката (6), односно преку коефициентите p, q, r на равенката (4). При таков избор на вредноста на параметарот λ, полиномот од втор степен што стои во средната заграда на равенката во (5) ќе има еден двократен корен $x = \frac{q}{2\lambda_0}$, па затоа равенката (5) ќе

го добие видот: $\left(x^2+\frac{p}{2}+\frac{\lambda_0}{2}\right)^2-\lambda_0\left(x-\frac{q}{2\lambda_0}\right)^2=0$ (7)

или $\left[x^2+\frac{p}{2}+\frac{\lambda_0}{2}-\sqrt{\lambda_0}\left(x-\frac{q}{2\lambda_0}\right)\right]\left[x^2+\frac{p}{2}+\frac{\lambda_0}{2}+\sqrt{\lambda_0}\left(x-\frac{q}{2\lambda_0}\right)\right]=0,$

односно $\left(x^2-\sqrt{\lambda_0}x+\frac{p}{2}+\frac{\lambda_0}{2}+\frac{q\sqrt{\lambda_0}}{2\lambda_0}\right)\left(x^2+\sqrt{\lambda_0}x+\frac{p}{2}+\frac{\lambda_0}{2}-\frac{q\sqrt{\lambda_0}}{2\lambda_0}\right)=0$ (8)

Равенката (8), која е еквивалентна со равенката (4), се распаѓа на вкупност од две квадратни равенки:

$$\begin{cases} x^2-\sqrt{\lambda_0}\cdot x+\left(\frac{p}{2}+\frac{\lambda_0}{2}+\frac{q\sqrt{\lambda_0}}{2\lambda_0}\right)=0 \\ x^2+\sqrt{\lambda_0}\cdot x+\left(\frac{p}{2}+\frac{\lambda_0}{2}-\frac{q\sqrt{\lambda_0}}{2\lambda_0}\right)=0 \end{cases} \quad (9)$$

каде што λ_0 е еден кој било корен од резолвентата (6).

Забелешка: Очигледно е дека: ако равенката (4) од четврти степен е со реални коефициенти, т.е. ако $p, q, r \in \mathbb{R}$, тогаш и нејзината резолвента (6) е исто така со реални коефициенти. Бидејќи во равенката (6) е $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = q^2$, т.е. производот на нејзините корени е позитивен реален број, затоа меѓу нејзините корени мора барем еден да е позитивен број. Од практични причини токму тој корен на резолвентата (6) го избираме и означуваме со λ_0.

Пример 1. Да ја решиме равенката $y^4+4y^3-2y^2-4y+16=0$.

Решение. Со смената $y=x-1$ дадената равенка ја трансформираме во видот:
$(x-1)^4+4(x-1)^3-2(x-1)^2-4(x-1)+16=0$, или $x^4-8x^2+8x+15=0$, (10)

Тука е $p=-8$, $q=8$, $r=15$, а нејзината резолвента е кубната равенка $\lambda^3-16\lambda^2+4\lambda-64=0$. Таа има еден позитивен корен $\lambda_0=16$, бидејќи $16^3-16^3+4\cdot16-64=0$.

Согласно (9) имаме: $\begin{cases} x^2-4x+(-4+8+\frac{8}{2\cdot4})=0 \\ x^2+4x+(-4+8-1)=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2-4x+5=0 \\ x^2+4x+3=0 \end{cases}$

Оттука $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-5}=2\pm i$, $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{4-3}=-2\pm 1$, т.е. равенката (10) има корени: $x_1=2+i$, $x_2=2-i$, $x_3=-1$, $x_4=-3$.

Внесувајќи ги еден по друг во смената $y=x-1$, ги добиваме и корените на дадената равенка: $y_1=2+i-1=1+i$, $y_2=1-i$, $y_3=-2$, $y_4=-4$.

Пример 2. Да се реши равенката $x^4 - 14x^2 + 40x - 75 = 0$.

Решение. Дадената равенка е во редуциран вид, кај неа е $p = -14$, $q = 40$, $r = -75$. Нејзина кубна резолвента е равенката $\lambda^3 - 28\lambda^2 + 496\lambda - 1600 = 0$, која има позитивен реален корен $\lambda_0 = 4$. Согласно (9) добиваме:

$$\begin{bmatrix} x^2 - 2x + (-7 + 2 + \frac{40 \cdot 2}{8}) = 0 \\ x^2 + 2x + (-7 + 2 - 10) = 0 \end{bmatrix}, \text{ или } \begin{bmatrix} x^2 - 2x + 5 = 0 \\ x^2 + 2x - 15 = 0. \end{bmatrix}$$

Оттука $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{1+15} = -1 \pm 4$, т.е.
$x_1 = 1 + 2i$, $x_2 = 1 - 2i$, $x_3 = 3$, $x_4 = -5$.

Пример 3. Да се реши равенката $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$.

Решение. Тука е $p = -15$, $q = 10$, $r = 24$, а нејзината кубна резолвента е $\lambda^3 - 30\lambda^2 + 129\lambda - 100 = 0$. Заклучуваме дека, еден корен на оваа равенка е $\lambda_0 = 1$, бидејќи $1 - 30 + 129 - 100 = 0$.

Согласно (9) дадената равенка е еквивалентна на вкупноста од две квадратни равенки:

$$\begin{bmatrix} x^2 - x - 2 = 0 \\ x^2 + x - 12 = 0. \end{bmatrix}$$

Според тоа, дадената равенка има корени:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2},$$

$$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}, \text{ т.е. } x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 3, x_4 = -4.$$

Сега ќе покажеме како методот на Ферари може да се примени директно на општата равенка од четврти степен:

$$\boldsymbol{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0} \qquad (2')$$

без претходно таа да се трансформира во редуциран вид (4).

За таа цел, со помош на параметарот λ, равенката (2') ја трансформираме во видот:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} \cdot x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{a^2}{4} - b + \lambda\right)x^2 + \left(\frac{a}{2} \cdot \lambda - c\right)x + \left(\frac{\lambda^2}{4} - d\right)\right] = 0 \qquad (11)$$

а потоа параметарот λ го избираме така што полиномот од втор степен во средната заграда да стане квадрат на бином од прв степен. За тоа е потребно и доволно дискриминантата на квадратниот трином (во средната заграда) да биде еднаква на нула, т.е. да важи равенството $D = \left(\frac{a}{2}\lambda - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + \lambda\right)\left(\frac{\lambda^2}{4} - d\right) = 0$,

или $$\boldsymbol{\lambda^3 - b\lambda^2 + (ac - 4d)\lambda - (a^2d - 4bd + c^2) = 0.} \qquad (12)$$

Значи, параметарот λ треба да биде корен на резолвентата (12) на равенката (2'). При таков избор на параметарот $\lambda = \lambda_0$ равенката (11) се трансформира во видот

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\cdot x + \frac{\lambda_0}{2}\right)^2 - (mx+n)^2 = 0, \tag{13}$$

или

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}\cdot x + \frac{\lambda_0}{2} + mx + n\right)\left(x^2 + \frac{a}{2}\cdot x + \frac{\lambda_0}{2} - mx - n\right) = 0. \tag{14}$$

Равенката (14), која е еквивалентна на равенката (2'), се сведува на вкупност од две квадратни равенки:

$$\begin{cases} x^2 + \frac{a}{2}\cdot x + \frac{\lambda_0}{2} + mx + n = 0 \\ x^2 + \frac{a}{2}\cdot x + \frac{\lambda_0}{2} - mx - n = 0, \end{cases} \tag{15}$$

каде што λ_0 е еден (кој било) корен на резолвентата (12).

Пример 4. Да ја решиме равенката $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 2x - 3 = 0$.

Решение. Тука е $a = -6$, $b = 10$, $c = -2$, $d = -3$.

Внесувајќи ги тие вредности на коефициентите a, b, c и d во резолвентата (12) ја добиваме равенката: $\lambda^3 - 10\lambda^2 + 24\lambda - 16 = 0$, која има еден корен $\lambda_0 = 2$. Потоа внесувајќи ги вредностите на a, b, c, и d во равенката (11), таа го добива видот:

$(x^2 - 3x + 1)^2 - (x^2 - 4x + 4) = 0$, односно $(x^2 - 3x + 1)^2 - (x - 2)^2 = 0$.

Така, согласно (15) дадената равенка е еквивалентна на вкупноста од две квадратни равенки

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 1 - x + 2 = 0 \\ x^2 - 3x + 1 + x - 2 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

Од нив добиваме: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$, односно $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 1 - \sqrt{2}, x_4 = 1 + \sqrt{2}$.

ЗАДАЧИ

Реши ги равенките од четврти степен (1 – 4):

1. а) $x^4 + 8x^2 + 16x + 20 = 0$, б) $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$.

2. а) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2 = 0$, б) $x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 8 = 0$,

3. а) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 46x + 120 = 0$, б) $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$

4. а) $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 3 = 0$, б) $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$.

5. Состави равенка со реални коефициенти од најнизок можен степен, за која броевите: а) -3, 2, i, б) $1 - 2i$, $2 + i$ да се нејзини корени, потоа обиди се да ја решиш.

6. Формирај равенка од четврти степен со помош на Виетовите правила, која ќе има корени: -1, -2, 2 и 3, потоа реши ја.

§ 28. СПЕЦИЈАЛНИ СЛУЧАИ НА ПОЛИНОМНИ РАВЕНКИ

Во §24 забележавме дека со трудовите на Абел и Галуа во дваесеттите и триесеттите години на минатиот век било строго докажано дека општата полиномна (алгебарска) равенка од петти и повисок степен алгебарски се нерешливи, т.е. нивните корени не можат да бидат изразени преку нивните коефициенти со помош на шесте алгебарски операции. Покрај тоа, Галуа покажал дека за секој $n \geq 5$ постојат (може да се најдат) и конкретни полиномни равенки (дури и со цели коефициенти) кои алгебарски се нерешливи. На пример, таква е равенката $x^5 - 4x - 2 = 0$. Но, тие резултати на Абел и Галуа не ја исклучуваат можноста: некои специјални случаи на полиномни равенки, како и голем број на конкретни (нумерички) равенки од петти и повисок степен да можат да бидат алгебарски решавани. Во редот на таквите специјални случаи на полиномни равенки спаѓаат т.н. **симетрични равенки, биномни и триномни равенки.**

28.1. СИМЕТРИЧНИ РАВЕНКИ

Полиномната равенка од n-ти степен:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0, \qquad (a_0 \neq 0) \qquad (1)$$

се вика **симетрична равенка од n-ти степен,** ако коефициентите на членовите, што се еднакво оддалечени од почетокот и крајот, се еднакви. Со други зборови, коефициентите на симетричната равенка од n-ти степен го задоволуваат условот

$$a_k = a_{n-k}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Според тоа, симетричната равенка од n-ти степен го има видот:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad (a_0 \neq 0) \qquad (2)$$

Очигледно е дека: **Ниту еден од корените на симетричната равенка не е еднаков на нула.**

Бидејќи $a_0 \neq 0$, затоа $x = 0$ не може да биде корен на равенката (2).

Симетричните равенки го имаат следново важно својство:

Теорема[28.1]. ***Нека $x = \alpha$ е корен на симетричната равенка (2), тогаш и $x = \frac{1}{\alpha}$ е нејзин корен.***

Доказ. Нека $x = \alpha$ е корен на равенката (2). Тогаш ќе важи:

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + a_2\alpha^{n-2} + \ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0 \qquad (3)$$

Делејќи ги двете страни на равенството (3) со α^n, имаме:

$$a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{\alpha} + a_2 \cdot \frac{1}{\alpha^2} + \ldots + a_2 \cdot \frac{1}{\alpha^{n-2}} + a_1 \cdot \frac{1}{\alpha^{n-1}} + a_0 \cdot \frac{1}{\alpha^n} = 0$$

или $a_0 + a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + a_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \ldots + a_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2} + a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + a_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0.$

А, тоа покажува дека и $x = \frac{1}{\alpha}$ е корен на равенката (2), штд.

Поради ова својство, симетричните равенки често ги викаме уште и **реципрочни равенки.**

Од Т[28.1] заклучуваме дека корените на симетричната равенка одат во парови, оттука пак следува дека секоја симетрична равенка од непарен степен мора да има еден корен за кој, тој и неговата реципрочна вредност да се ист број. Такви се само броевите 1 и – 1. Воочуваме дека, симетричната равенка од непарен степен ($n = 2k+1$):

$$a_0x^{2k+1} + a_1x^{2k} + a_2x^{2k-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \qquad (a_0 \neq 0) \qquad (4)$$

има еден корен $x = -1$, односно дека нејзината лева страна е делива со $x + 1$. Тоа е видливо од претставувањето на левата страна на равенката (4) во вид на збир од собироци од кои секој е делив со $x + 1$:

$$a_0(x^{2k+1} + 1) + a_1x(x^{2k-1} + 1) + a_2x^2(x^{2k-3} + 1) + \ldots + a_kx^k(x + 1) = 0 \qquad (5)$$

Според тоа, симетричната равенка од непарен степен (4) со користење на Хорнеровата шема може да се претстави во видот:

$$(x + 1)(a_0x^{2k} + b_1x^{2k-1} + \ldots + b_1x + a_0) = 0, \qquad (6)$$

каде што полиномот количник е некој симетричен полином од парен степен. Значи, решавањето на симетричните равенки од непарен степен ($n = 2k + 1$) се сведува на решавање на симетрична равенка од парен ($n = 2k$) степен:

$$a_0x^{2k} + b_1x^{2k-1} + b_2x^{2k-2} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + a_0 = 0 \qquad (7)$$

Да ја разгледаме симетричната равенка од парен степен:

$$a_0x^{2k} + a_1x^{2k-1} + \ldots + a_{k-1}x^{k+1} + a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (8)$$

Во неа постои еден среден член - центар на симетрија, за кој коефициентите на членовите, што се симетрични спрема него, се еднакви. Ако ги поделиме двете страни на равенката (8) со $x^k(\neq 0)$ и ги групираме членовите со соодветно еднакви коефициенти, ќе ја добиеме равенката која е еквивалентна со неа.

$$a_0\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + a_1\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + a_2\left(x^{k-2} + \frac{1}{x^{k-2}}\right) + \ldots + a_{k-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + a_k = 0 \qquad (9)$$

Потоа ако ставиме $x + \frac{1}{x} = y$, добиваме едно по друго:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,\ x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y,\ x^4 + \frac{1}{x^4} = y^4 - 4y^2 + 2,\ x^5 + \frac{1}{x^5} = y^5 - 5y^3 + 5y, \ldots, x^k + \frac{1}{x^k} = y^k - ky^{k-2} + \ldots \qquad (10)$$

Со замена на овие вредности од (10) во (9), ќе добиеме равенка од $k = \frac{n}{2}$ степен по однос на новата променлива y:

$$b_0y^k + b_1y^{k-1} + b_2y^{k-2} + \ldots + b_{k-1}y + b_k = 0 \qquad (11)$$

Соодветните вредности на x ги добиваме од смената $x + \frac{1}{x} = y$, односно од квадратната равенка $x^2 - yx + 1 = 0$.

Пример 1. Да се реши равенката $x^6 + 3x^5 - x^4 - 6x^3 - x^2 + 3x + 1 = 0$.

Решение. Ја доведуваме равенката во видот (9) и со смената $x + \frac{1}{x} = y$, добиваме: $(x^3 + \frac{1}{x^3}) + 3(x^2 + \frac{1}{x^2}) - (x + \frac{1}{x}) - 6 = 0$, или $(y^3 - 3y) + 3(y^2 - 2) - y - 6 = 0$. Односно $y^3 + 3y^2 - 4y - 12 = 0$.

Оваа равенка од трет степен со разложување на нејзината лева страна на множители, лесно ја доведуваме во видот: $y^2(y + 3) - 4(y + 3) = 0$, или $(y + 3)(y^2 - 4) = 0$, од каде $y_1 = -3$, $y_2 = 2$ и $y_3 = -2$.

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна со вкупноста равенки:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = -3 \\ x + \frac{1}{x} = -2 \\ x + \frac{1}{x} = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 3x + 1 = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Од нив добиваме: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4} = -1$, $x_{5,6} = 1$.

Пример 2. Да ја решиме равенката $6x^5 - 5x^4 - 29x^3 - 29x^2 - 5x + 6 = 0$

Решение. Еден корен на оваа равенка е $x_1 = -1$. Кога ќе ги поделиме двете нејзини страни со $x + 1$, ќе ја добиеме симетричната равенка од четврти степен:

$$6x^4 - 11x^3 - 18x^2 - 11x + 6 = 0 \qquad (12)$$

Со смената $x + \frac{1}{x} = y$ таа преминува во $(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 11(x + \frac{1}{x}) - 18 = 6(y^2 - 2) - 11y - 8 = 0$, или $6y^2 - 11y - 18 = 0$, откаде $y_1 = -\frac{3}{4}$, $y_2 = \frac{5}{3}$.

За одредување на корените на равенката (12) ја решаваме вкупноста равенки

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = -\frac{3}{4} \\ x + \frac{1}{x} = \frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x^2 + 3x + 4 = 0 \\ 3x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases}.$$

Од нив добиваме: $x_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{55}}{8}$, $x_{4,5} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{6}$.

Според тоа, дадената равенка има корени:

$$x_1 = -1,\ x_{2,3} = \frac{-3 \pm i\sqrt{55}}{8},\ x_{4,5} = \frac{5 \pm i\sqrt{11}}{6}$$

28.2. СИМЕТРИЧНИ РАВЕНКИ ОД ВТОР И ТРЕТ РЕД

Покрај разгледаните симетрични равенки, кои ќе ги викаме **симетрични равенки од прв ред**, разликуваме и симетрични равенки од втор и трет ред. Нив ги дефинираме вака:

1. Полиномна равенка кај која коефициентите на членовите што се еднакво оддалечени од почетокот и крајот, се спротивни броеви, се вика **симетрична равенка од втор ред**. Значи, нејзините коефициенти го задоволуваат условот

$a_k = -a_{n-k} (k = 1, 2, ..., n)$ и го имаат видот:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0) \qquad (13)$$

Ако равенката (13) е од парен степен, тогаш таа има непарен број членови, што значи дека таа треба да има еден среден член - центар на симетрија. Нека е тоа членот a_kx^k чиј коефициент a_k треба да биде таков број, што тој и неговиот спротивен број $-a_k$ да се ист број. Од $a_k = -a_k$, или $2a_k = 0$, добиваме $a_k = 0$. Според тоа, симетричните равенки од втор ред и кога се од парен степен, немаат среден член.

Оттука следува дека збирот од коефициентите кај секоја симетрична равенка од втор ред (било да е таа од парен или непарен степен) е еднаков на нула, а тоа значи дека таа има еден корен $x_1 = 1$, односно дека нејзината лева страна е делива со биномот $x - 1$. Може да се покаже дека количникот од делењето на левата страна на симетричната рвенка од втор ред (од кој било степен) со $x - 1$, е исто симетричен полином но од прв ред, т.е. симетричната равенка (13) од втор ред може да се доведе во видот:

$$(x - 1)(a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + ... + b_2x^2 + b_1x + a_0) = 0, \qquad (14)$$

односно да се сведе на симетрична равенка од прв ред со степен $n - 1$.

Пример 3. Да се реши равенката $x^5 - 11x^4 + 36x^3 - 36x^2 + 11x - 1 = 0$.

Решение. Таа има еден корен $x_1 = 1$, бидејќи $1 - 11 + 36 - 36 + 11 - 1 = 0$. Нејзината лева страна ја делиме со $x - 1$, и добиваме

	1	−11	36	−36	11	−1	
1	1	−10	26	−10	1	0,	т.е

$(x - 1)(x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1) = 0$.

Ја решаваме симетричната равенка од прв ред:

$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$:

$$(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 10(x + \frac{1}{x}) + 26 = (y^2 - 2) - 10y + 26 = 0, \text{ или } y^2 - 10y + 24 = 0, \text{ од каде}$$

$y_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = 5 \pm 1$, т.е. $y_1 = 4$, $y_2 = 6$. Од вкупноста равенки: $\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 4 \\ x + \frac{1}{x} = 6 \end{cases}$

добиваме: $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$, $x_{4,5} = 3 \pm \sqrt{8}$.

Според тоа, дадената равенка има корени: $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$, $x_{4,5} = 3 \pm \sqrt{8}$.

Пример 4. Да се реши равенката $3x^6 - 10x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 10x - 3 = 0$

Решение. Ова е симетрична равенка од втор ред од парен степен. Значи има еден корен $x_1 = 1$ и се сведува на симетрична равенка од прв ред со непарен степен; која пак има друг корен $x_2 = -1$. Со делење на двете страни со биномите $x - 1$ и $x + 1$, дадената равенка се сведува на симетрична равенка од прв ред од 4-ти степен:

	3	−10	3	0	−3	10	−3
1	3	−7	−4	−4	−7	3	0
−1	3	−10	6	−10	3	0,	

т.е

$(x - 1)(x + 1)(x^4 - 10x^3 + 6x^2 - 10x + 3) = 0$

Потоа со смената $x + \frac{1}{x} = y$ имаме: $3(x^2 + \frac{1}{x^2}) - 10\,(x + \frac{1}{x}) + 6 = 0$, односно

$3(y^2 - 2) - 10y + 6 = 0$ или $3y^2 - 10y = y(3y - 10) = 0$, т.е. $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{10}{3}$.

На крајот, од вкупноста: $\begin{bmatrix} x + \frac{1}{x} = 0 \\ x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix} x^2 + 1 = 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 = 0 \end{bmatrix}$ добиваме:

$x_{3,4} = \pm i$, $x_5 = 3$ и $x_6 = \frac{1}{3}$. Според тоа дадената равенка има корени:

$x_1 = 1, x_2 = -1, x_{3,4} = \pm i, x_5 = 3, x_6 = \frac{1}{3}$.

2. Полиномните равенки од парен степен ($n = 2k$) од видот:

$$a_0x^{2k} + a_1x^{2k-1} + a_2x^{2k-2} + \ldots + a_{k-1}x^{k+1} + a_kx^k - a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} - \ldots + (-1)^{k-1}a_1x + (-1)^k a_0 = 0, (a_0 \neq 0, k \in \mathbb{N}) \quad (15)$$

се викаат **симетрични равенки од трет ред**.

При $n = 4, 6, 8$ тие го имаат видот:

$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ (16)

$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 - cx^2 + bx - a = 0$ (17)

$ax^8 + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 - dx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ (18)

Значи, кај симетричните равенки чиј степен е делив со 4 ($n = 4, 8, 12, \ldots$) коефициентите на членовите, што се еднакво оддалечени од почетокот и крајот: при парните степени на x, се еднакви; а при непарните степени тие се спротивни. А кај симетричните равенки, чиј степен е делив со 2 (но не и со 4)($n = 6, 10, 14, \ldots$) коефициентите на членовите што се еднакво оддалечени од почетокот и крајот, при парните степени на x, се спротивни, а при непарните степени, тие се еднакви.

Овие равенки со делење на двете нивни страни со x^k, на пример, равенката (18) – со x^4, таа се сведува на:

$$a(x^4 + \frac{1}{x^4}) + b(x^3 - \frac{1}{x^3}) + c(x^2 + \frac{1}{x^2}) + d(x - \frac{1}{x}) + e = 0 \qquad (19)$$

Со воведување на смената $x - \frac{1}{x} = y$, а имајќи предвид дека:

$$x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = y^2, \text{ односно } x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2,$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = (x - \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2} + 1) = y(y^2 + 2 + 1) = y^3 + 3y,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2 = (y^2 + 2)^2 - 2 = y^4 + 4y^2 + 2,$$

таа се сведува на некоја равенка од 4-ти степен по однос на новата променлива y.

Пример 5. Да ја решиме равенката $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 5x + 1 = 0$.

Решение. Таа е симетрична равенка од трет ред. Двете нејзини страни ги делиме со x^2: $(x^2 + \frac{1}{x^2}) + 5(x - \frac{1}{x}) + 4 = 0$. Со смената $x - \frac{1}{x} = y$ таа се сведува на квадратната равенка $(y^2 + 2) + 5y + 4 = 0$, односно $y^2 + 5y + 6 = 0$ по однос на y.

Од неа добиваме $y_1 = -3$, $y_2 = -2$. Потоа ја решаваме вкупноста на равенки

добиваме $\begin{cases} x - \frac{1}{x} = -3 \\ x - \frac{1}{x} = -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x^2 + 3x - 1 = 0 \\ x^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases}$

Оттука: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$.

28. 3. БИНОМНИ РАВЕНКИ

Равенката од видот

$$ax^n + b = 0, \qquad (20)$$

каде $a \neq 0$ и b се дадени комплексни броеви, а n-природен број, се вика **биномна равенка од n-ти степен.**

Таа е еквивалентна со равенката $x^n = -\frac{b}{a}$ (21)

и се решава непосредно со коренување - извлекување на n-ти корен од бројот $-\frac{b}{a}$:

$$x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}.$$

Врз основа на познатите својства на коренувањето на комплексни броеви, имаме:

а) Ако $-\frac{b}{a} = 0$, тогаш равенката (20) (во кое било бројно поле) има единствен корен $x = 0$.

б) Ако $-\frac{b}{a} \neq 0$ е произволен комплексен (во посебен случај реален) број, тогаш во полето на комплексните броеви биномната равенка (20) или (21) има точно n корени, кои всушност се n-те различни вредности на $\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$.

Модулот и аргументот на бројот $-\frac{b}{a}$ нека се r и φ, т.е. нека

$$-\frac{b}{a} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Во таков случај сите n корени на биномната равенка ги определуваме со формулата:

$$x_k = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad (22)$$

за $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Пример 6. Да се реши биномната равенка $x^4 + 3 = 0$.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на $x^4 = -3$. Значи, корени на равенката ќе бидат сите вредности на коренот $\sqrt[4]{-3}$. Бројот -3 претставен во тригонометриска форма гласи:

$-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$

Тогаш согласно формулата (22) добиваме:

$$x_k = \sqrt[4]{-3} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \quad (k = 0, 1, 2, 3) \qquad \text{т.е.}$$

$$x_0 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),$$

$$x_1 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i),$$

$$x_2 = \sqrt[4]{3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt[4]{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i),$$

$$x_3 = \sqrt[4]{3}\,(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}) = \sqrt[4]{3}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt[4]{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

Горната постапка овозможува да се реши секоја биномна равенка од кој било степен во полето на комплексните броеви.

Ако биномната равенка е со реални коефициенти a и b, ќе покажеме дека за некои одредени вредности на $n \in \mathbb{N}$, тие може да се решаваат и без користење на тригометриската форма на комплексните броеви, а преку разложување на нивната лева страна на множители. Во зависност од тоа дали коефициентите a и b на биномната равенка имаат исти или спротивни знаци, секоја од нив се сведува на видот:

$$ax^n - b = 0 \qquad \text{или} \qquad ax^n + b = 0, \tag{23}$$

каде што a и b се дадени позитивни реални броеви.

Со смената $x = y \cdot \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$, (24)

при што со $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ е означена аритметичката вредност на n-тиот корен од позитивниот реален број $\frac{b}{a}$, биномната равенка (23) преминува во видот:

$$y^n - 1 = 0 \qquad \text{или} \qquad y^n + 1 = 0 \tag{25}$$

За $n = 2, 3, 4, 5, 6$ биномните равенки алгебарски ги решаваме како што следува:

а) $n = 2$:

$y^2 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (y-1)(y+1)=0$
$y_1 = 1,\ y_2 = -2$

$y^2 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (y-i)(y+i) = 0$
$y_1 = i,\ y_2 = -i$

б) $n = 3$

$y^3 - 1 = 0$
$\Leftrightarrow (y-1)(y^2+y+1)=0$
$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y-1=0 \\ y^2+y+1=0 \end{bmatrix}$
$y_1 = 1,\ y_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$y^3 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (y+1)(y^2-y+1)=0$
$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y+1=0 \\ y2-y+1=0 \end{bmatrix}$
$y_1 = -1,\ y_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

в) $n = 4$

$y^4 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y^2-1)(y^2+1)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y^2 - 1 = 0 \\ y^2 + 1 = 0 \end{bmatrix}$$

$y_{1,2} = \pm 1,\ y_{3,4} = \pm i$

$y^4 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow y^4+2y^2+1-2y^2=0$

$\Leftrightarrow (y^2+1)^2 - (\sqrt{2}\cdot y)^2=0$

$\Leftrightarrow (y^2-\sqrt{2}\cdot y + 1)(y^2 + \sqrt{2}\, y + 1)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y^2 - \sqrt{2}y + 1 = 0 \\ y^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0 \end{bmatrix}$$

$$y_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$$

$$y_{3,4} = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)$$

г) $n = 5$

$y^5 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y - 1 = 0 \\ y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 1$

$(y^2+\frac{1}{y^2})+(y+\frac{1}{y})+1=z^2+z-1=0$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2y^2 - (-1+\sqrt{5})y + 2 = 0 \\ 2y^2 + (1+\sqrt{5})y + 2 = 0 \end{bmatrix}$$

$$y_{2,3} = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}})$$

$$y_{4,5} = \frac{1}{4}(-1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}})$$

$y^5 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y+1)(y^4-y^3+y^2-y+1)=0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} (y + 1) = 0 \\ y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 = 0 \end{bmatrix}$$

$y_1 = -1$

$(y^2+\frac{1}{y^2})-(y+\frac{1}{y})+1=z^2-z-1=0$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2y^2 - (1+\sqrt{5})y + 2 = 0 \\ 2y^2 - (1-\sqrt{5})y + 2 = 0 \end{bmatrix}$$

$$y_{2,3} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}})$$

$$y_{4,5} = \frac{1}{4}(1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}})$$

д) n = 6

$y^6 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y^3-1)(y^3+1)=0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} y^3 - 1 = 0 \\ y^3 + 1 = 0 \end{bmatrix}$

$y_1 = 1,\ y_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$y_4 = -1,\ y_{5,6} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

$y^6 + 1 = 0$

Со смената $y=zi$ таа преминува во $(zi)^6+1=0$ или

$z^6 - 1 = 0$, бидејќи $i^6 = -1$. Значи:

$y_1 = z_1 i = 1 \cdot i = i$

$y_2 = z_2 i = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})i = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$y_3 = z_3 i = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$y_4 = -i, y_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, y_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Пример 7. Да ја решиме равенката $64x^6 + 27 = 0$

Решение. Со смената $x = y\sqrt[6]{\frac{27}{64}} = y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ дадената равенка по однос на променливата y се сведува на $y^6 + 1 = 0$.

Според тоа, корените на дадената равенка согласно смената ќе ги добиеме кога секој корен на равенката $y^6 + 1 = 0$ ќе го помножиме со бројот $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Така добиваме:

$$x_1 = y_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = y_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = (-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i,$$

$$x_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i, \ x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{4}i, \ x_5 = (-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i,$$

$$x_6 = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

Пример 8. Да се реши равенката $x^8 - 1 = 0$.

Решение. Разложувајќи го биномот $x^8 - 1$ на множители, добиваме:

$(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$ или $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$.

Според тоа, дадената равенка ги има следниве корени:

$$x_{1,2} = \pm 1, \qquad x_{3,4} = \pm i, \qquad x_{5,6} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), \qquad x_{7,8} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i).$$

28.4. ТРИНОМНИ РАВЕНКИ

Триномни се викаат полиномните равенки од видот:

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, (a \neq 0, n \in \mathbb{N}) \quad (26)$$

каде што a, b, c се дадени комплексни или реални броеви.

Триномните равенки ги решаваме алгебарски со воведување на нова (помошна) променлива со смената $x^n = y$. Тогаш равенката (26) преминува (по однос на новата променлива) во квадратната равенка

$$ay^2 + by + c = 0 \quad (27)$$

чии корени се: $y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, при што со $\sqrt{b^2 - 4ac}$ е означена една од вредностите на $\sqrt{b^2-4ac}$.

Според тоа, решавањето на триномната равенка (26) се сведува на решавање на вкупноста од две биномни равенки од n-ти степен:

$$\begin{cases} x^n = y_1 \\ x^n = y_2 . \end{cases}$$

Пример 9. Да ја решиме триномната равенка $x^8 - 17x^4 + 16 = 0$.

Решение. Со смената $x^4 = y$ таа преминува во квадратната равенка

$$y^2 - 17y + 16 = 0, \quad \text{од каде } y_1 = 1, \quad y_2 = 16.$$

Потоа ги решаваме биномните равенки од четврти степен:

$x^4 - 1 = 0, x^4 - 16 = 0$. Тие имаат корени: $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm i$, $x_{5,6} = \pm 2$, $x_{7,8} = \pm 2i$, а тие се и бараните корени на дадената триномна равенка.

28.4.1. БИКВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Специјален случај на триномната равенка (26) за $n = 2$ е полиномната равенка

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, (a \neq 0) \quad (28)$$

која се вика уште и **биквадратна равенка**.

Бидејќи во биквадратната равенка променливата x се наоѓа само на парни степени (x^4 и x^2), затоа ако таа има корен x_0, тогаш таа ќе има и корен $-x_0$. Значи, корените на биквадратната равенка се два по два спротивни (комплексни или реални) броеви.

Биквадратната равенка, како и секоја триномна, ја решаваме со воведување на нова (помошна) променлива со смената $x^2 = y$. Тогаш од равенката (28) ја добиваме квадратната равенка

$$ay^2 + by + c = 0, \quad (29)$$

чии корени се $y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Потоа ги решаваме равенките $x^2 = y_1$, $x^2 = y_2$, од каде добиваме

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{y_1}, \qquad x_{3,4} = \pm \sqrt{y_2}.$$

Значи, формулата за корените на биквадратната равенка гласи:

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} = \pm\sqrt{-\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}} \qquad (30)$$

Да ги испитаме корените на биквадратната равенка со реални коефициенти, при што ќе сметаме дека $a > 0$ и $b \neq 0$, $c \neq 0$.

За корените y_1 и y_2 на помошната квадратна рвенка (29) постојат следниве можности:

а) Ако y_1 и y_2 се позитивни реални броеви (а тоа ќе биде ако $b^2 - 4ac > 0$, $c > 0$, $b < 0$), тогаш биквадратната равенка ќе има четири реални корени $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$.

б) Ако y_1 и y_2 се негативни реални броеви ($b^2 - 4ac > 0$, $c > 0$, $b > 0$), тогаш биквадратната равенка ќе има четири имагинарни корени.

в) Ако пак, еден од броевите y_1, y_2 е позитивен, а другиот - негативен реален број (ако $b^2 - 4ac > 0$, $c < 0$), тогаш равенката (28) ќе има два реални и два имагинарни корена.

г) Ако y_1 и y_2 се два конјугирано комплексни броеви ($b^2 - 4ac < 0$), тогаш равенката (28) ќе има четири комплексни корени.

д) Ако $y_1 = y_2$ ($= -\frac{b}{2a}$) е двократен корен (ако $b^2 - 4ac = 0$), тогаш при $b > 0$ равенката (28) има два имагинарни двократни корена, а при $b < 0$ таа ќе има два реални двократни корена.

Пример 10. Да се реши равенката $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$.

Решение. Со смената $x^2 = y$ ја добиваме квадратната равенка $y^2 - 15y - 16 = 0$, чии корени се $y_1 = -1$, $y_2 = 16$.

Потоа согласно смената ги решаваме биномните равенки $x^2 = -1$ и $x^2 = 16$, чии корени $x_{1,2} = \pm i$, $x_{3,4} = \pm 4$ се бараните корени на дадената биквадратна равенка.

При решавањето на биквадратните равенки со реални коефициенти многу често се случува изразот $b^2 - 4ac$ да не е потполн квадрат, поради што нејзините корени согласно (30) ги добиваме во видот $x = \pm\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, каде што $A = -\frac{b}{2a}$, $B = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ се некои реални броеви.

Ќе покажеме дека изразот $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ во одредени случаи може да се трансформира во збир од два прости корена:

Претходно ќе го докажеме следниов **идентитет на Лагранж**:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}, \ (\mathbf{A > 0, B > 0, A^2 - B > 0}) \qquad (31)$$

Доказ: Да ставиме $\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=x$. Тогаш $x^2=2A+2\sqrt{A^2-B}$, а оттука $x=\sqrt{2A+2\sqrt{A^2-B}}$. Според тоа, $\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}$ (32)

Аналогно добиваме:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \tag{33}$$

Потоа со собирање и одземање на соодветните страни на равенствата (32) и (33) го добиваме идентитетот (31), штд.

Да заклучиме дека трансформацијата со примена на идентитетот на Лагранж може да се изврши само ако е $A>0$ и $B>0$, а корените на биквадратната равенка за да можеме да ги изразиме како збир од прости корени, потребно е да биде

$A^2-B=k^2$, или $\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}=k^2$, т.е. дропката $\frac{c}{a}$ треба да биде потполн квадрат.

Пример 11. Да го трансформираме изразот $\sqrt{11\pm6\sqrt{2}}$ со примена на идентитетот на Лагранж.

Решение.

$$\sqrt{11\pm6\sqrt{2}}=\sqrt{11\pm\sqrt{72}}=\sqrt{\frac{11+\sqrt{121-72}}{2}}\pm\sqrt{\frac{11-\sqrt{49}}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{11+7}}{2}\pm\frac{\sqrt{11-7}}{2}=\sqrt{9}\pm\sqrt{2}=3\pm\sqrt{2}$$

Пример 12. Да се реши равенката $x^4-4x^2+1=0$.

Решение. Со примена на формулата (30), добиваме:

$$x=\pm\sqrt{\frac{4}{2\cdot1}\pm\sqrt{\frac{16\pm4\cdot1\cdot1}{4\cdot1^2}}}=\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}\,.$$

Бидејќи е $A=2>0$ и $\frac{c}{a}=\frac{1}{1}=1$ потполн квадрат, затоа изразот $\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}$ можеме да го трансформираме во збир од два прости корена. Со примена на идентитетот (31), добиваме:

$$\pm\sqrt{2\pm\sqrt{3}}=\pm\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}}\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{1}}{2}}\right)=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}\pm\sqrt{2}\right)$$

Според тоа, дадената биквадратна равенка има корени:

$x = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{6} \pm \sqrt{2}\right)$, односно , $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)$, $x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$.

Пример 13. Да се реши равенката $(x^2 - 1)^4 - 13(x^2 - 1)^2 + 36 = 0$.

Решение. Очигледно е дека дадената равенка со смената $x^2 - 1 = y$ преминува во биквадратна равенка по однос на y: $y^4 - 13y^2 + 36 = 0$. Таа има корени $y_1 = 3$, $y_2 = -3$, $y_3 = 2$, $y_4 = -2$. Заменувајќи ги еден по друг во смената $x^2 - 1 = y$, добиваме четири квадратни равенки по x: $x^2 - 1 = 3$, $x^2 - 1 = -3$, $x^2 - 1 = 2$, $x^2 - 1 = -2$. Нивните корени: $x_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm i\sqrt{2}$, $x_{5,6} = \pm\sqrt{3}$, $x_{7,8} = \pm i$ се корени и на дадената равенка.

ЗАДАЧИ

Реши ги симетричните равенки од прв ред (1 – 5):

1. а) $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$, б) $2x^4 - 7x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$,
2. а) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$, б) $2x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$,
3. а) $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$, б) $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0$,
4. а) $2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 2 = 0$, б) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$,
5. а) $5x^4 - 12x^3 + 14x^2 - 12x + 5 = 0$, б) $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0$

Реши ги симетричните равенки од втор и трет ред (6 – 9):

6. а) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$, б) $12x^3 - 37x^2 + 37x - 12 = 0$,
7. а) $3x^3 + x^2 - x - 3 = 0$, б) $2x^5 + x^4 - 19x^3 + 19x^2 - x - 2 = 0$,
8. а) $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$, б) $2x^4 + 5x^3 - 5x - 2 = 0$
9. а) $x^4 - 5x^3 + 5x - 1 = 0$, б) $2x^6 + 3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = 0$.

Реши ги биномните и триномните равенки (10 – 19):

10. а) $8x^3 + 1 = 0$, б) $x^3 - 8 = 0$, в) $x^3 + 1 = 0$
11*. а) $x^4 + i = 0$, б) $x^3 - 2 = 0$, в) $x^7 - 1 = 0$
12. а) $x^4 + 16 = 0$, б) $x^5 + 1 = 0$, в) $x^5 - 32 = 0$
13*. а) $x^6 - 64 = 0$, б) $64x^6 + 1 = 0$, в) $x^6 - i = 0$
14. а) $x^8 - 5x^4 + 6 = 0$, б) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$
15. а) $32x^6 + 12x^3 + 1 = 0$, б) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$
16. а) $x^4 + 7x^2 + 10 = 0$, б) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
17. а) $16x^4 - 17x^2 + 1 = 0$ б) $(x - 3)^4 - 6(x - 3)^2 + 5 = 0$
18. а) $-3x^4 - 7x^2 + 10 = 0$ б) $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$
19. а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ б) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$

§ 29. ПОЛИНОМНИ РАВЕНКИ ШТО СОДРЖАТ ПАРАМЕТРИ

Да ја разгледаме равенката

$$f(x; a, b, ..., c) = 0 \qquad (1)$$

од променливата x и со параметри a, b, ..., c.

Очигледно е дека, за секој допуштен систем на вредности на параметрите $a_0, b_0, ..., c_0$ равенката (1) преминува во равенка

$$f(x; a_0, b_0, ..., c_0) = 0 \qquad (2)$$

од променливата x, која не содржи параметри.

Јасно е дека, равенката (2) сега без параметри има некое наполно определено множество од решенија (корени).

Имајќи го предвид горново, дефинираме: Да се реши дадена равенка со параметри, значи: за секој допуштен систем вредности на параметрите во неа да се одреди множеството од сите корени на дадената равенка.

Слично, и поимот еквивалентност на равенките со параметри го дефинираме вака: Две равенки од променливата x и со параметри $a, b, ...$, с велиме се еквивалентни, ако за двете равенки областа на дефинираност на параметрите е една иста и за секој допуштен систем вредности на параметрите двете равенки се еквивалентни. Значи еквивалентите равенки, што содржат параметри, за секој допуштен систем на вредности на параметрите, имаат едно исто множество корени.

Да забележиме, дека секоја трансформација на равенката, што ја менува областа на дефинираност на параметрите во неа, доведува до нееквивалентна равенка на дадената.

Примери: 1) Равенката $\sqrt{a^2-b^2}\cdot x^3+(a-b)+\sqrt{a^2-1}=0$ со реални коефициенти содржи два параметра a и b. Областа на дефинираност на параметрите ја определуваме од условите: $a^2-b^2>0$ и $a^2-1\geq 0$, односно од $|a|>|b|$ и $|a|\geq 1$. Така, на пример, системите на вредности: $a=2$; $b=1$; $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $a=-3$, $b=0$ се допуштени вредности на параметрите. Меѓутоа, системите на вредности: $a=1$, $b=2$; $a=0$, $b=-3$ се недопуштени. Ако земеме да е $a=5$, $b=-3$ ја добиваме равенката без параметри: $4x^3+8x+24=0$, а ако ставиме $a=1$, $b=0$, ја добиваме равенката $x^3+x=0$.

2) За равенката $\frac{x^2-1}{a^2-1}-1=0$ областа на дефинираност на параметарот a ја одредуваме од условот $a^2-1\neq 0$, односно $a\neq\pm 1$. Ако равенката ја помножиме со a^2-1, ја добиваме равенката $x^2-1-a^2+1=0$ или $x^2-a^2=0$.

За последната равенка $a=-1$ и $a=1$ се допуштени вредности на параметарот. За тие вредности на a левата страна на дадената равенка нема смисла, а равенката $x^2-a^2=0$ има корени $x_{1,2}=\pm 1$. Значи, дадената равенка не е еквивалентна со равенката $x^2-a^2=0$.

3) При решавањето на пример, на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ во општ вид, коефициентите a, b, с ги разгледуваме како параметри, а нејзините корени

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

како одредени функции од параметрите a, b, с.

4). За равенката $x^3 - a^6 = 0$ (3)
функцијата на параметарот $x = a^2$ ни го дава општото решение (корен) на равенката (3) во полето на реалните броеви. Меѓутоа, во полето на комплексните броеви општото решение на равенката (3) ќе биде зададено со формулите (изразите): $x_1 = a^2$, $x_2 = a^2 \cdot \varepsilon$, $x_3 = a^2 \cdot \varepsilon^2$ (каде што ε и ε^2 се примитивните корени на бројот 1).

Пример 1. Да ја решиме равенката $(x-a)(x-b)(x-c) + abc = 0$

Решение. Очигледно е дека $x = 0$ е еден корен на дадената равенка, бидејќи $(0-a)(0-b)(0-c) + abc \equiv 0$. Тоа можеме да го утврдиме уште и на следниов начин:

Ако a, b, c ги разгледуваме како нули на полиномот $(x-a)(x-b)(x-c)$, тогаш согласно Виетовите правила за полином од трет степен ќе важи:

$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc$. Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката $x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x = 0$, која има еден корен $x = 0$. Другите два корена ги одредуваме, кога ќе ја решиме квадратната равенка $x^2 - (a+b+c)x + ab + ac + bc = 0$.

Пример 2. Да се реши равенката $(a-x)^3 + (b-x)^3 = (a+b-2x)^3$.

Решение. Да земеме предвид дека: $a + b - 2x = (a-x) + (b-x)$, тогаш дадената равенка ја запишуваме во видот: $(a-x)^3 + (b-x)^3 = [(a-x) + (b-x)]^3$, односно во $(a-x)^3 + (b-x)^3 = (a-x)^3 + 3(a-x)^2(b-x) + 3(a-x)(b-x)^2 + (b-x)^3$, или $3(a-x)(b-x)(a+b-2x) = 0$.

Оттука: $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = \dfrac{a+b}{2}$.

Пример 3. Да се реши равенката $(x+a)^4 + (x-a)^4 = 8a^4$.

Решение. Да ги земеме предвид формулите:

$(x \pm a)^4 = x^4 \pm 4x^3a + 6x^2a^2 \pm 4xa^3 + a^4$. Тогаш дадената равенка се трансформира во $x^4 + 6x^2a^2 + a^4 = 8a^4$, односно во $x^4 + 6a^2x^2 - 7a^4 = 0$. Тоа е биквадратна равенка. Кога ќе ја решиме, добиваме: $x_{1,2} = \pm a, x_{3,4} = \pm ai\sqrt{7}$.

Пример 4. Да се реши равенката

$$\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Решение. Параметрите a, b, c треба да го задоволуваат условот: $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$, односно $abc \neq 0$. Со цел да ја упростиме равенката, а со тоа и нејзиното решавање, ја множиме равенката со abc и таа го добива видот:

$a(x-a) + b(x-b) + c(x-c) = 2(bc + ac + ab)$. Потоа имаме: $(a+b+c)x = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, односно $(a+b+c)x = (a+b+c)^2$ (4)

Ако $a + b + c \neq 0$, тогаш равенката (4) има единствен корен $x = a + b + c$.

Ако, пак, $a + b + c = 0$, тогаш равенката (4), поточо $0 \cdot x = 0$, има бесконечно множество корени, односно нејзин корен е секој x.

Пример 5. Одреди за кои вредности на параметарот k, биквадратната равенка $x^4 + 2(2k+1)x^2 + 3k^2 + 13 = 0$ ќе има два пара двократни корена.

Решение. Тоа ќе се случи, ако соодветната квадратна равенка $y^2 + 2(2k+1)y + 3k^2 + 13 = 0$ има еден двократен корен. А тоа ќе биде, ако е $D = (2k+1)^2 - (3k^2 + 13) = 0$, односно ако $k^2 + 4k - 12 = 0$. Оттука $k_1 = 2, k_2 = -6$.

Значи, дадената биквадратна равенка ќе има два пара двократни корени за $k = 2$ или $k = -6$.

ЗАДАЧИ

Реши ги равенките со параметри (1 – 10):

1. а) $x^3 + (p - 1)x - p = 0$, б) $(x + a)^4 - (x - a)^4 = 16x^4$,

2. а) $a^2x^4 - (a^2 + 1)x^2 + 1 = 0$, б) $x^4 - 2(k^2 + 1)x^2 + k^4 - 2k^2 + 1 = 0$

3. а) $c^4x^4 + c^2(a^2 - b^2)x^2 - a^2b^2 = 0$, б) $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0$

4*. а) $x^4 + 4abx^2 - (a^2 + b^2)^2 = 0$, б) $x^3 \pm ax^2 \pm ax + 1 = 0$

5. а) $a^3x^3 - (a + b)^3 = 0$, б) $a^4x^4 + (a + b)^4 = 0$

6. а) $x^8 - 10a^2x^4 + 9a^4 = 0$, б) $x^8 - (a^4 + b^4)x^4 + a^4b^4 = 0$

7. а) $(x - a)^3 + (x - b)^3 = 0$, б) $x^4 - (2k - p)^4 = 0$

8*. а) $x^4 + 25a^2 = (a + 25)x^2$, б) $(a^2 - b^2)x^2 + ab = (a^2 + b^2)x$.

9*. $(a - x)^3(x - b)^2 + (a - x)^2(x - b)^3 = a^2b^2(a - b)$.

10*. $(x - a)(x + a + 1)(x + a + 2)(x + a + 3) = b$

11*. Покажи дека равенката од видот $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$ со смената $x = y - \frac{a+b}{2}$ се сведува на биквадратна равенка. На тој начин реши ја равенката $(x + 6)^4 + (x + 4)^4 = 82$.

12*. Докажи дека равенката $a(x - b)(x - c) + b(x - c)(x - a) + c(x - a)(x - b) = 0$ има реални корени за кои било вредности на a, b и c.

13*. Збирот од квадратите на три последователни цели броја изнесува p. Кои се тие броеви?

14*. За кои вредности на p, збирот од квадратите на корените на равенката $x^2 + px + p = 2$ ќе биде најмал?

§ 30. ДРОБНО РАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Дробно рационална равенка се вика равенката од видот:

$$R_1(x) = R_2(x), \tag{1}$$

во која левата и десната страна се некои рационални изрази од променливата x, од кои барем еден е дробен.

Очигледно е дека равенката (1) е еквивалентна со равенката

$$R_1(x) - R_2(x) = 0, \tag{2}$$

а со доведување на нејзината лева страна во канонична форма, ја добиваме равенката

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{3}$$

во која броителот и именителот се некои полиноми од променливата равенка x.

Равенката (3) ја викаме **каноничен вид** на дробно рационалната равенка (1).

Дефиниционата област на равенката (1) е еднаква на пресекот од дефиниционите области на изразите $R_1(x)$ и $R_2(x)$. Меѓутоа, со доведување на дадената равенка (1) во нејзиниот каноничен вид (3), во општ случај нејзината дефиниционa област

може да се прошири. Тоа доаѓа, главно, поради можното скратување на рационалната дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$. Затоа равенката (3) покрај решенијата (корените) на равенката (1) може да има и некои други, таканаречени **придобиени** решенија, што не се решенија на дадената равенка (1). Според тоа, решенијата на равенката (3) мора да бидат проверени со замена во дадената равенка.

Решенија пак, на дробно рационалната равенка во каноничен вид (3) се сите решенија на полиномната равенка

$$f(x) = 0 \tag{4}$$

што се добива кога полиномот -броителот f(x) на рационалната дропка $\frac{f(x)}{g(x)}$ се изедначи на нула. Решавањето на дробно рационалните равенки ќе го покажеме на следниве неколку примери:

Пример 1. Да се реши равенката $\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$.

Решение. Ги пренесуваме сите членови на левата страна $\frac{x}{x-2}+\frac{5}{x+2}-\frac{8}{x^2-4}=0$, а по изршувањето на потребните трансформации и скратување, левата страна ја доведуваме во каноничен вид:

$$\frac{x(x+2)+5(x-2)-8}{(x-2)(x+2)}=0,\ \frac{x^2+7x-18}{(x-2)(x+2)}=0,\ \frac{(x-2)(x+9)}{(x-2)(x+2)}=0 \text{ односно } \frac{x+9}{x+2}=0.$$

Последнава равенка има единствено решение x = –9, а тоа е решение и на дадената равенка, во што лесно се уверуваме со проверка.

Пример 2. Да се реши $\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0$. (5)

Решение. Дадената равенка има дефиниционо област D = $\mathbb{R}\setminus\{0,1,2,3,4,5\}$. Да ги групираме и собереме дропките I и VI, II и V, III и IV:

$$\frac{3(2x-5)}{x(x-5)}+\frac{2x-5}{(x-1)(x-4)}+\frac{4(2x-5)}{(x-2)(x-3)}=0, \text{ или}$$

$$(2x-5)\left(\frac{3}{x^2-5x}+\frac{1}{x^2-5x+4}+\frac{4}{x^2-5x+6}\right)=0$$

Ова е еквивалентна на вкупност од равенките:

$$\frac{3}{x^2-5x}+\frac{1}{x^2-5x+4}+\frac{4}{x^2-5x+6}=0, \quad 2x-5=0 \tag{6}$$

Од 2x–5 = 0 имаме $x_1 = \frac{5}{2}$. А за решавање на втората равенка, ќе воведеме помошна променлива $x^2 - 5x = y$. (7)

Тогаш таа го добива видот $\frac{3}{y} + \frac{1}{y+4} + \frac{4}{y+6} = 0$ или $\frac{2y^2 + 13y + 18}{y(y+4)(y+6)} = 0$ од каде $2y^2 + 13y + 18 = 0$, која кога ќе ја решиме, добиваме $y_1 = -2$, $y_2 = -\frac{9}{2}$.

Значи, втората од равенките (6), согласно смената (7), е еквивалентна на вкупноста од две квадратни равенки:

$\begin{bmatrix} x^2 - 5x + 2 = 0 \\ 2x^2 - 10x + 9 = 0 \end{bmatrix}$. Од нив наоѓаме $x_{2,3} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$, $x_{4,5} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$.

Гледаме, ниту еден од најдените пет корени не е еднаков на: 0,1,2,3,4,5; затоа сите тие ѝ припаѓаат на дефиниционата област на дадената равенка, што значи дека сите се нејзини корени.

Пример 3. Да се реши равенката $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$.

Решение. Допуштените вредности на параметрите a и c ги определуваме од условите $a \neq 0$, $c \neq 0$. При даден допуштен систем на вредности на параметрите, дефиниционата област на равенката ја добиваме од условите: $x \neq a$, $x \neq c$.

Со пренесување на сите членови на левата страна, потоа со сведување на заеднички именител и изедначување на броителот на нула, ја добиваме равенката:

$$(a+c)\,x^2 - (a^2 + 4ac + c^2)\,x + 2ac\,(a + c) = 0, \quad (8)$$

чија дискриминанта е $D = (a^2 + c^2 + 4ac)^2 - 8ac\,(a + c)^2 = (a^2 + c^2)^2 + 8ac\,(a^2 + c^2) + 16a^2c^2 - 8ac(a^2 + c^2 + 2ac) = (a^2 + c^2)^2 + 8ac(a^2 + c^2 + 2ac - a^2 - c^2 - 2ac) = (a^2 + c^2)^2 > 0$.

При $a \neq 0$, $c \neq 0$ и $a+c \neq 0$ квадратната равенка (8) има корени $x_1 = a + c$, $x_2 = \frac{2ac}{a+c}$. Овие корени треба да го задоволуваат условот $x_1, x_2 \neq a$, $x_1, x_2 \neq c$, односно $a + c \neq a$, $a+c \neq c$, $\frac{2ac}{a+c} \neq a$, $\frac{2ac}{a+c} \neq c$, кои се еквивалентни соодветно со: $c \neq 0$, $a \neq 0$, $a \neq c$ и $a+c \neq 0$. Значи, при тие услови дадената равенка има корени: $x_1 = a+c$ и $x_2 = \frac{2ac}{a+c}$.

Случаите $a = c$ и $a + c = 0$ ќе ги разгледаме посебно:

а) Ако е $a+c = 0$, тогаш равенката (8) е линеарна и го има видот:
$-[(a+c)^2 + 2ac]\,x = 0$, односно $2a^2x = 0$. Оттука $x_1 = 0$.

б) Ако е $a=c$. Тогаш равенката (8) има корени $x_1 = 2a$, $x_2 = a$. Но бидејќи треба да е $x \neq a$, останува дека при $a = c$, дадената равенка има само еден корен $x_1 = 2a$.

Пример 4. Да се реши равенката $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{(a+b)^2}{ab}$.

Решение. Допуштените вредности на параметрите ги одредуваме од условот $ab \neq 0$, односно, од $a \neq 0$ и $b \neq 0$. При даден допуштен систем на вредности на a и b, дефиниционата област на равенката ја одредуваме од условите $x+a \neq 0$ и $x + b \neq 0$, односно, од $x \neq -a$, $x \neq -b$. Со пренесување на сите членови на левата страна, потоа со нивно сведување на заеднички именител, и изедначување на броителот на нула, ја добиваме равенката:

$$a^2b\,(x+b) + ab^2(x + a) - [x^2 + (a+b)x + ab](a+b)^2 = 0, \text{ или}$$

$$(a+b)^2x^2 + (a+b)(a^2+b^2+ab)x + ab(a^2+b^2) = 0, \qquad (9)$$

чија дискриминанта е $D = (a+b)^2(a^2+b^2+ab)^2 - 4ab(a^2+b^2)(a+b)^2 = (a+b)^2[(a^2+b^2+ab)^2 - 4ab(a^2+b^2)] = (a+b)^2[a^4+b^4+a^2b^2+2a^3b + 2ab^3 - 4a^3b - 4ab^3] = (a+b)^2[a^4+b^4+a^2b^2-2a^3b - 2ab^3] = (a+b)^2(a^2+b^2-ab)^2 > 0$.

При $ab \neq 0$ и $a+b \neq 0$ квадратната равенка (9) има корени

$$x_{1,2} = \frac{-(a+b)(a^2+b^2+ab) \pm (a+b)(a^2+b^2-ab)}{2(a+b)^2}, \text{ или } x_1 = -\frac{ab}{a+b},\ x_2 = -\frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

Овие корени ќе ѝ припаѓаат на дефиниционата област на дадената равенка, ако $x_{1,2} \neq -a$ и $x_{1,2} \neq b$. Да испитаме на што се еквивалентни условите

$$-\frac{ab}{a+b} \neq -a,\ -\frac{a^2+b^2}{a+b} \neq -a, \text{ односно } \frac{ab}{a+b} \neq a,\ \frac{a^2+b^2}{a+b} \neq a.$$

Првиот од нив $a \cdot \frac{b}{a+b} \neq a$ ќе биде исполнет, ако и само ако $\frac{b}{a+b} \neq 1$ или $b \neq a+b$, односно $a \neq 0$. Вториот услов при $a + b \neq 0$ е еквивалентен со $a^2+b^2-a(a+b) \neq 0$, или $b^2 - ab \neq 0$, односно $b(b-a) \neq 0$, од каде $b \neq 0$ и $b \neq a$.

Аналогно, заклучивме дека, условите $\frac{ab}{a+b} \neq b$ и $\frac{a^2+b^2}{a+b} \neq b$ ќе бидат исполнети: првиот - ако $b \neq 0$, а вториот - ако $a \neq 0$ и $a \neq b$. Според тоа, при $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $a \neq b$ дадената равенка има корени $x_1 = -\frac{ab}{a+b}$, $x_2 = -\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

Случаите: $a + b = 0$ и $a = b$ треба посебно да ги испитаме.

а) Ако $a+b = 0$. Тогаш равенката (9) го добива видот $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + ab(a^2+b^2) = 0$, која нема корени. Значи, при $ab \neq 0$ и $a + b = 0$ равенката нема корени.

б) Ако $a = b$. Тогаш дадената равенка станува $\frac{2a}{x+a} = \frac{4a^2}{a^2}$, или $\frac{a}{x+a} = 2$,

$\frac{a-2x-2a}{x+a} = 0$, од каде $x_1 = -\frac{a}{2}$.

Значи, при $a \neq 0$ и $a = b$ равенката има едно решение $x = -\frac{a}{2}$

Пример 5. Да се реши равенката

$$\frac{6x+2a+3b+c}{6x+2a-(3b+c)} = \frac{2x+6a+b+3c}{2x+6a-(b+3c)} \qquad (10)$$

Решение. Оваа равенка можеме да ја разгледуваме и како пропорција $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Од неа ќе ја формираме изведената пропорција $\frac{A+B}{A-B} = \frac{C+D}{C-D}$:

$$\frac{(6x+2a)+(3b+c)+(6x+2a)-(3b+c)}{(6x+2a)+(3b+c)-(6x+2a)-(3b+c)} = \frac{(2x+6a)+(b+3c)+(2x+6a)-(b+3c)}{(2x+6a)+(b+3c)-(2x+6a)-(b+3c)},$$

односно $\frac{2(6x+2a)}{2(3b+c)} = \frac{2(2x+6a)}{2(b+3c)}$, или $\frac{6x+2a}{3b+c} = \frac{2x+6a}{b+3c}$. (11)

Потоа добиената равенка (11) ја решаваме по x и добиваме

$(6x+2a)(b+3c) - (2x+6a)(3b+c) = 0$, или $16cx - 16ab = 0$, од каде $x = \frac{ab}{c}$.

Потребно е да забележиме дека, вредностите на променливата x одредени од равенката (11), што не ги задоволуваат условите $6x+2a-(3b+c)\neq 0$, $2x+6a-(b+3c)\neq 0$ од (10), можат да бидат и странични (придобиени) корени на дадената равенка (10).

Може да се провери дека најдениот корен $x = \frac{ab}{c}$ на равенката (11) е бараниот единствен корен и на дадената равенка.

ЗАДАЧИ

Да се решат равенките (1-11):

1. а) $1-\frac{x-3}{x^2+x-2}=\frac{2x}{x^2+x-2}$, б) $\frac{24}{x-7}+x+7=0$,

2. а) $\frac{x^2+3x-1}{x^2-x-2}=\frac{x-2}{x+1}+\frac{x+1}{x-2}$, б) $\frac{6}{x}+\frac{6}{x+5}=7$,

3. а) $\frac{3}{x^2+3x+2}-\frac{2}{x^2-2x-3}=\frac{1}{x^2-x-6}$, б) $\frac{30}{x-5}-\frac{30}{x}=1$

4. а) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+3}=x^2-5x+2$, б) $x^2+\left(\frac{4}{x}\right)^2=17$

5. $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{(x+2)(x+3)(x+4)}=0$

6. а) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-c}=1+\frac{1}{c}$, б) $x+\frac{1}{x}=\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$,

7. а) $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x-a}{x+a}=\frac{1}{a}$, б) $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$,

8. а) $\frac{a}{c-x}-\frac{c}{a-x}=\frac{a-c}{a+c}$, б) $\frac{a}{x-b}-\frac{b}{x-a}=2$

9*. а) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x+a+b}$ б) $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}+2=0$.

10*. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+a+b}=0$

11*. $\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1$

12. Да се докаже дека равенката $\frac{1}{x-p}+\frac{1}{x-q}=1$ има реални корени за кои било реални вредности на параметрите p и q.

Глава V

НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

§ 31. НЕРАВЕНСТВА И НЕРАВЕНКИ

Да преминеме сега на разгледување на нееднаквоста на полиномите од една променлива, односно, на неравенствата меѓу вредностите на полиномите што тие ги добиваат за едни исти вредности на променливата.

Неравенствата имаат смисла само во подредените бројни полиња, на пример во полето на рационалните или реалните броеви, во кои се дефинирани релациите: „е поголем од", „е помал од" и „е еднакво со". Во полето на комплексните броеви, бидејќи поимите помал и поголем не се дефинираат, неравенствата во него немаат смисла и не се разгледуваат.

31.1. ОПШТИ ПОИМИ ЗА НЕРАВЕНСТВАТА

1. Два броја (посебни или општи), или два израза (нумерички или алгебарски) сврзани со знакот "<" (помал од) или ">" (поголем од) велиме образуваат **неравенство**.

Примери на неравенства се следниве симболички записи:

$7>3$, $4\cdot 5<5^2$, $1<-5$, $a<b$, $x<x+1$, $2x-1>x+3$, итн.

Кај секое неравенство разликуваме лева и десна страна и знак на неравенство (< или >). За две неравенства со исти знак на неравенство (двете со знак <, или двете со знак >) велиме дека имаат **еднаква смисла** или дека се **еднакво насочени**, а за две неравенства со **спротивни знаци на неравенство** (едното со знак <, а другото со знак >, или обратно) велиме дека имаат **спротивна смисла** или дека се **спротивно насочени**.

Покрај горниве два знака на неравенство, понекогаш ги користиме и следниве два алтернативни знака на неравенство: " $\geq$ " (поголем или еднаков) и " $\leq$ " (помал или еднаков), кои исто така се спротивни еден на друг.

Ако двете страни на неравенството се броеви или бројни (нумерички) изрази, велиме дека тоа е **бројно** или **нумеричко неравенство**. Ако, пак, двете или барем една од страните на неравенството е некој израз што содржи променливи, тогаш тоа се

вика **функционално неравенство**. Бројните неравенства всушност се **искази**, а функционалните неравенства се **предикати (исказни функции)**. Тоа значи, секое бројно неравенство е или вистинит исказ, т.е. вистинито; или невистинит исказ - невистинито. На пример: $7 > 3$ и $4 \cdot 5 < 5^2$ се вистинити бројни неравенства, а $1 < -5$ е невистинито бројно неравенство. Секое, пак, функционално неравенство, кога во него променливите се заменат со кои било допуштени вредости за нив, тоа станува бројно неравенство, т.е. преминува во вистинит или невистинит исказ. На пример, функционалното неравенство $2x - 1 > x + 3$ за $x = 1$ преминува во невистинито бројно неравенство $1 > 4$, а за $x = 5$ тоа преминува во вистинито бројно неравенство $9 > 8$.

Во зависност од бројот на променливите во функционалното неравенство, тоа може да биде со една, две или повеќе променливи. Во неравенствата, променливите уште се викаат и **непознати**, но, термините променливи и аргументи сметаме дека се поадекватни.

На пример, функционалното неравенство

$$f(x) < g(x) \tag{1}$$

е со една променлива x, а неравенството

$$A(x,y,\ldots,v) < B(x,y,\ldots,v) \tag{2}$$

е неравенство со повеќе променливи $x, y, \ldots, v$.

Ако за некоја допуштена вредност на променливата x, $x = a$ неравенството (1) премине во вистинито бројно неравенство, т.е. вредноста на изразот f е помала од вредноста на изразот g:

$$f(a) < g(a),$$

велиме дека вредноста на променливата $x = a$ е **решение** на неравенството (1). Велиме дека $x = a$ го **задоволува** неравенството (1). Слично на тоа, ако за некој систем допуштени вредности на променливите: $x = a, y = b, \ldots, v = c$, односно за некоја подредена n-торка броеви $(a, b, \ldots, c)$ неравенството (2) премине во вистинито бројно неравенство

$A(a,b,\ldots,c) < B(a,b,\ldots,c)$, тогаш системот допуштени вредности, односно подредената n - торка броеви $(a,b,\ldots,c)$ се вика **решение на неравенството** (2) со променливи $x, y, \ldots, v$. Велиме дека подредената n-торка броеви $(a, b, \ldots, c)$ го **задоволува** неравенството (2).

Сите решенија на неравенството (1), односно (2) формираат некое множество M, кое се вика **множество решенија** на неравенството (1), односно (2). Множеството, пак, од сите допуштени вредности на променливата x во неравенството (1), односно множеството од сите системи на допуштени вредности на променливите $x, y, \ldots, v$ во неравенството (2), се вика **дефиниционa област** или **домен** на функционалното неравенство (1), односно (2) и се означува со D.

Дефиниционата област D на дадено функционално неравенство обично се задава со самото неравенство, но ако не е зададена, неа ја определуваме како пресек од дефиниционите области D_1 и D_2 на левата и десната страна на неравенството.

Процесот на одредување на множеството решенија M на дадено функционално неравенство се вика негово **решавање.**

Во зависност од односот на множеството решенија M на функционалното неравенство и неговата дефиниционa област D, сите функционални неравенства се делат на две класи. Во едната класа спаѓаат сите функционални неравенства кај кои множеството решенија M се совпаѓа со нивната дефиниционa област D, т.е. $M = D$, а во другата класа - сите функционални неравенства, кај кои е $M \neq D$, поточно $M \subset D$.

Кај првата класа неравенства барањето за нивно решавање станува беспредметно, ако се тврди дека тие се идентично задоволени на целата нивна дефиниционa област. Кај нив се поставува задача да се докаже тоа што се тврди. Кај втората класа функционални неравенства се поставува задача, пак, да се одредат сите вредности на променливата (или сите системи вредности на променливите, ако неравенството е со повеќе променливи) за кои тоа е задоволено во дефиниционата област. Со други зборови, тоа е задача за нивно решавање, односно одредување на нивното множество решенија.

Функционалните неравенства од првата класа се викаат **идентични неравенства**, или, само **неравенства**, а тие од втората класа се викаат **неравенки**. Суштинска разлика меѓу нив е што неравенствата се докажуваат, а неравенките се решаваат.

2. Теоријата на неравенките е многу слична со теоријата на равенките. Битна разлика меѓу нив е што равенките по правило (со мали исклучоци) имаат конечни множества решенија.

Меѓутоа, множествата решенија на неравенките со една променлива, како што ќе видиме, претставуваат еден или неколку делови од бројната оска. А кај неравенките со две, три и повеќе променливи нивните множества решенија формираат цели области (делови) на рамнината, во просторот итн.

Во математиката неравенките често се користат и како средство за задавање на бројните точкови множества. На пример:

а) Множеството на сите реални броеви x поголеми (или помали) од бројот a често го задаваме со неравенката $x > a$ (или $x < a$) и се вика **интервал** од a до ∞ (или од $-\infty$, до a) а симболички го запишуваме со симболот (a, ∞), или $(-\infty, a)$. Ако и граничниот број a е вклучен во тој интервал, тоа го задаваме со неравенката $x \geq a$ (или $x \leq a$) или со симболот $[a,\infty)$, или $(\infty,a]$.

б) Множеството од сите реални броеви x поголеми од a, но помали од b, $(a < b)$ го задаваме со двојната неравенка $a < x < b$, се вика **интервал** од a до b, а го запишуваме со симболот (a,b).

Ако и граничните броеви a и b се вклучени во тоа множество реалните броеви, тогаш тоа го задаваме со двојната неравенка $a \leq x \leq b$, се вика **сегмент** од множеството $\mathbb{R}$ на реалните броеви и симболички го запишуваме со $[a,b]$.

в) Множествата, пак, од сите реални броеви x, зададени со неравенките $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$ се викаат **полуинтервали** или **полусегменти** и се означуваат со симболите $[a,b)$ и $(a, b]$. Забележуваме, средната заграда означува дека соодветниот граничен број е вклучен во множеството, а малата заграда - дека тој број е исклучен.

31.2. ОСНОВНИ СВОЈСТВА НА НЕРАВЕНСТВАТА

Сега ќе се задржиме на некои основни својства на бројните неравенства. Тие главно се базираат на законите на монотоност на аритметичките операции.

1°. Од неравенството $a < b$ следува неравенството $b > a$, и обратно: од $b > a$ следува $a < b$. Значи, важи еквивалентноста:

$$a < b \Leftrightarrow b > a.$$

Ова својство може да се формулира и во вид на следново:

Правило. ***При замена на левата и десната страна на неравенството треба да се замени и знакот на неравенството во спротивен.***

2°. $a < b \Leftrightarrow b - a > 0$

3°. Од $a < b$ и $b < c$ следува $a < c$ (Транзитивност).

4°. Ако $a < b$, тогаш $a + m < b + m$ (Својство на монотоност на собирањето). Оттука го добиваме следново:

Правило. ***Кон двете странаи на неравенството може да се додаде (или одземе) исти број.***

5°. Ако $a < b$, тогаш $am < bm$ при $m > 0$, и $am > bm$ при $m < 0$ (Својство на монотоност на множењето).

Правило. ***При множењето на двете страни на неравенството со позитивен множител, знакот на неравенството не се менува; а при множење со негативен множител, знакот на неравенството се менува во спротивен.***

6°. Во специјален случај од претходното својство при $m = -1$, добиваме:

Ако $a < b$, тогаш $-a > -b$.

Правило. ***При промена на знакот на двете страни на неравенството, знакот на неравенството се менува во спротивен.***

7°. **Ако $a < b$ и $c < d$, тогаш $a + c < b + d$.**

Доказ. Од $a < b$ следува $a + c < b + c$, од $c < d$ следува $b + c < b + d$, а од $a + c < b + c$ и $b + c < b + d$ врз основа на транзитивноста (својство 3°) следува $a + c < b + d$, штд.

Правило. ***Кај две неравенства со еднаква смисла може да им се собираат соодветните страни.***

8°. Ако $a < b$ и $c > d$, тогаш важи $a - c < b - d$.

Доказ. Согласно својството 6° од $c > d$ следува $-c < -d$, а согласно со 7° со собирање на соодветните страни на двете неравенства добиваме $a - c < b - d$, штд.

Правило. Кај две неравенства со спротивна смисла може да им се одземаат соодветните страни.

9°. Ако $a < b$ и $c < d$, каде што a, b, c, d се позитивни броеви, тогаш $ac < bd$, а ако a, b, c, d се негативни броеви, тогаш важи $ac > bd$.

Доказ. Од $a < b$ и $c > 0$, следува $ac < bc$, од $c < d$ и $b > 0$ следува $bc < bd$, а од $ac < bc$ и $bc < bd$ согласно транзитивноста следува $ac < bd$.

Ако пак a, b, c и d се негативни броеви, тогаш од $a < b$ и $c < 0$ следува $ac > bc$, од $b < 0$ и $c < d$ следува $bc > bd$, а од $ac > bc$ и $bc > bd$ следува $ac > bd$, штд.

Правило. Кај две еднаквонасочени неравенства соодветните им страни може да се множат; при што: ако страните на неравенствата се позитивни, знакот на неравенството останува ист, а ако страните им се негативни, тогаш после множењето знакот на неравенството се менува во спротивен.

10°. Ако $a < b$, каде a и b се позитивни броеви, тогаш важи $a^n < b^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказ. Од $a < b$ со множење едноподруго со $a < b$ добиваме по ред:

$a^2 < b^2$, $a^3 < b^3$, ..., $a^n < b^n$.

Правило. ***Кај неравенство со позитивни страни, левата и десната страна може да се степенуваат со кој било природен број n, без да се промени неговата насока.***

11°. Ако $a < b$, каде a и b имаат ист знак, тогаш $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Доказ. Нека a и b имаат ист знак и нека $a < b$, тогаш $ab > 0$ и $b - a > 0$.

Оттука $\frac{b-a}{ab} > 0$ или $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$, односно $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, штд.

Правило. ***Кај неравнество, чии страни имаат ист знак, може да се земат реципрочни вредности на двете негови страни, но притоа треба да се промени и неговата насока во спротивна.***

12°. Ако $a < b$ и $c > d$, каде што a, b, c, d се позитивни броеви, тогаш важи неравенството $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Доказ. Од $c > d$, каде c и d се позитивни броеви, согласно претходното својство, следува $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$, чии страни се исто така позитивни; а од $a < b$ и $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$ согласно својството 9° со множење на соодветните им страни, имаме $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$, штд.

31.3. СИСТЕМ И ВКУПНОСТ НЕРАВЕНКИ

Во математиката постојат проблеми, чие решавање се сведува на групно разгледување и решавање на неколку неравенки од една променлива (а во општ случај тие може да се и од повеќе променливи).

За неравенките

$$\begin{cases} f_1(x) < g_1(x) \\ f_2(x) < g_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) < g_n(x) \end{cases} \qquad (3)$$

велиме дека образуваат **систем од *n* неравенки со една променлива** x, ако треба да се одредат сите вредности на променливата x, **за кои се задоволени сите неравенки во системот**.

Секоја вредност на променливата $x = x_0$, за која се задоволени сите неравенки во системот (3) се вика **решение** на тој систем. А да се реши даден систем неравенки со една променлива, значи, да се одреди множеството од сите негови решенија.

Ако бараното множество решенија на даден систем неравенки го означиме со M, а множествата решенија на секоја одделна неравенка во системот - со $M_1, M_2, ..., M_n$, тогаш ќе имаме дека:

$M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap ... \cap M_n$.

Според тоа, за да се реши даден систем неравенки со една променлива, треба прво да се реши секоја неравенка во системот, а потоа да се одреди **пресекот** од множествата на нивните решенија. Ако пресекот е празно множеството, тогаш велиме дека системот неравенки **нема решение**.

Очигледно е дека, ако барем една неравенка во системот (3) нема решение, тогаш и целиот систем исто така нема решение.

Системот од следниве две неравенки

$$f(x) < g(x), \qquad g(x) < h(x) \tag{4}$$

примено е да го запишуваме (продолжително во еден ред) како двојна неравенка:

$$f(x) < g(x) < h(x) \tag{5}$$

На пример, двојната неравенка $3 < x - 1 < 5$ е друг запис за системот неравенки:

$$\begin{cases} 3 < x - 1 \\ x - 1 < 5 \end{cases}$$

Покрај системи неравенки, ние ќе разгледуваме и **вкупност неравенки**.

Велиме дека неравенките:

$$\begin{cases} f_1(x) < g_1(x) \\ f_2(x) < g_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) < g_n(x) \end{cases} \tag{6}$$

образуваат **вкупност неравенки** (со една променлива), ако треба да се одредат сите вредности на променливата x, **за кои е задоволена барем една** од тие неравенки.

Очигледно е дека, множеството M на сите решенија на вкупноста (6) ќе биде **унијата од множествата решенија** на секоја одделна неравенка во вкупноста:

$M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup .... \cup M_n$

За да го разликуваме системот неравенки од вкупноста неравенки, системот неравенки (3) го означуваме со голема заграда, а вкупноста неравенки - со средна заграда (6).

Во некои случаи може да се јави потреба да разгледуваме и **вкупност од системи неравенки**, а исто така и **систем од вкупности неравенки**.

На пример, вкупноста од системите неравенки:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f_1(x) < g_1(x) \\ f_2(x) < g_2(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f_3(x) < g_3(x) \\ f_4(x) < g_4(x) \end{cases}\end{array}\right. \qquad (7)$$

означува дека прво треба да се решат системите неравенки во вкупноста, а потоа да се одреди унијата од тие две множества решенија.

Секој систем неравенки, а исто така и секоја вкупност неравенки си има своја дефиниционa област D, која е еднаква на пресекот од дефинициониte области на одделните неравенки што влегуваат во состав на системот, односно вкупноста неравенки. Да претпоставиме дека групното разгледување на неравенките во даден систем или вкупност го вршиме во заедничкиот дел од дефинициониte области на одделните неравенки, т.е. во дефиниоционата област на системот, односно вкупноста неравенки.

Според тоа, ако некој број x_0 ја задоволува која било од неравенките на вкупноста (6), на пример првата, но за тој број нема смисла некоја од останатите неравенки на вкупноста, што значи дека бројот x_0 не е од дефиниционата област на вкупноста, тогаш таквиот број x_0 не го сметаме за решение на вкупноста.

§ 32. ЕКВИВАЛЕНТНОСТ НА НЕРАВЕНКИТЕ И СИСТЕМИТЕ НЕРАВЕНКИ

Дадени се две неравенки од една иста променлива x:

$$f(x) < F(x) \qquad (1)$$

$$g(x) < G(x) \qquad (2)$$

За неравенката (2) велиме дека е **последица** на неравенката (1), ако таа е задоволена за секоја вредност на x, што ја задоволува неравенката (1). Со други зборови тоа значи, ако $x = x_0$ е решение на неравенката (1), тогаш $x = x_0$ е решение и на неравенката (2). Според тоа, оваа дефиниција за поимот последица можеме да ја формулираме и вака: **Ако секое решение на неравенката (1) е решение на неравенката (2), тогаш велиме неравенката (2) е последица на неравенката (1).**

Ако, пак, и секое решение на неравенката (2) е решение на неравенката (1), тогаш и неравенката (1) е последица на неравенката (2); а **за две неравенки од кои секоја е последица на другата, велиме дека се еквивалентни една на друга.**

Да ги означиме множествата решенија на неравенките (1) и (2) соодветно со M_1 и M_2. Тогаш од тоа што неравенката (2) е последица на неравенката (1), следува $M_1 \subseteq M_2$; а од тоа што неравенката (1) е последица на неравенката (2), следува $M_2 \subseteq M_1$; а од $M_1 \subseteq M_2$ и $M_2 \subseteq M_1$ следува дека $M_1 = M_2$.

Значи, две неравенки (1) и (2) велиме дека се еквивалентни, ако имаат еднакви множества решенија; односно ако секое решение на едната неравенка е решение и на другата, и обратно: секое решение на втората е решение и на првата неравенка.

Аналогно на тоа: два система (две вкупности) неравенки се викаат еквивалентни, ако тие имаат едно исто множество решенија. Во специјален случај и кои било две неравенки (два система неравенки, или две вкупности неравенки), кои се противречни, односно кои немаат решенија, се еквивалентни.

Нека е даден системот неравенки

$$\begin{cases} f_1(x) < g_1(x) \\ f_2(x) < g_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) < g_n(x) \end{cases} \tag{3}$$

За неравенката $f(x) < g(x)$ (4)

велиме дека е **последица** на системот неравенки (3), ако секое решение на системот неравенки (3) е решение и на неравенката (4).

Со други зборови, неравенката (4) велиме е последица на системот неравенки (3), ако пресекот од множествата решенија $M_1, M_2, ..., M_n$ пооделно на секоја неравенка во системот (3), односно, множеството решенија $M = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_n$ на системот (3), се содржи во (е подмножество од) множеството решенија N на неравенката (4), т.е. ако $M \subseteq N$.

Да забележиме: ако неравенката (4) е последица на системот неравенки (3), тогаш множеството решенија N на неравенката (4) може да биде и пошироко од колку е множеството решенија M на системот (3). Тоа, пак, значи, дека неравенката (4) може да има и т.н. **придобиени решенија**, што не се решенија на системот неравенки (3). Ако се одредени сите решенија на неравенката (4), тогаш за добивање на решенијата на системот неравенки (3), доволно е преку непосредна проверка на решенијата на неравенката (4) со замена во системот (3), да го утврдиме тоа, а потоа да се отфрлат сите придобиени решенија на неравенката (4), што не се решенија на системот неравенки (3). Меѓутоа, користењето на оваа можност: одредување на множеството решенија M на системот неравенки (3) преку множеството решенија N на неравенката (4) практично е неостварлива, бидејќи таа обично има бесконечно множество решенија N. Затоа, поволен би бил само случајот, ако множеството решенија N на неравенката (4) се совпадне со множеството решенија M на системот неравенки (3), т.е. кога тие се еквивалентни.

Да преминеме сега на прашањето: кои трансформации со неравенките и системите (вкупностите) неравенки доведуваат до последици од нив, а кои-до еквивалентни неравенки и системи (вкупности) неравенки.

Теорема [32.1.]. ***Ако на некое множество M се задоволени неравенките***

$$f(x) < F(x) \tag{5}$$

и

$$g(x) < G(x) \tag{6}$$

тогаш на множеството M е задоволена и неравенката

$$f(x) + g(x) < F(x) + G(x) \tag{7}$$

Доказ. Нека a е кој било број од множеството M. Тогаш вистинити се следниве бројни неравенства

$f(a) < F(a)$ и $g(a) < G(a)$.

Согласно својството 7° во 31.2 ќе важи и неравенството $f(a) + g(a) < F(a) + G(a)$.

Тоа покажува дека бројот $a \in$ M ја задоволува и неравенката (7). Значи, секое решение на неравенките (5) и (6) е решение и на неравенката (7), па според тоа, неравенката (7) е последица на неравенките (5) и (6).

Теорема [32.2]. ***Ако на некое множество M се задоволени неравенките***

$$0 < f(x) < F(x)$$

и

$$0 < g(x) < G(x)$$

тогаш на множеството M е задоволена и неравенката

$$0 < f(x) \cdot g(x) < F(x) \cdot G(x)$$

Докажи, со повикување на својството 9° во 31.2, е анологен со доказот на претходната теорема.

Теорема [32.3]. ***Ако која било неравенка од даден систем неравенки, е последица на останатите неравенки од тој систем, тогаш таа неравенка може да се отфрли (изостави) од системот.***

Доказ. Нека, на пример, првата неравенка во системот:

$$\begin{cases} f_1(x) < g_1(x) \\ f_2(x) < g_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) < g_n(x) \end{cases} \tag{8}$$

е последица на преостанатите неравенки во системот (8).

Треба да докажеме дека системот (8) е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} f_2(x) < g_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) < g_n(x) \end{cases} \tag{9}$$

Секое решение на системот (9) е решение и на системот (8), бидејќи неравенката $f_1(x) < g_1(x)$, како последица на неравенките од системот (9), е задоволена за кое било решение на системот (9). Обратно, секое решение на системот (8) е решение на системот (9), бидејќи секое решение на системот (8) е решение на општиот дел (пресекот) од сите неравенки во системот (9), штд.

Системот од n неравенки (*) да го претставиме како систем од два система (10) и (11) формирани од неговите n неравенки:

$$\begin{cases} \begin{cases} f_1(x) < g_1(x) \\ f_2(x) < g_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_k(x) < g_k(x) \end{cases} & (10) \\ (*) \\ \begin{cases} f_{k+1}(x) < g_{k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) < g_n(x) \end{cases} & (11) \end{cases}$$

Теорема [32.4] . ***Ако системот неравенки***

$$\begin{cases} h_1(x) < l_1(x) \\ h_2(x) < l_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_s(x) < l_s(x) \end{cases} \qquad (12)$$

е еквивалентан со системот (10), тогаш системот неравенки:

$$\begin{cases} \begin{cases} h_1(x) < l_1(x) \\ h_2(x) < l_2(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ h_s(x) < l_s(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f_{k+1}(x) < g_{k+1}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x) < g_n(x) \end{cases} \end{cases} \qquad (**)$$

е еквивалентен со системот (*).

Доказ. Множеството решенија M на системот (*) е еднакво на пресекот од множествата решенија M_k и M_{n-k} на системите (10) и (11). Од еквивалентноста на системите неравенки (10) и (12) следува дека тие имаат едно исто множество решенија M_k. Со замена на системот (10) со системот (12) двете множества M_k и M_{n-k} останууваат исти, па затоа не се менува и нивниот пресек. Според тоа, системите неравенки (*) и (**) бидејќи имаат едно исто множество $M = M_k \cap M_{n-k}$ решенија, тие се еквивалентни, штд.

Како последица од оваа теорема, важи:

Секоја неравенка во даден систем неравенки може да се замени со друга еквивалентна на неа неравенка.

Теорема [32.5]. ***Неравенките***

$$f(x) < g(x) \qquad (13)$$

и $$f(x) + \varphi(x) < g(x) + \varphi(x) \qquad (14)$$

се еквивалентни, ако изразот $\varphi(x)$ има смисла (е дефиниран) за секоја вредност на x од дефиниционата област D на неравенката (13).

Доказ: Нека $x = a$, ($a \in D$) е решение на неравенката (13) .

Тогаш важи бројното неравенство $f(a) < g(a)$, (15)

а $\varphi(a)$ е некој број, бидејќи изразот $\varphi(x)$ е дефиниран за $x=a \in D$. Во тој случај согласно својството 4° во 31.2 ќе важи и бројното неравенство

$$f(a) + \varphi(a) < g(a) + \varphi(a), \tag{16}$$

кое пак покажува дека $x = a$ е решение на неравенката (14).

Нека сега $x = a$ е решение на неравенката (14), т.е. нека важи бројното неравенство (16). Ако кон двете страни на (16) го додадеме бројот $-\varphi(a)$, ќе го добиеме неравенството (15). Тоа, пак, покажува дека $x = a$ е решение и на неравенката (13). Според тоа, секое решение на неравенката (13) е решение и на неравенката (14), т.е. неравенката (14) е последица на неравенката (13). Обратно, неравенката (13) е последица, пак, на неравенката (14), бидејќи и секое решение на (14) е решение на (13). Значи, неравенките (13) и (14) се еквивалентни, штд.

Од Т [32.5] следува следново:

Правило. ***Секој член - собирок може да се пренесе од една на друга страна на неравенката со спротивен знак, т.е. неравенките***

$f(x) < g(x) + \varphi(x)$ ***и*** $f(x) - \varphi(x) < g(x)$ ***се еквивалентни.***

Од ова правило - последица на Т[32.5] следува:

Секоја неравенка $f(x) < F(x)$ (17)

е еквивалентна се неравенката од видот

$F(x) - f(x) > 0$ (18)

Еквивалентноста на неравенките (17) и (18) се базира и на својството 2° во 31.2.

На својството 1° во 31.2 се заснова, пак, тврдењето:

Неравенката $f(x) < F(x)$ (17)

е еквивалентна со неравенката $F(x) > f(x)$ (19)

Теорема [32.6]. ***Неравенките*** $f(x) < F(x)$ (17)

и $-f(x) > -F(x)$ (20)

се еквивалентни.

Всушност, неравенката (20) се добива од (17) со множење на двете страни на (17) со –1 и промена на знакот на неравенството во спротивен, што се заснова на својството 6° во 31.2.

Теорема [32.7]. ***Неравенката*** $0 < f(x) < F(x)$ (21)

е еквивалентна со неравенката $\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{F(x)}$ (22)

што се заснова на својството 11° во 31.2.

Теорема [32.8]. ***Ако изразот*** $\varphi(x)$ ***е дефиниран и добива позитивни вредности во дефиниционата област*** D ***на неравенката*** $f(x) < F(x)$, (23)

тогаш таа е еквивалентна со неравенката

$f(x) \cdot \varphi(x) < F(x) \cdot \varphi(x)$ (24)

Ако, пак, изразот φ (x) е дефиниран и добива негативни вредности во дефиниционата област D, тогаш неравенките $f(x) < F(x)$ *и* $f(x) \cdot \varphi(x) > F(x) \cdot \varphi(x)$ **се еквивалентни.**

Доказ. Ако $x = a$ е решение на неравенката (23), тогаш ќе важи бројното неравенство

$$f(a) < F(a). \tag{25}$$

Да ги помножиме двете страни на тоа неравенство со бројот $\varphi(a)$. Бидејќи по услов е $\varphi(a) > 0$, затоа знакот на неравенството не се менува, па добиваме

$$F(a) \cdot \varphi(a) < F(a) \cdot \varphi(a). \tag{26}$$

Тоа покажува дека $x = a$ е решение и на неравенката (24).

Оттука следува дека неравенката (24) е последица на неравенката (23). Нека пак, $x = a$ е решение на неравенката (24), т.е. нека важи бројното неравенство (26).

Множејќи ги двете страни на тоа неравенство со бројот $\frac{1}{\varphi(a)}$ (по услов позитивен), ќе го добиеме бројното неравенство (25). Тоа, пак, покажува дека бројот $x = a$ е решение и на неравенката (23). Значи, неравенката (23) е последица на неравенката (24).

Според тоа, неравенките (23) и (24) се еквивалентни, штд.

Точно така се докажува и вториот дел од теоремата [32.8] кога изразот $\varphi(x)$, со кој ги множиме двете страни на неравенката (23), добива негативни вредности во дефиционата област D на неравенката (23).

Во општ случај, ако дадена неравенка $f(x) < F(x)$ со дефиниционa област D треба двете нејзини страни да ги помножиме со изразот $\varphi(x)$ дефиниран за сите $x \in D$; тогаш дефиниционата област ја разложуваме на три подмножества: точки x за кои $\varphi(x) > 0$, точки x за кои $\varphi(x) < 0$ и точки x за кои $\varphi(x) = 0$, па согласно Т[32.8] дадената неравенка ќе биде еквивалентна на вкупноста од следниве два система неравенки:

$$\begin{cases} f(x) \cdot \varphi(x) < F(x) \cdot \varphi(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} f(x) \cdot \varphi(x) > F(x) \cdot \varphi(x) \\ \varphi(x) < 0 \end{cases}$$

За вредностите на x, за кои е $\varphi(x) = 0$, тогаш при множењето на дадената неравенка со $\varphi(x)$, таа преминува во равенка.

§ 33. РЕШАВАЊЕ НА ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Понатаму неравенките од прв, втор и повисок степен со една променлива ќе ги разгледуваме и решаваме во полето на реалните броеви. Тоа значи дека за коефициентите и променливата x допуштени вредности се кои било реални броеви.

33.1. ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Неравенките од прв степен (линеарни неравенки) со една променлива x, по пренесување на сите членови на левата страна и нивно сведување го добиваат видот:

$$ax + b < 0 \text{ или } ax + b > 0 \quad (1)$$

Ако $a = 0$, неравенките (1) го добиваат видот:

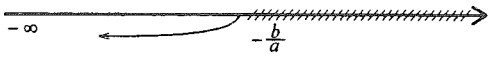
$$0 \cdot x + b < 0; \quad 0 \cdot x + b > 0 \quad (2)$$

Во случај кога $b > 0$, првата од овие неравенки не е задоволена ни за една вредност на x, а втората е задоволена за секоја реална вредност на променливата x. А во случај кога е $b < 0$, тогаш првата од неравенките (2) е задоволена за секој $x \in P$, а втората нераванека нема ниту едно решение.

Ако $a \neq 0$. Не губејќи од општоста може да сметаме дека кај неравенките (1) е $a > 0$. Ако е $a < 0$, тогаш множејќи ги двете страни на таа неравенка со -1 и променувајќи го знакот на неравенството во спротивен, едниот вид од неравенките (1) преминува во другиот вид.

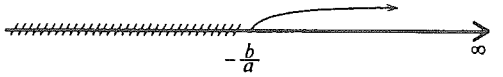
Со префрлување на слободниот член b од левата на десната страна и делејќи ги двете страни со a - позитивен број, добиваме дека:

а) Неравенката $ax + b < 0$ при $a > 0$ е еквивалентна на неравенката $x < -\frac{b}{a}$, чие решение е секој реален број x помал од $-\frac{b}{a}$. Значи, нејзино множество решенија е интервалот $(-\infty, -\frac{b}{a})$ (црт. 1).

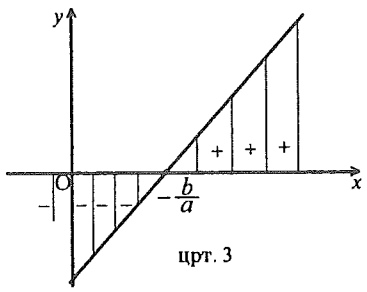


црт. 1

б) Неравенката $ax + b > 0$ при $a > 0$ е еквивалентна со неравенката $x > -\frac{b}{a}$, чие решение е секој реален број x поголем од $-\frac{b}{a}$. Значи, нејзиното множество решенија е интервалот $(-\frac{b}{a}, \infty)$.(црт. 2).



црт. 2



црт. 3

Добиените резултати ја имаат следнава проста геометриска интерпретација: Да ја разгледаме линеарната функција $y = ax + b$, $a > 0$. Знаеме, нејзиниот график е права, која со позитивната насока на x-оската образува остар агол и таа оска ја сече во точката $x = -\frac{b}{a}$ (црт. 3). Очигледно е дека, на лево од точката $-\frac{b}{a}$ функцијата $y = ax + b$, $a > 0$ е негативна, а на десно од таа точка функцијата е позитивна.

Пример 1. Да ја решиме неравенката $\frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} > 1 - \frac{2x-1}{4}$.

Решение. Ги множиме двете страни со 12, па добиваме:

$6(x+1) - 4x > 12 - 3(2x - 1)$ или $2x + 6 > 15 - 6x$. Оттука $8x > 9$, односно $x > \frac{9}{8}$.

Значи, таа има можество решенија: интервалот $(\frac{9}{8}, \infty)$.

Пример 2. Да ја решиме неравенката $x - \frac{a}{1-a} < 1 - \frac{x-1}{a-1}$.

Решение. За параметарот $a \neq 1$ постојат две можности $a < 1$ или $a > 1$.

1) Ако $a < 1$, множејќи ги двете страни на неравенката со позитивниот број $1-a$, ја добиваме неравенката $x(1-a) - a < (1-a) + (x-1)$ или $x - ax - a < -a + x$, односно $-ax < 0$. Оттука следува: ако $a < 0$, тогаш $-a > 0$, па добиваме $x < 0$; ако, пак, $a > 0$, но $a < 1$, тогаш имаме $x > 0$.

Ако $a = 0$, тогаш дадената неравенка нема решенија.

2) Ако $a > 1$. Двете страни на неравенката ги множиме со негативниот број $1 - a$, па ја добиваме неравенката $x(1-a) - a > 1 - a + (x+1)$, $x - ax - a > 1 - a + x - 1$, или $-ax > 0$. Оттука, бидејќи по услов е $a > 1$, добиваме $x < 0$.

Според тоа, ако $a < 0$ или $a > 1$, тогаш е $x < 0$, т.е. неравенката има множество решенија: интервалот $(-\infty, 0)$, ако $0 < a < 1$, тогаш е $x > 0$, т.е. неравенката има множество решенија интервалот $(0, \infty)$; ако, пак, $a = 0$, тогаш неравенката нема решенија, т.е. множеството решенија е празно множество.

33.2. СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Да го разгледаме системот од n линеарни неравенки со една променлива:

$$\begin{cases} a_1(x)+b_1<0 \\ a_2(x)+b_2>0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n(x)+b_n>0 \end{cases} \qquad (3)$$

кој од знаците < или > фигурира во секоја од неравенките не е битно. Ќе претпоставиме дека сите коефициенти $a_i (i=1,\ldots,n)$ се различни од нула. Во таков случај множеството решенија на секоја од n-те неравенки е некој интервал од видот $(-\infty, -\frac{b}{a})$ или $(-\frac{b}{a}, \infty)$. А множеството решенија на системот (3) ќе биде пресекот од сите тие n интервали. Ако тој пресек е празно множество, велиме дека системот неравенки нема решенија, односно дека е противречен. Ако, пак, пресекот не е празно множество, тогаш тој ќе биде некој интервал на бројната оска и ќе го претставува бараното множество решенија на системот.

Решавајќи ја секоја неравенка во системот (3), истиот може да се замени со негов еквивалентен систем од прости неравенки. Во зависност од знаците на коефициентот a_i може да се добие систем од прости еднакво насочени неравенки.

$$\text{а)} \begin{cases} x<\alpha_1 \\ x<\alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x<\alpha_n \end{cases}, \quad \text{или} \quad \text{б)} \begin{cases} x>\beta_1 \\ x>\beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x>\beta_n \end{cases}$$

или пак систем од прости спротивно насочени неравенки

$$\text{в)} \begin{cases} x<\alpha_1 \\ x<\alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ x<\alpha_k \\ x>\beta_{n-k} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x>\beta_n \end{cases}$$

Да ги разгледаме тие три вида системи од прости неравенки.

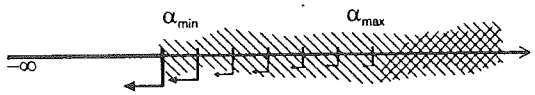
Кај системот (а) со α_{min} и α_{max} да ги означиме соодветно најмалиот и најголемиот број во множеството $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. Тогаш очигледно е дека сите неравенки во системот (а) ќе ги задоволува секој број x помал од α_{min}. Значи, интервалот $(-\infty, \alpha_{min})$ е заеднички дел (пресек) од сите интервали во кои се задоволени одделните неравенки од системот

(а) (црт. 4). Според тоа, неравенката $x < \alpha_{min}$ е еквивалентна на системот (а), а интервалот $(-\infty, \alpha_{min})$ го определува множеството решенија на системот (а), односно системот (3).

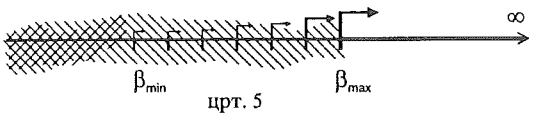
Ако множеството неравенки (а) беше вкупност, а не систем неравенки, покажи дека нејзино множество решенија ќе беше интервалот $(-\infty, \alpha_{max})$ (црт. 4).

Кај системот (б) со β_{min} и β_{max} да ги означиме соодветно најмалиот и најголемиот број во множеството броеви $\{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\}$. Тогаш, очигледно е дека сите неравенки во системот (б) ќе ги задоволува секој број x поголем од β_{max}. Значи, интервалот (β_{max}, ∞) е заеднички дел од сите интервали во кои се задоволени одделните неравенки од системот (б) (црт. 5). Според тоа, неравенката $x > \beta_{max}$ е еквивалентна на системот (б), а интервалот (β_{max}, ∞) е множеството решенија на системот (б), односно (3).

Ако множеството неравенки (б) беше вкупност (а не систем) неравенки, тогаш нејзино множество решенија ќе беше интервалот (β_{min}, ∞) (црт. 5).



црт. 4



црт. 5

Системот (в) го сочинуваат k истонасочени неравенки со знак $<$ и $n - k$ пак истонасочени неравенки но со знакот $>$. Ако со α_{min} и β_{max} ги означиме соодветно најмалиот број во множеството броеви $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k\}$ и најголемиот број во множеството броеви $\{\beta_{n-k}, ..., \beta_n\}$, тогаш, со замена на првите k неравенки со еквивалентната на нив неравенка $x < \alpha_{min}$, а преостанатите $n - k$ неравенки - со еквивалентната на нив неравенка $x > \beta_{max}$, го добиваме системот неравенки

$$\begin{cases} x < \alpha_{min} \\ x > \beta_{max} \end{cases} \qquad (*)$$

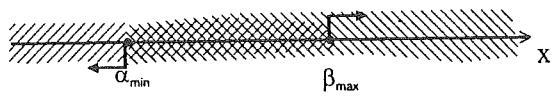
кој е еквивалентен со системот (в), односно со системот (3).

Во зависност од соодносот на броевите α_{min} и β_{max} за системот неравенки (*) постојат следниве три можности:

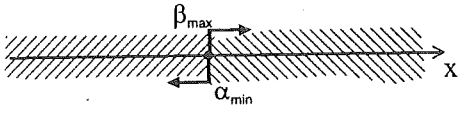
а) Ако $\alpha_{min} < \beta_{max}$ тогаш, системот (*) нема решенија, бидејќи не постои ниту еден број помал од α_{min}, но поголем од β_{max}. Во тој случај интервалите $(-\infty, \alpha_{min})$ и (β_{max}, ∞) немаат заеднички точки (црт. 6).

б) Ако $\alpha_{min} = \beta_{max}$, и тогаш, системот (*) нема решенија (црт. 7).

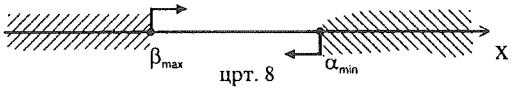
в) Ако $\alpha_{min} > \beta_{max}$, тогаш, двете неравенки на системот (*) ги задоволува секој број што се наоѓа меѓу β_{max} и α_{min}, т.е. $\beta_{max} < x < \alpha_{min}$. Интервалот $(\beta_{max}, \alpha_{min})$ е пресек (заеднички дел) од интервалите $(-\infty, \alpha_{min})$ и (β_{max}, ∞) (црт. 8).



црт. 6



црт. 7



црт. 8

Пример 3. Да го решиме системот неравенки

$$\begin{cases} 8x-5>\dfrac{15x-8}{2} \\ 5x-3<2(2x-3) \\ 3x+1<2(x-\dfrac{5}{2}) \\ 3x+12>2x+5 \end{cases} \qquad (4)$$

Решение. По ослободување од именителите и заградите и пренесување на членовите со променлива на левата страна, а без променлива на десната страна, системот (4) го добива видот:

$$\begin{cases} x>2 \\ x<-3 \\ x<-6 \\ x>-7 \end{cases}$$

Тој е еквивалентен на системот од две неравенки спротивно насочени:

$$\begin{cases} x>2 \\ x<-6 \end{cases}$$

Овој систем, пак, нема решенија, бидејќи не постои реален број што е поголем од 2, но и помал од –6.

Според тоа, даденият систем линеарни неравенки нема решенија.

Пример 4. Да се реши вкупноста од системите неравенки:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7x-6<3x+2 \\ x+4>4x+1 \\ 2x-1<x+7 \end{cases} \\ \begin{cases} 3x+1>10 \\ 5x+2>2x-7 \\ 6x+2>-2x+10 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (5)$$

Решение. Првиот систем неравенки е еквивалентен на системот $\begin{cases} x<2 \\ x<1 \\ x<8 \end{cases}$, односно на неравенката $x<1$.

Значи, тој има множество решенија, а тоа е интервалот $M_1=(-\infty, 1)$.

Вториот систем неравенки е еквивалентен на системот прости неравенки

$\begin{cases} x>3 \\ x>-3 \\ x>1 \end{cases}$, односно на неравенката $x>3$.

Значи, тој има множество решенија а тоа е интервалот $M_2 = (3, \infty)$.

Множеството решенија на вкупноста (5) е еднакво на унијата од интервалите $M_1 = (-\infty, 1)$ и $M_2 = (3, \infty)$, т.е. $M = M_1 \cup M_2 = (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$.

Пример 5. Да ја решиме двојната неравенка $1 < 3x - 5 < 4$.

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со системот неравенки $\begin{cases} 1 < 3x - 5 \\ 3x - 5 < 4 \end{cases}$, но таа може поедноставно да се реши и вака:

Кон трите страни на неравенката го додаваме бројот 5, па ја добиваме неравенката $6 < 3x < 9$, потоа трите страни ги делиме со бројот 3 и ја добиваме простата двојна неравенка $2 < x < 3$. Значи, дадената двојна неравенка има множество решенија а тоа е интервалот $M = (2, 3)$.

ЗАДАЧИ

Реши ги линеарните неравенки:

1. а) $5x - 7 > x + 17$, б) $\frac{3x}{5} - 2 > \frac{x}{2} + 12$,

2. а) $x - (2 - x) < 3x + 7$, б) $(x - 3)^2 < x(x + 1)$,

3. а) $\frac{x-5}{2} - 3 > \frac{3x-2}{6}$, б) $\frac{y}{2} - \frac{1-y}{4} > 5 - \frac{2+y}{3}$,

4. а) $x(x^2 - 1) + 3x^2 - 5 < (x + 1)^3 - \frac{5}{2} \cdot x$, б) $(x - 1)^2 + 7 > (x + 4)^2$

5*. а) $2(a - x) < ax + 5$, б) $1 + kx < 2k - 3x$,

6*. а) $\frac{a}{2} - \frac{2-x}{3} < a - 1$, б) $cx + c^2 < 2x - 6$

Реши ги системите линеарни неравенки:

7. а) $\begin{cases} 2x - 1 > x - 5 \\ x + 3 < 3x - 2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 8 - 2x < 3x - 5 \\ 1 - x > x + 2 \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} 3(x - 2) - 5 > 3 + x \\ 2(x - 1) - 3 < 2 \\ 4x > 3(x - 1) \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x - 3 > x + 1 \\ x < 2(x - 1) \\ \frac{x-1}{2} < 3x - 5 \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} 3x + 2 < 16 - x \\ x + 16 > 4x + 1 \\ 2x - 6 > 3 - x \end{cases}$, б) $\begin{cases} 5x - 3 < 4x - 1 \\ 2x + 7 > 3(x + 2) \\ x + 3 < 2(x + 2) \end{cases}$

10. Реши ја вкупноста од системи неравенки:

а) $\begin{cases} 3x+5<x+13 \\ 2x+3>8-3x \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+9<-x+30 \\ 5x-6>2x+3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x-1<2(x+1) \\ x+1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x-1>2(x+1) \\ x+1<0 \end{cases}$

11. Реши ги двојните неравенки:

а) $1<2x-3<3$ б) $x-1<3x+2<7$

в) $-x+3<x+1<2x-5$, г) $2x-3<3x+1<10$

§ 34. РЕШАВАЊЕ НА КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Секоја неравенка со една променлива, која со идентична трансформација може да се доведе во видот

$$ax^2+bx+c>0 \quad \text{или} \quad ax^2+bx+c<0, \quad a\neq 0 \tag{1}$$

се вика **квадратна неравенка со една променлива.**

Не губејќи од општост можеме да сметаме дека е $a>0$.

Решавањето на квадратните неравенки (1), како што ќе видиме, се сведува на решавање на квадратната равенка со реални коефициенти

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0 \tag{2}$$

и наоѓање интервалите на променливата x, во кои квадратниот трином

$$ax^2+bx+c \tag{3}$$

добива позитивни, односно негативни вредности.

Притоа, можни се различни случаи во зависност од знакот на дискриминантата $D=b^2-4ac$ на квадратната равенка (2), односно, квадратниот трином (3).

1). Нека $D>0$. Тогаш квадратната равенка (2) има два различни реални корена x_1, x_2, па квадратниот трином може да се претстави во видот

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2) \tag{4}$$

Ќе сметаме дека $x_1<x_2$. Тогаш очигледно е дека корените x_1 и x_2 бројната оска ја разделуваат на три интервали:

$(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2), (x_2, ∞).

Да го испитаме знакот на квадратниот трином (3) одделно во секој од тие три интервали:

а) Нека $x\in(-\infty, x_1)$. Ако $x<x_1$, тогаш ќе биде и $x<x_2$. Тоа значи дека множителите $(x-x_1)$ и $(x-x_2)$ се негативни. Меѓутоа, нивниот производ $(x-x_1)(x-x_2)$ е позитивен. Според тоа, при претпоставката да е $a>0$ добиваме дека при $x<x_1$, односно на интервалот $(-\infty, x_1)$ квадратниот трином (4) добива позитивни вредности.

б) Нека $x \in (x_1, x_2)$, т.е. $x_1 < x < x_2$. Во тој случај множителот $x - x_1$ станува позитивен, а множителот $x - x_2$ останува негативен. Значи, на интервалот (x_1, x_2) квадратниот трином (4) при $a > 0$ добива негативни вредности.

в) Нека $x \in (x_2, \infty)$. Ако $x > x_2$, тогаш и двата множителя $x - x_1$ и $x - x_2$ се позитивни, па и нивниот производ е исто така позитивен. Според тоа, при $a > 0$, на интервалот (x_2, ∞) квадратниот трином (4) добива позитивни вредности.

Оттука заклучуваме: Ако D > 0, односно, ако квадратниот трином (3) има две различни нули x_1 и x_2, $(x_1 < x_2)$, во тој случај квадратната неравенка $ax^2 + bx + c > 0$, $a > 0$ има множество решенија $M = (x_1, x_2)$.

2). Нека $D = b^2 - 4ac = 0$. Во тој случај квадратниот трином (3) има двократна нула $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, затоа тој може да се запише во видот

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2 \qquad (5)$$

Бидејќи $(x - x_1)^2$ за секоја вредност $x \neq x_1$ добива само позитивни вредности, а само за $x = x_1$ квадратниот трином добива вредност нула: оттука следува:

При $D = 0$ и $a > 0$ квадратната неравенка $ax^2 + bx + c > 0$ има множество решенија $M = (-\infty, x_1) \cup (x_1, \infty)$ (т.е. целата бројна оска освен точката $x_1 = -\frac{b}{2a}$), а неравенката $ax^2 + bx + c < 0$ нема решение, односно $M = \emptyset$.

3). Нека $D < 0$. Тогаш квадратниот трином, бидејќи е со реални коефициенти, има две конјугирано комплексни нули $x_1 = \alpha + \beta i$ и $x_2 = \alpha - \beta i$. Во тој случај квадратниот трином може да се запише во видот

$$ax^2 + bx + c = a\,[x - (\alpha + \beta i)] \cdot [x - (\alpha - \beta i)] = a\,[(x - \alpha) + \beta i] \cdot [(x - \alpha) - \beta i], \text{ или}$$

$$ax^2 + bx + c = a[(x - \alpha)^2 + \beta^2] \qquad (6)$$

Бидејќи изразот во средната заграда е секогаш позитивен, затоа и квадратниот трином при $a > 0$ добива само позитивни вредности. Според тоа, ако $D < 0$ и $a > 0$, тогаш квадратната неравенка $ax^2 + bx + c > 0$ има множество решенија: целата бројна оска $M = (-\infty, \infty)$, а неравенката $ax^2 + bx + c < 0$ нема ниту едно решение, т.е. $M = \emptyset$.

Често се среќаваме и со неравенки од видот:

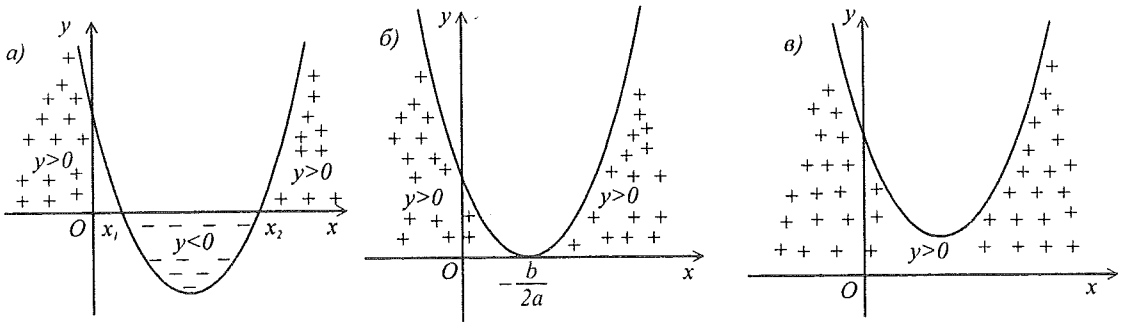
$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c \geq 0 \text{ и } ax^2 + bx + c \leq 0} \qquad (7)$$

Овие неравенки се разликуваат од квадратните неравенки (1) само во тоа што на множеството на нивните решенија му припаѓаат и нулите на квадратниот трином $ax^2 + bx + c$.

Добиените резултати од горниве испитувања ја допуштаат следнава проста геометриска интерпретација:

Да ја разгледаме функцијата $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$. Графикот на таа функција, знаеме, е парабола, чија оска е паралелна со Оу - оската и отворот на гранките свртен нагоре.

Ако $D > 0$, тогаш параболата ја сече Ох-оската во две точки x_1 и x_2 (црт. 9а). Гледаме, делот од параболата што се наоѓа меѓу точките x_1 и x_2 лежи под Ох-оската, а деловите што се наоѓаат на лево од x_1 и на десно од x_2 - лежат над Ох-оската (црт. 9а)



црт. 9

Ако $D = 0$, тогаш двете пресечни точки на параболата со Ох-оската се слиени во една точка $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ (црт. 9б), во која параболата ја допира Ох-оската. Целата парабола (на лево и на десно од допирната точка), освен таа точка, лежи над Ох-оската.

Ако $D < 0$, $a > 0$, тогаш параболата нема заеднички точки со Ох-оската и целата е расположена над неа (црт. 9в).

Пример 1. Да ги решиме квадратните неравенки:

а) $4x^2 - x + 24 > 0$, б) $-x^2 + 4x + 5 < 0$.

Решение. а) Дискриминантата е $D = 1 - 4 \cdot 4 \cdot 24 < 0$. Бидејќи $a = 4 > 0$ и $D < 0$, затоа квадратниот трином $4x^2 - x + 24$ добива позитивни вредности за секој $x \in \mathbb{R}$. Според тоа, множеството решенија на неравенката $4x^2 - x + 24 > 0$ е множеството $\mathbb{R}$ на сите реални броеви, б) Дадената неравенка ја множиме со -1 и ја добиваме нејзината еквивалентна неравенка $x^2 - 4x - 5 > 0$, во која е $a = 1 > 0$ и $D = 16 + 20 = 36 > 0$. Значи, квадратниот трином $x^2 - 4x - 5$ има две различни нули. Тоа се $x_1 = -1$ и $x_2 = 5$. Бидејќи $D > 0$ и $a > 0$, затоа тој добива позитивни вредности во интервалите $(-\infty, -1)$ и $(5, \infty)$. Според тоа, дадената неравенка има множество решенија $M = (-\infty, -1) \cup (5, \infty)$.

Пример 2. Да се реши квадратната неравенка $x^2 - (k + 1)x + k > 0$ во која k е параметар.

Решение. Ја одредуваме дискриминантата:

$D = (k + 1)^2 - 4k = k^2 + 2k + 1 - 4k = k^2 - 2k + 1 = (k - 1)^2 \geq 0$.

1). Ако $k = 1$, тогаш квадратниот трином $x^2 - (k + 1)x + k$ ќе има една двократна нула $x_1 = x_2 = \frac{k+1}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$, па според тоа дадената квадратна неравенка ќе има множество решенија $M = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. 2). Ако $k \neq 1$, тогаш квадратниот трином има две различни нули $x_{1,2} = \frac{k+1 \pm \sqrt{(k-1)^2}}{2} = \frac{k+1 \pm (k-1)}{2}$, $x_1 = 1$, $x_2 = k$.

Тука ќе разликуваме два случаја:

а) Ако k > 1, тогаш дадената неравенка ќе има множество решенија $M = (-\infty, 1) \cup (k, \infty)$,

б) Ако, пак, k < 1, тогаш таа ќе има множество решенија $M = (-\infty, k) \cup (1, \infty)$.

Пример 3. Да го решиме системот неравенки

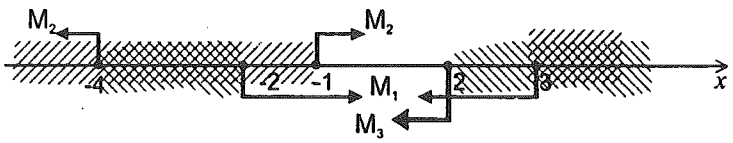
$$\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0 \\ x^2 + 5x + 4 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases}$$

Решение. Прво ги решаваме одделно секоја неравенка во системот. Кај првата неравенка, бидејќи $D = 1 + 24 > 0$, $a = 1 > 0$, затоа триномот $x^2 - x - 6$ има две различни реални нули: $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$ и тој добива негативни вредности само во интервалот $(-2, 3)$. Значи, првата неравенка во системот има множество решенија $M_1 = (-2, 3)$.

И кај втората неравенка имаме: $D = 25 - 16 = 9 > 0$, $a = 1 > 0$, $x_1 = -4$, $x_2 = -1$. Значи, квадратниот трином $x^2 + 5x + 4$ добива позитивни вредности за секоја вредност на x во интервалите $(-\infty, -4)$ и $(-1, \infty)$. Според тоа, втората неравенка во системот има множество решенија $M_2 = (-\infty, -4) \cup (-1, \infty)$.

Третата неравенка во системот е линеарна. Таа има множество решенија $M_3 = (-\infty, 2)$.

Останува да го одредиме пресекот на множествата на решенијата M_1, M_2, M_3 на трите неравенки во системот. За таа цел множествата M_1, M_2 и M_3 геометриски ги претставуваме на иста бројна оска (црт. 10), а деловите од бројната оска вон од тие множества ги прецртуваме. Потоа ќе заклучиме дека непрецртан дел од бројната оска е само интервалот $(-1, 2)$.



црт. 10

Според тоа, дадениот систем неравенки има множество решенија $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = (-2, 3) \cap [(-\infty, -4) \cup (-1, \infty)] \cap (-\infty, 2) = (-1, 2)$.

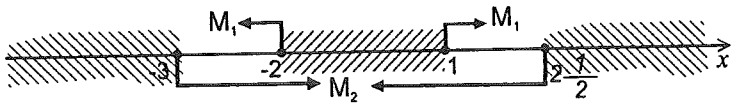
Пример 4. Да се реши системот неравенки

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 2x^2 + x - 15 < 0 \\ 3x^2 - 2x + 1 > 0 \end{cases}$$

Решение. Лесно одредуваме дека: првата неравенка има множество решенија $M_1 = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$, втората – $M_2 = (-3, 2\frac{1}{2})$, а третата $M_3 = (-\infty, \infty)$, т.е. таа е

задоволена за секоја реална вредност на променливата x. Очигледно е дека, штом една неравенка на системот е задоволена за секоја реална вредност на x, тогаш множеството решенија на системот ќе биде еднакво на пресекот од множествата решенија на преостанатите неравенки во тој систем. Во нашиот случај ќе биде:

$$M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 = M_1 \cap M_2 = [(-\infty, -2) \cup (1, \infty)] \cap (-3, 2\frac{1}{2}) = (-3, -2) \cup (1, 2\frac{1}{2}).$$ (црт. 11).



црт. 11

Пример 5. Да се реши системот неравенки

$$\begin{cases} x^2 + 1 < 0 \\ 2x^2 - 2 < 0 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$$

Решение. Гледаме, првата неравенка во системот нема решение (Зошто?), а со оглед на тоа што ги бараме заедничките решенија на сите неравенки во системот, може да се заклучи дека даденият систем исто така нема решенија, односно бараното множество решенија на системот е $\varnothing$.

Пример 6. Да се реши вкупноста неравенки

$$\begin{bmatrix} x^2 - x - 2 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{bmatrix}$$

Решение. Лесно одредуваме дека, првата неравенка има множество решенија $M_1 = (-1, 2)$, а втората – $M_2 = (1, 4)$. Во тој случај бараното множество решенија на вкупноста на тие две неравенки ќе биде: $M = M_1 \cup M_2 = (-1, 2) \cup (1, 4) = (-1, 4)$.

ЗАДАЧИ

1. За кои вредности на x, квадратниот трином добива поизитивни вредности:
   а) $3x^2 - 5x - 2$, б) $16x^2 - 24x + 9$, в) $-x^2 + x + 6$?
2. За кои вредности на параметарот k, квадратниот трином $x^2 + (k + 1)x + k + 1$ ќе добива позитивни вредности за секој x.

Реши ги квадратните неравенки и системи неравенки (3 – 11):

3. а) $x^2 - 5x + 6 < 0$, б) $2x^2 - x + 5 < 0$, в) $9x^2 - 3x + 1 > 0$
4. а) $x^2 - 2x > 0$, б) $x^2 + 2x - 3 \geq 0$, в) $(x - 1)(x - 3) < 15$
5. а) $4x^2 - 25 < 0$, б) $x^2 - 2x > 3(x - 1)$, в) $5x^2 - 7x + 2 < 0$

6. а) $\frac{2x^2-3}{2}-\frac{x^2+3}{4}>3$ б) $x>\frac{x^2}{2}-4x+4\frac{1}{2}$,

7. а) $\begin{cases} x^2+2x\pm 3<0 \\ x^2-2x+8<0 \end{cases}$, б) $\begin{cases} (8-x)(x-5)<0 \\ x^2-5x+6>0 \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} x^2-5x+6<0 \\ 3x^2-2<x+8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+x+10>0 \\ x^2+2x+6<0 \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} x^2-2x-35<0 \\ x^2-x-6>0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-x^2-3>0 \\ 2x^2-5x+3<0 \end{cases}$

10. а) $\begin{cases} 3x^2+7x+4>0 \\ 3x^2+x>0 \\ 2x-5<0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x^2-2x+3>0 \\ 9x^2-6x+1>0 \\ 3x^2+x-4<0 \end{cases}$

11. а) $\begin{cases} x^2+1>0 \\ x^2+x-6<0 \end{cases}$, б) $\begin{cases} 2x^2+x-15>0 \\ x^2+x+1<0 \end{cases}$

§ 35. РЕШАВАЊЕ НА НЕРАВЕНКИ ОД ПОВИСОК СТЕПЕН СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Да ги разгледаме неравенките, кои по пренесување на сите членови на една страна и нивно средување го добиваат видот:

$$P(x)>0 \quad \text{или} \quad P(x)<0, \tag{1}$$

каде што $P(x)$ е кој било полином со реални коефициенти.

Познато е дека полиномот $P(x)$ во полето на реалните броеви може да се разложи на множители од прв и втор степен (квадратни триноми кои немаат реални нули). Затоа неравенката

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n>0,\ a_0\neq 0 \tag{2}$$

може да се запише и во видот

$$a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_tx+q_t)^{s_t}>0, \tag{3}$$

каде $k_1, k_2, \ldots, k_r, s_1, s_2, \ldots, s_t$ се природни броеви, за кои $k_1+k_2+\ldots+k_r+2(s_1+s_2+\ldots+s_t)=n$.

Бидејќи квадратните триноми $x^2+p_jx+q_j$ ($j=1, 2, \ldots, t$) немаат реални нули, тие добиваат само позитивни вредности на целата бројна оска. Затоа нив можеме да ги отфрлиме од неравенката (3) со што ја добиваме еквивалентната неравенка со неа

$$a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}>0, \tag{4}$$

Да претпоставиме дека, реалните нули на полиномот (4) се подредени по големина да растат: $x_1 < x_2 < ... < x_r$. Тогаш тие ја разделуваат бројната оска на следниве r + 1 интервали:

$$(\infty, x_1), \quad (x_1, x_2), ..., (x_{r-1}, x_r), \quad (x_r, \infty) \tag{5}$$

Ќе забележиме дека, множителот $(x - x_i)$ во (4) при $x < x_i$, е негативен, а при $x > x_i$ тој е позитивен. Со други зборови, множителот го менува знакот само при преминот преку точката x_i. Оттука следува дека, над секој од интервалите (5) полиномот $P(x)$ не го менува својот знак. Затоа за одредување знакот на полиномот $P(x)$ одделно над секој од интервалите (5), доволно е да избереме по една „пробна точка" над секој и да го најдеме знакот на $P(x)$ во таа точка. Тој знак полиномот $P(x)$ ќе го има на целиот тој интервал.

При претпоставка да е $a_0 > 0$ (ако е $a_0 < 0$, тоа може да го постигнеме со множење на неравенката (4) со – 1), тогаш унијата од интервалите на кои полиномот $P(x)$ добива позитивни вредности ни го дава множеството решенија на неравенката $P(x) > 0$, а унијата од интервалите на кои полиномот $P(x)$ добива негативни вредности ни го дава множеството решенија на неравенката $P(x) < 0$.

Пример 1. Да ја решиме неравенката $x^6 - 20x^4 + 64x^2 > 0$.

Решение. Ја решаваме равенката $x^2(x^4 - 20x^2 + 64) = 0$ и добиваме дека таа има корени: $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = 4$, од кои коренот $x_3 = 0$ е двократен.

Добиените корени ја разделуваат бројната оска на следниве шест интервали: $(-\infty, -4)$, $(-4, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 4)$ и $(4, \infty)$.

На првиот интервал $(-\infty, -4)$ да избереме „пробна точка" -5, на вториот $(-4, -2)$ – точка -3, на $(-2, 0)$ – точка -1, на $(0, 2)$ – точка 1, на $(2, 4)$ – точка 3 и на интервалот $(4, \infty)$ – точка 5.

Потоа добиваме: $P(-5) = P(5) = 4725 > 0$, $P(-3) = P(3) = -315 < 0$, $P(-1) = P(1) = 45 > 0$. Оттука следува дека: множеството решенија M на дадената неравенка го сочинуваат интервалите $(-\infty, -4)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(4, \infty)$, т.е.

$$M = (-\infty, -4) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (4, \infty).$$

Избирањето на „пробни точки" и пресметувањето на вредностите на полиномот $P(x)$ во нив може да се избегне, а решавањето на неравенката (4) може да се упрости на следниов начин:

Во производот од коефициентот a_0 и линеарните множители $(x - x_i)^{k_i}$ (каде $i = 1, 2, ..., r$) сите линеарни множители, што се на непарен степенов показател $k_i = 2m + 1$ ги задржуваме со степенов показател 1, а сите линеарни множители што се на парен степен $k_i = 2p$ и коефициенот $a_0 > 0$ ги изоставиме од производот, односно од неравенката (4). При изоставувањето на секој линеарен множител $(x - x_i)^{2p}$ со парен степен задолжително го поставуваме условот $x \neq x_i$.

Пример 2. Да се реши неравенката од 15-ти степен:

$$(x+1)^2 (x + 4)^3 (x - 2)^4 (x - 3)^5 (x - 5) > 0 \tag{6}$$

Решение. Таа е еквивалентна со неравенката од трети степен

$$(x + 4) (x - 3) (x - 5) > 0, \text{ при услов } x \neq -1 \text{ и } x \neq 2 \tag{7}$$

Корените $x_1 = -4$, $x_2 = 3$ и $x_3 = 5$ ја разделуваат бројната оска на следниве четири интервали: $(-\infty, -4)$, $(-4, 3)$, $(3, 5)$, $(5, \infty)$.

Наместо да избираме „пробни точки“ во секој од тие интервали, знакот на производот $(x + 4)(x - 3)(x - 5)$ - лева страна на неравенката (7) го одредуваме на следниов начин:

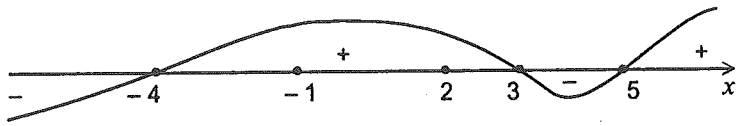
а) Ако променливата x зема вредности од последниот интервал $(5, \infty)$, т.е. ако $5 < x < \infty$, тогаш очигледно е дека, сите линеарни множители во производот добиваат позитивни вредности, што значи дека во тој интервал и производот е позитивен.

б) Ако променливата x сега зема вредности од претпоследниот интервал, т.е. ако $x \in (3, 5)$, тогаш само множителот $(x - 5)$ е негативен, а другите остануваат позитивни. Тоа значи дека во интервалот $(3, 5)$ производот е негативен.

в) Ако сега променливата x зема вредности во наредниот од десно на лево интервал $(-4, 3)$, т.е. ако $-4 < x < 3$, тогаш покрај множителот $(x - 5)$, негативен ќе биде и множителот $x - 3$, а останатите множители остануваат и понатаму позитивни. Тоа значи дека во интервалот $(-4, 3)$ производот е позитивен.

Оттука очигледно е дека, движејќи се така од десно на лево во секој нареден интервал, бројот на негативните множители во производот на левата страна на неравенката (7) ќе се зголемува уште за по еден. Одредувањето знакот на производот $(x + 4)(x - 3)(x - 5)$ во секој од четирите интервали шематски е прикажано на црт. 12. Според тоа, множеството решенија M на дадената неравенка (6), односно (7) е унијата од интервалите $(-4, 3)$ и $(5, \infty)$ без броевите $x = -1$ и $x = 2$. Тоа го запишуваме:

$M = (-4, 3) \cup (5, \infty) \setminus \{-1; 2\}$ или $M = (-4, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, 3) \cup (5, \infty)$



црт. 12

Забелешка. Ако во неравенката (6) наместо знакот $>$ стоеше знакот $\geq$, тогаш таа ќе беше еквивалентна со неравенката $(x + 4)(x - 3)(x - 5) \geq$ без условите $x \neq -1$ и $x \neq 2$ и ќе имаше множество решенија $M = (-4, 3) \cup (5, \infty)$.

ЗАДАЧИ

Реши ги неравенките

1. а) $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 < 0$, б) $x^4 - 3x^3 - x + 3 < 0$

2*. $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 > 0$,

3. $x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3 < 0$

4. $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 38x - 24 \geq 0$
5*. $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 > 0$
6. $(x + 3)(x + 1)(x - 2)(x - 4)(x - 8) > 0$
7. $(x + 2)^3 (x^2 + x + 1)(x - 1)^2 (x - 3)(x + 5)^4 > 0$

§ 36. ДРОБНО РАЦИОНАЛНИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Дробно рационална неравенка со една променлива се вика неравенката од видот

$$R_1(x) > R_2(x) \text{ или } R_1(x) < R_2(x) \quad (1)$$

во која левата и десната страна се рационални изрази од променливата x, од кои барем еден е дробен, т.е. во кој променливата x се содржи и во именител.

По пренесувањето на $R_2(x)$ на левата страна и доведувањето на разликата $R_1(x) - R_2(x)$ во каноничен вид, дробно рационалната неравенка (1) секогаш може да се доведе во видот

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \text{ или } \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad (2)$$

каде левата страна е нескратлива дропка (во полето на реалните броеви) во која $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми по однос на x.

Решавањето на неравенката (1) го сведуваме на решавање на нејзиниот каноничен вид (2). Меѓутоа, треба да имаме предвид дека, дефиниционата област на неравенката (2) во општ случај може да биде и поширока од таа на дадената неравенка (1). Затоа од множеството решенија на неравенката (2) треба да се изостават оние вредности на x (ако има такви) кои не ѝ припаѓаат на дефиниционата област на неравенката (1).

Очигледно е дека, потребен и доволен услов за задоволеноста на неравенката $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (односно $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$) е задоволувањето на еден од следниве два услова:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \left(\text{односно } \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \right)$$

Меѓутоа, токму тие услови претставуваат потребен и доволен услов за задоволеноста и на неравенката $f(x) \cdot g(x) > 0$ (односно $f(x) \cdot g(x) < 0$). Оттука следува дека важи следнава:

Теорема [36.1]. ***Неравенката*** $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (односно $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$) ***е еквивалентна со неравенката*** $f(x) \cdot g(x) > 0$ (односно $f(x) \cdot g(x) < 0$).

Забелешка. Неравенката $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ во општ случај не е еквивалентна со неравенката $f(x) \cdot g(x) \geq 0$. На пример, вредностите на x за кои важи $g(x) = 0$ се решенија на втората неравенка, но не се решенија на првата.

На таков начин, согласно T[36.1] решавањето на дробно-рационалните неравенки го сведуваме на решавање на соодветна цела рационална неравенка од повисок степен.

Пример 1. Да се реши неравенката

$$\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1} < -1$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $\frac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1} + 1 < 0$,

или $\frac{2x^2 - 7x + 5}{x^2 - 1} < 0$, односно на $(2x^2 - 7x + 5)(x^2 - 1) < 0$ (3)

Ако триномот $2x^2 - 7x + 5$ и биномот $x^2 - 1$ ги разложиме на линеарни множители, неравенката (3) го добива видот:

$$2(x-1)^2 (x - 2\tfrac{1}{2})(x+1) < 0 \quad (4)$$

Очигледно е дека при $x \neq 1$ множителот $(x-1)^2$ е позитивен. Ако двете страни на неравенката (4) ги поделиме со $2(x-1)^2$ ќе ја добиеме неравенката

$$(x - 2\tfrac{1}{2})(x+1) < 0 \quad (5)$$

која е еквивалентна на дадената при услов $x \neq 1$.

Неравенката (5) има множество решенија а тоа е интервалот $(-1, 2\frac{1}{2})$. Кога од него ќе го изоставиме бројот 1, добиваме дека неравенката (4) има множество решенија $M = (-1, 1) \cup (1, 2\frac{1}{2})$ или $M = (-1, 2\frac{1}{2}) \setminus \{1\}$. Тоа е бараното множество решенија и на дадената неравенка.

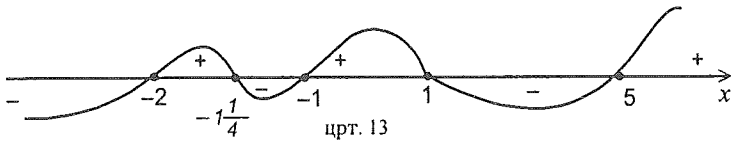
Пример 2. Да се реши неравенката $\frac{6}{x-1} - \frac{3}{x+1} > \frac{7}{x+2}$.

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна на секоја од неравенките:

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{x+1} - \frac{7}{x+2} > 0, \quad \frac{-4x^2 + 15x + 25}{(x-1)(x+1)(x+2)} > 0, \quad \frac{-4(x + \frac{5}{4})(x-5)}{(x-1)(x+1)(x+2)} > 0,$$

$$\frac{(x+\frac{5}{4})(x-5)}{(x-1)(x+1)(x+2)} < 0, \text{ односно на } (x+1\ \frac{1}{4}\ )(x-5)(x-1)(x+1)(x+2) < 0. \qquad (6)$$

Гледаме дека левата страна на неравенката (6) е производ од пет линеарни множители, чии нули се: -2, $-1\frac{1}{4}$, -1, 1 и 5. Тие бројната оска (црт. 13) ја разделуваат на шест интервали: $(-\infty, -2)$, $(-2, -1\frac{1}{4})$, $(-1\frac{1}{4}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 5)$, $(5, \infty)$.



црт. 13

Од цртежот 13 гледаме дека множеството решенија на неравенката (6) се состои од интервалите $(-\infty, -2)$, $(-1\frac{1}{4}, -1)$ и $(1, 5)$, т.е. тоа е еднакво на унијата од нив:

$$M = (-\infty, -2) \cup (-1\frac{1}{4}, -1) \cup (1, 5)$$

ЗАДАЧИ

Реши ги неравенките:

1. а) $\frac{2x-1}{x-2} < x+2$, б) $\frac{3x^2-5x+1}{x^2+4} < 1$

2. а) $\frac{x^2+x+1}{x^2-5x+6} > 0$, б) $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} \le 5$

3. а) $\frac{3}{x+1} + \frac{7}{x+2} < \frac{6}{x-1}$, б) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x+1} < 2$

4. а) $\frac{x}{x^2+7x+12} > \frac{x}{x^2+3x+2}$, б) $\frac{x+3}{x^2-5x+4} < 0$

5. а) $\frac{x^2+6x+8}{x^2-8x+15} < 0$, б) $-1 < \frac{x^2-2x-3}{x(3-x)+4} < 1$

§ 37. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ ШТО СОДРЖАТ АПСОЛУТНИ ВРЕДНОСТИ

Во алгебрата често се среќаваме со равенки и неравенки во кои променливата x се наоѓа под знакот на апсолутна вредност. Таквите равенки и неравенки ги решаваме согласно дефиницијата на апсолутната вредност на реалните броеви:

$$|x| \overset{def}{=} \begin{cases} x, \text{ ако } x > 0 \\ 0, \text{ ако } x = 0 \\ -x, \text{ ако } x < 0 \end{cases} \qquad (1)$$

При нивното решавање се повикуваме и на некои основни својства на апсолутната вредност на реалните броеви, како што се:

1°. $|x| \geq 0$ **за секој реален број** x

2°. $|x| = |-x|$

3°. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

4°. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, **при** $y \neq 0$

37.1. РЕШАВАЊЕ НА РАВЕНКИ ШТО СОДРЖАТ АСПОЛУТНИ ВРЕДНОСТИ

Ако d е даден позитивен реален број, тогаш равенката

$$|x| = d \qquad (2)$$

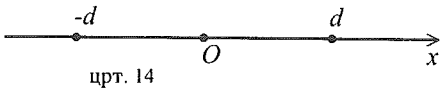
очигледно е задоволена само за броевите $x = d$, $x = -d$.

Според тоа, равенката $|x| = d$, $d > 0$ е еквивалентна со вкупноста равенки

$$\begin{cases} x = d \\ x = -d \end{cases}.$$

Меѓутоа, равенката $|x| = d$, ако $d < 0$, таа нема ниту едно решение.

Геометриски равенката (2) означува дека точката x на бројната оска е на растојание d од координатниот почеток О (црт. 14).



црт. 14

Решавањето на равенките, што содржат апсолутни вредности ќе го покажеме на следниве неколку примери:

Пример 1. Да ја решиме равенката $||2x-1|-3| = 2$

Решение. Прво ќе се ослободиме од надворешниот знак на апсолутна вредност, а потоа и од внатрешниот.

Дадената равенка е еквивалентна на вкупноста $\begin{cases} |2x-1|-3 = 2 \\ |2x-1|-3 = -2 \end{cases}$ односно

$\begin{cases} |2x-1| = 5 \\ |2x-1| = 1 \end{cases}$ а оваа е еквивалентна на вкупноста $\begin{cases} 2x-1=5 \\ 2x-1=-5 \\ 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x=3 \\ x=-2 \\ x=1 \\ x=0 \end{cases}$.

Според тоа, дадената равенка има множество решенија $M = \{-2, 0, 1, 3\}$.

Пример 2. Да се реши равенката $|x-2| = 4-x$.

Решение. Оваа равенка е еквивалентна на вкупноста равенки $\begin{cases} x-2=4-x \\ x-2=-(4-x) \end{cases}$, но при услов $4-x \geq 0$. Тоа значи дека дадената равенка е еквивалентна на мешаниот систем $\begin{cases} \begin{cases} x-2=4-x \\ x-2=x-4 \end{cases} \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$ односно $\begin{cases} \begin{cases} x=3 \\ 0x=-1 \end{cases} \\ x \leq 4 \end{cases}$, или $\begin{cases} x=3 \\ x \leq 4 \end{cases}$.

Оттука следува, дадената равенка има само едно решение $x = 3$.

Пример 3. Да се реши равенката $|x| - 2|x+1| + 3|x-2| = 0$

Решение. Под знакот на апсолутна вредност се наоѓаат три изрази: x, $x+1$ и $x-2$. Тие добиваат вредност нула соодветно за $x = 0$, $x = -1$, $x = 2$. Броевите -1, 0 и 2 ја разделуваат бројната оска на четири интервали: $(-\infty, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 2)$, $[2, \infty)$.

Дадената равенка ќе ја решиме по таканаречениот **метод на интервали.** Тој се состои во решавањето на равенката одделно во секој од тие четири интервали, почнувајќи од последниот.

1^0. Нека $x \in [2, \infty)$, т.е. нека $2 \leq x < \infty$. Тогаш сите три изрази под знаците на апсолутна вредност се позитивни, па дадената равенка ослободена од знаците на апсолутна вредност го добива видот $x - 2(x+1) + 3(x-2) = 0$. Од неа добиваме $x = 4$. Бидејќи $4 \in [2, \infty)$, следува дека $x = 4$ е решение на дадената равенка.

2^0. Нека $x \in [0, 2)$, т.е. $0 \leq x < 2$. Тогаш само изразот $x-2$ е негативен, а другите два остануваат позитивни, па дадената равенка ослободена од знаците на апсолутна вредност, ќе биде $x - 2(x+1) - 3(x-2) = 0$. Ја решаваме и добиваме $x = 1$. Значи, во интервалот $[0, 2)$ дадената равенка има решение $x = 1$.

3^0. Нека пак, $x \in [-1, 0)$, т.е. $-1 \leq x < 0$. Тогаш покрај изразот $x-2$, негативен станува и изразот x, а изразот $x+1$ останува и понатаму позитивен. Тогаш дадената равенка ослободена од знаците на апсолутна вредност го добива видот $-x - 2(x+1) - 3(x-2) = 0$. Од неа добиваме $x = \frac{2}{3}$. Бидејќи $\frac{2}{3} \notin [-1, 0)$, заклучуваме дека во интервалот $[-1, 0)$ дадената равенка нема решение.

4°. На крајот нека $x \in (-\infty, -1)$, т.е. $-\infty < x < -1$. Тогаш и трите изрази под знаците на апсолутна вредност се негативни, па ослободувајќи се од тие знаци, ја добиваме равенката $-x + 2(x+1) - 3(x-2) = 0$, од каде $x = 4$. Бидејќи $4 \notin (-\infty, -1)$, заклучуваме дека и во интервалот $(-\infty, -1)$, равенката нема решенија. Според тоа, дадената равенка има две решенија $x = 1$ и $x = 4$.

Пример 4. Да се реши равенката $|(x+2)(x-1)| - |(x+1)(x-2)| = a$.

Решение. Броевите $-2, -1, 1$ и 2 ја разделуваат бројната оска на интервалите: $(-\infty, -2)$, $[-2, -1)$, $[-1, 1)$, $[1, 2)$, $[2, \infty)$.

1°. Ако $x \geq 2$, тогаш сите изрази во заградите се позитивни, па дадената равенка без знаците на апсолутна вредност ќе биде $(x+2)(x-1) - (x+1)(x-2) = a$. Таа има решение $x = \frac{a}{2}$. Но, тоа ќе биде решение на дадената равенка, само ако е $\frac{a}{2} \geq 2$, односно ако $a \geq 4$.

2°. Ако $1 \leq x < 2$, тогаш само $x - 2 < 0$, а другите биноми се позитивни, па дадената равенка без знаците на апсолутна вредност ќе гласи: $(x+2)(x-1) + (x+1)(x-2) = a$. Таа има решение $x = \sqrt{2 + \frac{a}{2}}$, кое треба да го задоволува условот $1 \leq \sqrt{2 + \frac{a}{2}} < 2$. Овој услов, пак, е еквивалентен со условот $-2 \leq a < 4$. Значи, при услов $a \in [-2, 4)$ равенката има решение $x = \sqrt{2 + \frac{a}{2}}$.

3°. Ако $-1 \leq x < 1$, тогаш е $x - 1 < 0$, $x - 2 < 0$, а $x+1 > 0$, $x+2 > 0$; па дадената равенка ослободена од знаците на апсолутна вредност ќе гласи

$-(x+2)(x-2) + (x+1)(x-2) = a$. Таа има решение $x = -\frac{a}{2}$, кое треба да го задоволува условот $-1 \leq -\frac{a}{2} < 1$, или $-2 \leq -a < 2$, односно $\begin{cases} a \geq 2 \\ a \leq 2 \end{cases}$. Меѓутоа, таков реален број a, што ќе го задоволува тој услов не постои. Значи, во интервалот $[-1, 1)$ дадената равенка нема решение.

4°. Ако $-2 \leq x < -1$, тогаш само биномот $x+2$ е позитивен, а останатите три биноми се негативни. Дадената равенка без знаците на апсолутна вредност ќе гласи $-(x+2)(x-1) - (x+1)(x-2) = a$. Таа има решение $x = -\sqrt{2 - \frac{a}{2}}$, кое пак треба да го задоволува условот $-2 \leq -\sqrt{2 - \frac{a}{2}} < -1$. Овој услов е еквивалентен со $-2 < a \leq 4$.

Значи, при услов $a \in (-2, 4]$ равенката има решение $x = -\sqrt{2-\frac{a}{2}}$.

5⁰. На крајот ако $x < -2$, тогаш сите биноми во дадената равенка се негативни, па таа го добива видот: $(x+2)(x-1)-(x+1)(x-2)=a$. Таа има решение $x=\frac{a}{2}$, кое за да биде решение на дадената равенка треба да го задоволува условот $\frac{a}{2} < -2$, односно $a < -4$. Значи, при услов $a < -4$ равенката има решение $x=\frac{a}{2}$.

Според тоа, дадената равенка има решение $x=\frac{a}{2}$, ако $a < -4$ или $a \geq 4$, како и $x=\sqrt{2+\frac{a}{2}}$ и $x=\sqrt{2-\frac{a}{2}}$, ако $a \in [-2, 4)$.

37.2. РЕШАВАЊЕ НА НЕРАВЕНКИ ШТО СОДРЖАТ АПСОЛУТНИ ВРЕДНОСТИ

Да ги разгледаме следниве две прости неравенки што содржат апсолутни вредности $|x| < a$ и $|x| > a$, на кои често ќе се повикуваме при решавањето и на посложените неравенки.

Нека е дадена неравенката $|x| < a$, $\in$ R (3)

При $a < 0$, неравенката (3) е противречна, бидејќи на левата страна имаме ненегативен број ($|x| \geq 0$), а на десната страна - негативен број.

Ако a е позитивен реален број, за променливата x постојат две можности: $x < 0$ или $x \geq 0$.

При $x < 0$ е $|x| = -x$, па неравенката (3) ќе биде задоволена ако $-x < a$, односно ако $-a < x$.

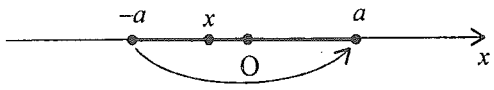
При $x \geq 0$ е $|x| = x$, па неравенката (3) ќе биде задоволена ако $x < a$. А од неравенките $-a < x$ и $x < a$, врз основа на транзитивноста следува дека важи двојната неравенка

$$-a < x < a \quad (4)$$

Според тоа, неравенката (3) при $a > 0$ е еквивалентна со двојната неравенка (4), т.е.

$$|x| < a, (a > 0) \Leftrightarrow -a < x < a \quad (5)$$

Бидејќи неравенката (4) го дефинира интервалот $(-a, a)$, тоа значи дека и со неравенката (3) при $a > 0$ е зададен интервалот $(-a, a)$ (црт. 15). Значи, геометриски неравенката (3) при $a > 0$ означува дека точката x на бројната оска е на растојание помало од a од координатниот почеток, односно дека таа е заклучена на интервалот $(-a, a)$.



црт. 15

Да ја разгледаме сега неравенката $|x| > a$ (6)

При $a < 0$ неравенката (6) е идентично задоволена.

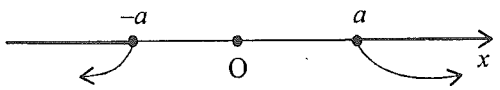
При $a = 0$ неравенката $|x| > 0$ е задоволена за секој реален број x различен од нула, т.е. таа има множество решенија $M = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

При $a > 0$, неравенката (6) е задоволена или за $x > a$, или за $-x > a$, односно за $x < -a$.

Според тоа, неравенката (6) при $a > 0$ е еквивалентна со вкупноста на две неравенки, т.е.

$$|x| > a, (a > 0) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x > a \\ x < -a \end{bmatrix}$$

Значи, геометриски неравенката (6) при $a > 0$ изразува дека точката x на бројната оска е на растојание поголемо од a од координатниот почеток О, односно дека точката x се наоѓа вон интервалот $(-a, a)$ (црт. 16).



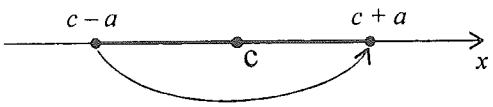
Црт. 16

Согласно еквивалентноста (5) добиваме дека неравенката

$$|x - c| < a, \ (a > 0) \quad (8)$$

е еквивалентна со двојната неравенка $-a < x - c < a$, односно со $c - a < x < c + a$.

Според тоа, со неравенката (8) е зададен (дефиниран) интервалот $(c - a, c + a)$ со должина $2a$ и центар во точката c (црт. 17).



црт. 17

Аналогно, со неравенката, пак $|x - c| > a, \ (a > 0)$ (9)

е зададена унијата од интервалите $(-\infty, c - a) \cup (c + a, \infty)$.

Пример 5. Да ја решиме неравенката $|x - 1| > |x - 5|$ (10)

Решение. Согласно еквивалентноста (7) дадената неравенка е еквивалентна

со вкупноста неравенки $\begin{bmatrix} x - 1 > |x - 5| \\ x - 1 < -|x - 5| \end{bmatrix}$, односно на $\begin{bmatrix} |x - 5| < x - 1 \\ |x - 5| < -(x - 1) \end{bmatrix}$ (11)

Првата неравенка во (11) е еквивалентна со системот $\begin{cases} x-1>0 \\ 1-x<x-5<x-1 \end{cases}$

односно $\begin{cases} x-1>0 \\ 1-x<x-5 \\ x-5<x-1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>1 \\ x>3 \\ 0x<4 \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$

Втората неравенка од вкупноста (11) е еквивалентна со системот $\begin{cases} 1-x>0 \\ x-1<x-5<1-x \end{cases}$

односно $\begin{cases} 1-x>0 \\ x-1<x-5 \\ x-5<1-x \end{cases}$ или $\begin{cases} x<1 \\ 0x<-4 \\ x<3 \end{cases}$.

Овој систем нема решенија, бидејќи неравенката $0 \cdot x < -4$ нема решение. Според тоа, вкупноста неравенки (11), односно дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $x > 3$, т.е. таа има множество решенија а тоа е интервалот $M = (3, \infty)$.

Неравенката (10) ќе ја решиме уште и со методот на интервали.

Гледаме дека изразите што се под знакот на апсолутна вредност добиваат вредност нула за $x = 1$ и $x = 5$. Тие броеви ја разделуваат бројната оска на три интервали: $(-\infty, 1)$, $[1, 5)$ и $[5, \infty)$.

1^0. Нека $x \in [5, \infty)$. Тогаш $|x-1| = x-1, |x-5| = x-5$, па дадената неравенка е еквивалентна со системот $\begin{cases} x-1>x-5 \\ x \geq 5 \end{cases}$ или $\begin{cases} 0 \cdot x > -4 \\ x \geq 5 \end{cases}$. Овој систем има множество решенија $M_1 = [5, \infty)$.

2^0. Нека $x \in [1, 5)$. Тогаш $|x-1| = x-1, |x-5| = -(x-5)$, а дадената неравенка е еквивалентна со системот неравенки $\begin{cases} x-1>5-x \\ 1 \leq x < 5 \end{cases}$ односно на $\begin{cases} x>3 \\ x \geq 1 \\ x<5 \end{cases}$.

Овој систем неравенки има множество решенија $M_2 = (3, 5)$.

3^0. Нека $x \in (-\infty, 1)$. Тогаш $|x-1| = 1-x, |x-5| = 5-x$, па дадената неравенка е еквивалентна со системот неравенки $\begin{cases} 1-x>5-x \\ x<1 \end{cases}$ односно $\begin{cases} 0 \cdot x > 4 \\ x<1 \end{cases}$. Овој систем нема решение, т.е. $M_3 = \varnothing$.

На крајот, бараното множество решенија на дадената неравенка ќе биде $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3 = [5, \infty) \cup (3, 5) \cup \varnothing = (3, \infty)$.

Пример 6. Да се реши неравенката $x|x+2| < 4-x$.

Решение. Гледаме дека под знакот на апсолутна вредност се наоѓа само изразот $x + 2$, кој добива вредност нула за $x = -2$. Тој број ја разделува бројната оска на два интервала $(-\infty, -2)$ и $[-2, \infty)$.

1^0. Ако $x \in (-\infty, -2)$, тогаш дадената неравенка е еквивалентна на системот

$$\begin{cases} -x(x+2) < 4 - x \\ x < -2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + x + 4 > 0 \\ x < -2 \end{cases} \tag{12}$$

Првата неравенка во системот (12) има множество решенија $M_1 = (-\infty, \infty)$, а втората неравенка има – $M_2 = (-\infty, -2)$. Според тоа, системот (12) ќе има множество решенија $M = M_1 \cap M_2 = (-\infty, \infty) \cap (-\infty, -2) = (-\infty, -2)$.

2^0. Ако $x \in [-2, \infty)$, тогаш дадената неравенка е еквивалентна на системот

$$\begin{cases} x(x+2) < 4 - x \\ x \geq -2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ x \geq -2 \end{cases} \tag{13}$$

Неравенките во системот (13) соодветно имаат множества решенија $N_1 = (-4, 1)$ и $N_2 = [-2, \infty)$. Според тоа, системот (13) ќе има множество решенија

$$N = N_1 \cap N_2 = (-4, 1) \cap [-2, \infty) = [-2, 1)$$

На крајот лесно го добиваме и бараното множество решенија S на дадената неравенка. Тоа ќе биде: $S = M \cup N = (-\infty, -2) \cup [-2, 1) = (-\infty, 1)$.

Пример 7. Да се реши неравенката $|x^2 - 4x + 3| - 2|x + 1| > x(x - 3)$.

Решение. Квадратниот трином го разложуваме на линеарни множители $|x^2 - 4x + 3| = |(x - 1)(x - 3)| = |x - 1| \cdot |x - 3|$, па дадената неравенка го добива видот:

$$|x - 1| \cdot |x - 3| - 2|x + 1| > x(x - 3) \tag{14}$$

Гледаме дека биномите под знаците на апсолутна вредност добиваат вредност нула за $x = -1$, $x = 1$ и $x = 3$. Тие ја разделуваат бројната оска на интервалите:

$(-\infty, -1)$, $[-1, 1)$, $[1, 3)$, $[3, \infty)$.

1^0. $x \in [3, \infty) \Rightarrow (|x + 1| = x + 1, |x - 1| = x - 1, |x - 3| = x - 3)$.

Во тој случај неравенката (14) е еквивалентна на $(x - 1)(x - 3) - 2(x + 1) > x(x - 3)$, односно на $-3x + 1 > 0$.

Таа има множество решенија $(-\infty, \frac{1}{3})$, но бидејќи $(-\infty, \frac{1}{3}) \cap [3, \infty) = \varnothing$, затоа во интервалот $[3, \infty)$ дадената неравенка нема решенија.

2^0. $x \in [1, 3) \Rightarrow (|x + 1| = x + 1, |x - 1| = x - 1, |x - 3| = -(x - 3))$.

Во тој случај дадената неравенка го добива видот:

$-(x - 1)(x - 3) - 2(x + 1) > x(x - 3)$ или $2x^2 - 5x + 5 < 0$. (15)

Бидејќи неравенката (15) нема решенија, тогаш и дадената неравенка во интервалот $[1, 3)$ исто така нема решенија.

3^0. $x \in [-1, 1) \Rightarrow (|x + 1| = x + 1, |x - 1| = -(x - 1), |x - 3| = -(x - 3)$. Во тој случај неравенката (14) ќе гласи $(x - 1)(x - 3) - 2(x + 1) > x(x - 1)$. Таа има множество решенија $(-\infty, \frac{1}{3})$, но бидејќи е $(-\infty, \frac{1}{3}) \cap [-1, 1) = [-1, \frac{1}{3})$, тогаш дадената неравенка во

интервалот $[-1, 1)$ има множество решенија $[-1, \frac{1}{3})$.

4^0. $x \in (-\infty, -1) \Rightarrow (|x+1| = -(x+1), |x-1| = -(x-1), |x-3| = -(x-3)$. Во тој случај неравенката (14) ќе гласи $(x-1)(x-3)+2(x+1) > x(x-3)$, или $x+5>0$. Оваа неравенка има множество решенија $(-5, \infty)$.

Го одредуваме пресекот: $(-5, \infty) \cap (-\infty, -1) = (-5, -1)$. Според тоа, дадената неравенка во интервалот $(-\infty, -1)$ има множество решенија $(-5, -1)$. Обединувајќи ги сите решенија добиваме: $\varnothing \cup \varnothing \cup [-1, \frac{1}{3}) \cup (-5, -1) = (-5, \frac{1}{3})$, т.е. дадената неравенка има множество решенија $M = (-5, \frac{1}{3})$.

Пример 8. Да ја решиме неравенката $\left|\frac{3x-1}{x-3}\right| > 1$.

Решение. $\left|\frac{3x-1}{x-3}\right| > 1 \Leftrightarrow \left|\frac{3x-1}{x-3}\right| > 1 \Leftrightarrow |3x-1| > |x-3|, x \neq 3$

Броевите $\frac{1}{3}$ и 3 ја разделуваат бројната оска на три интервали: $(-\infty, \frac{1}{3}), [\frac{1}{3}, 3), (3, \infty)$.

1^0. Ако $x \in (3, \infty)$, тогаш $|3x-1| = 3x-1, |x-3| = x-3$, па имаме:

$$\begin{cases} 3x-1 > x-3 \\ x > 3 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > -1 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3, \text{ т.е. } M_1 = (3, \infty)$$

2^0. Ако $x \in (\frac{1}{3}, 3)$, тогаш $|3x-1| = 3x-1, |x-3| = 3-x$, па имаме:

$$\begin{cases} 3x-1 > 3-x \\ \frac{1}{3} < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{3} < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3, \text{ т.е. } M_2 = (1, 3)$$

3^0. Ако $x \in (-\infty, \frac{1}{3})$, тогаш $|3x-1| = 1-3x, |x-3| = 3-x$, па имаме

$$\begin{cases} 1-3x > 3-x \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x < -1, \text{ т.е. } M_3 = (-\infty, -1)$$

На крајот утврдуваме: множеството решенија на дадената неравенка е $M = M_3 \cup M_2 \cup M_1 = (-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$.

З А Д А Ч И

Реши ги равенките и неравенките

1. а) $|x+3|-3=2x$, б) $|x+1|+|x-1|=2$

2. а) $|x-2|-|x+2|=0$, б) $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0$

3. а) $2x-|x|=5$, б) $|x|-2|x-3|=8$

4. а) $|x^2-x-6|=6$, б) $\dfrac{|2x-1|}{|x-2|}=2$

5. а) $|x-4|>5$, б) $|x-2|<7$, в) $|x-5|>7$

6. а) $|x^2-2x-3|<3x-3$, б) $2x|x-1|+|x-3|>0$

7. а) $x^2-3|x|+2>0$, б) $\dfrac{|x-1|}{|2x+2|}<1$

8. а) $|x-3|-|x+1|<1$, б) $x|x-2|>3x-1$

9. а) $|x^2-3x+2|\le 2$, б) $|x^2-x-6|\ge 0$

10. $x-5<2x-|x+3|<|x-4|+3$

§ 38. ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНКИТЕ И СИСТЕМИТЕ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Многу задачи и проблеми од алгебрата и математиката се сведуваат на решавање на некои неравенки и систем неравенки со една променлива. Ќе го илустрираме тоа на неколку примери.

Пример 1. Да се одреди дефиниционата област на функцијата

$$y=\sqrt{2x^2+9x-5}.$$

Решение. Знаеме, квадратниот корен има смисла (т.е. тој е реален број) само за ненегативните вредности на поткореновиот израз. Затоа дефиниционата област на дадената функција ќе ја сочинуваат оние и само оние вредности на аргументот x, за кои важи неравенката $2x^2+9x-5\ge 0$.

Бидејќи $D=81+40=121>0$, $x_{1,2}=\dfrac{-9\pm 11}{4}$, $x_1=-5$, $x_2=\dfrac{1}{2}$ и $a=2>0$, затоа

неравенката $2x^2 + 9x - 5 \geq 0$ има множество решенија $(-\infty, -5) \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. А тоа е во исто време и дефиниционо област на дадената функција, т.е.

$$D_f = (-\infty, -5) \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right).$$

Пример 2. За кои вредности на параметарот k квадратната равенка $(k-5)x^2 - 4kx + k - 2 = 0$, $k - 5 \neq 0$ ќе има нееднакви реални корени со различен знак?

Решение. Квадратната равенка да ја доведеме во сведен вид

$x^2 - \frac{4k}{k-5} \cdot x + \frac{k-2}{k-5} = 0$, $k - 5 \neq 0$. Таа ќе има реални нееднакви корени, ако е исполнет условот $D = (-2k)^2 - (k-5)(k-2) > 0$, а корените ќе имаат различен знак, ако е исполнет и условот $q = x_1 x_2 = \frac{k-2}{k-5} < 0$. Значи, решавањето на дадената задача се сведува на решавање на системот неравенки $\begin{cases} 4k^2 - (k-5)(k-2) > 0 \\ \frac{k-2}{k-5} < 0 \end{cases}$

односно $\begin{cases} 3k^2 + 7k - 10 > 0 \\ (k-2)(k-5) < 0 \end{cases}$ (1)

Лесно наоѓаме дека, првата неравенка во системот (1) има множество решенија $M_1 = (-\infty, -\frac{10}{3}) \cup (1, \infty)$, а втората неравенка има множество решенија $M_2 = (2, 5)$.

Според тоа, системот неравенки (1) има множество решенија

$$M = M_1 \cap M_2 = [(-\infty, -\frac{10}{3}) \cup (1, \infty)] \cap (2, 5) = (2, 5).$$

Значи, условите на задачата ќе бидат исполнети, т.е. дадената равенка ќе има реални нееднакви корени со различен знак, ако параметарот $k \in (2, 5)$.

Пример 3. Бројот 100 на колку начини може да се раздели на два цели собирока, чиј производ да е поголем од 1600.

Решение. Ако едниот собирок е x, тогаш другиот собирок ќе биде $100 - x$. Броевите x и $100 - x$ согласно условот на задачата треба да се цели броеви, а нивниот производ да е поголем од 1600, т.е. треба да важи неравенката $x(100 - x) > 1600$, каде што x е природен број помал од 100. Добиената неравенка е еквивалентна на неравенката $x^2 - 100x + 1600 < 0$. Ако ја решиме неравенката ќе видиме дека нејзиното множество решенија е интервалот (20, 80), т.е. $20 < x < 80$.

Бидејќи променливата x е природен број, затоа таа може да ги зема следниве вредности: $x = 21, 22, 23, ..., 78, 79$. Нив ги има конечен број и тоа точно 69. Тој број ни покажува на колку начини може да се избере првиот собирок, а на секој од нив да му одговара и по еден втор собирок $100 - x$.

Значи, постојат вкупно 69 начини.

ЗАДАЧИ

1. Одреди, за кои вредности на x изразот $\sqrt{\frac{x^2+3x-4}{x+1}}$ добива реални вредности.

2. За кои вредности на параметарот k двата корена на равенката $x^2 + 2(k-4)x + k(k+6) = 0$ се позитивни броеви?

3. За кои вредности на параметарот k двата корена на равенката $x^2 - (k+1)x + k + 4 = 0$ се негативни броеви?

4*. Дадена е равенката $kx^2 - (k+2)x - (k-1) = 0$. Да се испитаат корените во зависност од промената на параметарот k.

5. Одреди, за кои вредности на параметарот k, неравенката $(k-1)x^2 + kx + k < 0$ е задоволена за секоја вредност на x.

6. Докажи дека равенката $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{p}$ за секоја вредност на параметарот $p \neq 0$ има различни реални корени.

7. Одреди ги целите вредности на променливата x, кои ја задоволуваат неравенката $3x^2 + 7x + 2 \leq 0$.

8. За кои вредности на p неравенката $x^2 - (p+2)x + p < 0$ нема ниту едно реално решение?

9*. За кои вредности на p, равенката $x^2 - px + 4 = 0$ ќе има реални корени, што се содржани во интервалот $(1, 3)$?

10. Дадена е равенката $kx^2 + (7-k)x + 9 = 0$. За кои вредности на k, таа ќе има еден двократен: а) позитивен, б) негативен реален корен?

11*. За која вредност на променливата x квадратниот трином $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$ ќе добие најмала вредност?

12*. За кои вредности на параметарот k квадратниот трином $k(k+2)x^2 + 2kx + 1$ за секој реален број x добива позитивни вредности?

Глава VI

ПОЛИНОМИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

Во втората глава разгледувавме полиноми од една променлива. Тоа се, како што видовме, цели рационални алгебарски изрази од една променлива, доведени во каноничен вид. Неретко станува неопходно да разгледуваме и цели рационални изрази, кои зависат не од енда, туку од две, три и повеќе променливи. Како што ќе видиме, секој цел рационален израз од повеќе променливи исто така може да се сведе на каноничен вид и го викаме **полином од повеќе променливи.** Во оваа глава ќе се запознаеме со општите и некои посебни својства и видови на полиноми од повеќе променливи.

§ 39. ОПШТИ ПОИМИ, ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА ПОЛИНОМИТЕ ВО КАНОНИЧЕН ВИД

1. Исто како и полиномите од една променлива и полиномите од повеќе променливи се составени од броеви и аргументи, врзани со помош на операциите собирање и множење. Со примена на законите на тие операции (ослободување од заградите, множење на збир со број или со збир) полиномите може да ги трансформираме во збир, чии собироци (членови) се или производ од броен коефициент и степени на променливите $x, y, \ldots z$; или само број (означен со буква или цифра).

Според тоа, секој полином од променливите (аргументите) $x, y, \ldots, z$ симболички $f(x, y, \ldots, z)$ може да се трасформира во збир од конечен број членови од видот

$$Ax^k y^l \ldots z^p \qquad (1)$$

каде што A е даден броен коефициент, а, $k, l, \ldots, p$ се цели ненегативни степени на аргументите.

Во посебен случај полиномот $f(x, y, \ldots, z)$ може да се состои и само од еден единствен член (собирок). Во таков случај полиномот $f(x, y, \ldots, z)$, односно производот (1) се вика уште **моном** (или **едночлен**) од променливите $x, y, \ldots, z$.

Бројниот множител A на мономот (1) се вика негов **коефициент**. За коефициентот на мономот (1) постојат две можности: $A \neq 0$ или $A = 0$. Ако $A \neq 0$, тогаш за мономот (1) велиме дека е од ***k*-ти степен по однос на аргументот *x***, од *l*-ти

степен по однос на аргументот y, итн, а од p-ти степен по однос на аргументот z. Збирот, пак, од сите степенови показатели $k + l + ... + p$ на аргументите, што влегуваат во мономот (1), се вика **степен на даденият моном по однос на сите аргументи** во него.

Одделни аргументи на мономот, а во специјален случај и сите, можат да имаат степенови показатели нула. Во тој случај тие аргументи не влегуваат во записот на мономот. На пример,,

$$Ax^0y^l...z^p = Ay^l...z^p,\ 7x^0y^0...z^0 = 7 \cdot 1 \cdot 1... 1 = 7.$$

Затоа, секој број различен од нула може да го разгледуваме како **моном од нулти степен.**

Ако $A = 0$, тогаш мономот (1) се вика **нула-моном**. На нула мономот не му придаваме никаков степен. Карактеристично е што сите нула-мономи имаат вредност, еднаква на нула. Моном, што е различен од нула-мономот ќе го викаме **ненула-моном**.

Два ненула монома од едни исти аргументи

$$Ax^{k_1}y^{l_1}...z^{p_1} \qquad \text{и} \qquad Bx^{k_2}y^{l_2}...z^{p_2}$$

се викаат **слични**, ако секој аргумент што влегува во нив е со исти степенов показател, т.е. ако $k_1 = k_2$, $l_1 = l_2$, ..., $p_1 = p_2$.

Според тоа, сличните членови (мономи) можат да се разликуваат само по своите бројни множители - коефициентите.

Сметаме дека нула-мономот е сличен со секој друг кој било моном.

Збирот од два или неколку слични мономи, согласно дистрибутивниот закон може да се замени со моном, чиј коефициент е еднаков на збирот од коефициентите на мономите-собироци. На пример:

$$3x^3y^2z - 2x^3y^2z + 4x^3y^2z = (3 - 2 + 4)x^3y^2z = 5x^3y^2z.$$

Производот од два монома, согласно комутативниот и асоцијативниот закон на множењето, го определуваме според равенството:

$$Ax^{k_1}y^{l_1}...z^{p_1} \cdot Bx^{k_2}y^{l_2}...z^{p_2} = (AB)\,x^{k_1+k_2}y^{l_1+l_2}...z^{p_1+p_2}$$

Во посебен случај, аргументот, што се содржи само во еден од множителите, во производот влегува со непроменет показател; бидејќи показателот со кој тој аргумент влегува во другиот множител можеме да сметаме дека е нула. На пример:

$$6x^3y^2 \cdot 3xz^4 = 6x^3y^2z^0 \cdot 3xy^0z^4 = 18x^4y^2z^4.$$

2. Видовме дека, секој цел рационален израз - полином од повеќе променливи, по извршувањето на потребните идентични трансформации, може да се претстави во

вид на збир од мономи од видот (1). Многу често се случува во тој збир да има слични членови - мономи. Со нивно групирање во одделни групи од слични членови и со заменување на секоја од тие групи со по еден моном-нивен збир, полиномот го сведуваме во збир со можно најмал број неслични членови. Таа идентична трансформација на полиномот се вика **сведување на сличните членови.** Значи, по ослободување од заградите и сведување на сличните членови (ако има такви) полиномот од променливите $x, y, ..., z$ го доведуваме во неговиот каноничен вид:

$$f(x, y, ..., z) = A_1 x^{k_1} y^{l_1} ... z^{p_1} + A_2 x^{k_2} y^{l_2} ... z^{p_2} + ... + A_s x^{k_s} y^{l_s} ... z^{p_s} \qquad (2)$$

т.е. во вид на збир од неслични членови.

Прифатено е нула мономите да не ги пишуваме, па секој од коефициентите $A_1, A_2, ..., A_s$ можеме да сметаме дека е различен од нула. Ако, пак, сите коефициенти на мономите - собироци во каноничниот вид на полиномот (2) се еднакви на нула, тогаш полиномот се вика **нула-полином**.

Нула-полиномот, за кој било систем на вредности на променливите, секогаш, добива вредност нула. Затоа, обично, него ќе го означуваме само со симболот 0.

Според бројот на мономите -собироци (различни од нула) полиномите доведени во каноничен вид, често ги именуваме со посебни имиња: **мономи, биноми, триноми**, итн.

Понекогаш во коничното претставување на полиномот од повеќе аргументи, можно е некои аргументи да не се содржат. На пример, полиномот од два аргумента:

$$f(x, y) = (x - y)^2 + (x + y)^2 - (2y^2 + x)$$

претставен во каноничен вид: $f(x, y) = 2x^2 - x$

не го содржи аргументот y. Во таков случај при дадена вредност $x = x_0$, полиномот $f(x, y)$ добива една иста вредност за која било вредност на аргументот y.

Аналогно, како кај мономите, и кај полиномите со два и повеќе члена, ги воведуваме поимите **степен на полиномот** по однос на одделните аргументи, и **степен на полиномот** по однос на сите аргументи во него.

Под степен на ненула полиномот $f(x, y, ..., z)$ зададен во каноничен вид, по однос на еден одделен аргумент во него, го подразбираме највисокиот од степените на тој аргумент во полиномот. А степен на полиномот $f(x, y, ..., z)$ зададен во каноничен вид, по однос на вкупноста од сите аргументи во него, се вика највисок степен (по однос на сите аргументи) на неговите членови. На нула-полиномот не му придаваме никаков степен.

Во посебен случај, **полином од нулти степен,** како и во случај на полиномите од една променлива, ќе ги сметаме само броевите различни од нула.

Очигледно е дека, полиномот од повеќе променливи во општ случај може да содржи и неколку члена со највисок ист степен. Затоа не може да се говори за водечки (најстар) член на полиномот (според степенот).

3. Да го воведеме следниов поим:

Дефиниција. *Полиномот $f(x, y, ..., z)$ зададен во каноничен вид (1) се вика* ***хомоген полином или форма*** *од степен s, ако сите негови членови имаат еден ист степен.*

Секој моном се смета како хомоген полином. Секој број $a \neq 0$ можеме да го сметаме како хомоген полином од нулти степен.

Примери: 1). Полиномите: $3x$, $2x - 5y$, $x + 2y + z$ се хомогени полиноми од прв степен или **линеарни форми** од соодветно еден, два, три аргументи.

2). Полиномите: $x^2 - 2xy + 5y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2yz$ се хомогени полиноми од втор степен или **квадратни форми** од два, односно три аргументи.

3). Полиномите: $2x^2y$, x^3, $y^3 + z^3 + 3xyz$, $x^2y + y^2z + z^2y$ се хомогени полинои од трет степен или **кубни форми**.

Хомогените полиноми го имаат следново важно својство.

Теорема. (39.1). ***Ако аргументите $x, y, ..., z$ на хомогениот полином $f(x, y, ..., z)$ од n-ти степен ги замениме со пропорционалните броеви $tx, ty, ..., tz$, тогаш полиномот се множи со t^n, т.е. $f(tx, ty, ..., tz) = t^n \cdot f(x, y, ..., z)$***

Доказ. Да земеме еден кој било член на хомогениот полином: $Ax^ky^l...z^p$, каде $k + l + ... + p = n$. При замена на $x, y, ..., z$ со $tx, ty, ..., tz$

$A(tx)^k(ty)^l...(tz)^p = t^{k+l+...+p} Ax^ky^l...z^p = t^n Ax^ky^l...z^p$.

На таков начин секој член на полиномот добива множител t^n, па според тоа, t^n ќе биде множител на целиот хомоген полином, штд.

4. Полиномите од повеќе променливи, исто како и полиномите со една променлива, ги разгледуваме во некое бројно поле. Тоа значи, еден ист полином $f(x, y, ..., z)$ во зависност од неговите коефициенти можно е да го разгледуваме во различни бројни полиња. На пример, полиномот

$$f(x, y) = 3x^2y - 2xy + 5y - 4 \qquad (3)$$

е со цели коефициенти. Ако го разгледуваме над прстенот цели броеви, тогаш за аргументите x и y допуштени се само целите броеви. Ако полиномот (3) го разгледуваме во полето на рационалните броеви (односно реалните броеви), тогаш допуштени вредности за x и y се сметаат кои било рационални (односно реални) броеви. Полиномот (3) можеме да го разгледуваме дури и во полето на комплексните броеви. Очигледно е дека, бројните вредности на полиномот, при произволни бројни вредности на аргументите во него, му припаѓаат на истото бројно поле над кое го разгледуваме полиномот.

§40. НАЧИНИ НА РАСПОРЕДУВАЊЕ НА ЧЛЕНОВИТЕ НА ПОЛИНОМОТ

За полиномите од една променлива имаме два начина за распоредување на нивните членови во каноничниот вид: по опаднувачките и по растечките степени на променливата. Меѓутоа, овие начини за полиномите од повеќе променливи не одговараат. Тука ќе наведеме други три начини на распоредување на членовите на полиномите од повеќе променливи во каноничен вид.

I. Лексиконско (речничко) распоредување.

Битно е кај овој начин прво да го утврдиме редоследот на аргументите во членовите на полиномот. Во нашиот случај од n-те аргументи, $x, y, ..., z$ на прво место се договараме да го пишуваме, на пример x, на второ место y, итн, а на n-то место аргументот z. Овој начин на распоредување на членовите во полиномот наречен **лексиконски (речнички)** е истоветен со распоредувањето на зборовите во речникот, имено: имајќи го предвид редоследот на буквите во азбуката, заемната положба на два дадени збора во речникот ја одредуваме според нивните први букви, ако пак тие букви се еднакви, тогаш според нивните втори букви, итн. Нека е даден полиномот $f(x, y, ..., z)$ и во него два различни члена:

$$A_1 x^{k_1} y^{l_1} ... z^{p_1} \tag{1}$$

$$A_2 x^{k_2} y^{l_2} ... z^{p_2} \tag{2}$$

чии коефициенти се различни од нула.

Ако $k_1 \neq k_2$, тогаш **постар** или **повисок** ќе го сметаме оној член, чиј степенов показател на аргументот x е поголем. Така, ако $k_1 > k_2$, тогаш членот (1) е повисок од членот (2). Ако, пак, $k_1 = k_2$, но $l_1 \neq l_2$, тогаш за повисок ќе го сметаме членот, чиј степенов показател на аргументот y е поголем, итн.

Според тоа, од два, различни члена (1) и (2) повисок ќе го сметаме оној, кај кого првиот по ред степенов показател е поголем од показателот при истиот аргумент во другиот член, а сите претходни соодветни показатели им се еднакви. Очигледно е дека, од два кои било различни члена на полиномот $f(x, y, ..., z)$ еден ќе биде повисок (постар) од другиот. А ставајќи го понапред (порано) од двата члена тој што е повисок ќе постигнеме потполно определено распоредување на членовите на полиномот $f(x, y, ..., z)$, кое го викаме лексиконско.

На пример, членовите на полиномот:

$$f(x, y, z) = x^4 + 2x^2y^3z - 3x^2y^2z^2 + 4xy^3 + 5yz^3 - z^2 + 1 \tag{3}$$

се лексиконски распоредени според редоследот на аргументите x, y, z.

Ако пак за аргументите го усвоиме редоследот y, z, x, тогаш лексиконското распоредување на членовите на истиот полином ќе биде следново:

$$f(x, y, ..., z) = 2y^3zx^2 + 4y^3x - 3y^2z^2x^2 + 5yz^3 - z^2 + x^4 + 1.$$

При лексиконско распоредување на членовите на полиномот $f(x, y, ..., z)$ еден од неговите членови ќе стои на прво место, т.е. ќе биде постар од секој друг член. Тој член се вика **водечки член** на полиномот од повеќе променливи.

Очигледно е дека, ако полиномот f не е моном, тогаш при лексиконското распоредување еден од неговите членови ќе се најде на последно место. Тој член ќе го викаме **последен** или **најмлад член** на полиномот f.

II. Распоредување по степените на даден аргумент.

Даден аргумент, на пример x, да го прифатиме за прв и полинимот $f(x, y,..., z)$ нека е од n-ти степен по однос на него.

При лексиконското распоредување на членовите на полиномот $f(x, y, ..., z)$ да ги групираме членовите со ист степен на x. Ако во секоја од тие групи соодветниот степен на x го изнесеме надвор од заградата, дадениот полином го добива видот:

$$f(x, y, ..., z) = a_0(y, ..., z)x^n + a_1(y, ..., z)x^{n-1} + ... + a_{n-1}(y, ... z)x + a_n(y, ... z) \quad (4)$$

Овој вид на запишување на полиномот се вика негово распоредување по опаднувачките степени на даден аргумент (во случајот (4) по аргументот x). Очигледно е дека во овој запис, коефициентите при степените на аргументот x претставуваат полиноми:

$\alpha_0(y,..., z)$, $\alpha_1(y, ..., z)$, ..., $\alpha_{n-1}(y, ..., z)$, $\alpha_n(y, ..., z)$ од останатите аргументи. При тоа, коефициентот $\alpha_0(y,..., z)$ секогаш е ненеула-полином, а другите може да бидат и нулаполином. Бројот n се вика **степен**, а членот $\alpha_0(y,..., z)$ - **водечки член** на полиномот во однос на аргументот x. На пример, полиномот (3) распореден по степените на аргументот x, гласи:

$f(x, y, ..., z) = x^4 + 0 \cdot x^3 + (2y^3z - 3y^2z^2)x^2 + 4y^3 \cdot x + (5yz^3 - z^2 + 1)$, а распореден по степените на y и z, соодветно гласи:

$$(2x^2z + 4x)y^3 - 3x^2z^2 \cdot y^2 + 5z^3 \cdot y + (x^4 - z^2 + 1)$$

и $$5y \cdot z^3 - (3x^2y^2 + 1) \cdot z^2 + 2x^2y^3 \cdot z + (x^4 + 4xy^3 + 1)$$

III. Распоредување по хомогени полиноми.

Секој полином од n променливи зададен во каноничен вид, може да се претстави на единствен начин и во вид на збир од неколку хомогени полиноми од тие променливи, што ќе имаат ралични степени. Тоа го постигнуваме (користејќи го комутативниот и асоцијативниот закон на собирањето) со групирање на сите членови на дадениот полином во одделни групи, што ќе се состојат од членови со еден ист степен. Тие групи ќе образуваат (секоја) хомогени полиноми. Обично, хомогените полиноми во збирот се распоредуваат еден по друг по нивните опаднувачки степени, а членовите во секој хомоген полином ги распоредуваме по лексиконски редослед.

Така, полиномот (3) распореден по хомогени полиноми, гласи

$$f(x, y, ..., z) = (2x^2y^3z - 3x^2y^2z^2) + (x^4 + 4xy^3 + 5yz^3) + (-z^2) + 1.$$

Гледаме дека тој е збир од хомоген полином од шести степен $2x^2y^3z - 3x^2y^2z^2$, хомоген полином од четврти степен $x^4 + 4xy^3 + 5yz^3$, хомоген полином од втор степен $-z^2$ и слободен член 1 - хомоген полином од нулти степен.

ЗАДАЧИ

1. Претстави го во каноничен вид изразот

а) $3x(y-z)^2 + 2y(x+2z) - (3x-2)(4y^2+1)$,
б) $(x-2y)(x-2z)(y-2x) + 8xyz$,
в) $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y+z)^2 + 3$

со лексиконско распоредување на неговите членови.

2. Даден е полиномот од три променливи x, y и z:
$6x^3yz + 5xy^5 - 2y^3z^2 + x^2y^2z^2 - 3xz^3 + 2xyz + 4$
Распореди ги неговите членови: а) лексиконски според распоредот на аргументите x, y, z, б) по степените на аргументот x, в) по хомогени полиноми.

§. 41. ТЕОРЕМИ ЗА НУЛА-ПОЛИНОМ И ИДЕНТИЧНИ ПОЛИНОМИ

1. Полином од n аргументи, зададен во каноничен вид, велиме дека е идентично еднаков на нула, или дека е нула-полином, ако тој за произволни вредности на аргументите (од бројното поле во кое го разгледуваме) секогаш добива вредност нула.

Теорема[41.4]. ***Полиномот $f(x, y, ..., z)$ од n аргументи, зададен во каноничен вид идентично е еднаков на нула, симболички $f(x, y, ..., z) \equiv 0$, ако и само ако сите негови коефициенти се еднакви на нула.***

Доказ. Ќе го примениме методот на потполна математичка индукција. Со теорема [8.1] (види стр. 50) докажавме дека Т[41.1] важи за полиномите од еден аргумент. При претпоставка дека Т[41.1] важи за полиномите од $n-1$ аргументи, ако докажеме дека таа важи за полиномите од n аргументи; со тоа всушност ќе докажеме дека таа важи во општ случај за полиними со произволен број на аргументи.

Да го распоредиме (претставиме) полиномот $P(x, y, ..., z)$ од n аргументи по степените на еден од аргументите, на пример x:

$$P(x, y, ..., z) = \alpha_0(y, ..., z)x^n + \alpha_1(y, ..., z)x^{n-1} + ... + \alpha_n(y, ..., z) \qquad (1)$$

По услов на теоремата важи, $P(x, y, ..., z) = 0$ за кои било вредности на аргументите. Ќе докажеме дека $P(x, y, ..., z)$ е нула-полином, т.е. сите негови коефициенти се нули. Да ги фиксираме произволно аргументите $y = y_0, ..., z = z_0$, тогаш полиномот (1) може да го разгледуваме како полином од една променлива x, кој пак добива вредност нула за секоја вредност на x. Оттука, а според теоремата [8.1] следува дека сите коефициенти на полиномот (1) се еднакви на нула, т.е.

$$\alpha_0(y, ..., z) = \alpha_1(y, ..., z) = ... = \alpha_n(y, ..., z) = 0 \qquad (2)$$

Бидејќи вредностите на $n-1$ аргументи $y, \ldots, z$ во (2) може да се избираат произволно, тоа значи дека равенствата (2) се идентитети. По претпоставка, пак, на индукцијата тоа е можно, само ако секој од полиномите $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_н$ од $n-1$ аргументи се нула-полином. Но во тој случај сите коефициенти на полиномот $P(x, y, \ldots, z)$ се исто така еднакви на нула, штд.

2. За два полинома од n едни исти променливи велиме дека се идентични, ако тие добиваат еднакви вредности за кој било систем на вредности на аргументите (од бројното поле во кое ги разгледуваме). Ќе покажеме, аналогно како кај полиномите од една променлива и кај полиномите од повеќе променливи, важи следнава:

Теорема[41.2]. ***Два полинома од едни исти променливи зададени во каноничен вид се идентични, ако и само ако коефициентите на нивните членови, што содржат едни исти аргументи со соодветно еднакви степени (т.е. коефициентите на нивните слични членови) се еднакви.***

Доказ. **Доволен услов.** Ако сите коефициенти на два полинома:

$$A(x, y, \ldots, z) = A_1 x^{k_1} y^{l_1} \ldots z^{p_1} + A_2 x^{k_2} y^{l_2} \ldots z^{p_2}$$

$$B(x, y, \ldots, z) = B_1 x^{k_1} y^{l_1} \ldots z^{p_1} + B_2 x^{k_2} y^{l_2} \ldots z^{p_2}$$

пред соодветните нивни слични членови, се еднакви; тогаш очигледно е дека ќе имаме еден ист, а не два различни израза (полиноми), затоа вредностите на полиномите A и B ќе бидат еднакви при сите вредности на аргументите. Значи, тие се идентични.

Потребен услов. Полиномите A и B за кои било вредности на аргументите во нив нека добиваат еднакви вредности. Ќе докажеме дека во тој случај полиномите A и B се состојат од едни исти членови-мономи. Да земеме кој било член од едниот полином, на пример $A_1 x^{k_1} y^{l_1} \ldots z^{p_1}$. Во другиот полином или ќе постои член $B_1 x^{k_1} y^{l_1} \ldots z^{p_1}$ - сличен на даденият, или таков член во него не се содржи. Во вториот случај на полиномот B сепак може да се допише член $B_1 x^{k_1} y^{l_1} \ldots z^{p_1}$, при што ќе сметаме дека $B_1 = 0$. Со допишување во секој од дадените полиноми на потребниот број, (што недостасуваат) членови со коефициенти нула, можеме да сметаме дека на секој член од полиномот A му одговара сличен член во полиномот B. Имајќи предвид дека полиномите A и B за кои било вредности на аргументите добиваат еднакви вредности, затоа одземајќи ги соодветните членови на полиномите A и B, ќе добиеме дека за сите вредности на аргументите ќе важи:

$$A(x, y, \ldots, z) - B(x, y, \ldots, z) = (A_1 - B_1) x^{k_1} y^{l_1} \ldots z^{p_1} + (A_2 - B_2) x^{k_2} y^{l_2} \ldots z^{p_2} + \ldots \equiv 0.$$

Тоа е можно само при услов $A_1 - B_1 = A_2 - B_2 = \ldots = 0$
Оттука $A_1 = B_1, A_2 = B_2, \ldots$, што требаше да се докаже.

Во §39 видовме дека секој цел рационален израз од повеќе променливи може да се доведе во каноничен вид. Сега сме во можност да ја докажеме следнава:

Теорема[41.3]. ***Секој цел рационален израз од неколку променливи може на единствен начин (со точност до редоследот на членовите) да биде претставен во форма на полином во каноничен вид.***

Доказ. Даден цел рационален израз канонично нека е претставен со два полинома. Бидејќи секој од двата добиени полинома, е идентичен на даденият израз, тогаш и тие се идентични еден на друг. Согласно докажаната теорема [41.2] тие два полинома се состојат од едни исти членови-собироци и можат да се разликуваат само по редоследот на нивното запишување, штд.

§. 42 ПРСТЕН НА ПОЛИНОМИ ОД *n* ПРОМЕНЛИВИ

$$\text{Нека } A(x, y, ..., z) = A_1 x^{k_1} y^{l_1} ... z^{p_1} + A_2 x^{k_2} y^{l_2} ... z^{p_2} ... \quad (1)$$

$$B(x, y, ..., z) = B_1 x^{k_1} y^{l_1} ... z^{p_1} + B_2 x^{k_2} y^{l_2} ... z^{p_2} + ... \quad (2)$$

се два полинома од n аргументи $x, y, ..., z$ зададени во каноничен вид.

Под **збир** и **производ** на полиномите (1) и (2) ги подразбираме каноничните видови на целите рационални изрази од истите аргументи:

$$A + B = (A_1 x^{k_1} y^{l_1} ... z^{p_1} + ...) + (B_1 x^{k_1} y^{l_1} ... z^{p_1} + ...), \quad (3)$$

$$A \cdot B = (A_1 x^{k_1} y^{l_1} ... z^{p_1} + ...) \cdot (B_1 x^{k_1} y^{l_1} ... z^{p_1} + ...). \quad (4)$$

Збирот A + B за да го претставиме во каноничен вид треба да ги собереме соодветните коефициенти (т.е. коефициентите на сличните членови) на полиномите A и B. Ако при тоа некој член влегува само во еден од полиномите A, B; тогаш коефициентот пред него во другиот полином ќе сметаме дека е еднаков на нула.

А производот AB за да го претставиме во каноничен вид, потребно е прво (согласно правилото за множење на два збира) да го образуваме збирот од производите на секој член на A со секој член на B, а потоа да извршиме сведување на сличните членови во тој збир.

Да забележиме дека, согласно теоремата за единственост на каноничното претставување, за целите рационални изрази (3) и (4) не постојат никакви полиноми со други коефициенти, чии вредности за кои било вредности на аргументите во нив, ќе бидат еднакви (соодветно) на збирот и производот од вредностите на полиномите (1) и (2). Очигледно е дека при ваквото дефинирање на операциите собирање и множење на полиноми, всушност тие се сведуваат на операции (собирање и множење) со нивните коефициенти.

Оттука заклучуваме дека, основните својства на операциите собирање и множење на броеви (реални или комплексни) важат и за операциите собирање и множење на полиноми од n променливи, т.е. важат идентитетите:

$A + B \equiv B + A$, $(A + B) + C \equiv A + (B + C)$, $AB \equiv BA$, $(AB)C \equiv A(BC)$, $(A + B)C \equiv AC + BC$, каде што A, B и C се произволни полиноми од n променливи, при што, поради краткост променливите не се запишани.

Во множеството на сите полиноми од n променливи, како и кај множеството полиноми со една променлива, улогата на **неутрален елемент** при операцијата **собирање** на полиноми ја игра бројот 0, односно **нула-полиномот**; а улогата на **единица** (**неутрален елемент**) при множењето на полиноми ја игра **бројот 1** - разгледуван како полином од нулти степен. Значи, за секој полином $P(x, y, ..., z)$ од n променливи, важи:

$P(x, y, ..., z)$ од n променливи, важи:

$$P(x, y, ..., z) + 0 = 0 + P(x, y, ..., z) = P(x, y, ..., z) \quad (5)$$

$$\text{и } P(x, y, ..., z) \cdot 1 = 1 \cdot P(x, y, ..., z) = P(x, y, ..., z) \quad (6)$$

Два полинома велиме се **заемно спротивни**, ако нивниот збир е идентично еднаков на нула-полином. Ќе покажеме дека, во множеството на сите полиноми од n променливи за секој полином $P(x, y, ..., z)$ постои негов спротивен полином, симболички - P за кој важи:

$$P(x, y, ..., z) + (-P(x, y, ..., z)) = 0 \quad (7)$$

Нека $P(x, y, ..., z) = A_1 x^{k_1} y^{l_1} ... z^{p_1} + A_2 x^{k_2} y^{l_2} ... z^{p_2} + ...$ е даден полином, а спротивен на него нека е полиномот:

$$-P(x, y, ... z) = B_1 x^{k_1} y^{l_1} ... z^{p_1} + B_2 x^{k_2} y^{l_2} ... z^{p_2} + ...$$

Него го одредуваме од условот (7), т.е.

$$P(x, y, ..., z) + (-P(x, y, ..., z)) = (A_1 + B_1) x^{k_1} y^{l_1} ... z^{p_1} + (A_2 + B_2) x^{k_2} y^{l_2} ... z^{p_2} ... = 0,$$

од каде $A_1 + B_1 = 0$ $\quad B_1 = -A_1$

$A_2 + B_2 = 0$, односно $B_2 = -A_2$

Според тоа, полиномот $-P(x, y, ... z)$, што е спротивен на полиномот $P(x, y, ..., z)$, го добиваме со замена на коефициентите на $P(x, y, ..., з)$ со спротивните нивни броеви, т.е.

$$-P(x, y, ..., z) = -A_1 x^{k_1} y^{l_1} ... z^{p_1} - A_2 x^{k_2} y^{l_2} ... z^{p_2} - ... \quad (8)$$

Одземањето на полиноми го дефинираме како обратна (инверзна) операција на собирањето на полиноми, имено:

Разлика на полиномите $P(x, y, ..., z) - Q(x, y, ..., z)$ се вика полиномот $R(x, y, ..., z)$, што го задоволува условот

$$Q(x, y, ..., z) + R(x, y, ..., z) = P(x, y, ..., z) \quad (9)$$

Ако кон двете страни на идентитетот (9) додадеме – Q(x, y, ... z) ќе добиеме

$$R(x, y, \ldots z) \equiv P(x, y, \ldots z) + (-Q(x, y, \ldots z)) \quad (10)$$

Добиениот полином за R(x, y, ... z) навистина го задоволува условот (9), бидејќи $Q + R = Q + [P + (-Q)] \equiv P$

Според тоа, одземањето на полиномот Q(x, y, ...,z) е еквивалентно со додавањето не неговиот спротивен полином – Q(x, y, ..., z)

Видовме дека коефициентите на полиномите: збир, производ и разлика ги добиваме од коефициентите на дадените полиноми преку операциите собирање, множење и одземање. Бидејќи множествата на целите, рационалните, реалните и комплексните броеви се затворени по однос на собирање, множење и одземање; тоа значи дека, ако коефициентите на дадените полиноми му припаѓаат на некое одредено множество броеви, тогаш и коефициентите на нивниот збир, производ и разлика му припаѓаат на тоа множество. Така, на пример, збирот, разликата и производот на два полинома со цели коефициенти се исто така полиноми со цели коефициенти.

Од досега изложеното заклучуваме дека:

Во множеството М на сите полиноми од n променливи x, y, ..., z (разгледувани во одредено бројно множество) секогаш се еднозначно изводливи операциите собирање и множење, кои ги поседуваат основните својства на комутативност, асоцијативност и дистрибутивност и постоење на неутрални елементи (нула за собирањето и единица за множењето). Освен тоа, за секој елемент (полином) на множеството М постои еднозначно определен спротивен елемент (полином), кое нешто овозможува операцијата собирање да има инверзна операција - одземањето. Според тоа, важи:

Теорема[42.1]. ***Множеството од сите полиноми од дадени аргументи, симболички P[x, y, ..., z], разгледувани над некое бројно множество, со операциите собирање и множење во него, образува (комутативен) прстен.***

ЗАДАЧИ

Изврши ги назначените операции во изразите:

1. $(x + y + z)(xy + yz + zx) - (x + y)(y + z)(z + x)$
2. $(x^2 + 5xy + 25x^2)(x - 5y) + (25x^2 - 5xy + y^2)(x + 5y)$.
3. $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 + 2(xy + yz + zx)$
4. $2(x + 3y)^2 - 3(2x - y)^2 + 4(x^2 - xy + y^2 + 1)$.
5. $(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 - (a - b - c)^2$

§ 43. ТЕОРЕМИ ЗА ПРОИЗВОДОТ НА ПОЛИНОМИ

Овде ќе докажеме неколку теореми за производот на два полинома. За полиномите-множители ќе претпоставиме дека се различни од нула-полиномот, дека се претставени во каноничен вид, а нивните членови се распоредени на еден од начините во §40.

Видовме, кај секој полином од n променливи, кога неговите членови се лексиконски подредени (при утврден редослед на аргументите) разликуваме **водечки** (најстар) и **последен** (најмлад) член.

По однос на водечките и последните членови важи следнава:

Теорема [43.1] ***Водечкиот (односно последниот) член на производот на два полинома од n променливи е еднаков на производот од водечките (односно последните) членови на множителите.***

Доказ. Нека треба да ги помножиме полиномите $P(x, y, u, ..., z)$ и $Q(x, y, u, ..., z)$. Да ги распоредиме нивните членови лексиконски (прифаќајќи еден исти редослед на аргументите $x, y, u, ..., z$)

$$P(x, y, u, ..., z) = Ax^k y^l u^m ... z^n + ... + Ex^{k_1} y^{l_1} u^{m_1} ... z^{n_1} + ... \quad (1)$$

$$Q(x, y, u, ..., z) = Bx^p y^q u^r ... z^s + ... + Tx^{p_1} y^{q_1} u^{r_1} ... z^{s_1} + ... \quad (2)$$

Производот на водечките членови на полиномите (1) и (2):

$$ABx^{k+p} y^{l+q} u^{m+r} ... z^{n+s} \quad (3)$$

е различен од нула, бидејќи друг член сличен на него во производот не може да има, со кого при сведување на сличните членови евентуално би се поништил. Во тоа можеме да се увериме на следниов начин. Да го формираме производот на кои било два члена од полиномите (1) и (2), при што барем еден од тие членови да е различен од соодветниот водечки член:

$$ETx^{k_1+p_1} y^{l_1+q_1} u^{m_1+r_1} ... z^{n_1+s_1} \quad (4)$$

Да го споредиме мономот (4) со производот (3) на водечките членови. Ако $k > k_1$ или $p > p_1$, тогаш $k + p > k_1 + p_1$, па членот (3) е повисок од членот (4). Ако $k = k_1$ и $p = p_1$, но $l > l_1$ или $q > q_1$, тогаш $k + p = k_1 + p_1$, $l + q > l_1 + q_1$, па и во тој случај членот (3) е повисок од членот (4).

Ако, пак, $k = k_1$, $p = p_1$, $l = l_1$, $q = q_1$, но $m > m_1$ или $r > r_1$, тогаш $m + r > m_1 + r_1$ па и во тој случај членот (3) е повисок од членот (4). Тоа едно по друго споредување на степеновите показатели ќе заврши штом дојде до нееднаквост на показателите, но таа нееднаквост мора да настапи, бидејќи барем еден од членовите е земен да е различен од водечкиот член на соодветниот полином. Според тоа, членот (3) - производ од водечките членови на полиномите (1) и (2) ќе биде повисок (постар) од сите други членови, што се добиваат при множењето на полиномите (1) и (2). Значи, членот (3) е водечки член на производот на полиномите (1) и (2), штд.

Аналогно се докажува дека и производот на последните членови на полиномите (1) и (2) ќе биде најмлад од сите други членови што се добиваат во производот на полиномите (1) и (2), и затоа тој член не се поништува при сведувањето на сличните членови, т.е. ќе остане последен член во производот на полиномите (1) и (2).

Теорема [43.2]. ***Производот на два полинома различни од нула-полином, е исто така различен од нула-полином.***

Доказ. Знаеме дека каноничното претставување на ненула полиномите P и Q имаат свој водечки член, различен од нула, а согласно Т(43.1) и производот PQ ќе содржи водечки член, различен од нула. Според тоа $PQ \equiv 0$, штд.

Теорема[43.3]. ***Ако барем еден од полиномите-множители не е моном, тогаш каноничното претставување на полиномот-производ содржи непомалку од два члена.***

Доказ. Нека полиномот $P(x, y, ..., z)$ не е моном, значи, тој има и водечки и последен член. Другиот полином-множител Q во секој случај ќе има барем еден член (ако е моном). Според тоа, полиномот-производ PQ ќе има непомалку од два члена, штд.

Пример. Следниот пример покажува дека полиномот-производ може да содржи два члена, ако ниту еден од множителите не е моном:

$$(x^2y^4 + x^4y^2 - x^3y^3)(x^2y + xy^2) = x^3y^6 + x^6y^3$$

Теорема[43.4]. ***Производот на два хомогени полинома од соодветни степени m и n е исто така хомоген полином од степен m + n.***

Доказ. Нека $P(x, y, ... z)$ и $Q(x, y, ... z)$ се хомогени полиноми од соодветни степен m и n. Треба да покажеме дека производот од кој било член $Ax^k y^l ..., z^p$ на полиномот P со кој било член $Bx^{k_1} y^{l_1} ... z^{r_1}$ на полиномот Q има еден ист степен $m + n$.

Навистина $(Ax^k y^l ... z^r) \cdot (Bx^{k_1} y^{l_1} ... z^{r_1}) = ABx^{k+k_1} u^{l+l_1} ... z^{r+r_1}$ и $(k + k_1) + (l + l_1) + ... + (p + p_1) = (k + l + ... + p) + (k_1 + l_1 + ... + p_1) = m + n$. Имајќи предвид дека, полиномите P и Q се различни од нула-полином; а од $P \not\equiv 0$ и $Q \not\equiv 0$ согласно Т(43.2) следува дека и производот $PQ \not\equiv 0$. Оттука заклучуваме дека, при сведувањето на сличните членови на производот PQ не е можно сите негови коефициенти да станат еднакви на нула.

Според тоа, производот PQ на два хомогени полинома P и Q е исто така хомоген полином, штд.

Теорема[43.5]. ***Степенот на полиномот-производ на два полинома од n променливи е еднаков на збирот од степените на полиномите-множители.***

Доказ. Нека $P(x, y, ..., z)$ е некој полином од степен m, *а* $Q(x, y, ..., z)$ некој полином од степен n. Да ги распоредиме и двата полинома по хомогени полиноми:

$$P(x, y, ..., z) = P_m(x, y, ..., z) + P_{m-1}(x, y, ..., z) + ... + P_0$$
$$Q(x, y, ..., z) = Q_n(x, y, ..., z) + Q_{n-1}(x, y, ..., z) + ... + Q_0,$$

каде што по услов е $P_m \not\equiv 0$ и $Q_n \not\equiv 0$. И полиномот-производ да го распоредиме по хомогени полиноми:

$$P \cdot Q = P_m Q_n + (P_{m-1} Q_n + P_m Q_{n-1}) + (P_{m-2} Q_n + P_{m-1} Q_{n-1} + P_m Q_{n-2}) + ... + P_0 Q_0.$$

Хомогениот полином $P_m Q_n$ има степен $m + n$, а секој од наредните собироци-хомогени полиноми има многу понизок степен, или е нула-полином. Според тоа, степенот на производот PQ е еднаков на $m + n$, штд.

§44. ФОРМУЛИ ЗА СКРАТЕНО МНОЖЕЊЕ

При трансформациите на целите рационални изрази и нивното претставување во каноничен вид, честопати станува потребно некој збир да се помножи сам со себе два, три или повеќе пати. За таа цел користиме **готови формули**, кои поради нивната почеста примена добиле и посебни имиња, а сите заедно го носат називот **формули за скратено множење**. Тука ќе наведеме краток избор од нив. Со множење на биномот $(x + y)$ сам со себе ги добиваме формулите:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (1)$$
$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3, \quad (2)$$

а со замена на y во нив со $-y$, добиваме:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad (3)$$
$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \quad (4)$$

Со непосредно множење на полиномите ги добиваме формулите:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 \quad (5)$$
$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3 \quad (6)$$
$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3 \quad (7)$$
$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad (8)$$

За одредување на квадратот на збирот $x_1 + x_2 + ... + x_n$ од n собироци потребно е да се состави сумата $\Sigma\, x_i k_j$ од семожните производи на секој член од збирот $x_1 + x_2 + ... + x_n$ се секој член пак на истиот тој збир. Во сумата $\Sigma\, x_i k_j$ се содржат и квадратите на секој од собироците. Навистина, при $i = j$ имаме $x_i k_j = x^2_i$. Ако $i \neq j$, тогаш на производот $x_i x_j$ (согласно комутативниот закон) му одговара и нему еднаквиот производ $x_j x_i$. Собирајќи ги еднаквите производи-собироци, ја добиваме следнава формула:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n)^2 = x^2_1 + x^2_2 + ... + x^2_n + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + ... + 2x_1x_n + 2x_2x_3 + ... + 2x_2x_n + 2x_3x_4 + ... + 2x_{n-1}x_n \quad (9)$$

Кон горниве девет формули ќе ги додадеме и следниве три:

$$(x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}) = x^n - y^n \quad (10)$$
$$(x + y)(x^{2\kappa-1} - x^{2\kappa-2}y + x^{2\kappa-3}y^2 - ... xy^{2\kappa-2} - y^{2\kappa-1}) = x^{2\kappa} - y^{2\kappa} \quad (11)$$
$$(x + y)(x^{2\kappa} - x^{2\kappa-1}y + x^{2\kappa-2}y^2 - ... - xy^{2\kappa-1} + y^{2\kappa}) = x^{2\kappa+1} + y^{2\kappa+1} \quad (12)$$

во чија точност се уверуваме со извршување на означеното множење.

Така, на пример, при $k = 3$ формулите (11) и (12) ќе гласаат:

$$(x + y)(x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5) = x^6 - y^6 \quad \text{и}$$
$$(x + y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6) = x^7 + y^7$$

Со формулите (идентитетите) (1) - (12) всушност се искажани правилата за скратено множење на биномот $x \pm y$ сам со себе (два или три пати) или со друг одреден полином од променливите x и y. За нив е карактеристично тоа што под x и y може да се подразберат не само непосредно аргументи, туку и кои било броеви или некои изрази (цели или дробни).

Примери: 1) $(3xy^2 - 2)^2 = (3xy^2)^2 - 2 \cdot 3xy^2 \cdot 2 + 2^2 = 9x^2y^4 - 12xy^2 + 4$,
2) $(2x^2y + 3x)(2x2y - 3x) = (2x^2y)^2 - (3x)^2 = 4x^4y^2 - 9x^2$
3) $(5xy - 3)(25x^2y^2 + 5xy \cdot 3 + 9) = (5xy)^3 - 3^3 = 125x^3y^3 - 27$.

ЗАДАЧИ

Претстави ги во каноничен вид изразите:

1. $[a(x + y) + b(x - y)]^2 - [a(x - y) + b(x + y)]^2$
2*. $(a + b + c - d)^2 + (a + b - c + d)^2 + (a - b + c + d)^2 + (-a + b + c + d)^2$
3*. $(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(-x + y + z)$.
4. $(x - y)^3 + 3(x - y)^2(x + y) + 3(x - y)(x + y)^2 + (x + y)^3$.
5*. $(x + y + z)^3 - (x + y - z)^3 - (x - y + z)^3 - (-x + y + z)^3$
6. Докажи ги идентитетите: а) $(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$,
б) $(x + y)^2 + (x - y)^2 = 2(x^2 + y^2)$
7*. Докажи дека изразот $P = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$ може да се претстави во вид на квадрат од трином.

§45. ЊУТНОВА БИНОМНА ФОРМУЛА

При трансформациите на целите рационални изрази честопати станува потребно да го развиеме во каноничен вид изразот $(x + y)^n$. За таа цел да изведеме соодветна формула.

Од специјалните изведени формули за $n = 2$ и $n = 3$:
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ и $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

забележуваме дека, во развојот на $(x + y)^2$ влегуваат членови што содржат x^2, xy, y^2; а во развојот на $(x + y)^3$ влегуваа членови што содржат x^3, x^2y, xy^2, y^3.

Оттука насетуваме дека, во развојот на $(x + y)^n$ треба да влегуваат членови, што ќе содржат:

x^n, $x^{n-1}y$, $x^{n-2}y^2$, ..., $x^{n-k}y^k$, ..., xy^{n-1}, y^n, при што водечкиот и најмладиот член соодветно се x^n и y^n.

Со помош на потполната математичка индукција ќе докажеме дека, за развојот на $(x + y)^n$ важи следнава важна формула, што го носи називот **Њутнова биномна формула**:

$$(x + y)^n = x^n + C^1_n x^{n-1}y + C^2_n x^{n-2}y^2 + \ldots + C_n^{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1} + C_n^k x^{n-k}y^k + \ldots + C_n^{n-1}xy^{n-1} + y^n, \quad (1)$$

каде што со C^k_n е означен коефициентот пред $x^{n-k}y^k$.

Очигледно е дека формулата (1) за $n = 1$ важи: $(x + y)^1 = x + y$.

При претпоставка дека таа важи за некој $n \in N$, ако успееме да докажеме дека таа важи и за $n + 1$; тогаш со тоа, согласно математичката индукција сме докажале дека таа важи за секој $n \in N$.

Да ги помножиме двете страни на развојот (1) со $(x + y)$:

$$(x+y)^{n+1} = (x^n + C^1_n x^{n-1}y + \ldots + C_n^{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1} + C_n^k x^{n-k}y^k + \ldots + C_n^{n-1}xy^{n-1} + y^n)(x+y) \qquad (2)$$

Да видиме каков коефициент ќе се јави пред членот со $x^{n-k+1}y^k$ по извршеното множење во (2). Очигледно е дека, членови со $x^{n-k+1}y^k$ ќе се сретнат два пати: при множењето $C_n^k x^{n-k}y^k$ со x и при множењето на $C_n^{k-1}x^{n-k+1}y^{k-1}$ со y. Значи, коефициентот пред членот со $x^{n-k+1}y^k$ е еднаков на $(C_n^k + C_n^{k-1})$. Потоа коефициентот пред водечкиот член x^{n+1} е еднаков на 1, а исто и коефициентот пред најмладиот член y^{n+1} е еднаков на 1. Според тоа, докажавме дека важи:

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + C^1_{n+1}x^n y + C^2_{n+1}x^{n-1}y^2 + \ldots + C^k_{n+1}x^{n-k+1}y^k + \ldots + C^n_{n+1}xy^n + y^{n+1}, \qquad (3)$$

каде што
$$\mathbf{C}^k_{n+1} = \mathbf{C}_n^k + \mathbf{C}_n^{k-1}. \qquad (4)$$

Со тоа докажавме дека Њутновата биномна формула (1) важи за секој природен број n. Коефициентите C^k_n се викаат **биномни коефициенти.** Покажавме дека за нив важи релацијата (4).

Бидејќи првиот и последниот коефициент во развојот (1) се еднакви на 1, затоа по дефиниција усвојуваме дека:

$$\mathbf{C}^0_n = \mathbf{C}^n_n = \mathbf{1}, \qquad (5)$$

па биномната формула понекогаш ја запишуваме и во видот:

$$(x+y)^n = \mathbf{C}^0_n x^n + \mathbf{C}^1_n x^{n-1}y + \mathbf{C}^2_n x^{n-2}y^2 + \ldots + \mathbf{C}_n^k x^{n-k}y^k + \ldots \mathbf{C}_n^{n-1}xy^{n-1} + \mathbf{C}_n^n y^n \qquad (6)$$

По дефиниција усвојуваме уште и $C^0_0 = 1$ (7)

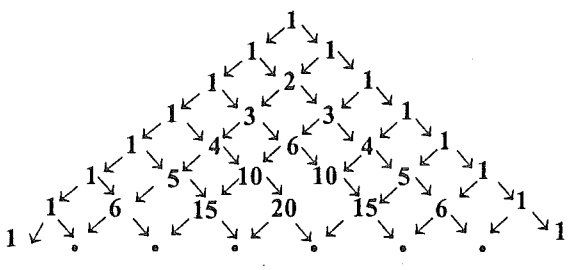
што значи дека релациите (5) важат и за $n = 0$.

Со помош на релацијата (4) можеме да ги пресметаме сите биномни коефициенти: $C^0_{n+1}, C^1_{n+1}, C^2_{n+1}, \ldots, C^{n+1}_{n+1}$, ако ги знаеме коефициентите C^0_n, C^1_n, C^2_n, ...; C^n_n и тоа:

$C^0_{n+1} = C^0_n = 1$ (согласно (5)), $C^1_{n+1} = C^1_n + C^0_n + C^2_{n+1} = C^2_n + C^1_n, \ldots C^{n+1}_{n+1} = C^n_n = 1$ (согласно (5)).

А одредувајќи ги $C^0_{n+1}, C^1_{n+1}, \ldots C^{n+1}_{n+1}$ потоа лесно ги одредуваме: $C^0_{n+2}, C^1_{n+2}, \ldots C^{n+2}_{n+2}$ итн.

Таквото последователно пресметување на биномните коефициенти може многу добро да се претстави со следнава табела, наречена **Паскалов триаголник**:



Тука, како што е покажано на шемата, секој број во наредната редица претставува збир на двата броја во претходната редица, што се наоѓаат над него.

Така на пример користејќи ја горната шема, добиваме:

$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

Ќе докажеме дека при $0 < k \le n$ важи следнава формула за пресметување на кој било биномен коефициент:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{8}$$

каде што $n!$ (читај n факториел) е производ на сите природни броеви од 1 до n. На пример $7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$. По договор земаме дека $0! = 1$.

Доказот и на оваа формула ќе го проследиме со помош на методот на потполната математичка индукција.

При $n = 1$ формулата (8) е точна $C_1^1 = \frac{1!}{1! \cdot 0!} = \frac{1}{1 \cdot 1} = 1$

Да претпоставиме дека формулата е точна за некој природен број n (при $1 < k \le n$). При таа претпоставка ќе докажеме дека формулата (8) е точна и за $n + 1$.

Навистина, при $1 < k \le n$, согласно (4), (5) и (8) имаме: $C_{n+1}^k, C_n^k, \ldots C_n^{k-1}$ = (согласно (4))

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = \text{(по претпоставка (8))}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k+1)(n-k)!} = \frac{n!(n-k+1)+n!\cdot k}{k!(n-k+1)!} =$$

$$= \frac{(n-k+1+k)n!}{k!(n+1-k)!} + \frac{(n+1)n!}{k!((n+1)-k)!} = \frac{(n+1)!}{k![(n+1)-k]!} = C_{n+1}^k \quad \text{штд.}$$

Аналогно, како кај формулите за скратено множење, и кај биномната формула под x и y може да се подразбираат не само аргументи, туку и кои било броеви, или некои изрази.

Пример 1. $(a^2x^2+\frac{b}{x^2})^6 = (a^2x^2)^6 + 6(a^2x^2)^5\cdot\frac{b}{x^2} + 15\cdot(a^2x^2)^4\cdot(\frac{b}{x^2})^2 + 20(a^2x^2)^3(\frac{b}{x^2})^3$

$+ 15\,(a^2x^2)^2\,(\frac{b}{x^2})^4 + 6(a^2x^2)(\frac{b}{x^2})^5 + (\frac{b}{x^2})^6 =$

$$a^{12}x^{12} + 6a^{10}x^8b + 15a^8b^2x^4 + 20a^6b^3 + 15a^4b^4\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{6a^2b^5}{x^8} + \frac{b^6}{x^{12}}.$$

Формулата (8) за пресметување на кој било биномен коефициент може да се упрости и да го добие следниов вид:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)!}{1\cdot 2\cdot 3....\cdot k}$$

Усвоено е последниов израз да го означуваме со симболот $\binom{n}{k}$ - читај:

„n над k“, т.е. $C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3....\cdot k}$

На пример $C_{12}^5 = \binom{12}{5} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792$

Користејќи го симболот $\binom{n}{k}$, биномната формула (6) можеме да ја запишеме и во следниот вид:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + ... + \binom{n}{k}x^{n-k}y^k + ... + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n, \qquad (10)$$

каде што согласно (5) е: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Забележуваме дека, развиениот вид на $(x + y)^n$ содржи $n + 1$ членови, од кои (k + 1)-от член:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}x^{n-k}y^k \qquad (11)$$

го викаме **општ член на биномната формула:**.

Пример 2. Да го одредиме петтиот член на развојот на $(2a^2 - bx)^{12}$.

Решение. $T_5 = T_{4+1} = \binom{12}{4}(2a^2)^{12-4}(-bx)^4 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 2^8a^{16}b^4x^4 =$

$990\cdot 2^7a^{16}b^4x^4 = 126720a^{16}b^4x^4.$

ЗАДАЧИ

1. Со помош на биномната формула развиј ги степените:
а) $(x+1)^6$, б) $(2a+3b)^5$, в) $(x-a)^7$
2*. Претстави го во каноничен вид изразот
а) $(x+y)^n+(x-y)^n$, б) $(x+y)^n-(x-y)^n$
3*. Одреди го третиот и седмиот член во развојот на:

а) $(x^2+y)^{13}$, б) $(3x^2-2xy)^{10}$, в) $(x^2+\frac{a}{x})^{12}$.

4. Докажи дека: а) Збирот на коефициентите на биномната формула е еднаков на 2^n, б) збирот на коефициентите на парни места е еднаков на збирот од коефициентите на непарни места, ако претпоставиме дека нултиот коефициент е на парно место.

5*. Докажи дека важи: $C^k_n = C^{n-k}_n$ или $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

6. Покажи дека $(1+i)^n+(1-i)^n$ е реален број.
7*. Докажи дека: а) $C^1_n + 6C^2_n + 6C^3_n = n^3$, б) $1 + 7C^1_n + 12C^2_n + 6C^3_n = (n+1)^3$.

§46. ИДЕНТИТЕТ НА ЛАГРАНЖ, УСЛОВНИ РАВЕНСТВА

1. При трансформациите на целите рационални изрази честа примена наоѓа и следниот **идентитет на Лагранж**:

$$(x^2_1+x^2_2+\ldots+x^2_n)(y^2_1+y^2_2+\ldots+y^2_n)-(x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n)^2 =$$
$$(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+\ldots+(x_1y_n-x_ny_1)^2+(x_2y_3-x_3y_2)^2+$$
$$(x_2y_4-x_4y_2)^2+\ldots+(x_2y_n-x_ny_2)^2+\ldots+(x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1})^2 \qquad (1)$$

или во краток запис

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \equiv \sum_{1\le i<k\le n} (x_i y_k - x_k y_i)^2 \qquad (2)$$

При $n=2$ и $n=3$ идентитетот (1) го има видот:

$$(x^2_1+x^2_2)(y^2_1+y^2_2)-(x_1y_1+x_2y_2)^2=(x_1y_2-x_2y_1)^2 \qquad (3)$$
$$(x^2_1+x^2_2+x^2_3)(x^2_1+y^2_2+y^2_3)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2 =$$
$$(x_1y_2-x_2y_1)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_2y_3-x_3y_2)^2 \qquad (4)$$

Доказ. Производот $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j^2$ е еднаков на збирот од можните производи $x_i^2 y_j^2$ каде што $i=1, 2, \ldots, n$ и $j=1, 2, \ldots, n$. Изразот $(\sum_{i=1}^{n} x_i y_j)^2$ е еднаков на збирот од квадратите $x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+\ldots+x_n^2y_n^2$ плус збирот од двојните производи

$$\sum_{i<k} 2x_i \cdot x_k y_i \cdot y_k = 2(x_1x_2y_1y_2+x_1x_3y_1y_3+\ldots+x_{n-1}x_ny_{n-1}y_n)$$

По извршување на одземањето на левата страна во (2) ќе се поништат сите собироци од видот $x_i^2 y_i^2$, и по групирање на останатите членови; левата страна на (2) ќе ја претставиме како збир од собироци од видот

$$x_i^2 y_k^2 - 2x_i x_k y_i y_k + x_k^2 y_i^2 = (x_i y_k - x_k y_i)^2$$

Оттука следува и точноста на идентитетот на Лагранж.

Очигледно е дека: за сите вредности на аргументите, кои го задоволуваа условот $x_i y_k - x_k y_i = 0, (i < k \le n)$, односно $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n}$, следува дека важи равенството:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_i^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) = (x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)^2$$

2. Равенството, кое е точно за сите вредности на аргументите во него, што задоволуваат еден или неколку дадени услови (равенки), се вика **условно равенство** или **условен идентитет**.

На пример, равенството (5) е едно условно равенство.

Пример 1. Ќе докажеме дека важи равенството

$(5x - 3y + 4z)(5x - 3y - 4z) = (3x - 5y)^2$, при услов $x^2 = y^2 + z^2$.

Доказ. Левата страна на равенството ја трансформираме:

$(5x - 3y + 4z)(5x - 3y - 4z) = (5x - 3y)^2 - 16z^2 = (5x - 3y)^2 - 16(x^2 - y^2) =$ (согласно условот $z^2 = x^2 - y^2$) $= 9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x - 5y)^2$, штд.

Пример 2. Да докажеме дека важи равенството

$2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$, ако $a + b + c = 0$.

Доказ. Користејќи го условот $a + b + c = 0$, имаме:

$a^4 + b^4 + c^4 = a^2(b + c)^2 + b^2(c + a)^2 + c^2(a + b)^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2abc(a + b + c) = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = a^2 + b^2 + c^2) - a^4 - b^4 - c^4$, т.е при услов $a + b + c = 0$ важи $a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - a^4 - b^4 - c^4$, а оттука:

$2(a^4 + b^4 + c^4) = (a^2 + b^2 + c^2)^2$, штд.

ЗАДАЧИ

1. Докажи дека важат идентитетите:

а) $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$,

б) $[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2]^2 = 2[(a - b)^4 + (b - c)^4 + (c - a)^4]$,

в) $(a + b + c + d)^2 + (a + b - c - d)^2 + (a + c - b - d)^2 + (a + d - b - c)^2 =$
$= 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

2*. Нека $a + b + c = 0$. Докажи дека важат равенствата:

а) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$,

б) $2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$

в) $5(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) = 6(a^5 + b^5 + c^5)$

3. Докажи дека од равенството: $(x + y - 2z)^2 + (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$ следува $x = y = z$.

§47. ДЕЛИВОСТ И ДЕЛЕЊЕ НА ПОЛИНОМИ

1. Поимот деливост на полиномите од повеќе променливи претставува обопштување на истиот поим за полиномите од една променлива, имено: Полиномот од n променливи $F(x, y, ..., z)$ велиме дека е делив со полиномот $\Phi(x, y, ..., z)$, ако и само ако во прстенот полиноми $P[x, y, ..., z]$ постои полином $Q(x, y, ..., z)$ за кој важи идентитетот

$$F(x, y, ..., z) = \Phi(x, y, ..., z) \cdot Q(x, y, ..., z) \qquad (1)$$

Полиномите $\Phi(x, y, ..., z)$ и $Q(x, y, ..., z)$ се викаат **делители** на полиномот $F(x, y, ..., z)$.

Нека $c \neq 0$ е произволен број од множеството во кое го разгледуваме полиномот $F(x, y, ..., z)$. Тогаш од равенството:

$$F(x, y, ..., z) = c\left[\frac{1}{c} \cdot F(x, y, ..., z)\right]$$

следува дека: секој број c различен од нула (полином од нулти степен), а исто така и секој полином $c \cdot F(x, y, ..., z)$, кој од дадениот полином $F(x, y, ..., z)$ се разликува по некој броен множител-различен од нула; се делители на дадениот полином. Тие делители се викаат **тривијални делители.** А секој друг делител на даден полином, што не е тривијален, се вика **нетривијален**.

На пример, полиномите $x + y$, $x^2 - xy + y^2$ се нетривијални делители на полиномот $x^3 + y^3$: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$.

Теорема[47.1]. ***Ако полиномот $F(x, y, ..., z)$ е делив со полиномот $\Phi(x, y, ..., z)$, тогаш постои единствен полином-количник $Q(x, y, ..., z)$.***

Доказ. Да претпоставиме дека при делењето на полиномот $F(x, y, ..., z)$ со $\Phi(x, y, ..., z)$ може да се добијат два различни количника Q_1 и Q_2. Тогаш ќе биде $F = \Phi \cdot Q_1$ и $F = \Phi \cdot Q_2$, а оттука $\Phi Q_1 \equiv \Phi \cdot Q_2$, или $\Phi(Q_1 - Q_2) \equiv 0$. По услов е $\Phi \neq 0$, па затоа мора да биде $Q_1 - Q_2 = 0$, или $Q_1 \equiv Q_2$. Во спротивно, би било $\Phi(Q_1 - Q_2) \neq 0$.

Да заклучиме дека, својствата за деливост на полиномите од една променлива, што ги разгледавме погоре во §10 важат и во општ случај за полиномите од произволен број променливи.

2. Слично како кај прстенот полиноми од една променлива и во прстенот полиноми од n променливи $P[x, y, ..., z]$ операцијата делење не е секогаш изводлива. Подолу ќе наведеме неколку признаци за неизводливост на делењето на два полинома, што се засновуваат врз теоремите за производ на два полинома во §43.

Делењето е неизводливо во следниве случаи:

1^0. Ако полиномот-деленик $F(x, y, ..., z)$ е моном, а полиномот делител $\Phi(x, y, ..., z)$ не е моном.

Навистина, за кој било полином Q производот ΦQ (каде Φ не е моном) во неговото канонично претставување согласно Т[43.3] не може да биде моном. На пример, мономот xyz не е делив со $x + y + z$.

2^0. Ако полиномот деленик $F(x, y, ..., z)$ има помал степен (по однос на сите аргументи) од степенот на делителот Φ.

Навистина, за кој било полином Q, производот ΦQ согласно Т[43.5] не може да има помал степен од степенот на Φ. На пример, полиномот $x + y$ не е делив до полиномот $xy + y^2$, бидејќи првиот полином има помал степен од вториот.

3^0. Ако водечкиот (или последниот) член на полиномот-деленик $F(x, y,..., z)$ не е делив со водечкиот (или последниот) член на полиномот-делител $\Phi(x, y, ..., z)$.

Всушност, каков и да е полиномот Q, равенството (1) не може да постои, бидејќи во спротивно, водечкиот член на F, согласно Т[43.1] што е еднаков на производот од водечките членови на Q и Φ, мора да е делив со водечкиот член на делителот Φ, а што не е случај.

Исто така, делењето не може да се изврши и кога последниот член на деленикот F не е делив со последниот член на делителот Φ.

Пример 1. Полиномот $F(x, y, z) = 2x^3y - 3x^2y^2z + 4x - 6y$ не е делив со полиномот $\Phi(x, y, z) = x^2yz - 2xz + 3y$.

Тоа го заклучуваме од таму што водечкиот член на првиот полином $(2x^3y)$ не е делив со водечкиот член на вториот полином (x^2yz) и покрај тоа што последниот член на првиот $(-6y)$ е делив со последниот член на вториот полином $(3y)$.

Полиномите F и Φ од n променливи нека се подредени по опаднувачките степени на некој од аргументите, на пример x:

$$F(x, y, ..., z) = F_0(y, ... z)x^n + F_1(y, ..., z)x^{n-1} + ... + F_n(y, ..., z) \quad (2)$$

$$\Phi(x, y, ..., z) = \Phi_0(y, ..., z)x^m + \Phi_1(y, ..., z)x^{m-1} + ... + \Phi_m(y, ..., z) \quad (3)$$

Ако земеме предвид дека водечкиот (последниот) член (по однос на даден аргумент) на производот $F\Phi$ е еднаков на производот од водечките (последните) членови на множителите F и Φ, тогаш делењето на полиномот F со Φ е неизводливо и во следниов случај:

4^0. Ако водечкиот (или последниот) член на деленикот во однос на даден аргумент не е делив со водечкиот (последниот) член на делителот во однос на истиот аргумент.

На пример, полиномот $F(x, y, z) = x^5 - 3x^4y + 2xy^2z - yz^2$ не е делив со полиномот $\Phi(x, y, z) = x^3z + 5x^2y - 3xy^2z$ бидејќи водечкиот член x^5 на полиномот F (по однос на аргументот x) не е делив со водечкиот член x^3z на полиномот Φ.

Во посебен случај делењето на F со Ф е неизводливо и ако:

а) Степенот на деленикот по однос на даден аргумент е помал од степенот на делителот во однос на истиот аргумент, т.е. ако $n < m$. На пример, таков е случајот со полиномите

$F(x, y) = 3x^3 - 2x^2y^2 + 5y$ и $\Phi(x, y) = x^5 - 2x^4y + 5xy$.

б) Деленикот не содржи некој аргумент, што го содржи делителот, т.е. ако $n = 0, m > 0$. На пример, полиномот $x^0yz + 3z + 2 = yz^2 + 3z + 2$ не е делив со $x^2y - 3xy^2 + 2y$, бидејќи вториот полином содржи аргумент што не се содржи во првиот.

Да забележиме дека од горенаведените прости признаци не се исцрпени сите можни случаи за неизводливост на делењето на два полинома.

3. Ќе забележиме дека, како кај полиномите од една променлива и кај полиномите од повеќе променливи важи истиот алгоритам за делење на два полинома со (или без) остаток.

За таа цел полиномот-деленик (2) и полиномот-делител (3) претходно ги претставуваме по опаднувачките степени на аргументот x. Во таков случај на полиномите (2) и (3) можеме да гледаме како на полиноми од една променлива x, при што нивните коефициенти $F_0, F_1, \ldots, F_n, \Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_m$ се полиноми од останатите аргументи $y, \ldots, z$.

Од алгоритмот на делење со остаток познато е дека коефициентите на количникот ги добиваме со делење на водечкиот коефициент F_0 на деленикот и водечките коефициенти на првиот до претпоследниот остаток, секогаш и само со водечкиот коефициент Φ_0 на делителот. Имајќи го тоа предвид доаѓаме до заклучокот:

При делењето со (или без) остаток на два полинома од неколку аргументи во општ случај доаѓаме до изрази-количници што не се полиноми (по однос на сите аргументи), бидејќи коефициентите се добиваат во вид на дробни изрази по однос на аргументите $y, \ldots, z$. Во посебен случај, ако водечкиот коефициент Φ_0 на делителот е број, тогаш коефициентите на количникот и на остатоците нема да содржат аргументи во именителите, што значи во тој случај при делењето со остаток ќе се добијат полиноми распоредени по степените на x.

Пример 2. Да го извршиме делењето со остаток на полиномот $F(x, y) = x^5 - 3yx^4 + 2y^2x^3 - 4yx^2$ со полиномот $\Phi(x, y) = yx^2 - y^2x + y$.

Решение. Гледаме дека полиномите се подредени по опаднувачките степени на аргуменот x, а делењето практично го извршуваме вака:

$$(x^5 - 3yx^4 + 2y^2x^3 - 4yx^2) : (yx^2 - y^2x + y) = \frac{1}{y} \cdot x^3 - 2x^2 - \frac{1}{y} \cdot x - 3$$

$$\begin{array}{l}
\pm x^5 \mp yx^4 \pm x^3 \\
\hline
-2yx^4 + (2y^2 - 1)x^3 - 4yx^2 \\
\mp 2yx^4 \pm 2y^2 x^3 \mp 2yx^2 \\
\hline
-x^3 - 2yx^2 \\
\mp x^3 \pm yx^2 \mp x \\
\hline
-3yx^2 + x \\
\mp 3yx^2 \pm 3y^2x \mp 3y \\
\hline
(1 - 3y^2)x + 3y
\end{array}$$

Тука за количник добивме дробен рационален израз, што не е полином. Тоа е затоа што водечкиот коефициент на делителот $\Phi_0(y) = y$ не е број, туку е полином од аргументот y.

Пример 3. $(x^6 - 3yx^4 + (3y^2 - 2y^4)\ x^2 - y^3) : (x^2 - y) = x^4 - 2yx^2 + y^2 - 2y^4$

$$\begin{array}{r}
\pm x^6 \mp yx^4 \\
\hline
-2yx^4 + (3y^2 - 2y^4)x^2 - y^3 \\
\mp 2yx^4 \qquad \pm 2y^2x^2 \\
\hline
(y^2 - 2y^4)x^2 - y^3 \\
(y^2 - 2y^4)x^2 \mp y^3 \pm 2y^5 \\
\hline
-2y^5
\end{array}$$

Така добиваме дека $Q(x, y) = x^4 - 2yx^2 + y^2 - 2y^4$ и остаток $R(x, y) = -2y^5$.

Пример 4. $(y^6 + 3xy^4 + 3x^2y^2 + x^3) : (y^4 + 2xy^2 + x^2) = y^2 + x$

$$\begin{array}{r}
\mp y^6 \pm 2xy^4 \pm x^2y^2 \\
\hline
xy^4 + 2x^2y^2 + x^3 \\
\pm xy^4 \pm 2x^2y^2 \pm x^3 \\
\hline
0
\end{array}$$

Тука полиномите деленик и делител се подредени по степените на аргументот y, а бидејќи остатокот е нула, тоа значи: првиот полином е делив со вториот, т.е. важи равенството:

$$y^6 + 3xy^4 + 3x^2y^2 + x^3 = (y^4 + 2xy^2 + x^2)(y^2 + x)$$

4. Лесно се покажува дека важи и обопштената **теорема на Безу** и во случај кога полиномот-деленик $F(x, y, ..., z)$ е од повеќе променливи, а делител е разликата $x - A(y, ..., z)$, каде што $A(y, ..., z)$ е полином, т.е. ќе важи идентитетот:

$F(x, y, ..., z) \equiv [x - A(y, ..., z)]\ Q(x, y, ..., z) + R(y, ... z)$, при што остатокот од делењето е еднаков на резултатот од замената на $x = A(y, ..., z)$ во $F(x, y, ..., z)$, т.е.

$R(y, ..., z) \equiv F[A(y, ..., z), y, ..., z]$

Оттука следува следнава важна:

Последица. Полиномот $F(x, y, ..., z)$ е делив со разликата $x - A(y, ..., z)$, (каде што $A(y, ..., z)$ е полином) ако и само ако резултатот од замената на $x = A(y, ..., z)$ во $F(x, y, ..., z)$ е идентично еднаков (по однос на променливите $y, ..., z$) на нула т.е. ако

$$F[A(y, ..., z), y, ..., z] \equiv 0$$

Пример 5. Да ја одредиме вредноста на коефициенто k, при што полиномот $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + k \cdot xyz$ да биде делив со триномот $x + y + z$.

Решение. Согласно последицата, полиномот $F(x, y, ..., z)$ за да биде делив со разликата $x - (-y - z)$ потребно е да важи условот

$$F(-y-z, y, z) \equiv (-y-z)^3 + y^3 + z^3 + k\cdot(-y-z)\,yz = -(y+z)^3 + (y+z)(y^2 - yz + z^2) - kyz(y+z) \equiv -(y+z)[(y+z)^2 - (y^2 - yz + z^2) + kyz] \equiv -(y+z)(3yz + kyz) = -(3+k)(y+z)yz \equiv 0.$$

Оттука $k = -3$, т.е. $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ е делив со триномот $x + y + z$.

ЗАДАЧИ

Изврши го делењето на полиномите:

1. $(2x^4 - 5x^3y - 4x^2y^2 + 7xy^3) : (x^2 - 3xy + y^2)$

2. $(x^4yz + xy^4z + xyz^4 - x^3y^3) : (x^2 - yz)$

3. а) $(x^4 + x^2y^2 + y^4) : (x^2 - xy + y^2)$, б) $(x^5 - y^5) : (x - y)$

§48. РАЗЛОЖУВАЊЕ НА ПОЛИНОМИТЕ НА НЕРАЗЛОЖЛИВИ МНОЖИТЕЛИ

Даден полином $F(x, y, ..., z)$ од n променливи да се разложи на множители во некое бројно поле P, значи тој да се трансформира во производ од непомалку од два полинома со степени непомали од прв и со коефициенти од тоа поле.

Полиномите од повеќе променливи, исто како и полиномите од една променлива, можат да бидат **разложливи** или **неразложливи** во даденото бројно поле P. Полиномот $F(x, y, ..., z)$ од степен k, $(k \geq 1)$ се вика разложлив во полето P, ако тој се разложува во производ од полиноми, чии степени се помали од k и со коефициенти од полето P. Полиномот $F(x, y, ..., z)$ со степен k, $(k \geq 1)$, пак, се вика неразложлив во полето P, ако тој нема нетривијални делители со коефициенти од тоа поле.

Треба да одбележиме дека, за разложливоста или неразложливоста на даден полином може да се говори само по однос на дадено бројно поле P. На пример, полиномот $x^2y^2 - 3$ со цели коефициенти е неразложлив во полето на рационалните броеви, бидејќи не може да се разложи на два множителa со рационални коефициенти. Меѓутоа, во полето на реалните броеви тој полином е разложлив, што се гледа од равенството $x^2y^2 - 3 = (xy - \sqrt{3})(xy + \sqrt{3})$.

Подолу ќе наведеме неколку основни својства на неразложливите полиноми (се мисли на нивна неразложливост во дадено поле P)

1^0. Секој полином од прв степен е неразложлив.

Навистина, во спротивен случај тој би можело да се претстави во вид на производ од непомалку од два множителa со степени непомали од прв; а тоа не е можно.

2^0. Ако полиномот $p(x, y, ..., z)$ е неразложлив во полето P, тогаш неразложлив

ќе биде и секој полином $c \cdot p(x, y, ..., z)$, каде што c е број различен од нула од полето P. Тоа ни овозможува испитувањето на неразложливоста да го ограничиме на полиноми, чиј водечки коефициент е еднаков на единица.

3^0. Ако $F(x, y, ..., z)$ е произволен, а $p(x, y, ..., z)$ - неразложлив полином, тогаш или F е делив со p, или тие два полинома се заемно прости.

Навистина, ако $D(F, p) = d(x, y, ..., z)$, тогаш d, бидејќи е делител на неразложливиот полином p, тој е или од нулти степен, или е полином од видот $c \cdot p(x, y, ..., z)$, каде $c \neq 0$. Во првиот случај F и p се заемно прости, а во вториот случај полиномот F е делив со полиномот p.

4^0. Ако производот на два полинома F и Ф е делив со неразложлив полином p, тогаш барем еден од нив е делив со p.

Навистина, ако полиномот F не е делив со p, тогаш согласно 3^0 F и p се заемно прости, а тогаш пак согласно својството 2^0 во §11 полиномот F мора да е делив со p.

Може да се докаже дека важи следнава:

Теорема[48.1]. ***Секој ненула полином од прстенот P[x, y, ..., z] во дадено поле P се разложува во производ од неразложливи множители:***

$$F(x, y, ..., z) = p_1(x, y, ..., z) \cdot p_2(x, y, ..., z) ... p_s(x, y, ..., z) \quad (1)$$

Тоа разложување е еднозначно со точност до бројни множители (од тоа поле).

Доказот на оваа теорема се разгледува во вишата алгебра. Во елементарната алгебра се разгледуваат само некои посебни методи на практичното разложување на полиномите на множители. Тука ќе дадеме неколку појаснувања на самата теорема:

а) Ако полиномот $F(x, y, ... , z)$ е неразложлив, тогаш десната страна во равенството (1) се состои само од „еден множител" и равенството (1) го добива видот $F(x, y, ..., z) = F(x, y, ..., z)$.

б) Зборовите „со точност до бројни множители" означуваат дека две разложувања на даден полином, кои се разликуваат само по бројни множители, не се сметаат за различни. На пример, разложувањата:

$6x^2 + xy - y^2 = (3x - y)(2x + y) = 3(x - \frac{1}{3} \cdot y)(2x + y) = 6(x - \frac{1}{3} y)(x + \frac{1}{2} \cdot y)$ нема да ги сметаме за различни.

в) Ако кај секој од неразложливите множители $p_1, p_2, ..., p_s$ во равенството (1) ги извлечеме пред заграда соодветните нивни водечки коефициенти, ќе го добиеме разложувањето:

$$F(x, y, ..., z) = a_0 p_1(x, y, ..., z) \cdot p_2(x, y, ..., z) ... p_s(x, y, ..., z), \quad (2)$$

каде што $p_1, p_2, ..., p_s$ ќе бидат неразложливи полиноми со водечки коефициенти еднакви на единица, а бројниот множител a_0 ќе биде еднаков на водечкиот коефициент на полиномот $F(x, y,..., z)$

г) Во формулата (2) меѓу неразложливите може да се сретнат и еднакви множители. Ако неразложливиот множител $p(x, y, ..., z)$ во разложувањето (2) се сретнува точно k пати, тогаш тој се вика k - **кратен множител** на $F(x, y, ..., z)$. Ако, пак,

множителот p во формулата (2) влегува само еднаш, тој се вика **прост** или **еднократен множител** на F(x, y, ..., z). Обединувајќи ги еднаквите множители во (2) ќе го добиеме следново канонично разложување на полиномот F(x, y, ..., z) на неразложливи множители:

$$F(x,...z) = a_0 p_1^{k1}(x,...,z) p_2^{k2}(x,...,z)...p_s^{ks}(x,y,...,z)^{k1} \quad (3)$$

каде a_0 е броен множител, а k_1, k_2, ..., k_s се некои природни броеви. За разлика од полиномите со една променлива, кои, како што знаеме, секогаш можат да бидат разложени на линеарни множители во некое бројно поле; кај полиномите од повеќе променливи постојат **апсолутно неразложливи полиноми** од произволен степен во кое било поле P. Таков е на пример, полиномот

$$F(x, y) = P(x) + y, \quad (4)$$

каде $P(x)$ е произволен полином од една променлива во полето P.

Навистина, ако во некое поле P би постоело разложување

$F(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y)$,

тогаш подредувајќи ги полиномите $f(x, y)$ и $g(x, y)$ по степените на y, би добиле, дека $f(x, y) = a_0(x) \cdot y + a_1(x)$ и $g(x, y) = b_0(x)$, односно

$F(x, y) = [a_0(x) \cdot y + a_1(x)] \cdot b_0(x) = a_0(x) \cdot b_0(x) \cdot y + a_1(x) \cdot b_0(x)$

Оттука, а согласно (4) следува дека $a_0(x) \cdot b_0(x) = 1$, односно, дека $a_0(x)$ и $b_0(x)$ се броеви од полето P.

Според тоа, полиномот $F(x, y)$ може да има само тривијални делители.

§49. РАЗЛИЧНИ МЕТОДИ ЗА РАЗЛОЖУВАЊЕ НА ПОЛИНОМИТЕ НА МНОЖИТЕЛИ

Во елементарната алгебра, при непостоењето на општ метод на разложување на полиномите на множители, прибегнуваме кон разгледување, систематизација и примена на различни посебни начини на разложување.

Повеќето прости начини на разложување се засновуваат на примената на законите на аритметичките операции: комутативност (размена на местата), асоцијативност (групирање на членовите) и дистрибутивност. На пример, т.н. метод на **извлекување на заедничкиот множител пред заграда** е непосредна примена на дистрибутивниот закон на множењето во однос на собирањето:

$(A + B)C = AC + BC$, каде што A, B, C се кои било полиноми.

Ако во ова равенство страните си ги променат местата, го добиваме равенството $AC + BC = (A + B)C$, со кое збирот се трансформира во производ.

Пример 1. $a(x + y) + b(x + y) - a(x + y) = (x + y)(a + b - c)$

При разложувањето на полиномите на множители често го користиме и методот на **користење на формулите за скратено множење**. Навистина, формулите (1) до (9) во §44 за скратено множење со промена на местата на нивните страни стануваат формули за трансформација на збир во производ.

Пример 2. $x^2y^2 - 49z^2 = (xy)^2 - (7z)^2 = (xy - 7z)(xy + 7z)$

Обично пред примената на горниве два метода за разложување неопходно е да се изврши одредено разместување и групирање на членовите на полиномот во неколку групи, врз секоја од кои потоа ќе се примени соодветен метод. Овој начин се вика **метод на групирање**.

Пример 3. $4xy - xz^2 + 4y^2z - z^3 = (4xy^2 + 4y^2z) - (xz^2 + z^3) =$
$4y^2(x + z) - z^2(x + z) = (x + z)(4y^2 - z^2) = (x + z)(2y - z)(2y + z).$

Понекогаш при разложувањето прибегнуваме и кон некои „вештачки" трансформации, кои се состојат во разбивање на некој собирок во збир од два или неколку слични членови. Потоа вршиме групирање по два или три члена, но така што по разложувањето на секоја група да добиеме ист множител - израз, кој што понатаму го извлекуваме пред нова заграда.

Пример 4. $x^2 + 7x + 12 = x^2 + 3x + 4x + 12 = x(x + 3) + 4(x + 3) = (x + 3)(x + 4).$

Пример 5. $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz = (x^2y + xy^2) + (x^2z + xyz) + (xz^2 + yz^2) + (xyz + y^2z) = xy(x + y) + xz(x + y) + z^2(x + y) + yz(x + y) = (x + y)(xy + xz + yz + z^2) = (x + y)[x(y + z) + z(y + z)] = (x + y)(y + z)(x + z).$

При разложувањето на полиномите на множители често ја користиме и трансформацијата, наречена **дополнување до полн квадрат**. Таа трансформација се состои во дополнување на некоја група членови од полиномот (по пат на внесување на спротивни слични членови што се поништуваат) до квадрат на некој бином или трином

Пример 6. Да го разложиме на неразложливи множители полиномот

$$x^4 + x^2y^2 + y^4.$$

Решение. Применувајќи ја трансформацијата дополнување до полн квадрат, добиваме: $x^4 + x^2y^2 + y^4 = x^4 + x^2y^2 + y^4 + x^2y^2 - x^2y^2 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2 = (x^2 + y^2 - xy)(x^2 + y^2 + xy).$

Триномите $x^2 + xy + y^2$ и $x^2 - xy + y^2$ во полето на реалните броеви се неразложливи. Според тоа, разложувањето на даденот полином на неразложливи множители во полето на реалните броеви гласи: $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2).$

Меѓутоа во полето на комплексните броеви триномите $x^2 + xy + y^2$ и $x^2 - xy + y^2$ се разложливи на линеарни множители:

$$x^2+xy + y^2 = x^2 + 2x\left(\frac{1}{2}\cdot y\right) + \frac{1}{4}\cdot y^2 + y^2 - \frac{1}{4}\cdot y^2 = \left(x + \frac{1}{2}\cdot y\right)^2 + \frac{3}{4}\cdot y^2 =$$

$$\left(x + \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot yi\right)\left(x + \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot yi\right).$$

Аналогно за триномот $x^2 - xy + y^2$ добиваме:

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot yi\right)\left(x - \frac{y}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot yi\right).$$

Пример 7. Да го разложиме на множители полиномот:
$P(a, b, c) = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4.$

Решение. Имајќи ја предвид формулата
$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$, односно
$-(a^2 + b^2 - c^2)^2 = -(a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2) = -a^4 - b^4 - c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2$,
а со додавање на изразот $2a^2b^2 - 2a^2b^2$, кон дадениот полином, добиваме:
$2a^2b^2 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2b^2 - (2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4) =$
$(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2) = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = [(a + b)^2 - c^2] \cdot [c^2 - (a - b)^2] =$
$(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)$

Пример 8. Да го разложиме на множители полиномот
$x^6 - y^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4$.

Решение. Согласно формулите за скратено множење (5), (6), (7), имаме:
$x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \cdot (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
и користејќи го разложувањето во примерот 6, добиваме:
$x^6 - y^6 + x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) + (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) =$
$(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)(x^2 - y^2 + 1)$.

Пример 9. Да се разложи на множители полиномот
$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Решение. Првите два члена за да ги дополниме до полн куб ќе додадеме и одземеме $3x^2y + 3xy^2$, па добиваме:
$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 + z^3 - 3x^2y - 3xy^2 - 3xyz =$
$(x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z) = (x + y + z)[(x + y)^2 - z(x + y) + z^2] - 3xy(x + y + z) =$
$(x + y + z)[x^2 + 2xy + y^2 - xz - yz + z^2 - 3xy) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$

Пример 10. Да се докаже дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот $n^5 - 5n^3 + 4n$ е делив со 120.

Решение. Да го разложиме на неразложливи множители триномот:
$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^4 - n^2 - 4n^2 + 4) = n[n^2(n^2 - 1) - 4(n^2 - 1] =$
$n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$.

Гледаме дека дадениот трином е разложен на пет линеарни множители, поточно на пет последователни природни броеви. Нека се тоа првите пет природни броеви $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, чии производ е еднаков на 120. Според тоа, производот на кој било пет последователни природни броеви е делив со 120.

ЗАДАЧИ

Разложи ги на неразложливи множители полиномите во полето $\mathbb{R}$:

1. а) $x^3 + x^2 - xy + y^2 + y^3$, б) $2(x - y) - (y - x)^2$

2. а) $x^4 - 2xy - y^2 + 2x^3$, б) $4(x - y)^2 - 4(x - y) + 1$

3. а) $ac(a + c) - bc(b + c) + ab(a - b)$, б) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$

4. а) $x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$, б) $x^5 + x + 1$

5. а) $x^2 + 2xy + y^2 - a^2 + 2ab - b^2$, б) $x(x + z) - y(y + z)$

6. а) $x^5 + y^5$, б) $x^5 - y^5$, в) $x^{12} - y^{12}$.

7*. а) $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$, б) $(x + y)^5 - x^5 - y^5$

8*. а) $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$, б) $ax^2 - bx^2 + a - b + x^2 + 1$

9*. $(x + y)^2(x - y) + (y + z)^2(y - z) + (z + x)^2(z - x)$.

10. Докажи ако n е непарен природен број, тогаш бројот $n^3 + 3n^2 - n - 3$ е делив со 48.

§50. РАЦИОНАЛНИ ДРОПКИ СО ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

Рационалните изрази од неколку променливи исто како и со една променлива, знаеме, можат да бидат **цели** или **дробни**. Целите рационални изрази од една, односно неколку променливи, доведени во каноничен вид, ги викаме **полиноми** од една, односно неколку променливи. Потоа видовме дека, секој дробен рационален израз од една променлива може идентично да се трансформира во видот $\frac{f(x)}{g(x)}$, каде што f и g се полиноми од една променлива, при што $g(x) \equiv 0$. Слично на тоа, може да се покаже дека и секој дробен рационален израз $\mathbb{R}(x, y, ..., z)$ од n променливи може да се трансформира во вид $\frac{F(x,y....,z)}{\Phi(x,y...,z)}$, каде што F и Φ се полиноми од n променливи.

Количникот од два полинома од неколку променливи $\frac{F}{\Phi}$, каде што $\Phi \equiv 0$, се вика **рационална** (или **алгебарска**) **дропка** од тие променливи. Рационалната дропка, во зависност од полиномите: броител F и именител Φ може да биде со рационални, реални или комплексни коефициенти; а да биде разгледувана во некое бројно поле (во $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) во зависност од тоа, во кое бројно поле променливите и рационалната дропка земаат вредности.

Дефиниционa област (домен) на рационалната дропка од неколку променливи е множеството од сите системи на вредности на аргументите (од бројното поле во кое ја разгледуваме дропката) за кои полиномот-именител на дропката не добива вредност нула. На пример, дефиниционa област на дропката $\frac{x-y}{x^2+y^2-1}$ (во полето на реалните броеви е множеството на сите точки (x, y) во координатната рамнина, освен точките, чии координати ја задоволуваат равенката $x^2 + y^2 - 1 = 0$, односно освен точките од кружницата $x^2 + y^2 = 1$. Тоа симболички го запишуваме $D = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \neq 1\}$.

Секој полином $F(x, y, ..., z)$ може да се разгледува и како рационална дропка со именител единица, т.е. $F(x, y, ..., z) = \frac{F(x...z)}{1}$.

Според тоа, множеството полиноми од n променливи може да биде вклучено како подмножество од множеството на сите рационални дропки од истите променливи.

За множеството полиноми од една променлива, а исто и од повеќе променливи покажавме дека, секое од нив со дефинираните операции собирање и множење во него, образува (комутативен) прстен, што го означуваме со $R[x]$ и $R[x, y, ..., z]$.

За множеството, пак, од сите рационални дропки од една променлива со рационални (реални или комплексни) коефициенти со дефинираните операции

собирање и множење во него, образува **поле на рационални дропки** од променливата x, кое го означуваме со $P(x)$. На идентичен начин може да се покаже и постоење на **поле на рационални дропки** до n променливи $P(x, y, ..., z)$, во кое е вклучен целосно и прстенот полиноми од n променливи $P[x, y, ..., z]$.

Две рационални дропки $\frac{F}{\Phi}(\Phi \equiv 0)$ и $\frac{G}{H}(H \equiv 0)$ од n променливи усвојуваме дека се еднакви (аналогно како и кога тие се од една променлива), ако и само ако важи равенството $F \cdot H = \Phi \cdot G$, т. е.

$$\frac{F}{\Phi} = \frac{G}{H} \Leftrightarrow F \cdot H = \Phi \cdot G \tag{1}$$

Теоремата [21.1], која се однесува за скратување на рационалните дропки од една променлива, може да се покаже дека, важи и за рационалните дропки од n променливи. Треба да забележиме дека, скратувањето и на рационалните дропки од n променливи може да ја прошири нивната дефиниционa област.

Рационалната дропка $\frac{F}{\Phi}$ од неколку променливи се вика **нескратлива**, ако нејзиниот броител и именител се заемно прости полиноми, т.е. ако тие (освен бројни) немаат заеднички делители. Очигледно е дека, секоја рационална дропка од n променливи ако се скрати со најглемиот заеднички делител на нејзиниот броител и именител, ќе се добие еднаква со неа нескратлива дропка.

Замената на која било рационална дропка од n променливи со нејзината еднаква нескратлива дропка, се вика нејзино **претставување** во **канонична форма** или **упростување** на рационалната дропка.

Може да се докаже дека, две еднакви рационални дропки имаат едно исто канонично претставување, со точност до некои заеднички бројни множители на броителот и именителот.

Собирањето и множењето на рационалните дропки од n промеливи ги изведуваме според истите правила, кои важат и за рационалните дропки од една променлива. При собирањето на рационалните дропки, претходно го одредуваме најмалиот заеднички содржател (нзс) за полиномите-именители на дропките-собироци; а потоа дропките-собироци ги доведуваме на заеднички именител по пат на проширување на секоја дропка до најмалиот заеднички именител.

Најголемиот заеднички делител $D(F, \Phi)$ на полиномите F и Φ; и најмалиот заеднички содржател $s(F, \Phi)$ на тие два полинома, ги одредуваме на следниов начин:

Ако се дадени (извршени) разложенијата на полиномите $F(x, y, ..., z)$ и $\Phi(x, y, ..., z)$ на неразложливи множители, тогаш:

а) Најголемиот заеднички делител $D(F, \Phi)$ на полиномите F и Φ е еднаков на производот од множителите што влегуваат истовремено и во двете разложенија, при што секој заеднички множител се избира во понискиот степен на кратност во двата дадени полинома.

б) Најмалиот заеднички содржател s(F, Ф) на полиномите F и Ф е еднаков на производот од сите заеднички и незаеднички множители што влегуваат во разложенијата, при што секој множител се избира во највисокиот степен на кратност во полиномите.

Пример 1. Рационалната дропка $\frac{x^4-y^4}{x^6+y^6}$ е скратлива, бидејќи нејзиниот броител и именител имаат заеднички нетривијален делител $x^2 + y^2$. По нејзиното скратување ја добиваме нескратливата дропка.

$$\frac{x^4-y^4}{x^6+y^6}=\frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)}=\frac{x^2-y^2}{x^4-x^2y^2+y^4}$$ во полето на реалните броеви.

Пример 2. Да се скрати дропката $\frac{x^2+y^2-z^2-2xy}{x^2-y^2+2yz-z^2}$.

Решение. $\frac{x^2+y^2-z^2-2xy}{x^2-y^2+2yz-z^2}=\frac{(x-y)^2-z^2}{x^2-(y-z)^2}=\frac{(x-y+z)(x-y-z)}{(x+y-z)(x-y+z)}=\frac{x-y-z}{x+y-z}$.

За тројката вредности на променливите $(x, y, z) = (1, -3, 2)$ дадената дропка нема смисла (бидејќи добива вредност $\frac{0}{0}$), но нејзината еднаква нескратлива дропка $\frac{x-y-z}{x+y-z}$ за тројката броеви $(1, -3, 2)$ добива вредност $\frac{1+3-2}{1-3-2}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$. Во овој случај добиената вредност на нескратливата дропка ќе ја земеме за вредност на дадената дропка.

Пример 3. Да се соберат дропките:

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}$$

Решение. Најмал заеднички именител за именителите на дадените дропки ќе биде $Q = xyz(x-y)(x-z)(y-z)$. По сведувањето на на дропките на заеднички именител и разложувањето на броителот на дропката-збир, добиваме:

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}=$$

$$=\frac{1}{x(x-y)(x-z)}-\frac{1}{y(x-y)(y-z)}+\frac{1}{z(x-y)(x-z)}=\frac{yz(y-z)-xz(x-z)+xy(x-y)}{xyz(x-y)(x-z)(y-z)}=$$

$$\frac{y^2z-yz^2-x^2z+xz^2+xy(x-y)}{xyz(x-y)(x-z)(y-z)}=\frac{xy(x-y)-z(x^2-y^2)+z^2(x-y)}{xyz(x-y)(x-z)(y-z)}=\frac{(x-y)(xy-zx-zy+z^2)}{xyz(x-y)(x-z)(y-z)}=$$

$$\frac{(x-y)\left[y(x-z)-z(x-z)\right]}{xyz(x-y)(x-z)(y-z)}=\frac{(x-y)(x-y)(y-z)}{xyz(x-y)(x-z)(y-z)}=\frac{1}{xyz}.$$

Пример 4. Да се упрости изразот

$$\left(\frac{x^2-xy}{x^2y+y^3}-\frac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3}\right)\cdot\left(1-\frac{y-1}{x}-\frac{y}{x^2}\right).$$

Решение. Ги извршуваме назначените операции во заградите, а потоа и множењето на дропките, па добиваме:

$$\left(\frac{x^2-xy}{x^2y+y^3}+\frac{2x^2}{x^3-y^3+xy^2-x^2y}\right)\cdot\frac{x^2-x(y-1)-y}{x^2}=\left(\frac{x(x-y)}{y(x^2+y^2)}+\frac{2x^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}\right)\cdot$$

$$\frac{x^2-xy+x-y}{x^2}=\left(\frac{x(x-y)}{y(x^2+y^2)}\right)+\frac{2x^2}{(x-y)(x^2+y^2+xy-xy)}\cdot=\frac{x(x-y)+(x-y)}{x^2}=\frac{x(x-y)^2+2x^2y}{y(x-y)(x^2+y^2)}\cdot$$

$$\frac{(x-y)(x+1)}{x^2}=\frac{x\left[(x-y)^2+2xy\right]}{y(x-y)(x^2+y^2)}\cdot\frac{(x-y)(x+1)}{x^2}=\frac{x(x^2+y^2)}{y(x-y)(x^2+y^2)}\cdot\frac{(x-y)(x+1)}{x^2}=\frac{x+1}{xy}$$

Пример 5. Да се докаже идентитетот

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c, \text{ ако } a\neq b\neq c.$$

Доказ. $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^3}{(b-c)(a-b)}+\frac{c^3}{(a-c)(b-c)}=\frac{a^3(b-c)-b^3(a-c)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$

Потоа броителот на оваа дропка го разложуваме на множители:

$$=\frac{c^3(a-b)+a^3b-a^3c-ab^3+b^3c}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{c^3(a-b)+ab(a^2-b^2)-c(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{(a-b)\left[c^3+ab(a+b)-c(a^2+ab+b^2)\right]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)\left[c^3+a^2b+ab^2-ca^2-abc-b^2c\right]}{(a-b)(a-b)(b-c)}=$$

$$=\frac{(a-b)\left[ab(a-c)+b^2(a-c)-c(a^2-c^2)\right]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)(a-c)(ab+b^2-ac-c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{(a-b)(a-c)\left[a(b-c)+(b-c)(b+c)\right]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=a+b+c.$$

ЗАДАЧИ

Да се упростат изразите

1* $\frac{1}{(x+y)^3}(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3})+\frac{3}{(x+y)^4}(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2})+\frac{6}{(x+y)^5}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$.

2. $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}+\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{4x^3}{x^4+y^4}+\frac{8x^7}{x^8+y^8}+\frac{16x^{15}}{x^{16}+y^{16}}+\frac{32x^{31}}{x^{32}+y^{32}}$

3. $\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}$

4. $\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{a+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

5. $\frac{1}{(x+y)^2}+(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2})+\frac{2}{(x+y)^3}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$.

6*. Докажи: ако $a + b + c = 0$, тогаш важи идентитетот:

$$(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b})(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a})=9$$

Докажи ги идентитетите:

7*. $a^2\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)})=x^2$

8. $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)})=1$

9*. $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$

10*. $\frac{ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}=1$

§51. СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ

Помеѓу полиномите од повеќе променливи посебен интерес претставуваат таканаречените **симетрични полиноми**.

Дефиниција. *Полиномот од n променливи $P(x, y, ..., z)$ се вика симетричен, ако тој не се менува при произволна транспозиција (преместување) на неговите променливи*, т.е. ако

$$P(x, y, ..., z) = P(y, x, ..., z) = P(y, z, ..., x)$$

На пример, полиномот $P(x, y, z) = x^3y^3 + y^3z^3 + x^3z^3$ со транспозиција на променливите $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & x & z \end{pmatrix}$ (при која променливата x преминува во y, y преминува во x, z преминува во z (или останува во место), го добива видот $P(y, x, z) = y^3x^3 + x^3z^3 + y^3z^3$; а при транспозиција $\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \end{pmatrix}$ тој преминува во $P(y, z, x) = y^3z^3 + z^3x^3 + y^3x^3$. Забележуваме дека и со двете транспозиции на променливите, се менува само редоследот на членовите и редоследот на аргументите-множители во членовите на полиномот. Но, бидејќи важи комутативниот закон на операцијата собирање и множење, добиваме дека $P(x, y, z) = P(y, x, z) = P(y, z, x)$. Значи, полиномот $P(x, y, z) = x^3y^3 + y^3z^3 + x^3z^3$ е симетричен полином од шести степен од три променливи.

За докажување на симетричноста на некој полином доволно е да се утврди дека тој не се менува при произволна транспозиција на аргументите во него.

Симетричните полиноми (како и секој полином од n променливи) може да бидат **хомогени**, како на пример: $x + y + z$, $xy + yz + zx$, $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + z^2y$; или **нехомогени**: $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$, $a + b + c + ab + bc + ca$, $x^3 + y^3 + xy$ итн.

Но секој нехомоген симетричен полином секогаш може да се претстави како збир од неколку хомогени симетрични полиноми. Притоа да забележиме дека секој број $a \neq 0$ (па и нулата) ќе ги сметаме како хомогени симетрични полиноми од нулти степен; бидејќи тие не се менуваат при никоја транспозиција на променливите.

Ако симетричниот полином содржи само еден член, т.е. ако тој е моном, тогаш сите аргументи-множители во него мора да се од исти степен. На пример,

$3x^3y^3z^3$, $5x^2y^2$, $Ax^ky^kz^k$, итн.

Секој симетричен полином од n променливи мора да ги содржи сите променливи и што е посебно карактеристично тој има еден ист степен по однос на секоја од променливите. Навистина ако симетричниот полином $P(x, y, ..., z)$ содржи член $Ax^ky^l, ... z^r$ во кој променливата x е од k-ти степен, тогаш полиномот P ќе содржи и член $Ay^kx^l...z^r$ што е добиен од претходниот член со замена на местата на променливите x и y, а во кој што и променливата y е од истиот k-ти степен.

Пример 1. Да го одредиме општиот вид на симетричните полиноми од втор степен од три аргументи.

Решение. Бараниот полином сигурно ќе содржи член Ax^2, тогаш тој ќе ги содржи и членовите Ay^2 и Az^2, што се добиени од првиот член со замена на аргуменот x, соодветно со y и z. Потоа бараниот полином може да содржи и член од втор степен

Bxy, но покрај него мора да ги содржи и членовите Byz и Bzx. Во општ случај бараниот полином може да ги содржи и членовите од прв степен Cx, Cy, Cz и член од нулти степен, односно слободен член D. Според тоа, општиот вид на симетричен полином од втор степен од три аргументи гласи:

$$P(x, y, z) = A(x^2 + y^2 + z^2) + B(xy + yz + zx) + C(x + y + z) + D.$$

Аналогно, може да се покаже дека општиот вид на симетричен полином од трет степен со три аргументи, ќе биде:

$$P(x, y, z) = A(x^3 + y^3 + z^3) + B(x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y) + Cxyz + D(x^2 + y^2 + z^2) + E(xy + yz + zx) + F(x + y + z) + G.$$

Следниве n симетрични полиноми од n променливи се викаат **основни** (или **елементарни**) **симетрични полиноми**:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ p_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + \ldots + x_2x_n + x_3x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n \\ p_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_1x_2x_n + x_2x_3x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n-1} &= x_1x_2 \ldots x_{n-1} + x_1x_2 \ldots x_{n-2}x_n + \ldots + x_2x_3 \ldots x_n \\ p_n &= x_1x_2x_3 \ldots x_n \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Во алгебрата тие играаат посебно важна улога. Очигледна е и нивната тесна врска со познатите Виетови формули (види §15), кои ја изразуваат врската помеѓу коефициентите и корените (нулите) на полиномите од една променлива. Затоа можеме да кажеме дека, **коефициентите на полиномот од една променлива со водечки коефициент единица, се еднакви на основните симетрични полиноми од нивните корени со точност до знакот (+ или –).**

§52. ОСНОВНА ТЕОРЕМА ЗА СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМИ

Симетричните полиноми од n променливи ќе ги разгледуваме со коефициенти во некое бројно поле P. Лесно може да забележиме дека збирот, разликата и производот на два симетрични полинома е исто така симетричен полином. Оттука, а посебно кога имаме предвид дека и полиномите од нулти степен, како и нула полиномот се исто така симетрични полиноми, можеме да заклучиме дека, множеството симетрични полиноми од n променливи образува **прстен**, кој всушност претставува **подпрстен** во прстенот $P[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ на сите полиноми од n променливи над полето P.

Кога тоа го имаме предвид, тогаш очигледно е дека, секој цел позитивен степен на кој било од основните симетрични полиноми, како и производот на таквите степени земен со кој било коефициент од полето , и на крајот секој збир од таквите производи, ќе претставува симетричен полином. Со други зборови тоа значи дека важи следнава:

Теорема[52.1]. ***Секој полином $Q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, чии променливи се основните симетрични полиноми, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, разгледуван како полином од променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е симетричен полином.***

На пример, ако е $n = 3$, тогаш за основните симетрични полиноми p_1, p_2 и p_3 имаме: $p_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $p_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ и $p_3 = x_1x_2x_3$, па ако полиномот $p_1p_2 - 3p^2_3$ го трансформираме во полином од x_1, x_2, x_3, го добиваме следниов симетричен полином:

$p_1p_2 - 3p^2_3 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 3(x_1x_2x_3)^2 =$

$x^2_1x_2 + x^2_1x_3 + x_1x^2_2 + x^2_2x_3 + x_1x^2_3 + x_2x^2_3 + 3x_1x_2x_3 - 3x^2_1x^2_2x^2_3$

Во алгебрата многу поголемо значење и примена има обратната теорема на горнава Т[52.1], поради што и го носи називот **основна теорема на симетричните полиноми**. Тоа е следнава:

Теорема[52.2] ***Секој симетричен полином $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ од n променливи може да се изрази во полином $Q(p_1, p_2, ..., p_n)$ од основните симетрични полиноми $p_1, p_2, ..., p_n$.***

Доказ. Ако $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ е даден симетричен полином и во неговиот лексиконски запис водечки член нека биде членот

$$A_0x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n} \tag{1}$$

При тоа за степените $k_1, k_2, ..., k_n$ на променливите во овој член мора да важат неравенствата

$$k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_n \tag{2}$$

Навистина, ако претпоставиме дека за некој индекс i е $k_i < k_{i+1}$, тогаш, бидејќи полиномот $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ е симетричен, тој мора да содржи секако и член

$$A_0x_1^{k_1}x^{k_2}_2...x_i^{k_{i+1}}x_{i+1}^{k_i}...x_n^{k_n} \tag{3}$$

кој е добиен од членот (1) со транспозиција на променливите x_i и x_{i+1}. Но, тоа доведува до противречност, бидејќи во лексиконскиот запис на полиномот P членот (3) станува повисок од членот (1). Тоа го заклучуваме од таму што показателите на $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$ кај двата члена (3) и (1) се совпаѓаат, но показателот на x_i во членот (3) станува поголем отколку во членот (1). Да го разгледаме сега следниов производ од основните симетрични полиноми:

$$H_1 = A_0p_1^{k_1-k_2}p_2^{k_2-k_3}...p_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}p_n^{k_n} \tag{4}$$

Ако важи условот (2), сите показатели во производот (4) ќе бидат цели ненегативни броеви, па согласно Т[52.1] изразот H_1 е симетричен полином од променливите $x_1, x_2, ..., x_n$. Ќе покажеме дека водечкиот член на симетричниот полином H_1 е еднаков со водечкиот член (1) на даденият симетричен полином P.

Навистина, водечките членови на основните симетрични полиноми $p_1, p_2, ..., p_n$ се еднакви соодветно на: $x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, ..., x_1x_2 ... x_n$, а согласно Т[43.1] за производот на полиноми, водечкиот член на симетричниот полином H_1 ќе биде еднаков на

$$A_0x_1^{k_1-k_2}(x_1x_2)^{k_2-k_3}(x_1x_2x_3)^{k_3-k_4}...(x_1x_2..x_{n-1})^{k_{n-1}-k_n}(x_1x_2..x_n)^{k_n} = A_0x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$$

Имајќи во предвид дека ако полиномот H_1 го одземеме од полиномот P, нивните водечки членови ќе се поништат, па ќе добиеме нов симетричен полином $P - H_1 = P_1$, чиј водечки член ќе биде понизок од членот (1) - водечки член на даденият полином P. Така го добиваме равенството

$$P = H_1 + P_1 \tag{5}$$

Со аналогна постапка за полиномот P_1, како и за полиномот P, ќе дојдеме до равенството

$$P_1 = H_2 + P_2, \tag{6}$$

каде што H_2 е производ од степените на основните симетрични полиноми со некој коефициент во полето во кое го разгледуваме полиномот P, а P_2 е симетричен полином, чиј водечки член е понизок од водечкиот член на полиномот P_1.

Со замена на P_1 од (6) во (5) го добиваме равенството

$$P = H_1 + H_2 + P_2 \tag{7}$$

Продолжувајќи го тој процес на снижување, после конечен број чекори постапката ќе заврши, т.е. ќе се дојде до некој цел број s, таков што $P_s = 0$. Значи, ако водечки член на полиномот P_s е

$$Lx_1^{l_1}x_2^{l_2}\ldots x_n^{l_n} \tag{8}$$

тогаш од симетричноста на P_s следуваат неравенствата

$$l_1 \geq l_2 \geq \ldots \geq l_n \tag{9}$$

Од друга страна пак, бидејќи членот (1) е повисок од членот (8), тогаш мора да важи и

$$k_1 \geq l_1 \tag{10}$$

Оттука очигледно е дека, системите ненегативни цели броеви $l_1, l_2, \ldots, l_n$ што ги задоволуваат неравенствата (9) и (10) можат да се избираат на конечен број начини. Оттука следува дека, по конечен број s чекори за даденият симетричен полином $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ќе дојдеме до равенството

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = H_1 + H_2 + \ldots + H_s =$$

$$A_0 p_1^{k_1-k_2} p_2^{k_2-k_3} \ldots p_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} p_n^{k_n} + \ldots + A_s p_1^{r_1-r_2} p_2^{r_2-r_3} \ldots p_{n-1}^{r_{n-1}-r_n} p_n^{r_n} \tag{11}$$

со кое тој е изразен како полином, чии променливи се основните симетрични полиноми. Со тоа ја докажавме теоремата [52.2].

Може да се докаже дека важи и следнава теорема за единственост.

Теорема[52.3]. ***Изразувањето на кој било симетричен полином $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ преку основните симетрични полиноми $p_1, p_2, \ldots, p_n$ во полином $Q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ е еднозначно.***

Доказот на оваа теорема, поради неговата гломазност, тука нема да го презентираме.

Да забележиме дека, изложената постапка при доказот на основната теорема воедно ни го дава и методот за практично изразување на хомогените симетрични полиноми преку основните. Ако симетричниот полином не е хомоген, тогаш него прво го запишуваме како збир од хомогени симетрични збирови, а потоа постапката ја применуваме одделно врз секој од тие збирови.

При запишувањето на секој хомоген симетричен полином, чиј водечки член е $Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ често ќе го користиме следниов симболички запис

$$S(Ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}) \tag{12}$$

Со него ќе го означуваме збирот од сите членови, што се добиваат од изразот во заградата при семожните транспозиции на променливите. На пример, $S(x_1^2)$ е збирот од квадратите на сите променливи, т.е. $S(x_1^2) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2$

Аналогно имаме: $S(x_1) = p_1$, $S(x_1x_2) = p_2$ итн.

Пример 1. Симетричните полиноми: а) $x^2 + y^2$, б) $x^2 + y^2 + z^2$, в) $S(x_1^2)$ од n променливи да ги изразиме преку основните симетрични полиноми.

Решение. а) Од формулата за бином на квадрат, односно од $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$, заменувајќи $x + y = p_1$ и $xy = p_2$, добиваме $x^2 + y^2 = p_1^2 - 2p_2$, б) Од идентитетот $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2xy - 2yz - 2zx$, добиваме дека $x^2 + y^2 + z^2 = p_1^2 - 2p_2$, в) Користејќи ја формулата (9) во §44 добиваме:

$$S(x_1^2) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = p_1^2 - 2p_2 \qquad (13)$$

Забележуваме дека овие три симетрични полиноми имаат иста структура (збир на квадрати од променливите), со таа разлика што: првиот (а) е од две променливи, вториот (б) е од три променливи, а третиот (в) - од n променливи. Покрај таа разлика, сите три се изразуваат преку ист полином $Q(p_1, p_2) = p_1^2 - 2p_2$.

Пример 2. Симетричниот полином $S(x_1^3) = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3$ од n променливи да го изразиме преку полином $Q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Решение. Според постапката користена при доказот на основната теорема Т[52.2], поточно според формулата (11) членовите на полиномот $Q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ќе ги определиме со помош на собироците од видот

$$A_i p_1^{k_1-k_2} p_2^{k_2-k_3} \ldots p_n^{k_n} \qquad (14)$$

каде што A_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ се неопределени коефициенти, кои зависат од лексиконскиот запис на полиномот $Q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ што треба да ги одредиме, а k_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$ се цели ненегативни броеви, за кои важи

$$k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n \quad \text{и} \quad k_1 + k_2 + \ldots + k_n = m, \qquad (15)$$

m степенот на симетричниот полином $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по однос на сите променливи (во нашиот случај е $m = 3$)

Можни подредени n-торки од показателите $k_1, k_2, k_3, \ldots$, за кои важат релациите (15) и ним соодветен член (14), се:

$(3, 0, 0, 0, \ldots)$ ..... $p_1^{3-0} p_2^{0-0} = p_1^3 p_2^0 = p_1^3$

$(2, 1, 0, 0, \ldots)$ ..... $p_1^{2-1} p_2^{1-0} p_3^{0-0} = p_1^1 p_2^1 p_3^0 = p_1 p_2$

$(1, 1, 1, 0, \ldots)$ ..... $p_1^{1-1} p_2^{1-1} p_3^{1-0} = p_1^0 p_2^0 p_3^1 = p_3$

Според тоа, бараниот полином $Q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ го има видот

$= A_0 p_1^3 + A_1 p_1 p_2 + A_2 p_3$, односно $= p_1^3 + A p_1 p_2 + B p_3$ (16)

Коефициентот пред p_1^3 го ставивме да е $A_0 = 1$, бидејќи според (4) тој е еднаков со коефициентот A_0 на водечкиот член (1) на даденият симетричен полином, а тој за x_1^3 е $A_0 = 1$. Другите два коефициента во (16) ќе ги одредиме со помош на методот на неопределени коефициенти од равенството:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = p_1^3 + A p_1 p_2 + B p_3 \qquad (17)$$

За $x_2 = x_3 = 1$ и $x_1 = x_4 = \ldots = x_n = 0$ имаме:

$P = 0^3 + 1^3 + 1^3 + 0 = 2$ и $p_1 = 1 + 1 = 2$, $p_2 = 1 \cdot 1$, $p_3 = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$, а од равенството (17): $2 = 2^3 + A \cdot 1 \cdot 1 + B \cdot 0$, добиваме $A = -3$. Потоа за $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = \ldots = x_n = 0$

и $A = -3$ имаме: $P = 1^3 + 1^3 + 1^3 + 0 = 3$, $p_1 = 3$, $p_2 = 3$ и $p_3 = 1$, па од (17): $3 = 27 - 27 + B \cdot 1$, добиваме $B = 3$.

Со замена на $A = -3$ и $B = 3$ во (16) го добиваме бараниот полином

$$Q(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3 \qquad (18)$$

Ако дадениот симетричен полином $S(x_1^3)$ претпоставиме дека е од две променливи, т.е. $P(x, y) = x^3 + y^3$, тогаш до полиномот $Q(p_1, p_2, p_3)$ ќе дојдеме многу поедноставно со користење на идентитетот $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy)$ и познатото изразување $x^2 + y^2 = p_1^2 - 2p_2$ (види пример 1) вака: $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy) = p_1(p_1^2 - 2p_2 - p_2) = p_1^3 - 3p_1p_2$.

Пример 3. Да се пресмета збирот од: а) квадратите, б) кубовите на корените на равенката $x^3 + 2x - 3 = 0$.

Решение. Дадената равенка нека има корени x_1, x_2 и x_3. Согласно Виетовите формули за корените x_1, x_2, x_3 ќе важат равенствата

$p_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -0$, $p_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2$ и $p_3 = x_1x_2x_3 = -(-3) = 3$.

Со замена на $p_1 = 0$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$ во равенствата (13) и (18), што ги добивме во претходните примери 1 и 2 за изразување на збирот од квадратите и збирот од кубовите на променливите x_1, x_2 и x_3; ќе добиеме: а) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p_1^2 - 2p_2 = 0^2 - 2 \cdot (+2) = -4$, б) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3p_1p_2 + 3p_3 = 0^3 - 3 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 9$.

Пример 4. Симетричниот полином $P(x, y, z) = (x^2 + y^2)(x^2 + z^2) \cdot (y^2 + z^2)$ да го изразиме преку полином $Q(p_1, p_2, p_3)$.

Решение. Водечки коефициент на полиномот P по однос на променливата x е $x^4y^2z^0$. Полиномот Q ќе го одредиме со помош на собироците од видот

$$A_i p_1^{k_1-k_2} p_2^{k_2-k_3} p_3^{k_3},$$

каде што за показателите важат релациите $k_1 \geq k_2 \geq k_3$ и $k_1 + k_2 + k_3 = 6$ за нив можни се следниве подредени тројки:

(4, 2, 0) ..... $p_1^{4-2}p_2^{2-0}p_3^0 = p_1^2p_2^2$

(4, 1, 1) ..... $p_1^{4-1}p_2^{1-1}p_3^1 = p_1^3p_3$

(3, 3, 0) ..... $p_1^{3-3}p_2^{3-0}p_3^0 = p_2^3$

(3, 2, 1) ..... $p_1^{3-2}p_2^{2-1}p_3^1 = p_1p_2p_3$

и (2, 2, 2).... $p_1^{2-2}p_2^{2-2}p_3^2 = p_3^2$

Според тоа $P(x, y, z) = p_1^2p_2^2 + Ap_1^3p_3 + Bp_2^3 + Cp_1p_2p_3 + Dp_3^2$

Коефициентите A, B, C и D ќе ги одредиме по методот на неопределени коефициенти, давајќи посебни згодни вредности за променливите x, y и z; а одредувајќи ги претходно вредностите на дадениот полином P и основните полиноми p_1, p_2, p_3 за избраните вредности на x, y, z, обично ги внесуваме во следнава прегледна табела:

x	y	z	p	p_1	p_2	p_3
1	1	0	2	2	1	0
2	−1	−1	50	0	−3	2
1	−2	−2	200	−3	0	4
1	−1	−1	8	−1	−1	1

За одредување на коефициентите A, B, C, D го решаваме системот:

$$\begin{cases} 2 = 2^2 \cdot 1^2 + A \cdot 2^3 \cdot 0 + B \cdot 1^3 + C \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 + D \cdot 0^2 \\ 50 = 0^2(-3)^2 + A \cdot 0^3 \cdot 2 + B(-3)^3 + C \cdot 0 \cdot (-3) \cdot 2 + D \cdot 2^2 \\ 200 = (-3)^2 \cdot 0^2 + A(-3)^3 \cdot 4 + B \cdot 0^3 + C(-3) \cdot 0 \cdot 4 + D \cdot 4^2 \\ 8 = (-1)^2 \cdot (-1)^2 + A(-1)^3 \cdot 1 + B(-1)^3 + C(-1)(-1)(+1) + D \cdot 1^2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2 = 4 + B \\ 50 = -278 + 4D \\ 200 = -108A + 16D \\ 8 = 1 - A - B + C + D \end{cases}$$

Оттука: $B = -2$, $D = -1$, $A = -2$, $C = 4$

Според тоа:

$$P = (x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(x^2 + z^2) = p_1^2p_2^2 - 2p_1^3p_3 - 2p_3^3 + 4p_1p_2p_3 - p_3^2$$

Од разгледаните неколку примери заклучуваме дека,

Степенот на полиномот $Q(p_1, p_2, ..., p_n)$ по однос на сите $p_1, p_2, ..., p_n$ е еднаков со степенот што го има симетричниот полином $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ по однос на која било од променливите x_i.

На пример, во примерот 4 симетричниот полином $P(x, y, z)$ е од 4-ти степен по однос на секоја од променливите, а соодветниот полином $Q(p_1, p_2, p_3)$ е од 4-ти степен по однос на сите променливи p_1, p_2 и p_3.

До тој заклучок доаѓаме и од таму што членот (1) бидејќи е водечки член на полиномот P, бројот k_1 е негов степен по однос на x_1; но бидејќи P е симетричен полином, затоа k_1 ќе биде негов степен и по однос на која било друга променлива x_i. Меѓутоа, и степенот на H_1 од (4) и (11) по однос на сите $p_1, p_2, ..., p_n$ е исто така еднаков на бројот:

$$(k_1 - k_2) + (k_2 - k_3) + ... + (k_{n-1} - k_n) + k_n = k_1.$$

Но бидејќи степените на $H_2, H_3, ...$ соодветно не можат да бидат повисоки од k_1, затоа степенот на $Q(p_1, p_2, ..., p_n)$ по однос на сите $p_1, p_2, ..., p_n$ останува да е еднаков на k_1.

ЗАДАЧИ

Изрази ги полиномите преку основните симетрични полиноми:

1. $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2$

2. $x^5y^2 + x^2y^5 + x^5z^2 + x^2z^5 + y^5z^2 + y^2z^5$

3. а) $(x + y)(x + z)(y + z)$, б) $(x - y)^2(x - z)^2(y - z)^2$

4. $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)(x_2 + x_3)(x_2 + x_4)(x_3 + x_4)$

5. $(x_1x_2 + x_3x_4)(x_1x_3 + x_2x_4)(x_1x_4 + x_2x_3)$

6. а) $S(x_1^2x_2x_3)$, б) $S(x_1^3x_2)$, в) $S(x_1^2x_2^2x_3)$,

7. а) $S(x_1^3x_2x_3x_4)$, б) $S(x_1^4x_2^2)$, в) $S(x_1^5x_2)$.

§53. СТЕПЕНСКИ СУМИ

Во примената на симетричните полиноми од n променливи многу често ги среќаваме хомогените симетрични полиноми од видот

$$S_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k + \ldots + x_n^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Тоа се всушност **суми од k-тите степени на променливите** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и се викаат **степенски суми**. Досега ги означувавме со $S(x_1^k)$, а сега уште и со S_k.

Степенските суми согласно основната теорема за симетричните полиноми, можеме да ги изразуваме преку основните симетрични полиноми. Меѓутоа, нивното изразување во полином $Q(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ при големи вредности на k станува поприлично тешко и компликувано. Затоа откривањето на заемната врска помеѓу степенските суми $S_1, S_2, \ldots$ и основните симетрични полиноми $p_1, p_2, \ldots, p_n$ претставува посебен интерес, што ќе го олесни изразувањето на S_k преку основните симетрични полиноми.

Таа врска меѓу степенските суми и основните симетрични полиноми ни ја даваат следниве две **формули на Њутн:**

$$\mathbf{S_k - S_{k-1}p_1 + S_{k-2}p_2 - \ldots + (-1)^{k-1}S_1p_{k-1} + (-1)^k kp_k = 0}, \quad (k \le n) \tag{2}$$

$$\mathbf{S_k - S_{k-1}p_1 + S_{k-2}p_2 - \ldots + (-1)^n S_{k-n}p_n = 0}, \ (k > n), \tag{3}$$

што тука ги даваме без нивно изведување.

Тие ни овозможуваат релативно лесно последователно добивање на соодветните изрази - полиноми за $S_1, S_2, \ldots$ преку $p_1, p_2, \ldots$

Така на пример, познато е дека $S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = p_1$, т.е. $\mathbf{S_1 = p_1}$. Потоа, ако $k = 2 \le n$, тогаш според формулата (2) добиваме: $S_2 - S_1p_1 + 2p_2 = 0$, а оттука и $S_1 = p_1$ за S_2, добиваме

$$\mathbf{S_2 = p_1^2 - 2p_2}. \tag{4}$$

Ова е потврда на добиените резултати во пример 1 во §52.

Понатаму, при $k = 3 \le n$ согласно формулата (2) имаме:

$S_3 - S_2p_1 + S_1p_2 - 3p_3 = 0$. Оттука, а користејќи ги добиените изрази за S_1 и S_2, за S_3 добиваме

$$\mathbf{S_3 = p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3} \tag{5}$$

Ако пак $k = 3$, но $n = 2$, тогаш согласно формулата (3) имаме:

$S_3 - S_2p_1 + S_1p_2 = 0$, а оттука за S_3 при $k = 3$, $n = 2$ добиваме

$$\mathbf{S_3 = p_1^3 - 3p_1p_2} \tag{5'}$$

Добиените изрази (5) и (5') за степенската сума S_3 во случаите кога е $k \le n$ или $k > n$ нам ни беа познати и досега.

Пример 1. Да ја одредиме степенската сума S_4 од n променливи, ако: а) $n \ge 4$, б) $n = 3$, в) $n = 2$.

Решение. а) При $k = 4 \le n$ според формулата (2) добиваме:

$S_4 - S_3p_1 + S_2p_2 - S_1p_3 + 4p_4 = 0$. Оттука, а користејќи ги и најдените соодветни изрази за S_1, S_2 и S_3, добиваме:

$$\mathbf{S_4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 2p_2^2 + 4p_1p_3 - 4p_4} \tag{6}$$

б) При $k = 4$, $n = 3$ според формулата (3) добиваме:

$S_4 - S_3p_1 + S_2p_2 - S_1p_3 = 0$. Оттука

$S_4 = (p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3)p_1 - (p_1^2 - 2p_2)p_2 + p_1p_3$, односно

$$\mathbf{S_4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 2p_2^2 + 4p_1p_3} \quad (7)$$

в) При $k = 4$, $n = 2$, согласно формулата (3) имаме:

$S_4 - S_3p_1 + S_2p_2 = 0$. Оттука $S_4 = (p_1^3 - 3p_1p_2)p_1 - (p_1^2 - 2p_2)p_2$ или

$$\mathbf{S_4 = x^4 + y^4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 2p_2^2} \quad (8)$$

Треба да забележиме дека, формулата (2), покрај нејзината примена за последователно изразување на степенските суми S_k преку основните симетрични полиноми $p_1, p_2, ..., p_n$, таа ни дава можност и за последователно изразување на основните симетрични полиноми $p_1, p_2, ..., p_n$ преку првите n симетрични суми $S_1, S_2, ..., S_n$. Така на пример, поаѓајќи од $p_1 = S_1$, потоа согласно формулата (2) при $k = 2$ и $k = 3$ имаме:

$S_2 - S_1p_1 + 2p_2 = 0$ и $S_3 - S_2p_1 + S_1p_2 - 3p_3 = 0$,

а оттука $p_2 = \frac{1}{2}(S_1p_1 - S_2) = \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2)$ и

$p_3 = \frac{1}{3}(S_3 - S_2p_1 + S_1p_2) = \frac{1}{3}\ S_3 - S_2S_1 + S_1 \cdot \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2)$ или $p_3 = \frac{1}{6}(S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3)$

Според тоа, оттука и од основната теорема на симетричните полиноми следува следниов заклучок:

Секој симетричен полином $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ од n променливи разгледуван во полето P, може да се претстави во вид на полином од степенските суми $S_1, S_2, ..., S_n$ со коефициенти од полето P.

Пример 2. Да докажеме дека, ако $x + y + z = 0$, тогаш важи

$x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + yz + zx)^2$

Доказ. Сумата $x^4 + y^4 + z^4$ според (7) ја изразуваме прво преку p_1, p_2, p_3; а потоа ќе го земеме предвид условот $x + y + z = p_1 = 0$. Така добиваме:

$x^4 + y^4 + z^4 = p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 2p_2^2 + 4p_1p_3 = 2p_2^2 = 2(xy + yz + zx)^2$, т.е. ќе важи:

$x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + yz + zx)^2$, штд

Пример 3. Симетричниот полином $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ да го разложиме на множители.

Решение. Дадениот полином прво го изразуваме преку основните симетрични полиноми, а потоа добиениот полином $Q(p_1, p_2, ... p_n)$ го разложуваме на множители:

$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3 - 3p_3 = p_1^3 - 3p_1p_2 = p_1(p_1^2 - 3p_2) =$

$(x + y + z)[(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx)] = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

ЗАДАЧИ

1. Степенската сума S_5 од n променливи, изрази ја преку основните симетрични полиноми $p_1, p_2, ..., p_n$, ако: а) $n \geq 5$, б) $n = 4$, $n = 3$, $n = 2$.
2. Степенската сума S_6 од n променливи со помош на формулите на Њутн изрази ги преку основните симетрични полиноми, ако:
   а) $n \geq 6$, б) $n = 5$, $n = 4$, $n = 3$, $n = 2$.
3. *. Одреди ја сумата од петтите степени од корените на равенката
   $x^6 - 4x^5 + 3x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.

4. Изрази ги основните симетрични полиноми: а) p_4, б) p_5 преку степенските суми $S_1, S_2, \ldots$

5*. Не решавајќи ја равенката $x^2 - 3x + 1 = 0$ одреди ја сумата од: а) четвртите, б) шестите степени од нејзините корени.

§54. СИМЕТРИЧНИ РАЦИОНАЛНИ ДРОПКИ

Освен кај полиномите од повеќе променливи, и кај дробно-рационалните изрази од неколку променливи постојат **симетрични дробно-рационални изрази**. Таков е на пример, изразот

$$\frac{xy}{z^2} = \frac{yz}{x^2} = \frac{zx}{y^2}$$

Дробно-рационалниот израз $R(x, y, \ldots, z)$ од n променливи го викаме **симетричен**, ако тој останува еднаков сам на себе при која било транспозиција на променливите.

Лесно ќе се увериме дека, секој симетричен дробно-рационален израз по неговото сведување на најмал заеднички именител, се сведува во вид на количник-дропка од два симетрични полинома. На пример: $\frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} = \frac{x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3}{x^2y^2z^2}$

Значи, симетричната рационална дропка претставува количник од два симетрични полинома. Оттука, а согласно основната теорема Т[52.2], следува дека важи и следнава:

Теорема [54.1]. ***Секоја симетрична рационална дропка од n променливи*** $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ***разгледувана во полето P, може да се претстави (на единствен начин) во вид на рационална дропка од основните симетрични полиноми*** $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ***со коефициенти од полето P.***

Пример 1. Симетричната дропка $\frac{x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3}{x^2y^2z^2}$ од променливите x, y, z да ја изразиме во вид на рационална дропка од основните симетрични полиноми p_1, p_2, p_3.

Решение. Водечки член на полиномот-броител $F(x, y, z) = x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3$ по однос на променливата x е $x^3y^3z^0$. Полиномот $Q(p_1p_2p_3)$ ќе го одредиме со помош на собироците од видот $A_i p_1^{k_1-k_2} \cdot p_2^{k_2-k_3} \cdot p_3^{k_3}$, каде што за k_1, k_2, k_3 важат релациите $k_1 \geq k_2 \geq k_3$ и $k_1 + k_2 + k_3 = 6$. За нив можни се следниве подредени тројки:

(3, 3, 0) $\quad p_1^0p_2^3p_3^0 = p_2^3$

(3, 2, 1) $\quad p_1^1p_2^1p_3^1 = p_1p_2p_3$

(2, 2, 2) $\quad p_1^0p_2^0p_3^2 = p_3^2$

Според тоа, $Q(x, y, z) = p_2^3 + Ap_1p_2p_3 + Bp_3^2$

Давајќи посебни вредности: прво $x = 2, y = -1, z = -1$, а потоа $x = 1, y = 1, z = 1$, добиваме:

x	y	z	F	p_1	p_2	p_3
2	−1	−1	−15	0	−3	2
1	1	1	3	3	3	1

За одредување на коефициентите A и B го добиваме системот равенки

$-15 = -27 + A \cdot 0 + B \cdot 4$

$3 = 27 + A \cdot 9 + B \cdot 1.$ Оттука $B = 3, A = -3.$

Значи: $x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 = p_2^3 - 3p_1p_2p_3 + 3p_3^2$. Така добиваме:

$$\frac{x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3}{x^2y^2z^2} = \frac{p_2^3 - 3p_1p_2p_3 + 3p_3^2}{x_3^2}$$

Пример 2. Да се изрази преку основните симетрични полиноми, изразот

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3}$$

Решение. $\dfrac{x_2^1x_3 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_1^2x_2}{x_1x_2x_3}$.

Водечки член на полиномот-броител по однос на x_1 е $x_1^2x_2^1x_3^0$. Можни подредени тројки за неговите показатели се:

(2, 1, 0) p_1p_2

(1, 1, 1) p_3 Според тоа, $F = p_1p_2 + Ap_3$

Давајќи вредности за променливите: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 1$, добиваме

$F(1, 1, 1) = 6$, $p_1 = 3$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1$, па од $6 = 3 \cdot 3 + A \cdot 1$ добиваме дека $A = -3$.

Така конечно добиваме $R = \dfrac{F}{\Phi} = \dfrac{p_1p_2 - 3p_3}{p_3}$

Пример 3. Да се изрази преку основните симетрични полиноми збирот

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i}.$$

Решение.

$$\sum \frac{1}{x_i} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_{k-1}} + \frac{1}{x_k} = \frac{x_2x_3\ldots x_k + x_1x_3x_4\ldots x_k + \ldots + x_1x_2\ldots x_{k-2}\cdot x_k + x_1x_2\ldots x_{k-1}}{x_1x_2x_3\ldots x_k} = \frac{p_{k-1}}{p_k}$$

ЗАДАЧИ

Да се изрази преку основните симетрични полиноми, изразот:

1. $(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_1})(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3})$

2. $\frac{x_1x_2}{x_3x_4} + \frac{x_1x_3}{x_2x_4} + \frac{x_1x_4}{x_2x_3} + \frac{x_2x_3}{x_1x_4} + \frac{x_2x_4}{x_1x_3} + \frac{x_3x_4}{x_1x_2}$

3. $\frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$

4*. *а)* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2}$, *b)* $\sum_{i\neq j} \frac{x_i}{x_j}$, *в)* $\sum_{i\neq j} \frac{x_i^2}{x_j}$.

Глава VII

СИСТЕМИ ПОЛИНОМНИ РАВЕНКИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

§ 55. РАВЕНКИ, СИСТЕМ И ВКУПНОСТ НА РАВЕНКИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

1. Равенката

$$F(x, y,.., z) = 0 \tag{1}$$

во која левата страна е некој полином од неколку променливи, се вика **полиномна** или **рационална алгебарска равенка** од повеќе променливи. Според бројот на променливите таа може да биде со две, три или n променливи ; а според степенот на полиномот F , таа може да биде од **прв степен** (или линеарна), од **втор степен** (или квадратна), од **трет** или **повисок степен**.

Општиот вид на линеарна равенка од n променливи, гласи :

$$ax + by + cz + \ldots + du = e\,, \tag{2}$$

а општиот вид на квадратната равенка со две променливи гласи :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{3}$$

Полиномните равенки од повеќе променливи, како и оние од една променлива, ги разгледуваме обично над некое бројно поле, на кое што треба да му припаѓаат вредностите на променливите и сите броеви што влегуваат во состав на равенката.

Дефиниционa област на полиномните равенки е множеството D на сите броеви од полето P во кое ги разгледуваме.

Системот на вредности на променливите $x = x_0$, $y = y_0$, ... , $z = z_0$, односно , подредената n - торка броеви $(x_0 , y_0 , \dots , z_0)$ (од полето во кое ја разгледуваме равенката) се вика **решение** на полиномната равенка (1) од n променливи, ако за него таа преминува во точно бројно равенство $F(x_0, y_0,.., z_0) = 0$.

Велиме уште дека тој систем на вредности на променливите $(x_0 , y_0 , \dots , z_0)$ **ја задоволува равенката** (1).

Да се реши равенката (1) или (2) над некое поле P , значи да се одреди множеството од сите нејзини решенија во тоа поле. Множеството од сите решенија на равенката може да биде конечно, но во најголем број случаи и бесконечно. На пример равенката $x^2 + y^2 = 0$ во полето на реалните броеви има единствено решение $(0, 0)$, т.е. $x=y=0$, меѓутоа, во полето на комплексните броеви таа равенка има бесконечно множество решенија. Нејзини решенија се сите подредени двојки броеви (x, xi) , каде што x е кој било комплексен број.

Друг пример : равенката $|x| + |y| + |z| + 1 = 0$ нема решение во никое бројно поле, бидејќи изразот $|x| + |y| + |z| + 1$ за произволни вредности на аргументите добива секогаш само позитивни вредности.

Равенка, која има барем едно решение, велиме дека е **можна**, а равенката која нема ниту едно решение, односно чие множество решенија е празно множество, велиме дека е **невозможна** или **противречна равенка**.

Ако се дадени две равенки од n исти променливи :

$$F_1(x, y, \dots ,z) = 0$$

и

$$F_2(x, y, \dots ,z) = 0 ,$$

чии множества решенија (во полето P) ги означуваме со M_1 и M_2 . Ако е $M_1 \subseteq M_2$, тогаш за равенката F_2 велиме дека е **последица** на равенката F_1 , ако пак е $M_1 \subseteq M_2$ и $M_2 \subseteq M_1$, односно ако е $M_1 = M_2$; тогаш велиме дека равенките F_1 и F_2 се **еквивалентни** една на друга во полето P. Тоа значи, две равенки од n променливи се еквивалентни една на друга, ако и само ако секое решение на едната равенка е решение и на другата, и обратно : секое решение на втората е решение и на првата.

За две противречни равенки од n променливи ќе сметаме исто така дека се еквивалентни.

Забелешка. Повеќекратните решенија, ако поинаку не е речено, ќе се сметаат како едно решение. Така, на пример, равенките $x^2y^2 = 0$ и $xy = 0$ ќе ги сметаме за еквивалентни.

2. Дадено е множеството од m полиномни равенки од n променливи :

$$\begin{aligned} &F_1(x, y, \dots ,z) = 0 \\ &F_2(x, y, \dots ,z) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &F_m(x, y, \dots ,z) = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

Множеството равенки (*4*), во зависност од барањето што го поставуваме пред нив, може да биде **систем на равенки** или **вкупност на равенки.**

Множеството равенки (*4*) се вика **систем од *m* равенки од *n* променливи,** симболички:

$$\begin{cases} F_1(x, y, \ldots, z) = 0 \\ F_2(x, y, \ldots, z) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x, y, \ldots, z) = 0 \end{cases} \qquad (5)$$

ако треба да се најдат сите подредени n – торки броеви (x_0 , y_0 , ... , z_0) , за кои е задоволена секоја од m – те равенки на системот.

Секоја таква n – торка броеви од полето P во кое го разгледуваме системот (5), што го исполнува тоа барање, се вика **решение на системот** (5) . Да се реши системот равенки (5), значи да се одреди множеството M од сите негови решенија .

Системот равенки, чие множество решенија е празно множество, се вика **противречен** или **невозможен.** Таков е, на пример, системот равенки

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ x + 2y + 3z = 7 \end{cases}$$

Секоја равенка на системот, разгледувана одделно, знаеме дека има некое потполно определено мнжество решенија (кое во специјален случај може да биде и празно). Нека $M_1, M_2, \ldots, M_m$ се множествата решенија на секоја одделна равенка во системот (5). Бидејќи секое решение на системот (5) мора да е решение и на секоја од равенките во него, затоа множеството M од сите решенија на системот (5) мора да е заедничкиот дел (пресекот) од множествата $M_1, M_2, \ldots, M_m$, т.е. ќе важи :

$$M = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_m$$

Оттука следува дека, ако која било од равенките на системот е противречна, тогаш и даденият систем равенки е противречен.

Множеството равенки (4), пак, се вика **вкупност од *m* равенки од *n* променливи** , симболички :

$$\begin{cases} F_1(x, y, \ldots, z) = 0 \\ F_2(x, y, \ldots, z) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(x, y, \ldots, z) = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

ако треба да се најдат сите подредени n – торки броеви $(x_0, y_0, \dots, z_0)$, за кои е задоволена **барем една** (но не задолжително сите) од m – те равенки во вкупноста (6).

Сите такви n – торки броеви (од полето P во кое ј а разгледуваме вкупноста на равенки) се викаат **решенија на вкупноста** (6). За да се реши вкупноста равенки (6) доволно е да се реши одделно секоја од m – те равенки во вкупноста, а потоа да се одреди **унијата** од најдените множества решенија $M_1, M_2, \dots, M_m$ на одделните равенки, т.е. за множеството решенија M на вкупноста на равенки, важи $M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_m$.

Во некои случаи може да се јави потреба да разгледуваме и **вкупност од системи равенки**, а исто така и **систем од вкупност на равенки**:

$$(7)\quad \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} F_1(x, y, \dots, z) = 0 \\ F_2(x, y, \dots, z) = 0 \\ F_3(x, y, \dots, z) = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} \phi_1(x, y, \dots, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, \dots, z) = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. ; \qquad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} F_1(x, y, \dots, z) = 0 \\ F_2(x, y, \dots, z) = 0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \phi_1(x, y, \dots, z) = 0 \\ \phi_2(x, y, \dots, z) = 0 \\ \phi_3(x, y, \dots, z) = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \quad (8)$$

Со A_k $(k \in N)$ да го означиме множеството точки (подредени n – торки) $(x_0, y_0, \dots, z_0)$, чии координати ја задоволуваат равенката $F_k(x, y, \dots, z)=0$, а со B_k $(k \in N)$ да го означиме множеството точки $(x_0, y_0, \dots, z_0)$, чии координати ја задоволуваат равенката $\Phi_k(x, y, \dots, z) = 0$. Во таков случај множеството точки M што ја задоволуваат вкупноста од системи (7), и множеството точки N, што го задоволуваат системот од вкупности (8), ќе бидат соодветно :

$$M = (A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap B_2) \qquad \text{и}$$
$$N = (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$$

За два система (или две вкупности) равенки велиме дека се **еквивалентни** над полето P во кое ги разгледуваме, ако и само ако нивните множества решенија во полето P се совпаѓаат. Во специјален случај и кои било два противречни система равенки се еквивалентни.

§ 56.ЕКВИВАЛЕНТНОСТ НА РАВЕНКИ И СИСТЕМИ РАВЕНКИ

1. Процесот на решавање на равенките главно се состои во тоа што дадената равенка ја трансформираме во друга, еквивалентна на неа равенка, таа – во трета, итн се додека не добиеме равенка, чие решение е очигледно или лесно се добива. Притоа, често станува неопходно да извршиме некоја од следниве операции: а) додавање изрази кон двете страни на равенката, кои содржат променливи;

б) множење или делење на двете страни на равенката со изрази кои содржат или не содржат променливи; в) степенување на двете страни на равенката на некој степен; г) разложување на двете страни на множители, и др. Се поставува прашањето, дали тие трансформации го менуваат или не го менуваат множеството решенија на равенката.

Тоа зависи од тоа, дали извршената операција (трансформација) ја менува дефиниционата област на дадената равенка, или не.

Ако извршената трансформација ја променува (проширува или стеснува) дефиниционата област на дадената равенка, тогаш може да се промени и нејзиното множество решенија, т.е. може да се добие равенка што не е еквивалентна со дадената.

Ако извршената трансформација ја проширува дефиниционата област D на равенката со уште некоја плус област D_1, тогаш може (но не мора) да се прошири и множеството решенија M на дадената равенка со таканаречени **придобиени (странични) решенија.** Тоа се решенија на трансформираната равенка од проширената област D_1 (ако има такви), а што не се решенија на дадената равенка. Ако такви решенија нема, тогаш дадената и трансформираната равенки се еквивалентни.

Ако, пак, извршената трансформација ја стеснува дефиниционата област на равенката за некоја област D_2, тогаш можно е да се изгубат некои од решенијата на дадената равенка. **Изгубени решенија** се појавуваат оние решенија на дадената равенка (ако има такви), кои се од областа D_2 за која е стеснета областа D на дадената равенка. Ако такви решенија нема, тогаш дадената и трансформираната равенка се еквивалентни.

Да преминеме сега кон прашањето на одделните трансформации што често ги извршуваме со равенките при нивното решавање.

Теорема [56.1]. ***Равенките***

$$F(x, y, \ldots, z) = \Phi(x, y, \ldots, z) \tag{1}$$

и

$$F(x, y, \ldots, z) + \varphi(x, y, \ldots, z) = \Phi(x, y, \ldots, z) + \varphi(x, y, \ldots, z) \tag{2}$$

се еквивалентни, ако изразот $\varphi(x, y, \ldots, z)$ ***има иста дефиниционa област D како и равенката*** (1).

Доказ. Нека $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ е решение на равенката (1). Тогаш важи равенството

$$F(x_0, y_0, \ldots, z_0) = \Phi(x_0, y_0, \ldots, z_0) \tag{1'}$$

а $\varphi(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ е некој број, бидејќи $\varphi(x, y, \ldots, z)$ по услов има иста дефиниционa област со равенката (1) . Со додавање на бројот $\varphi(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ кон двете страни на равенството (1') го добиваме точното бројно равенство

$$F(x_0, y_0, \ldots, z_0) + \varphi(x_0, y_0, \ldots, z_0) = \Phi(x_0, y_0, \ldots, z_0) + \varphi(x_0, y_0, \ldots, z_0) \tag{2'}$$

кое пак покажува дека точката $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ е решение и на равенката (2). Ако сега $\varphi(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ е решение на равенката (2), тогаш важи равенството (2'). Ако

од двете страни на (2') го одземеме бројот $\varphi(x_0 , y_0 , \ldots , z_0)$ го добиваме равенството (1'), кое покажува дека $(x_0, y_0 , \ldots , z_0)$ е решение на равенката (1).

Според тоа, секое решение на равенката (1) е решение и на равенката (2), и обратно: секое решение на равенката (2) е решение и на равенката (1). Значи, равенките (1) и (2) при спомнатиот услов се еквивалентни.

Од докажаната теорема следува дека: Кон двете страни на полиномна равенка (1) од n променливи може да се додаде кој било полином од тие променливи, а во специјален случај и полином од нулти степен, т.е. кој било број. Навистина, дефиниционата област на полиномот $\varphi(x, y, \ldots , z)$ е иста со таа на равенката (1).

Ако дефиниционата област на изразот $\varphi(x, y, \ldots , z)$, што го додаваме кон двете страни на дадената равенка е потесна од таа на дадената равенка, тогаш ќе се појават изгубени решенија ако дадениот израз $\varphi(x, y, \ldots , z)$ нема смисла (не е дефиниран) за кои било систем на вредности на променливите $(x_0 , y_0 , \ldots , z_0)$ што се решенија на дадената равенка.

Од теоремата [56.1] следува и следното **правило за пренесување** на собироци - членови од една на друга страна на равенката :

Секој член собирок може да се пренесе од една на друга страна на равенката, при што треба да се промени неговиот знак во спротивен.

Да истакнеме и тоа дека: секоја равенка $F_1(x, y, \ldots , z)=F_2 x, y, \ldots , z)$ може да се замени со равенка еквивалентна на неа $F(x, y, \ldots , z)=0$, каде што

$F(x, y, \ldots , z)= F_1(x, y, \ldots , z) - F_2(x, y, \ldots , z)$.

Теорема [56.2]. ***Равенките***

$$F(x, y, \ldots, z) = \Phi(x, y, \ldots , z) \tag{3}$$

и $$F(x, y, \ldots, z) \cdot \varphi(x, y, \ldots , z) = \Phi(x, y, \ldots , z) \cdot \varphi(x, y, \ldots , z) \tag{4}$$

се еквивалентни, ако изразот $\varphi(x, y, \ldots , z)$ ***има смисла (е дефиниран) и добива вредности различни од нула во целата дефиниционa област на равенката*** (3).

Доказ. Нека подредената n – торка броеви $(x_0 , y_0 , \ldots , z_0)$ е решение на равенката (3). Тогаш е точно равенството

$$F(x_0, y_0 , \ldots , z_0) = \Phi(x_0, y_0 , \ldots , z_0) \tag{3'}$$

Множејќи ги двете страни на тоа равенство со бројот $\varphi(x_0 , y_0 , \ldots , z_0)$, добиваме

$$F(x_0, y_0 , \ldots , z_0) \cdot \varphi(x_0, y_0 , \ldots , z_0) = \Phi(x_0, y_0 , \ldots , z_0) \cdot \varphi(x_0, y_0 , \ldots , z_0), \tag{4'}$$

кое означува дека подредена n – торка $(x_0 , y_0 , \ldots , z_0)$ е решение и на равенката (4). Тоа значи дека равенката (4) е последица на равенката (3). Нека сега $(x_0 , y_0 ,\ldots , z_0)$ е решение на равенката (4). Тогаш важи бројното равенство (4'). Делејќи ги двете страни на равенството (4') со бројот $\varphi(x_0, y_0, \ldots , z_0)$ по услов различен од нула, ќе го добиеме равенството (3'), што означува дека $(x_0 , y_0 , \ldots , z_0)$ е решение и на равенката (3). Значи, равенката (3) е последица на равенката (4).

Според тоа, равенките (3) и (4) се еквивалентни.

Теоремата [56.2] може да се формулира и во вид на следново :

Правило. Двете страни на равенката може да се помножат со кој било израз различен од нула, или со број различен од нула.

Да забележиме дека, ако множителот $\varphi(x, y, ..., z)$ при некои вредности на променливите може да добива вредност нула, т.е. ако тој не го исполнува условот $\varphi (x, y ,..., z) \neq 0$, тогаш во општ случај равенките (3) и (4) не се еквивалентни. Навистина, равенката (4) ја задоволуваат и сите подрдени n – торки $(x_0, y_0 ,..., z_0)$ што се решенија на равенката $\varphi = 0$. Но, меѓу нив може да има и такви што не се решенија на равенката (3). Токму таквите решенија на (4) ќе бидат придобиени решенија на равенката (3).

При преминот од равенката (3) кон равенката (4) можно е и да се изгубат решенија, ако множителот $\varphi (x, y,...,z) \neq 0$ нема смисла за некои системи на вредности на променливите.

Губење на решенија на дадената равенка може да настане и кога двете нејзини страни се поделат со $\varphi (x, y,..., z)$(односно помножат со $\frac{1}{\varphi}$), ако не е задоволен условот $\varphi (x, y , ... , z) \neq 0$. Навистина, нека, $(x_0, y_0 ,..., z_0)$ е решение на равенката (4). Тогаш ќе важи равенството (4'). Тоа равенство важи и тогаш кога $\varphi(x_0, y_0 , ... , z_0)=0$, а $F(x_0, y_0 , ... , z_0) \neq \Phi(x_0, y_0 , ... , z_0)$.

Затоа, при преминот од равенката (4) кон равенката (3), решенијата на равенката $\varphi (x, y , ... , z)= 0$ можат да се изгубат за равенката (4).

Теорема [56.3]. ***Равенката***

$$[F(x, y , ... , z)]^n = [\Phi(x, y , ... , z)]^n , \tag{5}$$

каде $n \in N$, ***е последица на равенката***

$$F(x, y , ... , z) = \Phi(x, y , ... , z) \tag{6}$$

Доказ. Очигледно е дека секое решение $(x_0, y_0 , ... , z_0)$ на равенката (6) (во дадено бројно поле) е решение и на равенката (5), бидејќи од равенството

$F(x_0, y_0 , ... , z_0) = \Phi(x_0, y_0 , ... , z_0)$ следува дека важи равенството :

$$[F(x_0, y_0 , ... , z_0)]^n = [\Phi(x_0, y_0 , ... , z_0)]^n .$$

Меѓутоа, освен решенијата на равенката (6), равенката (5) ја задоволуваат и решенијата на која било од равенките

$$F(x, y , ... , z) = \varepsilon \Phi(x, y , ... , z) \tag{7}$$

каде што ε е една од n – те различни вредности на $\sqrt[n]{1}$ во полето на комплексните броеви. Навистина, по степенувањето на двете страни на равенката (7) на степен n, ќе ја добиеме како последица равенката (5). Обратно, ако некоја подредена n–торка

вредности на променливите важи $F^n = \Phi^n \neq 0$, тогаш имаме $\frac{F^n}{\Phi^n} = \left(\frac{F}{\Phi}\right)^n = 1$, односно $\frac{F}{\Phi} = \sqrt[n]{1} = \varepsilon$. Значи, таа е решение и на равенката $F = \varepsilon\Phi$. Ако $\varepsilon \neq 1$ тогаш тоа решение на равенката (5) е странично (придобиено) за равенката (6). Ако, пак, $F^n = \Phi^n = 0$, тогаш равенката (7) е задоволена за која било вредност на ε.

Според тоа, равенките (5) и (6) во полето на комплексните броеви не се еквивалентни. Во полето, пак, на реалните броеви : при непарен степен n равенките (5) и (6) се еквивалентни. Тоа е затоа што $\sqrt[n]{1}$ при непарен n има само една реална вредност 1. Но, при парен n, $\sqrt[n]{1}$ има две реални вредности ± 1, затоа сите решенија на равенката (5) се решенија на равенката (6) или на равенката $F = -\Phi$. Оттука следува дека важи следнава :

Теорема [56.4]. ***Равенката***

$$[F(x, y, \ldots, z)]^n = [\Phi(x, y, \ldots, z)]^n \qquad (5)$$

при парен степен n ***во полето на реалните броеви е еквивалентна со вкупноста на равенки***

$$\begin{cases} F(x, y, \ldots, z) = \Phi(x, y, \ldots, z) & (8) \\ F(x, y, \ldots, z) = -\Phi(x, y, \ldots, z) & (8') \end{cases}$$

а при непарен степен n ***, таа е еквивалентна со равенката*** (8).

2. При решавањето на системите полиномни равенки од неколку променливи најчесто ги користиме следниве теореми :

Теорема [56.5]. ***Ако левата страна на равенката***

$$F(x, y, \ldots, z) = 0 \qquad (9)$$

се разложува на множители :

$$F_1(x, y, \ldots, z) \cdot F_2(x, y, \ldots, z) \cdot \ldots \cdot F_k(x, y, \ldots, z) = 0 \qquad (10)$$

тогаш таа е еквивалентна на вкупноста равенки :

$$\begin{cases} F_1(x, y, \ldots, z) = 0 \\ F_2(x, y, \ldots, z) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x, y, \ldots, z) = 0 \end{cases} \qquad (11)$$

Доказ. Ако подредената n – торка $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ вредности на променливите е решение на равенката (10), тогаш важи равенството

$$F_1(x_0, y_0, \ldots, z_0) \cdot F_2(x, y_0, \ldots, z_0) \cdot \ldots \cdot F_k(x_0, y_0, \ldots, z_0) = 0 \qquad (10')$$

Меѓутоа, производот на неколку броеви е еднаков на нула, ако и само ако барем еден од нив е еднаков на нула. Затоа, за секое $s, 1 \le s \le k$ ќе биде $F_s(x_0, y_0, \ldots, z_0) = 0$. Значи, $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ е едно од решенијата на вкупноста (11). Обратно, ако $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ е едно од решенијата на вкупноста (11), тогаш за секое $s, 1 \le s \le k$ мора да важи равенството $F_s(x_0, y_0, \ldots, z_0) = 0$, а во тој случај ќе важи и равенството (10').

Значи, решението $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ на вкупноста (11) е едно од решенијата на равенката (10).

Оваа теорема овозможува решавањето на дадената равенка да се сведе на решавањето вкупност од многу попрости равенки .

Од теоремата [56.5] непосредно следува и следнава :

Теорема [56.6] . ***Системот равенки***

$$\begin{cases} F_1(x, y, \ldots, z) \cdot F_2(x, y, \ldots, z) \cdot \ldots \cdot F_k(x, y, \ldots, z) = 0 \\ \Phi_1(x, y, \ldots, z) = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_s(x, y, \ldots, z) = 0 \end{cases} \qquad (12)$$

е еквивалентен на вкупноста системи на равенки :

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} F_1(x, y, \ldots, z) = 0 \\ \Phi_1(x, y, \ldots, z) = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_s(x, y, \ldots, z) = 0 \end{cases} \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \begin{cases} F_k(x, y, \ldots, z) = 0 \\ \Phi_1(x, y, \ldots, z) = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_s(x, y, \ldots, z) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (12')$$

Оваа пак, теорема овозможува некој систем равенки да се сведе на вкупност од попрости системи равенки.

Теорема [56.7]. ***Ако во системот равенки***

$$\begin{cases} F_1(x, y, \ldots, z) = 0 \\ F_2(x, y, \ldots, z) = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x, y, \ldots, z) = 0 \end{cases} \tag{13}$$

која било од равенките, на пример $F_2 = 0$, ***ја замениме со равенка еквивалентна на неа*** $F_2^* = 0$, ***тогаш ќе добиеме систем еквивалентен на првиот:***

$$\begin{cases} F_1(x, y, \ldots, z) = 0 \\ F_2^*(x, y, \ldots, z) = 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x, y, \ldots, z) = 0 \end{cases} \tag{13'}$$

Доказ. Нека равенката $F_2^*(x, y, \ldots, z) = 0$ е еквивалентна со равенката $F_2(x, y, \ldots, z) = 0$ од системот (13). Со $A_1, A_2, \ldots, A_k$ да ги означиме множествата решенија на равенките од системот (13), а со A_2^* множеството решенија на равенката $F_2^* = 0$. Тогаш множеството решенија на системот (13) ќе биде еднакво на $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k$, а множеството решенија на системот (13') -на $A_1 \cap A_2^* \cap \ldots \cap A_k$. Бидејќи равенките $F_2(x, y, \ldots, z) = 0$ и $F_2^*(x, y, \ldots, z) = 0$ се еквивалентни, затоа ќе биде $A_2 = A_2^*$, а оттука следува дека и $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = A_1 \cap A_2^* \cap \ldots \cap A_k$.

Значи, системите (13) и (13') се еквивалентни.

Теорема [56.8]. ***Ако кои било две равенки во даден систем си ги променат местата, се добива систем, еквивалентен на него.***

Доказот тука е очигледен. Ако, на пример, првата и втората равенка во системот (13) ги разменат местата, тогаш согласно комутативноста на пресекот,ќе важи: $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k = A_2 \cap A_1 \cap \ldots \cap A_k$. Значи, првиот и вториот систем се еквивалентни.

Теорема [56.9]. ***Ако кон која било равенка на системот***

$$\begin{cases} F_1(x\,,\,y\,,\,\ldots\,,\,z)=0 \\ F_2(x\,,\,y\,,\,\ldots\,,\,z)=0 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x\,,\,y\,,\,\ldots\,,\,z)=0 \end{cases} \qquad (14)$$

додадеме некоја друга равенка од него, претходно помножена со кој било полином $\varphi(x,y,\ldots,z)$ ***или број, а додаденатa и сите останати равенки на системот ги оставиме непроменети, ќе добиеме нов систем равенки еквивалентен на почетниот.***

Доказ. Ќе покажеме дека системот (14) е еквивалентен, на пример, со системот :

$$\begin{cases} F_1(x\,,\,y\,,\,\ldots\,,\,z)=0 \\ F_2(x\,,\,y\,,\,\ldots\,,\,z)+\varphi(x,y,\ldots,z)\cdot F_1(x\,,\,y\,,\,\ldots\,,\,z)=0 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x\,,\,y\,,\,\ldots\,,\,z)=0 \end{cases} \qquad (15)$$

Нека $(x_0\,,\,y_0\,,\ldots\,,\,z_0)$ е решение на системот (14), т.е. нека важи системот од бројни равенства :

$$\begin{cases} F_1(x_0\,,\,y_0\,,\ldots\,,\,z_0)=0 \\ F_2(x_0\,,\,y_0\,,\ldots\,,\,z_0)=0 \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x_0\,,\,y_0\,,\ldots\,,\,z_0)=0 \end{cases} \qquad (14')$$

Да ги помножиме двете страни на равенството $F_1(x_0\,,\,y_0\,,\ldots\,,\,z_0)=0$ со бројот $\varphi(x_0\,,\,y_0\,,\ldots\,,\,z_0)$, а потоа да ги собереме соодветните страни на тоа равенство и равенството $F_2(x_0\,,\,y_0\,,\ldots\,,\,z_0)=0$, ќе добиеме дека важи и равенството:

$$F_2(x_0\,,\,y_0\,,\ldots\,,\,z_0)+\varphi(x_0\,,\,y_0\,,\ldots\,,\,z_0)\cdot F_1(x_0\,,\,y_0\,,\ldots\,,\,z_0)=0$$

Тоа значи дека $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ е решение и на системот (15), т.е.

$$\begin{cases} F_1(x_0, y_0, \ldots, z_0) = 0 \\ F_2(x_0, y_0, \ldots, z_0) + \varphi(x_0, y_0, \ldots, z_0) \cdot F_1(x_0, y_0, \ldots, z_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x_0, y_0, \ldots, z_0) = 0 \end{cases} \qquad (15')$$

Обратно, нека $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ е решение на системот (15), т.е. нека важи системот бројни равенства (15'). Од второто равенство на системот (15'), а земајќи го предвид првото равенство $F_1(x_0, y_0, \ldots, z_0) = 0$, добиваме дека:

$F_2(x_0, y_0, \ldots, z_0) + \varphi(x_0, y_0, \ldots, z_0) \cdot 0 = 0$, односно $F_2(x_0, y_0, \ldots, z_0) = 0$. Тоа покажува дека важи и системот равенства (14'), односно дека $(x_0, y_0, \ldots, z_0)$ е решение на системот равенки (14). Значи, системите равенки (14) и (15) се еквивалентни.

На оваа теорема се заснова познатиот **метод на алгебарско собирање на равенките,** кој често го користиме при решавањето на системите равенки.

Пример 1. Да го решиме системот равенки :

$$\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 74 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 73 \end{cases}$$

Решение. Ако двете равенки на системот ги собереме (или ако кон едната равенка ја додадеме другата претходно помножена со 1) ќе ја добиеме равенката $3x^2 + 3xy + 3y^2 = 147$ или $x^2 + xy + y^2 = 49$. Оваа равенка и една (која било) од дадениот систем ќе образуваат нов систем еквивалентен на дадениот :

$$\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 74 \\ x^2 + xy + y^2 = 49 \end{cases}$$

Сега, ако втората равенка ја одземеме од првата, добиваме :

$$\begin{cases} y^2 = 25 \\ x^2 + xy + y^2 = 49 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (y-5)(y+5) = 0 \\ x^2 + xy + y^2 = 49 \end{cases}$$

Овој систем равенки согласно Т[56.2] е еквивалентен со вкупноста од два система :

$$\left[\begin{cases} y-5=0 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=5 \\ x^2+5x-24=0 \end{cases} \right.$$
$$\left. \begin{cases} y+5=0 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-5 \\ x^2-5x-24=0 \end{cases} \right]$$

Првиот систем од вкупноста има две решенија: $(3, 5)$, $(-8,5)$, и вториот систем исто така има две решенија $(8, -5)$, $(-3, -5)$.

Значи дадениот систем равенки има четири решенија :

$$(3, 5),\ (-8, 5),\ (8, -5),\ (-3, -5).$$

Еден од основните методи на решвање на системите равенки е **методот на замена** (субституција). Да видиме на што се заснова тој.

Нека е даден системот од k равенки од n променливи:

$$\begin{cases} F_1(x, y, \ldots, z)=0 \\ F_2(x, y, \ldots, z)=0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(x, y, \ldots, z)=0 \end{cases} \tag{15}$$

Да претпоставиме дека кај една од равенките на системот (15), на пример кај првата равенка, променливата x лесно можеме да ја изразиме преку другите променливи $y, \ldots, z$; т.е. равенката

$$F_1(x, y, \ldots, z)=0 \tag{16}$$

да ја трансформираме во еквивалентна на неа равенка од видот:

$$x=f(y, \ldots, z) \tag{16'}$$

Изразувањето на променливата x од равенката (16) преку преостанатите променливи $y,\ldots, z$ во неа уште го викаме и **решавање на равенката** (16) **по променливата** x; а при тоа за добиената форумула (16'), велиме дека е **општо решение на равенката** (16). Така, секое посебно решение на равенката (16) ќе го добиеме од (16'), ако на променливите $y,\ldots, z$ им дадеме некои определени дозволени бројни вредности, а соодветната вредност на променливата x ја определуваме од формулата (16').

Очигледно е дека за сите дозволени вредности на $y,\ldots, z$ ќе важи идентитетот (по однос на $y,\ldots, z$):

$$F_1(f(y, \dots, z), y, \dots, z) \equiv 0 \qquad (17)$$

Методот на замена се заснова на следнава :

Теорема [56.10]. ***Ако равенката*** $x = f(y, \dots, z)$ ***е еквивалентна со равенката*** $F_1(x, y, \dots, z) = 0$, ***тогаш системот равенки (15) е еквивалентен со системот***

$$\begin{cases} F_2(f(y, \dots, z), y, \dots, z) = 0 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k(f(y, \dots, z), y, \dots, z) = 0 \\ x = f(y, \dots, z) \end{cases} \qquad (18)$$

Доказ. Нека $(x_0, y_0, \dots, z_0)$ е решение на системот (15). Тогаш ќе важи системот на бројни равенства (14') , а од равенството $F_1(x_0, y_0, \dots, z_0) = 0$ следува и равенството $x_0 = f(y_0, \dots z_0)$. Значи, последната равенка во системот (18) е задоволена. А заменувајќи $y = y_0, \dots, z = z_0$ во останатите равенки на системот (18), добиваме :

$$\begin{cases} F_2(f(y_0, \dots, z_0), y_0, \dots, z_0) = F_2(x_0, y_0, \dots, z_0) = 0 \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k(f(y_0, \dots, z_0), y_0, \dots, z_0) = F_k(x_0, y_0, \dots, z_0) = 0 \\ x_0 = f(y_0, \dots, z_0) \end{cases} \qquad (18')$$

Равенствата (18') покажуваат дека $(x_0, y_0, \dots, z_0)$ е решение и на системот (18). Обратно, нека $(x_0, y_0, \dots, z_0)$ е произволоно решение на системот (18). Тогаш важи равенството $x_0 = f(y_0, \dots, z_0)$.

Заменувајќи во идентитетот (17) $y = y_0, \dots, z = z_0$, добиваме

$F_1(f(y_0, \dots, z_0), y_0, \dots, z_0) = F_1(x_0, y_0, \dots, z_0) = 0$.

Значи, правата равенка на системот (15) е задоволена, а бидејќи вредностите $y = y_0, \dots, z = z_0$ ги задоволуваат првите $k - 1$ равенки на системот (18), затоа ќе важи :

$$F_2(f(y_0, \dots, z_0), y_0, \dots, z_0) = F_2(x_0, y_0, \dots, z_0) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F_k(f(y_0, \dots, z_0), y_0, \dots, z_0) = F_k(x_0, y_0, \dots, z_0) = 0$$

Значи, задоволени се и сите други преостанати равенки на системот (15). Според тоа, системите равенки (15) и (18) се еквивалентни.

Методот на замена, преку примена на оваа теорема ни овозможува сведување на решавањето на системот од k равенки од n променливи, на решавање на систем равенки, во кој бројот на равенките и на променливите е за 1 помал, отколку во почетниот систем.

Пример 2. Да го решиме системот равенки

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ x^2 y - x y^2 = -6 \end{cases} \tag{19}$$

Решение. Методот на замена тука е непрактичен, бидејќи изразувањето на x преку y , или y преку x би довело до сложени ирационални равенки. Прво ќе ја примениме Т[56.9].

Кон првата равенка на системот да ја додадеме втората равенка претходно помножена со –3, така го добиваме системот равенки :

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - y^3 = 9 + 18 \\ x^2 y - xy^2 = 96 \end{cases} \quad \begin{cases} (x - y)^3 = 27 \\ xy(x - y) = -6 \end{cases} \quad \text{, или (согласно Т[56.7])} \tag{20}$$

Во полето на реалните броеви, првата равенка $(x-y)^3 = 27$ согласно со Т[56.4] е еквивалентна со $x - y = 3$, а согласно Т[56.7] и Т[56.10] системот (20) е еквивалентен со системот $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy \cdot 3 = -6 \end{cases}$. Сега x го изразуваме преку y од првата равенка и го заменуваме во втората равенка, па добиваме :

$$\begin{cases} x = y + 3 \\ (y+3)y = -2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = y + 3 \\ y^2 + 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Од втората равенка добиваме $y_1 = -1,\ y_2 = -2.$

Значи, дадениот систем равенки во полето на реалните броеви има решанија: $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -2 \end{cases}$ или $(2,-1),\ (1,-2)$.

При решавањето на многу системи се покажува корисно и **воведувањето на нови променливи.** Да го илустрираме тој метод на еден пример.

Пример 3. Да го решиме системот равенки

$$\begin{cases}(x^2+y^2)(x-y)=447\\ xy(x-y)=210\end{cases}$$

Решение. Ако замениме: $x-y=u$, $xy=v$, тогаш $x^2+y^2=(x-y)^2-2xy=u^2+2v$, па дадениот систем преминува во следниов систем од новите променливи u и v:

$$\begin{cases}(u^2+2v)u=447\\ uv=210\end{cases}$$

Овој систем е еквивалентен со следниве попрости системи:

$$\begin{cases}u^3+2uv=447\\ uv=210\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3=27\\ uv=210\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=3\\ v=70\end{cases}$$

Сега се враќаме на старите променливи:

$$\begin{cases}x-y=3\\ xy=70\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+3\\ (x+3)y=70\end{cases}$$

Од $y^2+3y-70=0$ добиваме: $y_1=-10$, $y_2=7$.
Последниот систем е еквивалентен на вкупноста од системите:

$$\begin{cases}x=y+3\\ y=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-7\\ y=-10\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases}x=y+3\\ y=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=10\\ y=7\end{cases}$$

Според тоа, во полето на реалните броеви дадениот систем има две решенија: $(10, 7)$, $(-7, -10)$.

ЗАДАЧИ

1. Реши го системот равенки
$$\begin{cases}x-y+1=0\\ x^2+1=0\end{cases}$$
во полето на :
а) реалните броеви, б) комплексните броеви.

2. Покажи дека системот равенки
$$\begin{cases}x+y=0\\ x-y=0\end{cases}$$
е еквивалентен со равенката $x^2+y^2=0$ во полето на реалните броеви.

3. Реши ги системите равенки :

а) $\begin{cases} x^2 + xy = 15 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases}$, б) $\begin{cases} x^2 + y = 5 \\ x^4 + y^2 = 17 \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy + x - y = 3 \\ x^2 y - xy^2 = 2 \end{cases}$

4. Докажи дека, која било равенка на еден систем равенки е негова последица.

5. Покажи дека, збирот на : а) кои било две или три равенки, б) сите равенки на даден систем равенки е последица на тој систем равенки.

6. Докажи : Ако дефиниционата област на една равенка ја претставиме во вид на унија од неколку множества : $D = D_1 \cup D_2 \cup ... \cup D_k$ и равенката ја решиме одделно над секое од тие множества, тогаш со тоа ние ќе го добиеме множеството на сите решенија на дадената равенка.

7*. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ x^2 + y^2 + u^2 = 5 \\ x^2 + u^2 + z^2 = 6 \\ u^2 + y^2 + z^2 = 7 \end{cases}$$

§ 57 СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

57.1 ОПШТИ ПОИМИ

Линеарните равенки и системите линеарни равенки со две и со три променливи се учат во основното и средното училиште. Сега тука ние ќе разгледуваме линеарни равенки и системи од произволен број равенки и променливи, при што бројот на равенките во системот не мора да е еднаков на бројот на променливите.

За таквите равенки и системи линеарни равенки непрактично е означувањето на променливите со $x, y, z, ..., u$. Многу позгодно е нивно означување со $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Исто така и означувањето на коефициентите пред променливите непрактично е да го вршиме со различни букви: $a, b, c, \ldots$ Нив ќе ги означуваме исто така со една буква, но со два индекса. Првиот индекс ќе го означува бројот на равенката во системот, а вториот – бројот на променливата пред која стои коефициентот. На пример, a_{23} е коефициент пред x_3 во втората равенка во системот. Општо a_{ij} е коефициент пред x_j во i – тата равенка. Слободниот член на i –тата равенка ќе го означуваме со b_i .

Така, системот од m линеарни равенки со n променливи и слободни членови $b_i \neq 0$ сега ќе го запишуваме во следниов општ вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

Наша задача ќе биде да ги одредиме сите решенија на системот (1) или ако нема решенија, да го утврдиме тоа. Ќе покажеме подолу дека се можни три случаја:

1. Системот (1) нема решенија, т.е. тој е **невозможен,**
2. Системот има единствено решение, или велиме тој е **определен.**
3. Системот (1) има бесконечно множество решенија, или велиме тој е **неопределен.**

При решавањето на системот (1) најчесто ги користиме следниве **елементарни трансформации:** а) ја множиме (левата и десната страна на) која било равенка на системот (1) со некој број различен од нула,
б) ги разменуваме местата на кои било две равенки на системот (1),
в) кон двете страни на една која било равенка на системот (1) ги додадеме соодветните страни на друга равенка, предходно помножени со кој било број.

Како резултат на секоја од овие трансформации, согласно теоремите Т[56.2], Т[56.8], и Т[56.9] системот (1) преминува во негов еквивалентен систем. Така, на пример, ако кон двете страни на i – тата равенка на системот (1) ги додадеме соодветните страни на првата равенка, претходно помножена со кој било број λ, ќе го добиеме системот равенки:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(a_{i1}x_1 + \lambda\, a_{11}\right)x_1 + \left(a_{i2} + \lambda\, a_{12}\right)x_2 + \ldots + \left(a_{in} + \lambda a_{1n}\right)x_n = b_i + b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (2)$$

што е еквивалентен со даденият.

Да наведеме уште две прости теореми, што ќе ги користиме при решавањето на системите линеарни равенки:

Теорема [57.1] ***Ако помеѓу равенките на системот има и равенки од видот:***

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0\ , \qquad (3)$$

тогаш по нивното отфрлање ќе добиеме систем еквивалентен на почетниот.

Ова теорема се заснова врз фактот што секој произволен систем (набор) вредности на променливите $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ ја задоволува равенката (3).

Теорема [57.2]. ***Ако помеѓу равенките на системот има равенки од видот:***

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = b \tag{4}$$

каде што $b \neq 0$ ***, тогаш системот е невозможен, т.е. нема решенија.***

Оваа теорема се заснова, пак, врз фактот што ниту еден систем вредности $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \ldots, x_n = \alpha_n$ не ја задоволува равенката (4).

57.2. ГАУСОВ МЕТОД НА РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМИТЕ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

1. Системите линеарни равенки со две или три променливи во основното училиште ги решаваме или со помош на методот на замена, или со помош на методот на алгебарско собирање. Сега тука ќе се запознаеме со еден друг метод наречен **Гаусов метод**, кој е многу сличен на методот на алгебарско собирање. Да го изложиме овој метод прво на еден конкретен пример.

Да го решиме системот линеарни равенки :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \end{cases} \tag{5}$$

Да ги помножиме двете страни на првата равенка од системот со -2 и да ги додадеме кон соодветните страни на втората равенка; потоа да ја помножиме првата равенка (т.е. двете нејзини страни) со -3 и да ја додадеме кон третата равенка и на крај да ја помножиме првата равенка со -4 и да ја додадеме кон четвртата. Во таков случај системот равенки (5) ќе го добие видот :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -10 \\ -2x_2 - 8x_3 - 10x_4 = -20 \\ -7x_2 - 10x_3 - 13x_4 = -30 \end{cases} \tag{6}$$

Забележуваме, во системот (6), кој е еквивалентен со даденият систем (5), променливата x_1 остана само во првата равенка. Велиме дека со извршените трансформации на системот (5) **променливата** x_1 **ја исклучивме** од сите равенки на системот, освен од првата.

Во натамошните трансформации на системот (6) првата негова равенка ќе ја оставиме, а ќе ги трансформираме на сличен начин само последните три равенки. Да ја помножиме втората равенка со -2 и да ја додадеме кон третата равенка, а потоа втората равенка да ја помножиме со -7 и да ја додадеме сега кон четвртата равенка на (6). Така го добиваме еквивалентниот систем

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ -x_2 + -2x_3 - 7x_4 = -10 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_3 + 36x_4 = 40 \end{cases} \tag{7}$$

На крајот ја додаваме третата равенка во системот (7) кон четвртата равенка, со што го добиваме системот:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11 \\ -x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -10 \\ -4x_3 + 4x_4 = 0 \\ 40x_4 = 40 \end{cases} \tag{8}$$

Системот линеарни равенки од овој вид го викаме **триаголен систем.** Забележуваме дека тој лесно може да се реши. Од последната равенка ја добиваме вредноста на промнеливата $x_4 = 1$. Заменувајќи ја таа вредност во третата равенка, добиваме $-4x_3 + 4 \cdot 1 = 0$, од каде $x_3 = 1$. Потоа заменувајќи $x_3 = x_4 = 1$ во втората равенка, од неа добиваме $x_2 = 1$. На крај од првата равенка ја добиваме и соодветната вредност на променливата $x_1 = 2$.

Според тоа, триаголниот систем (8) има единствено решение, а тоа е решение и на даденият систем (5): $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$, односно негово решение е подредената четворка (2, 1, 1, 1).

2. Да поминеме сега на решавањето според Гаусовиот метод на системот линеарни равенки од општ вид.

Нека е даден произволен систем од m линеарни равенки со n променливи:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

Да претпоставиме дека првата равенка на системот (1) ја содржи променливата x_1, т.е. дека коефициентот $a_{11} \neq 0$. Оваа претпоставка не ја намалува општоста на

разгледувањето, бидејќи тоа секогаш може да се постигне со пренумерирање (разместување) било на равенките, или на променливите. При тоа, пренумерирањето од практични причини, како што ќе видиме понатаму, згодно е ако $a_{11} = 1$.

Системот (1) ќе го трансформираме во друг еквивалентен систем во кој променливата x_1 е исклучена од сите равенки освен од првата. За таа цел ја множиме првата равенка (двете нејзини страни) со бројот $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и ја додаваме кон втората, потоа ја множиме првата равенка со бројот $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и ја додаваме кон третата равенка на системот, итн. И на крај ја множиме првата равенка со бројот $-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ и ја додаваме кон m- тата равенка. При тоа го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + a'_{m3}x_3 \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \tag{9}$$

Тука заради краткост воведени се следниве ознаки:

$$a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}, \quad \ldots, \quad a'_{2n} = a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}, \quad b'_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1 \quad \text{итн.}$$

Со трансформацијата на системот (1) во еквивалентен систем (9) во кој променливата x_1 е исклучена од сите равенки освен од првата, може да се случи:

а) Помеѓу равенките на системот (9) да има и равенки од видот: $0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = 0$ (3) .Тогаш согласно Т[57.1] таквите равенки ги отфрламе од системот (9), па затоа во него ќе останат помалку од m равенки.

б) Помеѓу равенките на системот (9) да има и равенка од видот : $0x_2 + 0x_3 + \ldots + 0x_n = b_k$, (4) каде што $b_k \neq 0$. Во тој случај натамошната трансформација на системот (9) ја прекинуваме и согласно Т[57.2] заклучуваме дека даденият систем е невозможен, односно нема решенија. Ако во системот (9) нема равенки од видот (4) и од него се отфрлени (до колку ги имало) равенките од видот (3), ќе добиеме систем еквивалентен на даденият, во кој променливата x_1 е исклучена од сите равенки освен од првата.

Да го трансформираме сега системот (9). Ако $a_{22} \neq 0$, тогаш со додавање кон третата и кон секоја од наредните равенки, на втората равенка претходно

помножена соодветно со броевите: $-\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$, $-\frac{a'_{42}}{a'_{22}},\ldots,-\frac{a'_{m2}}{a'_{22}}$, ние ќе дојдеме до следниов систем равенки, што е еквивалентен на системот (9), а со тоа и на системот (1), а во кој променливата x_2 е исклучена од сите равенки освен од првата и втората:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_3x_n = b''_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a''_{s3}x_3 + \ldots + a''_{Sn}x_n = b''_S \end{cases} \qquad (10)$$

Овој систем ќе содржи сега s равенки, $s \le m$, бидејќи некои од равенките од видот (3) биле отфрлени.

Продолжувајќи со овој процес на постепено исклучување на променливите $x_3, \ldots, x_4$, итн. При секој чекор ќе добиеме нов систем равенки, еквивалентен на даденият. Ако во тој процес не се добие равенка од видот (4), тогаш по конечен број чекори (не поголем од m-1 чекори) ќе го добиеме системот од видот :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \ldots + a_{kn}^{(k-1)}x_n = b_k^{(k-1)} \end{cases} \qquad (11)$$

каде што дијагоналните коефициенти се различни од нула, т.е.

$$a_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0, \ldots, a_{kk}^{(k-1)} \neq 0; \text{ а } k \le m \text{ и } k \le n.$$

Да забележиме, во целиот тек на решавање ние ги отфрливме равенките од видот $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x = 0$, а во случај на потреба вршевме и пренумерација на равенките или променливите.

Во овој случај системот (11), а исто така и даденият систем е можен (решлив). Тој е определен, т.е. има едно единствено решение, ако $k = n$; а тој е неопределен, ако $k < n$. Навистина ако $k = n$, тогаш системот (11) го има видот :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{kn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases} \qquad (12)$$

т.е. тој е триаголен. При тоа $a_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0, \ldots, a_n^{(n-1)} \neq 0$.

Од последната равенка на системот (12) ја добиваме вредноста на променливата x_n . Заменувајќи ја таа вредност во претпоследната равенка, од неа ја определуваме вредноста на променливата x_{n-1}. Продолжувајќи понатаму ги определуваме x_{n-2} , x_{n-3} итн. назад до x_1 , која ја одредуваме од првата равенка на системот (12).

Забележваме дека, триаголниот систем (12), па затоа и дадениот систем при $k = n$ има единствено решение, т.е. тој е возможен и определен.

Нека е сега $k < n$. Во тој случај велиме дека системот (11) има **трапезна форма.** Пренесувајќи ги членовите што ги содржат променливите x_{k+1} , x_{k+2}, ..., x_n , на десната страна на равенките, системот (11) го добива видот :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2k}x_k = b'_2 - a'_{2k+1}x_{k+1} - \ldots - a'_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k = b_k^{(k-1)} - a_{kk+1}^{(k-1)}x_{k+1} \ldots - a_{kn}^{(k-1)}x_n \end{cases} \tag{13}$$

Овој систем равенки има бесконечно множество решенија, т.е. тој е неопределен. Значи, ако на " слободните " променливи x_{k+1} , x_{k+2}, ..., x_n им дадеме произволни бројни вредности $x_{k+1}=\alpha_{k+1}$, ... , $x_n = \alpha_n$, тогаш системот (13) станува триаголен, па решавајќи го него ги добиваме и бараните вредности за x_k , x_{k-1} , ... , x_1. Бидејќи вредностите за слободните променливи може да се избираат произволно на бесконечен број начини, затоа системот (13) ќе има бесконечно многу решенија, односно тој ќе биде неопределен.

Од погоре изложеното, заклучуваме дека, Гаусовиот метод на решавање е применлив кон кој било систем линеарни равенки. Притоа системот е невозможен (нерешлив), ако во процесот на неговите трансформации добиеме равенка од видот $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x = b$, каде $b \neq 0$. Ако пак таква равенка не добиеме, тогаш дадениот систем е можен (решлив), и тој ќе биде определен, ако се сведува на триаголна форма (12) при $k = n$; или неопределен, ако се сведува на трапезна форма (13) при $k < n$.

Пример 1. Да го решиме системот равенки :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3 \end{cases} \tag{14}$$

Решение. Со цел при трансформациите на дадениот систем да добиваме по можност цели коефициенти ќе ја извршиме следнава пренумерација на равенките : третата равенка да ја земеме за прва, првата – за втора, втората за трета, а четвртата нека остане четврта. Ќе извршиме и разместување на променливите. Во

секоја од равенките тие нека го имаат следниов редослед : x_2, x_4, x_1, x_3, x_5. Во таков случај дадениот систем ќе го има следниов вид :

$$\begin{cases} x_2 + x_4 + 3x_1 - 2x_3 - x_5 = 1 \\ 3x_2 + 5x_4 + x_1 - 2x_3 - 7x_5 = 3 \\ -x_2 - 3x_4 + 2x_1 + 7x_3 + 5x_5 = 2 \\ -2x_2 - 5x_4 + 3x_1 + 7x_3 + 8x_5 = 3 \end{cases} \qquad (14')$$

Сега првата равенка ја множиме со -3 и ја додаваме кон втората, потоа првата равенка ја додаваме кон третата и на крај првата равенка ја множиме со 2 и ја додаваме кон четвртата равенка на системот (14') , па тој го добива видот :

$$\begin{cases} x_2 + x_4 + 3x_1 - 2x_3 - x_5 = 1 \\ 2x_4 - 8x_1 + 4x_3 - 4x_5 = 0 \\ -2x_4 + 5x_1 + 5x_3 + 4x_5 = 3 \\ -3x_4 + 9x_1 + 3x_3 + 6x_5 = 5 \end{cases} \qquad (14'')$$

Потоа ако втората равенка ја додадеме кон третата, а втората равенка ја помножиме со $\frac{3}{2}$ и ја додадеме кон четвртата равенка на системот (14") , тој го добива обликот:

$$\begin{cases} x_2 + x_4 + 3x_1 - 2x_3 - x_5 = 1 \\ 2x_4 - 8x_1 + 4x_3 - 4x_5 = 0 \\ -3x_1 + 9x_3 + 0x_5 = 3 \\ -3x_1 + 9x_3 + 0x_5 = 5 \end{cases} \qquad (15)$$

Заклучуваме дека, ако третата равенка во системот (15) ја помножиме со -1 и ја додадеме кон четвртата, ќе дојдеме до систем кој ја содржи равенката $0x_1 + 0x_3 + 0x_5 = 2$. Според тоа, дадениот систем (14) согласно Т[57.2] е невозможен, односно тој нема решенија.

Пример 2. Да го решиме системот линеарни равенки

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

Решение. Овој систем равенки лесно го сведуваме на следниов триаголен систем

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ 2x_3 - 4x_4 = 12 \\ 0x_4 = 0 \end{cases}$$

По отфрлањето на последната равенка $0x_4 = 0$ и префрлувањето на членовите што ја содржат променливата x_4 на десната страна на равенките, го добиваме следниов триаголен систем по однос на променливите x_1, x_2 и x_3 :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4x_4 + 4 \\ x_2 - x_3 = -x_4 - 3 \\ x_3 = 2x_4 + 6 \end{cases} \tag{16}$$

Ако $x_4 = \alpha$, тогаш од третата равенка на системот (16), добиваме $x_3 = 2\alpha + 6$. Потоа од втората равенка, добиваме: $x_2 = 2\alpha + 6 - \alpha - 3 = \alpha + 3$. На крајот од првата равенка добиваме: $x_1 = 2(\alpha + 3) - 3(2\alpha + 6) + 4\alpha + 4$, откаде добиваме $x_1 = -8$.

Според тоа, подредената четворка броеви $(-8, \quad \alpha+3, \quad 2\alpha+6, \quad \alpha)$ каде што α е произволен број, претставува општ вид на бесконечното множество решенија на дадениот систем равенки.

57.3 СИСТЕМ ХОМОГЕНИ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

Познато е дека, линеарната равенка чиј слободен член е еднаков на нула, се вика **хомогена линеарна равенка.**

Да го разгледаме сега системот од m хомогени линеарни равенки со n променливи :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Овој систем равенки секогаш е можен (решлив), бидејќи тој има решение $(0,0,\ldots,0)$, кое се вика негово **нулто решение.** Покрај тоа решение, нас често не интересираат ненултите решенија на системот (17). Системот хомогени линеарни равенки, ако има ненулти решенија, нив секако ги наоѓаме по Гаусовиот метод.

Нека разгледуваниот систем (17) содржи помалку равенки, отколку бројот на променливите во него, т.е. ако $m < n$. Тогаш системот (17) не може да се сведе на триаголен вид, бидејќи во процесот на неговата трансформација согласно Гаусовиот метод, бројот на равенките во системот може да се намалува, но никако да се зголемува. Тоа значи дека во тој случај (ако $m < n$) системот (17) ќе се сведе на трапезна форма, т.е. ќе има бесконечно множество решенија. Оттука следува дека важи следнава:

Теорема [57.3] ***Системот од m хомогени линеарни равенки со n променливи за да има ненулто решение, доволно е бројот на равенките во него да биде помал од бројот на променливите*** $m < n$.

Системите хомогени линеарни равенки ги решаваме по Гаусовиот метод.

Пример 3 . Да го решиме системот хомогени линеарни равенки:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение. По исклучувањето на променливата x_1 од втората, третата и четвртата равенка со примена на Гаусовиот метод го добиваме системот равенки:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ -6x_2 + 6x_3 + 15x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 + 10x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

Ако втората равенка ја помножиме со -3 и ја додадеме кон третата, а потоа втората равенка ја додадеме кон четвртата равенка, го добиваме системот:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 9x_4 - 3x_5 = 0 \\ 12x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases} \qquad (18)$$

Забележуваме дека третата и четвртата равенка се еквиваленти на равенката $3x_4 - x_5 = 0$, па затоа системот (18) и даденият систем се еквивалентни со триаголниот систем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = x_5 \\ -2x_2 + 2x_4 = -2x_3 - x_5 \\ 3x_4 = x_5 \end{cases} \qquad (18')$$

Ако $x_3 = \alpha, x_5 = \beta$, тогаш од третата равенка имаме: $x_4 = \frac{1}{3}x_5 = \frac{1}{3}\beta$. А од втората и првата на системот (18′) добиваме $x_2 = \frac{5}{6}\beta + \alpha,\ x_1 = \frac{7}{6}\beta - \alpha.$

Според тоа, подредената петорка броеви $\left(\frac{7}{6}\beta - \alpha,\ \frac{5}{6}\beta + \alpha,\ \alpha,\ \frac{1}{3}\beta,\ \beta\right)$, каде што α и β се произволни броеви, претставува општ вид на бесконечното множество решенија на дадениот систем хомогени линеарни равенки. Очигледно е дека во тој општ вид е вклучено и нултото решение ($0,0,0,0,0$) и тоа за $\alpha = \beta = 0$.

57.4. СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ КОИ СОДРЖАТ ПАРАМЕТРИ

При решавањето на системите линеарни равенки, покрај Гаусовиот метод, во некои специјални случаи користиме и други посебни методи. Посебни методи на решавање користиме и кај системите линеарни равенки, кои содржат параметри. Кај овие системи линеарни равенки, нивното решавање е придружено и со соодветна дискусија – иследување на решенијата на системите равенки. Таа дискусија се состои од утврдувањето: при кои вредности на параметрите системот е можен (решлив), а при кои тој е невозможен (противречен). Во првиот случај треба да испитаме во кои случаи системот равенки има единствено решение, а во кои има бесконечно множество решенија, како и да се состави формулата на неговото општо решение.

Неколку такви посебни приоди и методи ќе ги појасниме во следниве примери:

Пример 4. Да го решиме системите линеарни равенки :

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = a_1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = a_2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n = a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} = a_n \end{cases} \qquad (19)$$

Решение. Ако ги собереме соодветните страни на сите n равенки, добиваме: $(n-1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)=a_1+a_2+\ldots+a_n$

Оттука $x_1+x_2+\ldots+x_n=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n-1}$ (20)

Со одземање од двете страни на равенката (20) соодветните страни едно по друго на секоја равенка од дадениот систем, го добиваме единственото решение :

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n-1}-a_1 \\ x_2=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n-1}-a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n-1}-a_n \end{cases}$$

Пример 5. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} kx+y+z=a \\ x+ky+z=b \\ x+y+kz=c \end{cases} \quad (21)$$

Решение. Со собирање на соодветните страни, ја добиваме равенката

$$(k+2)(x+y+z)=a+b+c \quad (22)$$

Ако $k\neq -2$, тогаш од равенката (22), добиваме $x+y+z=\dfrac{a+b+c}{k+2}$ (23)

Со одземање на равенката (23) од првата равенка на дадениот систем добиваме $(k-1)x=a-\dfrac{a+b+c}{k+2}$ (24)

Ако е $k\neq 1$, тогаш имаме: $x=\dfrac{1}{k-1}\left(a-\dfrac{a+b+c}{k+2}\right)$

Аналогно : $y=\dfrac{1}{k-1}\left(b-\dfrac{a+b+c}{k+2}\right)$, $z=\dfrac{1}{k-1}\left(c-\dfrac{a+b+c}{k+2}\right)$.

Значи, при $k\neq -2$, $k\neq 1$, системот има единствено решение.

Ако $k = -2$ и $a + b + c \neq 0$, тогаш равенката (22) нема решение, па затоа и системот нема решение. Ако пак $k = -2$ и $a + b + c = 0$, тогаш дадениот систем го добива видот

$$\begin{cases} -2x + y + z = a \\ x - 2y + z = b \\ x + y - 2z = -a - b \end{cases}$$

Забележуваме дека, третата равенка е последица од првата и втората, бидејќи збирот од првите две, претходно помножени со -1 е идентичен со третата равенка. Затоа, третата равенка може да се отфрли од системот, со што тој ќе има бесконечно множество решенија, чија општа форма е $\left(y - \frac{a-b}{3}, y, y + \frac{a+2b}{3} \right)$ каде y е произволен број.

Ако $k = 1$, тогаш дадениот систем го добива видот :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + z = b \\ x + y + z = c \end{cases}$$

Оттука следува : ако $k = 1$ и $a = b = c$, тогаш системот има бесконечно множество решенија, што ја задоволуваат равенката $x + y + z = a$, а ако пак $k = 1$ и барем два од броевите a, b, c се различни, тогаш системот е невозможен, т.е. нема решение.

Пример 6. Да го решиме системот

$$\begin{cases} ax + by + cz = k \\ a^2x + b^2y + c^2z = k^2 \\ a^3x + b^3y + c^3z = k^3 \end{cases}$$

Решение. Системот ќе го решиме при услов : $a \neq b \neq c \neq 0$ т.е. ќе претпоставиме дека параметрите a, b, c се различни од нула и различни еден од друг. Тогаш според Гаусовиот метод можеме да ја исклучиме променливата x од втората и третата равенка, со што ќе го добиеме системот :

$$\begin{cases} ax + by + cz = k \\ b(b-a)y + c(c-a)z = k(k-a) \\ b(b^2-a^2)y + c(c^2-a^2)z = k(k^2-a^2) \end{cases} \tag{25}$$

Втората и третата равенка на системот (25) ја содржат променливата y бидејќи $b \neq 0$ и $b \neq a$. Ако променливата y ја исклучиме од последната равенка на (25), ќе го добиеме следниов систем во триаголна форма :

$$\begin{cases} ax+by+ \quad cz=k \\ b(b-a)y+c(c-a)z=k(k-a) \\ \quad c(c-a)(c-b)z=k(k-a)(k-b) \end{cases} \tag{26}$$

При $c \neq 0$, $c \neq a$, $c \neq b$, а од последната равенка на системот (26) добиваме $y=\frac{k(k-a)(k-b)}{c(c-a)(c-b)}$, а од втората и првата равенка на системот (26) потоа добиваме соодветно :

$$y=\frac{k(k-a)(k-c)}{b(b-c)(b-a)}, \qquad x=\frac{k(k-b)(k-c)}{a(a-b)(a-c)}$$

Според тоа, дадениот систем, при услов да е $a \neq b \neq c \neq 0$, има единствено решение.

Забелешка. Ако дадениот систем требаше да го решиме без ограничувачкиот услов за параметрите, тогаш покрај разгледаниот случај ($a \neq b \neq c \neq 0$), мораме да ги разгледаме и посебните случаи, ако:
1) $a=0,\ b \neq c \neq 0$, *2)* $a=0,\ b=c \neq 0$, *3)* $a=b=0,\ c \neq 0$, *4)* $a=b=c=0$, *5)* $a=b=c \neq 0$ и *6)* $a \neq b,\ b=c \neq 0$.

Пример 7. Да го решиме системот равенки :

$$\begin{cases} \frac{x_1-a_1}{k_1}=\frac{x_2-a_2}{k_2}=\ldots=\frac{x_n-a_n}{k_n} \\ A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n=B \end{cases} \tag{27}$$

каде што $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, \ldots, k_n \neq 0$.

Решение. Да воведеме нова променлива t, ставајќи :

$$\frac{x_1-a_1}{k_1}=\frac{x_2-a_2}{k_2}=\ldots=\frac{x_n-a_n}{k_n}=t .$$

Оттука :

$$x_1=k_1t+a_1, \quad x_2=k_2t+a_2, \ldots, \quad x_n=k_nt+a_n \tag{28}$$

Сега решавањето на системот (27) го заменуваме со решавањето на системот :

$$\begin{cases} x_1=k_1t+a_1, \quad x_2=k_2t+a_2, \ldots, \quad x_n=k_nt+a_n \\ A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n=B \end{cases} \tag{28'}$$

Со замена на равенствата (28) во $A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_nx_n = B$ ја добиваме равенката :

$$(A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_nk_n)t = B - (a_1A_1 + a_2A_2 + ... + a_nA_n) \qquad (29)$$

Ако $A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_nk_n \neq 0$, тогаш равенката (29) има единствено решение $t = \dfrac{B - (a_1A_1 + a_2A_2 + ... + a_nA_n)}{(A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_nk_n)}$

Од равенствата (28) ги одредуваме соодветните изрази за променливите $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Според тоа, ако $A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_nk_n \neq 0$, тогаш системот (27) има единствено решение. Ако $A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_nk_n = 0$, но $B \neq a_1A_1 + a_2A_2 + ... + a_nA_n$, тогаш равенката (29) е невозможна, па во тој случај и системот (27) е невозможен, т.е. нема решение.

Ако, пак, $A_1k_1 + A_2k_2 + ... + A_nk_n = 0$ и $B = a_1A_1 + a_2A_2 + ... + a_nA_n$, тогаш равенката (29) е задоволена за произволен број t, па во тој случај дадениот систем има бесконечно множество решенија.

Општото решение обично го задаваме со равенствата (28), каде што t е произволен број.

Интересно е да забележиме дека изложената постапка за решавање на системот (27) од овој пример се користи во аналитичка геометрија за определување на пресечната точка на права и рамнина.

Пример 8. Да го решиме системот равенки

$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3 = 0 \end{cases}$$

каде што параметрите a, b, c го задоволуваат условот $a \neq b \neq c$.

Решение. Овој систем, освен по методот на исклучување на променливите, можеме да го решиме и на следниов начин.

Системот може да го запишеме и во видот:

$$\begin{cases} a^3 + za^2 + ya + x = 0 \\ b^3 + zb^2 + yb + x = 0 \\ c^3 + zc^2 + yc + x = 0 \end{cases}$$

очигледно е дека, равенките на овој (па и на дадениот) систем покажуваат дека броевите (параметрите) a, b, c мора да бидат корени на

полиномот од трет степен: $X^3 + zX^2 + yX + x$, чии коефициенти се z, y, и x. Познато е дека, тој полином, согласно Виетовите правила, може да го запишеме во видот :

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3 - (a+b+c)X^2 + (ab+ac+bc)X - abc$$

Изедначувајќи ги коефициантите при еднаквите степени на X, добиваме :

$$x = -abc, \quad y = ab+ac+bc, \quad z = -(a+b+c) \tag{30}$$

Според тоа, даденият систем при услов $a \neq b \neq c \neq 0$ има единствено решение (30).

ЗАДАЧИ

Реши ги системите линеарни равенки

1. а)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

2.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$$

3.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_4 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6 \\ 3x_2 - x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

4.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

7*.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_4 + x_5 + x_6 = -3 \\ x_5 + x_6 + x_7 = -9 \\ x_6 + x_7 + x_8 = -6 \\ x_7 + x_8 + x_1 = -2 \\ x_8 + x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

8*.
$$\begin{cases} x + ay + a^2z + a^3t + a^4 = 0 \\ x + by + b^2z + b^3t + b^4 = 0 \\ x + cy + c^2z + c^3t + c^4 = 0 \\ x + dy + d^2z + d^3t + d^4 = 0 \end{cases}$$

9. Да се избере c така што системот линеарни равенки ќе има решение :
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = c \end{cases}$$

10*.
$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = k^2 \end{cases}$$

11*.
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = k \\ a^2x + b^2y + c^2z = k^2 \end{cases}$$

§ 58 СИСТЕМИ РАВЕНКИ ОД ВТОР И ПОВИСОК СТЕПЕН

Прашањето за решавање на системите равенки од втор и повисок степен спаѓа во доменот на вишата алгебра, поточно во **теоријата на елиминација.** Меѓутоа примената на општите правила на исклучување на променливите во практиката е многу гломазна, поради што и се избегнува. Во елементарната алгебра

користиме само некои посебни методи на решавање на системите полиномни равенки од повисок степен, и тоа само на оние системи кои во практиката најчесто ги сретнуваме.

58.1. СИСТЕМИ КОИ СОДРЖАТ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ

Да го разгледаме системот равенки од неколку променливи :

$$(*)\quad \begin{cases} L_1(x,y,\ldots,z)=0, L_2(x,y,\ldots,z)=0 \quad \ldots, \quad L_k(x,y,\ldots,z)=0 \quad \} & (1) \\ F_1(x,y,\ldots,z)=0, F_2(x,y,\ldots,z)=0 \quad \ldots, \quad F_l(x,y,\ldots,z)=0 \quad \} & (2) \end{cases}$$

во кој равенките $L_1=0 \quad \ldots, \quad L_k=0$ се линеарни, а равенките $F_1=0 \quad \ldots, \quad F_l=0$ се од степен повисок од 1 .

Да го разгледаме прво подсистемот (1) од линеарни равенки. Тој може да биде: невозможен, определен или неопределен. Ако подсистемот (1) е невозможен, тогаш и системот (*) е невозможен.

Ако подсистемот (1) има единствено решение, тогаш доволно е да се утврди дали тоа решение ја задоволува секоја равенка од подсистемот (2). Ако најденото решение ги задоволува сите равенки од подсистемот (2), тогаш тоа решение е единствено решение и на системот (*). Ако, пак, најмалку една од равенките на подсистемот (2) биде незадоволена, тогаш системот (*) нема решение.

Ако подсистемот (1) има бесконечно множество решенија, тогаш потребно е да го одредиме неговото општо решение. Со формулите на општото решение некои променливи ќе бидат изразени во вид на линеарни функции (полиноми) од останатите променливи. Потоа изразените променливи од секоја од равенките на системот (2) ги заменуваме со на нив соодветните изрази од општото решение на системот (1), па така системот (*) се сведува на l равенки, чии степени не се поголеми од степените на равенките во (2).

Пример 1. Да го решиме системот равенки

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x^2-2xz+y^2+4xy+z^2-x+2y-4=0 \end{cases} \qquad (3)$$

Решение. Овој систем го сочинуваат две линеарни и една квадратна равенка од три променливи. Да го одредиме општото решение на подсистемот од линеарните равенки во (3). За таа цел исклучуваме една од променливите, на пример x. Со множење на првата равенка со -2 и додавање кон втората, ја добиваме равенката $-3y-3z=-6$ или $y=2-z$. Потоа од првата равенка добиваме $x+2(2-z)+z=3$ од каде $x=z-1$.

Значи, подсистемот од линеарните равенки во (3) има општо решение: $x = z - 1,\ y = 2 - z$, каде z е произволен број.

Заменувајќи ги променливите x и y во третата равенка на системот (3) со $x = z - 1,\ y = 2 - z$,по упростувањето, ја добиваме равенката $4z^2 - 5z = 0$ од каде $z_1 = 0,\quad z_2 = \frac{5}{4}$.

Според тоа, даденият систем (*) има две решенија:

$x_1 = -1,\ y_1 = 2,\ z_1 = 0$ и $x_2 = \frac{1}{4},\ y_1 = \frac{3}{4},\ z_1 = \frac{5}{4}$, односно тоа се подредените тројки броеви $(-1,2,0)$ и $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$.

58.2. СИСТЕМИ ОД ДВЕ РАВЕНКИ ОД ВТОР СТЕПЕН СО ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Равенката од видот

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{4}$$

каде што барем еден од коефициентите $a,\ b,\ c$ е различен од нула и коефициентите $a,\ b,\ d$ или $b,\ c,\ e$ истовремено не се еднакви на нула, се вика **равенка од втор степен** или **квадратна равенка со две променливи.**

Во равенката (4) ако $d = e = f = 0$, тогаш таа ги содржи само квадратните членови :

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \tag{5}$$

и се вика **хомогена квадратна равенка со две променливи.**

Општиот вид на системот од две квадратни равенки со две променливи е:

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Ќе покажеме дека системот (6), како и секој систем со две променливи, со елиминација на едната променлива се сведува на равенка со една променлива. Да го елиминираме прво y^2 . За таа цел првата и втората равенка на системот (6) ќе ги помножиме соодветно со c_2 и $-c_2$, а потоа соодветните страни на двете равенки да ги собереме. Така добиваме :

$$(a_1c_2 - a_2c_1)x^2 + (b_1c_2 - b_2c_1)xy + (d_1c_2 - d_2c_1)x + (e_1c_2 - e_2c_1)y + f_1c_2 - f_2c_1 = 0$$

или ако ставиме :

$a_1c_2 - a_2c_1 = p$, $d_1c_2 - d_2c_1 = q$, $f_1c_2 - f_2c_1 = r$, $b_1c_2 - b_2c_1 = s$ и $e_1c_2 - e_2c_1 = t$,

добиваме: $px^2 + sxy + qx + ty + r = 0$ (7)

Равенката (7) е линерана по однос на променливата y :

$$(sx+t)y + (px^2 + qx + r) = 0, \tag{7'}$$

а за вредностите на x за кои е $sx + t \neq 0$, добиваме

$$y = -\frac{px^2 + q + r}{sx + t}$$

Ако овој израз го замениме во првата (или втората) равенка на системот (6) и целата равенка ја помножиме со најмалиот заеднички именител $(sx+t)^2$, ќе добиеме една равенка со една променлива, во општ случај од видот

$$\alpha_0 4x^4 + \alpha_1 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x + \alpha_4 = 0$$

во која коефициентите $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, се определени со коефициентите на дадениот систем (6).

Според тоа, во општ случај системот (6) има четири решенија.

Да видиме сега како ќе ги одредиме решенијата на системот (6) (ако има такви) за кои променливата x има вредност $x = -\frac{t}{s}$ т.е. кога е $sx + t = 0$. Ако таа вредност не ја задоволува равенката $px^2 + qx + r = 0$, (7'')

тогаш равенката (7) , а според тоа и системот (6) нема решенија од видот $\left(-\frac{t}{s}, y\right)$.

Ако, пак, вредноста $x = -\frac{t}{s}$ ја задоволува равенката (7''), тогаш равенката (7), а исто така и втората равенка на системот (6) ќе бидат задоволени за која било вредност на y . Со замена на променливата x во првата равенка на системот (6) со $x = -\frac{t}{s}$, ќе добиеме (во општ случај) квадратна равенка по однос на променливата y, чии корени се y_1 , y_2 .

Значи, ако $x = -\frac{t}{s}$ ја задоволува равенката (7''), тогаш системот (6) ќе има уште две решенија од видот $\left(-\frac{t}{s}, y_1\right)$ и $\left(-\frac{t}{s}, y_2\right)$.

Пример 2. Да го решиме системот квадратни равенки со две променливи :

$$\begin{cases} 8x^2 - 2xy - y^2 - 18x + 6y + 7 = 0 \\ 10x^2 + 5xy - 2y^2 - 9x + 3y - 7 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Решение. Да го елиминираме прво y^2. За таа цел првата равенка ја множиме со -2 и ја додаваме кон втората, па добиваме :

$$-6x^2 + 9xy + 27x - 9y - 21 = 0 \tag{9}$$

Оттука : $3(x-1)y = 2x^2 - 9x + 7$ и $y = \dfrac{2x^2 - 9x + 7}{3(x-1)}$ при $x \neq 1$.

Заменувајќи го добиениот израз за y во првата равенка на системот (8), добиваме

$$8x^2 - 2x \cdot \frac{2x^2 - 9x + 7}{3(x-1)} - \left(\frac{2x^2 - 9x + 7}{3(x-1)} \right)^2 - 18x + 6 \cdot \frac{2x^2 - 9x + 7}{3(x-1)} + 7 = 0 .$$

Оттука по средувањето и скратувањето следува :

$$\frac{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2}{x - 1} = 0$$

Полиномот во броителот има корени : $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = 1$.

За $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$ соодветно вредностите на променливата y изнесуваат $y_1 = -3$, $y_2 = -1$. Значи, при $x \neq 1$ даденият систем има две решенија : $x_1 = -1$, $y_1 = -3$ и $x_2 = 2$, $y_2 = -1$.

За вредноста $x = 1$, равенката (9) е задоволена идентички, т.е. за секој y . Ставајќи $x = 1$ во која било од равенките на системот (8), ја добиваме квадратната равенка $y^2 - 4y + 3 = 0$, која има корени $y_3 = 1$, $y_4 = 3$.

Така добиваме уште две решенија на системот (8): $x_3 = 1$, $y_3 = 1$ и $y_4 = 1$, $y_4 = 3$. Според тоа, даденият систем има четири решенија: $(-1, -3)$, $(2, -1)$, $(1, 1)$, и $(1, 3)$.

Во одредени случаи некои системи квадратни равенки со две променливи можат да бидат решени и кога левата страна, барем на една од равенките на системот, успееме да ја разложиме на линеарни множители. Ќе го покажеме тоа на следниов пример.

Пример 3. Да го решиме системот равенки :

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 8y^2 - 6x + 18y - 7 = 0 \\ x^2 - xy - 6y^2 - 3x + 9y = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Решение. Втората равенка на системот да ја разгледаме и решиме како квадратна равенка по однос на променливата x (а променливата y сметаји ја за параметар):

$$x^2-(y+3)x-(6y^2-9y)=0 \tag{11}$$

$$x_{1,2}=\frac{y+3\pm\sqrt{(y+3)^2+4(y^2-9y)}}{2}=\frac{y+3\pm\sqrt{(5y-3)^2}}{2},$$

од каде $x_1=3y, x_2=-2y+3$. Тогаш равенката (11) може да се запише и вака $(x-3y)(x+2y-3)=0$, а дадениот систем го добива видот :

$$\begin{cases}x^2+2xy-8y^2+6x+18y-7=0\\(x-3y)(x+2y-3)=0\end{cases} \tag{10}$$

Меѓутоа, овој систем а исто така и дадениот систем равенки се еквивалентни на вкупноста од два система, во кои едната равенка е линеарна :

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0\\x-y=0\end{cases}\\\begin{cases}x^2+2xy-8y^2-6x+18y-7=0\\x+2y-3=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Кога ќе ги решиме одделно тие системи, добиваме дека системот има четири решенија $(3,1),(-3,-1),(1,1)$, и $(-1,2)$.

Аналогно, и првата равенка на системот (10) можевме да ја разгледаме како квадратен трином во однос на x . Покажи дека таа е еквивалентна на $(x-y+1)(x+4y-7)=0$, а дадениот систем (10) е еквивалентен на вкупноста од следниве четири системи линеарни равенки :

$$\begin{cases}x-2y+1=0\\x-3y=0\end{cases},\quad\begin{cases}x-2y+1=0\\x+2y-3=0\end{cases},\quad\begin{cases}x+4y-7=0\\x-3y=0\end{cases},\quad\begin{cases}x+4y-7=0\\x+2y-3=0\end{cases}$$

Пример 4. Да го решиме системот равенки

$$\begin{cases}5x^2-2y^2=14\\3x^2+y^2=15\end{cases}$$

Решение. Со смената $x^2=u,\quad y^2=v$ го добиваме системот линеарни равенки

$\begin{cases}5u-2v=14\\3u+v=15\end{cases}$, чие решение е $u=4$, $v=3$.

Значи, $x^2 = 4, \quad y^2 = 3$, односно $x_{1,2} = \pm 2, \quad y_{1,2} = \pm\sqrt{3}$.

Според тоа, даденият систем ќе има четири решенија:
$(2,\sqrt{3}),(2,-\sqrt{3}),(-2,\sqrt{3})$ и $(-2,-\sqrt{3})$.

ЗАДАЧИ

Реши ги системите равенки (1 - 8) :

1. а) $\begin{cases} x-2y+z=7 \\ 3x-5y+2z=15 \\ x^2+y^2+z^2=54 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2-xy+2y^2+2x-y-13=0 \\ x-2y=4 \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} (x+y)^2-5y^2+3y=5x+2 \\ x-y=2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2-8x-12y+27=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} (x+y)^4+4(x+y)^2=117 \\ x-y=25 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2-3xy+5y-5=0 \\ (x-2)(y-1)=0 \end{cases}$

4.* а) $\begin{cases} x^2-y^2+3y=0 \\ x^2+3xy+2y^2+2x+4y=0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x-3y)(x+2y-3)=0 \\ (y-1)(2y-3x-7)=0 \end{cases}$

5*. а) $\begin{cases} x^2+3xy-y^2-5x+y=0 \\ x^2-xy+2y-4=0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2+3y^2=5 \\ (2x-y+1)^2-4=0 \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} x^2-5y^2-3x-y+22=0 \\ y^2-xy+2x-4=0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2-2y^2=10 \\ x^2+2y^2=6 \end{cases}$

7* а) $\begin{cases} ax^2+by^2=a^3 \\ bx^2-ay^2=b^3 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+y^2=k^2 \\ x+y=k \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} (x+y)(x+3y)-15=0 \\ (y-x)(3y-x)+1=0 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+xy=55 \\ y+xy=60 \end{cases}$

§ 59. ХОМОГЕНИ РАВЕНКИ И СИСТЕМИ ХОМОГЕНИ РАВЕНКИ

1. Равенката $f(x, y,..., z) = 0$ (1)

се вика **хомогена,** ако $f(x, y,..., z)$ е **хомогенен полином** од n –ти степен по однос на променливите $x, y, ..., z$.

Секоја хомогена равенка, а исто така и секој систем хомогени равенки има **нулто** или **тривијално решение** $x = y = ... = z = 0$. Некои од нив, покрај тривијалното решение имаат и нетривијални.

Нетривијално решение на хомогена равенка или систем хомогени равенки се вика секое друго решение, што е различно од тривијалното $(0,0,...,0)$.

Ако хомогената равенка (1)(или систем хомогени равенки) има барем едно нетривијално решение $(a, b,...,c)$ тогаш таа (тој) ќе има бесконечно множество нетривијални решенија од видот $(t_a, t_b, ..., t_c)$, $t \neq 0$. Навистина, ако важи равенството $f(a,b,...,c) = 0$, тогаш согласно Т [39.1] ќе важи и равенството: $(t_a, t_b, ...t_c) = t^n f(a, b, ...,c) = 0$ при произволен број t. На секоја вредност $t \neq 0$ ѝ соодвестува нетривијално решение на равенката (1).

Во натамошното разгледување ќе се задржиме на хомогените равенки и системи равенки од две променливи. Да го разгледаме општиот вид на хомогената равенка од степен n со две променливи :

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + ... + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n = 0 \qquad (2)$$

Да претоставиме дека во неа неколку први коефициенти по ред $a_0, a_1, a_2, ...$ и неколку од последните коефициенти по ред $a_n, a_{n-1}, ...$ се еднакви на нула. Во таков случај, левата страна на равенката (2) ќе има некој заеднички множител $x^k y^s$, каде што $k \neq 0, \quad s \neq 0$, па равенката (2) ќе го добие видот :

$$x^k y^s \cdot f(x, y) = 0 \qquad (3)$$

каде што $f(x, y)$ е хомоген полином, чии крајни коефициенти се различни од нула. Очигледно е дека, равенката (3) (ако $k \neq 0$) има бесконечно множество решенија од видот ($x = 0, y$) , каде y е произволен број; и бесконечно множество решенија (ако $s \neq 0$) од видот ($x, y = 0$) , каде x е произволен број.

Покрај решенијата од видот ($0, y$) и ($x, 0$) , решенијата на равенката (3) ќе бидат и сите решенија на равенката $f(x, y) = 0$. А решавањето на таа равенка е истоветно со решавањето на равенката (2) во општ случај кога нејзините крајни коефициенти a_0 и a_n се различни од нула. Решавањето, пак, на равенките (2) во општ случај

($a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$) го вршиме со воведување на нова променлива со смената $y = tx$, или $t = \frac{y}{x}$. Заменувајќи во равенката (2) $y = tx$ и скратувајќи со x^n, ја добиваме равенката:

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n = 0 \qquad (4)$$

Знаеме дека, равенката (4) во полето на комплексните броеви има точно n корени (меѓу кои може да има и еднакви). На секој корен t_i соодествува бесконечно множество решенија на равенката (2) од видот: $(x, y = t_i x)$, каде x е произволен број, различен од нула. Кога ги знаеме корените на равенката (4), левата страна на хомогената равенка (2) во полето на комплексните броеви можеме да ја разложиме на линеарни множители :

$$x^n (t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_n) = (xt - xt_1)(xt - xt_2) \ldots (xt - xt_n) =$$
$$= (y - xt_1)(y - xt_2) \ldots (y - xt_n) = 0 \qquad (5)$$

Изедначувајќи го секој од тие множители на нула ќе го добиеме бесконечното множество решенија на хомогена равенка (2).

Заради разложувањето пак на хомогениот полином на множители во полето на реалните броеви, доволно е да ги групираме линеарните множители во парови во (5), што им соодветствуваат на конјугирано комплексните корени на равенката (4). Така, производот на секој таков пар линеарни множители, што им одговараат на конјугирано комплексните корени, е еднаков на некој трином со реални коефициенти: $(y - tx)(y - \bar{t}x) = y^2 + pxy + qx^2$, за кој равенката

$$y^2 + pxy + qx^2 = 0 \qquad (6)$$

во полето на реалните броеви има само тривијално решение $x=y=0$.

Пример 1. Да ја решиме хомогената равенка со две променливи

$$x^4 y^2 - 5x^3 y^3 + 9x^2 x^4 - 5xy^5 = 0 \qquad (7)$$

Решение. Извлекувајќи го заедничкиот множител xy^2 пред заграда, добиваме: $xy^2 (x^3 - 5x^2 y + 9xy^2 - 5y^3) = 0$ (7)

Очигледно е дека, даденета равенка има бесконечни множества решенија од видот: ($x=0$, y), каде y е произволен број, и (x , $y=0$), x е произволен број. Меѓутоа, решенија на дадената равенка се и сите решенија на хомогената равенка:

$$x^3 - 5x^2 y + 9xy^2 - 5x^3 = 0 \qquad (8)$$

Со смената $x = t\,y$, и по скратувањето со y^3 , ја добивме равенката :

$$t^3 - 5t^2 + 9t - 5 = 0 \qquad (9)$$

Оваа равенка има еден корен $t = 1$ (бидејќи збирот од коефициентите е еднаков на нула). Делејќи ја левата страна на равенката (9) со $t - 1$, добиваме:

$$(t-1)(t^2-4t+5)=(t-1)(t-2-i)\cdot(t-2-i)=0$$

Оттука следува дека равенката (9) има три корени $t_1 = 1$, $t_2 = 2+i$ и $t_3 = 2-i$ а заменувајќи ги нив поодделно во смената $x = ty$, заклучуваме дека:

Во полето на комплексните броеви равенката (8) ги има следниве општи решенија: $x = y$, $x = (2+i)y$, $x = (2-i)y$, каде y е произволен број: односно следниве бесконечни множества решенија: $(y, y), ((2+i)y, y)$, $((2-i)y, y)$, каде y е произволен број. Во полето, пак, на реалните броеви равенката (8) има множество решенија (y, y), каде y е произволен број.

2. Да преминеме сега на разгледување системи на равенки, од кои две или барем една е хомогена со две променливи.

I.Нека е даден системот хомогени равенки со две променливи :

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \tag{10}$$

Ако членовите на хомогените полиноми $f(x,y)$ и $g(x, y)$ имаат заеднички множители соодветно x^k и x^l, тогаш системот (10) има бесконечно множество решенија од видот $(x=0, y)$ каде y е произволен број. На секој $y \neq 0$ соодветствува по едно нетривијално решение. За одредување на другите нетривијални решенија (ако системот има такви), ги скратуваме равенките соодветно со множителите x^k и x^l и потоа го решаваме добиениот систем хомогени равенки

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0 \\ g_1(x,y)=0 \end{cases} \tag{10'}$$

во кој ниту еден од полиномите f_1 и g_1 не е делив со некое x^s ($s>0$).

Нека полиномите f_1 и g_1 имаат соодветно степен m и n. Со воведување на новата променлива $t = \frac{y}{x}$ или $y = tx$, системот (10′) го добива видот

$$\begin{cases} x^m f_1(1,t)=0 \\ x^n g_1(1,t)=0 \end{cases} \tag{10''}$$

При $x = 0$ го добиваме тривијалното решение на системот (10″). Системот (10″), односно (10′) ќе има нетривијални решенија, ако и само ако равенките $f_1(1,t)=0$ и $g_1(1,t)=0$ имаат барем еден заеднички корен. Ако t_1 е еден заеднички корен на

тие равенки, тогаш нетривијалните решенија на системот (10) ќе бидат сите парови броеви $(x, y = t_1 x)$ при кој било $x \neq 0$.

Пример 2. Да го решиме системот хомогени равенки со две променливи

$$\begin{cases} x^4 - 5x^3y + 9x^2y^2 - 5y^3x = 0 \\ x^4 + 2x^3y - 3x^2y^2 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Решение. Дадениот систем го доведуваме во видот:

$$\begin{cases} x(x^3 - 5x^2y + 9xy^2 - 5y^3) = 0 \\ x^2(x^2 + 2xy - 3y^2 = 0) \end{cases}$$

Очигледно е дека дадениот систем хомогени равенки, покрај тривијалното решение $(0, 0)$, има и бесконечно множество нетривилални решенија од видот $(0, y)$ при произвоен број $y \neq 0$. Останува уште да испитаме дали има нетривијални решенија системот:

$$\begin{cases} x^3 - 5x^2y + 9xy^2 - 5y^3 = 0 \\ x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \end{cases} \tag{12}$$

При услов $y \neq 0$ со смената $x = ty$ и по скратувањето на првата равенка со y^3, а втората со y^2, го добиваме системот равенки со една променлива :

$$\begin{cases} t^3 - 5t^2 + 9t - 5 = 0 \\ t^2 + 2t - 3 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Првата равенка има три корени $t_1 = 1$, $t_2 = 2 + i$ и $t_3 = 2 - i$, а втората има корени $t'_1 = 1$ и $t'_2 = -3$. Гледаме, системот (13) има само едно решение $t = 1$. Со негова замена во смената $x = ty$, добиваме дека системот (12) има бесконечно множество нетривијални решенија $(x = y, y)$, каде $y \neq 0$ е произволен број.

Значи, дадениот систем равенки (11) покрај тривијалното решение $(0, 0)$ тој има и бесконечно множество нетривијални решенија од видот: $(0, y)$ и (y, y), каде $y \neq 0$ е произволен број.

II. Да го разгледаме системот равенки

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

во кој првата е хомогена равенка, а втората нехомогена.

Решенијата, за кои е $x = 0$ (или $y = 0$) ги добиваме со непосредно испитување. Другите решенија на системот (14) ги добиваме , кога прво ќе ја решиме првата (хомогената) равенка. При дополнителен услов $x \neq 0$, со смената $y = tx$ (или при услов $y \neq 0$ со смената $x = ty$ во зависност од тоа која е попогодна), добиваме равенка $f_1(1,t) = 0$, која нека има корени : t_1 , t_2 , ... , t_k .

Заменувајќи $y = t_i x$ во втората равенка на системот (14) добиваме равенка со една променлива $g(x,t_i x) = 0$. На секој корен од оваа равенка соодветствува по една вредност $y = t_i x$.

Во таков случај системот равенки (14) е еквивалентен на вкупноста од системите:

$$\begin{cases} g(x,y) = 0 \\ y = t_1 x \end{cases} , \ \dots , \ \begin{cases} g(x,y) = 0 \\ y = t_k x \end{cases} ,$$

кои потоа лесно се решаваат по методот на замена.

Пример 3. Да го решиме системот равенки

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 y - 5xy^2 - 6y^3 = 0 \\ x^3 + y^3 = 9 \end{cases} \tag{15}$$

Решение. Системот нема решенија од видот $(x = 0, y)$, бидејќи со замена на $x = 0$ системот (15) станува противречен $\begin{cases} y^3 = 0 \\ y^3 = 9 \end{cases}$.

Со смената $x = ty$, $(y \neq 0)$ и по скратувањето со y^3 , првата равенка на системот (15) го добива видот $t^3 + 2t^2 - 5t - 6 = 0$ (16)

Таа има корени $t_1 = -1$, $t_2 = 2$ и $t_3 = -3$. Заменувајќи ги во смената $x = ty$, добиваме три линеарни равенки со две променливи : $x = -y$, $x = 2y$, $x = -3y$. Значи, хомогената равенка на системот (15) е еквивалентна на вкупноста од нив, а даденият систем е еквивалентен на вкупноста од системите :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x = -y \end{cases} , \ \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x = 2y \end{cases} , \ \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ x = -3y \end{cases} \tag{17}$$

Првиот и третиот систем од вкупноста (17) немаат решенија. Со замена на x со $x = 2y$ од втората во првата равенка на вториот систем во (17) , ја добиваме равенката $y^3 = 1$, односно $y^3 - 1 = (y-1)(y^2 + y + 1) = 0$, која има решенија:

$y_1 = 1,\quad y_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ и $y_3 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, вториот систем на вкупноста (17), како и дадениот систем равенки во полето на копмлексните броеви има три решенија $(-2,1)$, $\left(-1+i\sqrt{3},\ \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-1-i\sqrt{3},\ \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$. Во полето на реалните броеви, пак, дадениот систем има само едно решение (2, 1).

III. Сега да разгледаме систем од две нехомогени равенки :

$$\begin{cases} f(x,y) = a \\ g(x,y) = b \end{cases} \tag{18}$$

во кој $f(x,y)$ и $g(x,y)$ се два хомогени полиноми од исти степен n (во одреден случај двата од втор степен), и броевите a и b се различни од нула.

Да забележиме дека, овој систем нема тривијално решение.

Ако првата равенка ја помножиме со b , а втората со $-a$, а потоа соодветните страни на двете равенки ги собереме, ќе ја добиеме хомогената равенка од n – ти степен :

$$b \cdot f(x,y) - a \cdot g(x,y) = 0 \tag{19}$$

Така добиената хомогена равенка (19) заедно со една (која било) равенка од системот (18) ќе образува нов систем, еквивалентен со дадениот, кој знаеме да го решиме.

Пример 4. Да го решиме системот равенки

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^3 = 9 \\ x^2 - 4xy + 5y^3 = 5 \end{cases}$$

Решение.

$$+\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^3 = 9 \,/\cdot(-5) \\ x^2 - 4xy + 5y^3 = 5 \,/\cdot 9 \end{cases}$$

$$4x^2 - 26xy + 30y^3 = 0 \quad \text{или} \quad 2x^2 - 13xy + 15y^3 = 0$$

Добиената равенка заедно со една, на пример првата, равенка од дадениот систем, образува нов систем $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^3 = 9 \\ 2x^2 - 13xy + 15y^3 = 0 \end{cases}$ еквивалентен на дадениот.

Ако го решиме тој систем на начин опишан во претходната точка II и примерот *3*, ги добиваме неговите решенија, а со тоа и решенијата на даденият систем: $(3,2)$, $(-3,-2)$, $(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$, $(-\frac{5\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

ЗАДАЧИ

Реши ги системите равенки (1 - 6) :

1. а) $\begin{cases} x^3+3x^2y+5xy^2+6y^3=0 \\ x^2+xy-2y^2=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^4+y^4+xy(x^2+y^2)=16 \\ xy(x+y)^2=0 \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} x^2-xy-2y^2=0 \\ x^2-xy-y^2+3x+7y+3=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+y^2=10 \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ 2x^2-3xy+3y^2=20 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3+x^2y+xy^2+y^3=0 \\ x^2+4y^2=5 \end{cases}$

4*. а) $\begin{cases} 3x^2-4xy+y^2=0 \\ x^2+2y^2=19 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2-4xy+y^2=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x^2+xy=12 \\ xy-y^2=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2+8y^2=14 \\ x^2+4y^2+xy=6 \end{cases}$

6*. а) $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2=8 \\ 3x^2+xy-y^2=9 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x^2-2xy+y^2=9 \\ x^2+3xy-2y^2=4 \end{cases}$

§ 60. СИСТЕМИ СИМЕТРИЧНИ ПОЛИНОМНИ РАВЕНКИ

Равенката од n променливи $f(x, y, \dots, z) = a$, во која $f(x, y, \dots, z)$ е симетричен полином, се вика **симетрична полиномна равенка.**

Во §51 и §52 во претходната глава говоревме дека, од множеството симетрични полиноми со n променливи посебно важна улога имаат **основните симетрични полиноми** $p_1, p_2, \dots, p_n$. Ја нагласивме и нивната тесна врска со познатите Виетови правила, кои ја искажуваат врската помеѓу коефициените и нулите на полиномите со една променлива.

Со основната теорема за симетрични полиноми Т[52.2] утврдивме дека, секој симетричен полином од n променливи $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може да се изрази во полином $Q(p_1, p_2, \dots, p_n)$ од основните симетрични полиноми : $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Решавањето на системите симетрични полиномни равенки, ќе покажеме дека, знатно се упростува со воведување на нови променливи – основните симетрични полиноми $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тоа всушност се состои во замената на даденият систем симетрични равенки со нему еквивалентен систем равенки од основните симетрични полиноми. А решавањето пак на овие системи, повикувајќи се на Виетовите правила, го сведуваме на решавање на некоја полиномна равенка од една променлива.

Еден од најпростите системи од таков вид е системот

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases} \tag{1}$$

Овој систем го решаваме обично со повикување на Виетовите правила. Броевите x и y нека се корени на некоја квадратна равенка, чија променлива ја означуваме, на пример со z. Тогаш согласно Виетовите правила: коефициентот при линеарниот член на таа равенка е еднаков на $-a$, а слободниот член на b. Со други зборови, квадратната равенка со корени x и y ќе го има видот:

$$z^2 - az + b = 0 .$$

Ако се z_1 и z_2 корени на оваа равенка, тогаш ќе важи: или $x = z_1$, $y = z_2$; или $x = z_2$, $y = z_1$. Значи, системот (1) има две решенија (z_1, z_2) и (z_2, z_1), ако е $z_1 \neq z_2$. Ако, пак, е $z_1 = z_2$, тогаш системот има само едно решение (z_1, z_2).

Забелешка. Кон системот (1) лесно се сведува и решавањето на системот:

$$\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases} \tag{2}$$

Со смената $y = -t$, системот (2) ќе гласи $\begin{cases} x + t = a \\ xt = -b \end{cases}$ (2')

Да разгледаме неколку посложени системи симетрични равенки:

Пример 1. Да го решиме системот симетрични равенки

$$\begin{cases} x^n + y^n = a \\ xy = b, \quad (b \neq 0) \end{cases} \tag{3}$$

Решение. Вората равенка ја степенуваме на n –ти степен, па го добиваме системот :

$$\begin{cases} x^n + y^n = a \\ x^n y^n = b^n \end{cases} \tag{3'}$$

Меѓутоа, системот (3') е последица од системот (3), затоа сите решенија на системот (3) ќе бидат решенија и насистемот (3'), но не сите решенија на системот (3') се решенија и на системот (3). Да го решиме системот (3') . Собироците x^n и y^n може да ги разгледуваме како корени на квадратна равенка

$$z^2 - az + b = 0 \tag{4}$$

Тогаш можеме да ставиме $x^n = z_1$, $y^n = z_2$ или $x^n = z_2$, $y^n = z_1$. Значи, системот (3') го сведуваме на вкупност од системите

$$\begin{cases} x = \sqrt[n]{z_1} \\ y = \sqrt[n]{z_2} \end{cases}, \quad \begin{cases} x = \sqrt[n]{z_2} \\ y = \sqrt[n]{z_1} \end{cases}$$

Познато е дека, корен n –ти од даден број има n различни вердности. Нека $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ се вредноститие на $\sqrt[n]{z_1}$, а $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ -вредностите на $\sqrt[n]{z_2}$. Тогаш системот (3`) ги има следниве решенија:

$$\begin{array}{ll} (\alpha_1,\beta_1),(\alpha_1,\beta_2),\ldots,(\alpha_1,\beta_n); & (\beta_1,\alpha_1),(\beta_1,\alpha_2),\ldots,(\beta_1,\alpha_n) \\ (\alpha_2,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),\ldots,(\alpha_2,\beta_n); & (\beta_2,\alpha_1),(\beta_2,\alpha_2),\ldots,(\beta_2,\alpha_n) \\ \vdots & \vdots \\ (\alpha_n,\beta_1),(\alpha_n,\beta_2),\ldots,(\alpha_n,\beta_n); & (\beta_n,\alpha_1),(\beta_n,\alpha_2),\ldots,(\beta_n,\alpha_n). \end{array}$$

Од сите овие решенија на системот (3'), системот (3) го задоволуваат само $2n$ решенија. Навистина, втората равенка на системот (3) бара да важи $xy = b$. Затоа, ако вредноста на променливата x е одредена, тогаш променливата y ќе има

само една вредност $y=\frac{b}{x}$. Според тоа, системот (3) може да ги има само следниве $2n$ решенија:

$$(\alpha_1,\frac{b}{\beta_1}),(\alpha_2,\frac{b}{\alpha_2}),\ldots,(\alpha_n,\frac{b}{\alpha_n});$$
$$(\beta_1,\frac{b}{\beta_1}),(\beta_2,\frac{b}{\beta_2}),\ldots,(\beta_n,\frac{b}{\beta_n}).$$

Пример 2. Да го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} x^3+y^3=-7 \\ xy=-2 \end{cases} \tag{5}$$

Овој систем е специјален случај на претходниот пример, затоа тој може да се реши според истиот метод:

Двете страни на втората равенка ги степенуваме на трет степен и го добиваме системот :

$$\begin{cases} x^3+y^3=-7 \\ x^3y^3=-8 \end{cases} \tag{6}$$

Изразите x^3 и y^3 може да ги разгледуваме како корени на квадратната равенка $z^2+7z-8=0$, од која имаме $z_1=1$, и $z_2=-8$. Според тоа, или $x^3=1$, $y^3=-8$, или $x^3=-8$, $y^3=1$, односно: или $x=\sqrt[3]{1}$, $y=\sqrt[3]{-8}=-2\sqrt[3]{1}$ или $x=-2\sqrt[3]{1}$, $y=\sqrt[3]{1}$.

Познато е дека $\sqrt[3]{1}$ во полето на комплексните броеви има три вредности $\sqrt[3]{1}\in\{1,\varepsilon,\varepsilon^2\}$ каде $\varepsilon=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$.

Знаејќи ја вредноста на променливата x, вредноста на y ќе ја одредиме од втората равенка на системот (5). Така добиваме дека даденият систем во полето на комплексните броеви тој има шест решенија $(1,-2)$, $(\varepsilon,-2\varepsilon^2)$, $(\varepsilon^2,-2\varepsilon)$, $(-2,1)$, $(-2\varepsilon^2,\varepsilon)$, $(-2\varepsilon,\varepsilon^2)$, а во полето на реалните броеви тој има само две решенија $(1,-2)$, $(-2,1)$.

Пример 3. Да го решиме системот симетрични равенки :

$$\begin{cases} x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2=48 \\ xy+xz+yz=11 \\ xyz=6 \end{cases} \tag{7}$$

Решение. Прво со помош на основните симетрични полиноми ќе го изразиме симетричниот полином $P(x,y,z)=x^2y+xy^2+x^2z+\ \ldots$. Водечки член на полиномот P по однос на променливата x е x^2yz^0 .

Полиномот (p_1 , p_2 , p_3) ќе го одредиме со помош на собироците од видот $A_i p_1^{k_1-k_2} p_2^{k_2-k_3} p_3^{k_3}$, каде што $k_1 \geq k_2 \geq k_3$ и $k_1+k_2+k_3=3$.

Овие две релации ги задоволуваат следниве тројки броеви:

$$(2,\ 1,\ 0)\ \ \ldots\ \ p_1^{2-1}p_2^{1-0}=p_1p_2$$
$$(1,\ 1,\ 1)\ \ \ldots\ \ p_1^{1-1}p_2^{1-1}p_3^{1-0}=p_3$$

Според тоа , $P(x,y,z)=p_1p_2+Ap_3$. (8)

Коефициентот A го одредуваме по методот на неопределени коефициенти. Задавајќи $x=y=z=1$ имаме $P(1,\ 1,\ 1)=6$, $p_1=3$, $p_1=3$, $p_3=1$, па од (8); односно $6=3\cdot3+A\cdot1$ добиваме $A=-3$. Значи

$$x^2y+xy^2+x^2z+xz^2+y^2z+yz^2=p_1p_2-3p_3$$

Сега дадениот систем го заменуваме со системот

$$\begin{cases} p_1p_2-3p_3=48 \\ p_2=11 \\ p_3=6 \end{cases}\ ,\ \text{т.е.}\ \begin{cases} p_1=6 \\ p_2=11 \\ p_3=6 \end{cases} \tag{9}$$

Бидејќи $p_1=x+y+z$, $p_2=xy+xz+yz$, $p_3=xyz$, затоа нашиот систем (7) се сведува на системот :

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+xz+yz=11 \\ xyz=6 \end{cases} \tag{10}$$

Од Виетовите правила следува дека последниот систем ги определува коефициентите на кубната равенка:

$$u^3-6u^2+11u-6=0 \tag{11}$$

Оваа равенка има корен $u_1=1$ (бидејќи $1-6+11-6=0$), па имаме:

$$(u-1)(u^2-5u+6)=(u-1)(u-2)(u-3)=0\ .$$

Решенија на дадениот систем се сите пермутации од броевите :

$u_1=1$, $u_2=2$, $u_3=3$, т.е. $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 2)$, $(2,\ 1,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 1)$, $(3,\ 1,\ 2)$, $(3,\ 2,\ 1)$.

Пример 4. Даго решиме системот симетрични равенки :

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=a^3 \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=\quad a \end{cases} \tag{12}$$

Решение. За симетричните суми $S_2=x^2+y^2+z^2$ и $S_3=x^3+y^3+z^3$ изразени преку основните симетрични полиноми $p_1=x+y+z$, $p_2=xy+xz+yz$, $p_3=xyz$ согласно (4) и (5) во §53 имаме: $S_3=x^3+y^3+z^3=p_1^3-3p_1p_2+3p_3$, $S_2=p_1^2-2p_2$.

Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} p_1^3-3p_1p_2+3p_3=a^3 \\ p_1^2-2p_2=a^2 \\ p_1=a \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} p_3=0 \\ p_2=0 \\ p_1=a \end{cases} \text{ или } \begin{cases} xyz=0 \\ xy+xz+yz=0 \\ x+y+z=a \end{cases}$$

Од првата равенка на овој систем следува дека е: или $x=0$, или $y=0$, или $z=0$. Ако $x=0$, тогаш од втората равенка добиваме дека е $y=0$, а од третата $z=a$. Значи, тројката $(0,\ 0,\ a)$ е решение на дадениот систем. Поради симетричноста на системот, негови решенија се и тројките: $(0,\ a,\ 0)$ и $(a,\ 0,\ 0)$.

Пример 5. Да го решиме системот равенки

$$\begin{cases} x^4+y^4=82 \\ x+y=4 \end{cases} \tag{13}$$

Решение. Полиномот x^4+y^4 да го изразиме преку $x+y=p_1$ и $xy=p_2$. Тоа ќе биде $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=[(x+y)^2-2xy]^2-2x^2y^2=$

$$(x+y)^4-4xy(x+y)^2+2x^2y^2=p_1^4-4p_1^2p_2+2p_2^2$$

(Ова изразување се совпаѓа со тоа во §53 формула (8)).

Сега системот го запишуваме во видот

$$\begin{cases} p_1^4-4p_1^2p_3+2p_2^2=82 \\ p_1=4 \end{cases}$$

Со замена на $p_1=4$ во првата равенка, ја добиваме квадратната равенка $p_2^2-32p_2+87=0$, која има корени $p_2=3$, $p_2=29$. На тој начин дадениот систем (13) го сведуваме на вкупност од два система

$$\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x+y=4 \\ xy=29 \end{cases}$$

Првиот систем има две решенија $(3, 1)$ и $(1, 3)$. Вториот систем во полето на реалните броеви нема решенија, но во полето на комплексните броеви и тој има две решенија $(2 + 5i, 2 - 5i)$ и $(2 - 5i, 2 + 5i)$. Значи, даденият систем равенки има решенија: $(3, 1)$, $(1, 3)$, $(2 + 5i, 2 - 5i)$ и $(2 - 5i, 2 + 5i)$.

Пример 6. Да ги одредиме реалните решенија на системот симетрични равенки:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - (x + y) = 92 \\ x + y + xy = 32 \end{cases}$$

Решение. Да ставиме $x + y = u$, $xy = v$. Тогаш $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$ и го добиваме системот:

$$\begin{cases} u^2 - 2v - u = 92 \\ u + v = 32 \end{cases}$$

Од втората равенка $v = 32 - u$, со замена во првата равенка, ја добиваме квадратната равенка $u^2 + u - 156 = 0$. Оттука $u_1 = 12$, $u_2 = -13$.
Тогаш $v_1 = 20$, $v_2 = 45$. На тој начин, даденият систем се сведува на вкупност на системите:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 20 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + y = -13 \\ xy = 45 \end{cases}$$

Првиот систем има две решенија $(10, 2)$, $(2, 10)$, а вториот систем нема реални решенија. Според тоа, даденият систем равенки има две решенија: $(10, 2)$, $(2, 10)$.

Пример 7. Да се реши системот симетрични равенки :

$$\begin{cases} x + y + z = \dfrac{13}{3} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{3} \\ xyz = 1, \end{cases} \qquad \text{ако } x \neq 0, \quad y \neq 0, \quad z \neq 0$$

Решение . Од втората и третата равенка следува :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + xz + yz}{xyz} = \frac{xy + xz + yz}{1} = \frac{13}{3}$$

Значи , системот го добива видот

$$\begin{cases} x+y+z=\dfrac{13}{3} \\ xy+xz+yz=\dfrac{13}{3} \\ xyz=1 \end{cases} \qquad (14)$$

Од Виетовите правила следува дека системот (14) ги определува коефициентите на кубната равенка $u^3-\frac{13}{3}u^2+\frac{13}{3}u-1=0$, или $3u^3-13u^2+13u-3=0$.

Оваа равенка има корени: $u_1=1,\ u_2=3,\ u_1=\frac{1}{3}$. Решенија на дадениот систем равенки се сите пермутации од нив :

$(1,3,\frac{1}{3}),\ (1,\frac{1}{3},3),(3,1,\frac{1}{3}),(3,\frac{1}{3},1),\ (\frac{1}{3},3,1),(\frac{1}{3},1,3)$.

ЗАДАЧИ

Да се решат системите равенки (1-10) :

1. а) $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=-2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=26 \\ xy=5 \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} x-y=3 \\ xy=40 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-y^2=15 \\ x+y=5 \end{cases}$

3*. а) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=6 \\ x^2+xy+y^2=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 \\ x^2+y^2+xy=7 \end{cases}$

4. а) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy+4(x+y)=40 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2+3xy-4(x+y)+3=0 \\ xy+2x+2y=5 \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3+y^3=2 \\ xy(x+y)=2 \end{cases}$

6. а) $\begin{cases} x^3+y^3+x^2y+xy^2=15 \\ x^2+y^2+x+y=8 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3y+xy^3=78 \\ x^2+y^2=13 \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ xy+x+y=19 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$

8. а) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4} \\ xy(x+y)=20 \end{cases}$

9*. а) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=49 \\ x^4+x^2y^2+y^4=931 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^4+y^4-14x^2y^2=0 \\ x+y=a \end{cases}$

10*. а) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14 \\ xy+xz+yz=11 \\ x+y+z=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3+y^3+z^3=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

§ 61. ПРИМЕРИ ЗА РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМИ РАВЕНКИ ОД ПОВИСОК СТЕПЕН

На следниве избрани примери ќе презентираме неколку посебни методи на решавање на системите равенки:

Пример 1. Да го решиме системот равенки

$$\begin{cases} yz=ax \\ zx=by \\ xy=cz \end{cases}, \text{ каде } a>0,\ b>0,\ c>0$$

Решение. Ги множиме соодветните страни на трите равенки, па добиваме :

$$x^2y^2z^2=abcxyz \quad \text{или} \quad xyz(xyz-abc)=0.$$

Последната равенка е еквивалентана на вкупноста од две равенки

$$\begin{cases} xyz=0, \\ xyz=abc \end{cases}.$$

Да ја решиме првата равенка. Од системот равенки очигледно е дека, ако која било од променливите x, y, z е еднаква на нула, тогаш еднакви на нула се и другите две променливи. Тоа значи дека првата равенка има решение $(0,0,0)$.

Втората равенка $xyz=abc$, разгледувајќи ја одделно со секоја од трите равенки на системот, доаѓаме до равенките: $x^2=bc$, $y^2=ac$, $z^2=ab$.

Оттука добиваме : $x = \pm\sqrt{bc}$, $y = \pm\sqrt{ac}$, $z = \pm\sqrt{az}$. Нека, $x = \sqrt{bc}$. Тогаш, како што гледаме од првата равенка на системот, y и z мораат да имаат исти знак. Значи, имаме две решенија $(\sqrt{bc}, \sqrt{ac}, \sqrt{ab},)$, $(\sqrt{bc}, -\sqrt{ac}, -\sqrt{ab},)$.

Ако е сега $x = -\sqrt{bc}$, тогаш согласно првата равенка на системот y и z мораат да имаат различни знаци. Значи , во овој систем имаме уште две решенија: $(-\sqrt{bc}, \sqrt{ac}, -\sqrt{ab},)$, $(-\sqrt{bc}, -\sqrt{ac}, \sqrt{ab},)$. Според тоа, даденият систем има вкупно пет решенија: $(0,0,0)$, $(\sqrt{bc}, \sqrt{ac}, \sqrt{ab},)$, $(\sqrt{bc}, -\sqrt{ac}, -\sqrt{ab},)$, $(-\sqrt{bc}, \sqrt{ac}, -\sqrt{ab},)$, $(\sqrt{bc}, -\sqrt{ac}, -\sqrt{ab},)$.

Пример 2. да го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = a \\ \dfrac{xz}{x+z} = b \end{cases}, \quad \dfrac{yz}{y+z} = c \quad \text{, ако } abc \neq 0 \tag{1}$$

Решение. Очигледно е дека за $x=y=z=0$ системот нема смисла. Земајќи реципрочни вредности на секој од односите, добиваме:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{c} \end{cases} \tag{1'}$$

Оттука со собирање на соодветните страни на овие равенки, ја добиваме равенката:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \tag{2}$$

Разгледувајќи ја оваа равенка одделно со секоја од трите равенки на системот (1'), добиваме:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right) \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \\ \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \end{cases}$$

Оттука : $x=\frac{2abc}{bc+ac-ab}$, $y=\frac{2abc}{ab+bc-ac}$, $z=\frac{2abc}{ac+ab-bc}$

Пример 3. Да ги одредиме реалните решенија на системот равенки:

$$\begin{cases}(x+y)^2-z^2=4\\(y+z)^2-x^2=2\\(z+x)^2-y^2=3\end{cases} \tag{3}$$

Решение. Очигледно е дека $x = y = z = 0$ не е решение на системот. Ги разложуваме левите страни на множители и системот го запишуваме во видот:

$$\begin{cases}x+y-z=\frac{4}{x+y+z}\\y+z-x=\frac{2}{x+y+z}\\z+x-y=\frac{3}{x+y+z}\end{cases} \tag{4}$$

Воведуваме смена $x + y + z = u$ и ги собираме соодветните страни на: првата и третата, првата и втората, а потоа и на втората и третата равенка од системот (4).

При тоа добиваме $x=\frac{7}{2u}$, $y=\frac{3}{u}$, $z=\frac{5}{2u}$, (5)

Со замена на овие вредности за x, y, z во првата равенка на дадениот систем, ја добиваме равенката:

$$\left(\frac{7}{2u}+\frac{3}{u}\right)^2-\left(\frac{5}{2u}\right)^2=4$$

Оттука добиваме $u_1 = 3$, $u_2 = -3$, а согласно (5) имаме дека, дадениот систем равенки има решенија $\left(\frac{7}{6},\ 1,\ \frac{5}{6}\right)$, $\left(-\frac{7}{6},\ -1,\ -\frac{5}{6}\right)$.

Пример 4. Да се реши системот равенки: $\begin{cases}xy-\frac{x}{y}=c\\xy-\frac{y}{x}=\frac{1}{c}\end{cases}$

Решение. Очигледно е дека $x = y = 0$ не припаѓа на дефиниционата област на системот.

Да ги помножиме, а потоа да ги собереме соодветните страни на равенките во системот. Тогаш добиваме:

$$\begin{cases} x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 = 1 \\ 2xy - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = c + \frac{1}{c} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2y^2 = x^2 + y^2 \\ 2xy - \frac{x^2 + y^2}{xy} = c + \frac{1}{c} \end{cases} \quad (6)$$

Земајќи ја предвид првата равенка на системот (6), од втората негова равенка , добиваме $xy = c + \frac{1}{c}$. А со замена на xy во првата равенка на дадениот систем доаѓаме и до равенката $c + \frac{1}{c} - \frac{x}{y} = c$, од каде имаме $y = cx$.

Така го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} xy = c + \frac{1}{c} \\ y = cx \end{cases}$$

Овој систем има решенија:

$$\left(\frac{1}{c}\sqrt{c^2+1}, \sqrt{c^2+1}\right), \left(-\frac{1}{c}\sqrt{c^2+1}, -\sqrt{c^2+1}\right).$$

Тоа се бараните решенија и на дадениот систем равенки.

Пример 5. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+2y} + \frac{x+2y}{xy} = 2 \\ \frac{xy}{x-2y} + \frac{x-2y}{xy} = 4 \end{cases}$$

Решение. Да воведеме помошни променливи $\frac{x+2y}{xy} = u$, $\frac{x-2y}{xy} = v$.

Тогаш дадениот систем ќе премине во видот:

$$\begin{cases} u + \frac{1}{u} = 2 \\ v + \frac{1}{v} = 4 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u^2 - 2u + 1 = 0 \\ v^2 - 2v + 1 = 0 \end{cases}$$

Добиваме: $u_{1,2} = 1$, $v_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Потоа за́одредување на x и y ги решаваме системите :

а)
$$\begin{cases} \dfrac{x+2y}{xy} = 1 \\ \dfrac{x-2y}{xy} = 2-\sqrt{3} \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} \dfrac{x+2y}{xy} = 1 \\ \dfrac{x-2y}{xy} = 2+\sqrt{3} \end{cases}$$

Да го решиме системот а) . Прво го запишуваме во видот:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{x} = 1 \\ \dfrac{1}{y} - \dfrac{2}{x} = 2-\sqrt{3} \end{cases} \tag{7}$$

Ги собираме соодветните негови страни и добиваме $\dfrac{2}{y} = 3-\sqrt{3}$, од каде $y = \dfrac{1}{3}(3+\sqrt{3})$. Потоа од првата равенка на (7) добиваме: $x = \dfrac{2y}{y-1} = 2(\sqrt{3}+1)$. Значи, системот а), односно (7) има едно решение $(2(\sqrt{3}+1),\ \dfrac{1}{3}(3+\sqrt{3}))$.

На сличен начин, со решавањето на системот б) , добиваме дека тој има решение $(-2(\sqrt{3}-1),\ \dfrac{1}{3}(2-\sqrt{3}))$.

Според тоа, дадениот систем има две решенија :

$$(2(\sqrt{3}+1),\ \frac{1}{3}(3+\sqrt{3}))\ ,\ (-2(\sqrt{3}-1),\ \frac{1}{3}(2-\sqrt{3})).$$

Пример 6. Да го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3+z^3}{-x+y+z} = 3, \quad \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x-y+z} = 9, \quad \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x+y-z} = -9 \end{cases} \tag{8}$$

Решение. Земајќи реципрочни вредности на секој од односите , дадениот систем го запишуваме во видот:

$$\begin{cases} \dfrac{-x+y+z}{x^3+y^3+z^3} = \dfrac{1}{3}, \quad \dfrac{x-y+z}{x^3+y^3+z^3} = \dfrac{1}{9}, \quad \dfrac{x+y-z}{x^3+y^3+z^3} = -\dfrac{1}{9} \end{cases} \tag{9}$$

Со собирање на соодветните страни на трите равенки со системот (9) ја добиваме равенката

$$\frac{x+y+z}{x^3+y^3+z^3}=\frac{1}{3} \tag{10}$$

Ако првата равенка на системот (9) ја помножиме со -1 и потоа ја собериме со равенката (10), добиваме $\frac{2x}{x^3+y^3+z^3}=0$.

Оттука следува дека е $x = 0$.

Сега останува да го разгледаме и решиме системот: од равенката (10), втората или третата равенка од системот (9) и равенката $x = 0$:

$$\begin{cases} x^3+y^3+z^3=3(x+y+z) \\ x^3+y^3+z^3=9(x-y+z) \\ x=0 \end{cases} \tag{11}$$

Од првите две равенки во (11), добиваме $x - 2y + z = 0$, а од неа и $x = 0$ имаме $z = 2y$. Со замена во првата или втората равенка на системот (11), $x = 0$ и $z = 2y$, добиваме: $y^3 + 8y^3 = 3(0 + y + 2y)$, или $9y^3 = 9y$.

Оттука: $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$, $z_1 = 0$, $z_2 = 2$, $z_3 = -2$.

Според тоа, даденият систем има две решенија: $(0, 1, 2)$ и $(0, -1, -2)$. Тројката броеви $(0, 0, 0)$ не е решение, бидејќи не припаѓа на дефенициона област на даденият систем.

Пример 7. Да се реши системот равенки:

$$\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+y)^2=25 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$$

Решение. Воведуваме помошна променлива $x + y = u$, со што првата равенка станува со една променлива : $(u+1)^2 + u^2 = 25$. Од неа имаме $u_1 = 3$, $u_2 = -4$.

Даденият систем е еквивалентен на вкупноста од системите:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^2-y^2=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-4 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$$

Првиот од нив има решение (2, 1), а вториот $-\left(-\frac{19}{8},-\frac{13}{8}\right)$.

Значи даденият систем има две решенија (2, 1) и $\left(-\frac{19}{8},-\frac{13}{8}\right)$.

Пример 8. Да го решиме системот

$$\begin{cases} \frac{x+y}{6}=\frac{x+z}{3}=\frac{y+z}{2} \\ (x+y)^2+(x+z)^2+(y+z)^2=1 \end{cases}$$

Решение. Да воведеме нова променлива $\frac{x+y}{6}=u$, тогаш имаме :

$$\begin{cases} x+y=6u \\ x+z=3u \\ y+z=2u \end{cases} \qquad (12)$$

Со собирање на нивните соодветни страни ја добиваме равенката $x+y+z=\frac{11}{2}u$. Од неа, ако ја одземеме третата равенка на (12) , добиваме $x=\frac{7}{2}u$.

На исти таков начин наоѓаме дека $y=\frac{5}{2}u,\quad z=-\frac{1}{2}u$.

Од последната равенка на дадениот систем имаме:

$36u^2+9u^2+4u^2=1$ или $49u^2=1$, односно $u_1=\frac{1}{7}$, $u_2=-\frac{1}{7}$. Според тоа,

$$x_1=\frac{7}{2}u_1=\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{2},\quad y_1=\frac{5}{2}u_1=\frac{5}{14},\quad z_1=-\frac{1}{2}u_1=-\frac{1}{14},$$

$$x_2=\frac{7}{2}u_2=-\frac{1}{2},\ y_2=\frac{5}{2}u_2=-\frac{5}{14},\ z_2=-\frac{1}{2}u_2=\frac{1}{14}.$$

Значи, дадениот систем има две решенија:

$(\frac{1}{2},\frac{5}{14},-\frac{1}{14})$ и $(-\frac{1}{2},-\frac{5}{14},\frac{1}{14})$.

Пример 9. Да го решиме системот равенки :

$$\begin{cases} 3(4x+y-xy)=xy(x+y-3) \\ xy(4x+y-xy)=12(x+y-3) \end{cases}$$

Решение. За xy постојат две можности: или $xy\neq 0$ или $xy=0$. Да претпоставиме дека $xy=0$. Тогаш системот ќе го добие видот $\begin{cases} 4x+y=0 \\ x+y=3 \end{cases}$, од каде $x=-1$, $y=4$. Тоа е контрадикција со претпоставка $xy=0$, што значи дека е $xy\neq 0$.

По однос на множителот $4x+y-xy$ можни се исто така два случаја:

а) $4x+y-xy=0$, б) $4x+y-xy\neq 0$.

Ако $4x + y - xy = 0$, тогаш е $x + y - 3 = 0$, па ќе го имаме системот

$$\begin{cases} 4x + y - xy = 0 \\ x + y - 3 = 3 \end{cases} \tag{13}$$

Ако, пак, $4x + y - xy \neq 0$, тогаш е и $x + y - 3 \neq 0$. Во тој случај можеме да ги поделиме соодветните страни на дадениот систем, па ќе добиеме $\frac{3}{xy} = \frac{xy}{12}$, или $x^2y^2 = 36$, односно $xy = \pm 6$. Ако е $xy = 6$, тогаш го добиваме системот :

$$\begin{cases} xy = 6 \\ 4x + y - xy = 2(x + y - 3) \end{cases} \tag{14}$$

Ако, пак, е $xy = -6$, го добиваме системот :

$$\begin{cases} xy = -6 \\ 4x + y - xy = -2(x + y - 3) \end{cases} \tag{15}$$

Според тоа, дадениот систем се распаѓа на три системи равенки (13), (14) и (15). Со нивното решавање добиваме дека дадениот систем има шест решенија:

$(\sqrt{3}i, 3 - i\sqrt{3})$, $(-i\sqrt{3}, 3 + i\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$.

Пример 10 . Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 20 \\ x^4 + y^4 - z^4 = 560 \end{cases}$$

Решение. Првата равенка ја изразуваме $z = -(x + y)$. Левите страни на втората и третата равенка ги трансформираме како што следува: $x^2 + y^2 - z^2 = (x + y)^2 - 2xy - z^2$, а потоа со замена $z = -(x + y)$, добиваме $(-z)^2 - 2xy - z^2 = 20$ или $xy = -10$.

Аналогно: $x^4 + y^4 - z^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 - z^4 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 - z^4$. Потоа со замена $x + y = -z$, добиваме: $(z^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 - z^4 = 560$, $-4xyz^2 + 4x^2y^2 - 2x^2y^2 = 560$ или $-4xyz^2 + 2x^2y^2 = 560$.

Значи, дадениот систем е еквивалентен со системот:

$$\begin{cases} z = -(x + y) \\ xy = -10 \\ -4xyz^2 + 2x^2y^2 = 560 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z = -(x + y) \\ xy = -10 \\ 40z^2 + 200 = 560 \end{cases}$$

Од третата равенка имаме $z^2 = 9$ или $z = \pm 3$.

За одредување на x и y добиваме вкупност од два система :

$$\begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-10 \end{cases} \text{ при } z=3 \text{ и } \begin{cases} x+y=3 \\ xy=-10 \end{cases} \text{ при } z=-3,$$

од кои добиваме дека тие, а и даденият систем, има решенија:
$(-5, 2, 3)$, $(2,-5, 3)$, $(5,-,2, -3)$, $(-2, 5, -3)$.

З А Д А Ч И

Реши ги системите равенки *(1 – 6)*:

1*. а) $\begin{cases} (x+y)^4+4(x+y)^2=117 \\ x-y=25 \end{cases}$,

б) $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1)=10 \\ (x+y)(x-y)=3 \end{cases}$

2*. а) $\begin{cases} x+y=2z \\ 3(x^4+y^4)=272z \\ 9xy=8z^2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y-z=7 \\ x^2+y^2-z^2=37 \\ x^3+y^3-z^3=1 \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y) \\ x^3+y^3=7(x+y) \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2+4y^2=5xy \\ 2x^2-y^2=31 \end{cases}$

4*. а) $\begin{cases} x^2-(y-z)^2=2 \\ y^2-(x-z)^2=3 \\ z^2-(x-y)^2=6 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2-yz=0 \\ y^2-xz=0 \\ z^2-xy=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x+y-z}{5}=\dfrac{y+z-x}{7}=\dfrac{z+x-y}{11}=\dfrac{xyz}{9} \end{cases}$

6*. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=5z \\ \dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x}=4y \\ \dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=3x \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y} \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x} \end{cases}$

Глава VIII

НЕРАВЕНКИ, СИСТЕМ НЕРАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА СО ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

Во глава V ги разгледавме и решававме неравенките и системите неравенки со една променлива. Тука ќе се задржиме на неравенките и системите неравенки од повеќе променливи. Ќе разгледаме и докажеме и повеќе важни неравенства, кои имаат голема примена во математиката и другите науки.

§ 62. ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ ОД ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Секоја неравенка од прв степен, која е еквивалентна со неравенката

$$ax + by + ... + cz + d > 0, \qquad (1)$$

во која $a, b, ..., c, d$ се некои реални броеви, се вика **линеарна неравенка** од променливите $x, y, ..., z$.

При $a \neq 0$ таа е еквивалентна со неравенката

$$x > \frac{1}{a_1}(-by - ... - cz), \quad (\text{ако } a > 0) \qquad (1')$$

или $$x < \frac{1}{2}(-by - ... - cz - d), \qquad (\text{ако } a < 0) \qquad (1'')$$

Изразувањето на неравенката (1) во видот (1'), односно (1'') се вика нејзино **решавање** по променливата x.

62.1 ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Да ја разгледаме линеарната неравенка со две променливи

$$ax+by+c>0\ ,\ (или <0) \qquad (2)$$

каде a и b се реални броеви различни од нула, т.е. $ab\neq 0$.

Ако неравенката (2) ја решиме по променливата y, во зависност од знакот на b, таа ќе премине во

$$y>kx+n\ ,\quad (при\ b>0) \qquad (3)$$

или

$$y<kx+n\ ,\ (при\ b<0), \qquad (3`)$$

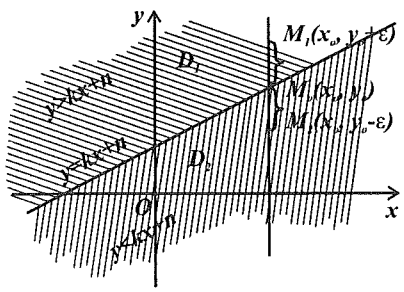
каде што $k=-\frac{a}{b},\ n=-\frac{c}{b}$.

Множеството решенија на неравенката (3), (односно (3`)) го задаваме со следниов систем неравенки:

$\{-\infty<x<\infty,\quad kx+n<y<\infty\}$, односно со

$\{-\infty<x<\infty,\quad -\infty<y<kx+n\}$

За неравенките (2), (3) и (3`) и нивните множества решенија може да се даде следнава геометриска интерпретација:



црт. 1

При замена на знакот на неравенство во (2), (3), и (3`) со знак за равенство (" = "), ја добиваме равенката $ax + by +c = 0$, или решена по y: $y = kx +n$, чиј график е некоја права l. Таа права l: $y = kx +n$ ја дели координатната рамнина xOy на две полурамнини (области) D_1 и D_2 (црт.1).

На рамнината xOy да земеме три точки: точка $M_0\ (x_0, y_o)$ што лежи на правата l; точка $M_1\ (x_0, y_o + \varepsilon)$ што лежи над правата $l\ (\varepsilon>0)$ и точка $M_2\ (x_0, y_o - \varepsilon)$ што лежи под правата l (црт.1)

Бидејќи $M_0\in l$,тогаш ќе важи $y_0 = kx_0 + n$,

па според тоа и

$$y_0+\varepsilon>kx_0+n,\ y_0-\varepsilon<kx_0+n.$$

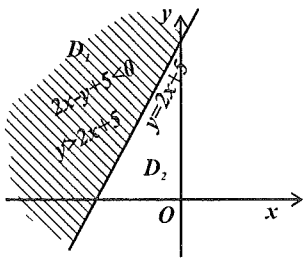
Оттука следува дека, координатите на точката M_1 ја задоволуваат неравенката $y>kx+n$, а координатите на точката M_2 ја задоволуваат неравенката $y<kx+n$ (црт.1).

Освен тоа, оттука заклучуваме дека:

1^0 над правата $y = kx + n$ лежат точките, чии координати (x, y) се решенија на неравенката $y > kx + n$, а под правата $y = kx + n$ лежат точките, чии координати се решенија на неравенката $y < kx + n$;

2^0. Ако утврдиме дека координатите на некоја точка M што лежи во една од обласите D_1 и D_2 ја задоволуваат неравенката (2), (3), или (3`) , тогаш неа ја задоволуваат и сите други точки од таа област (полурамнина).

За утврдување која од областите D_1 или D_2 е множество решенија на неравенката (2), во практика го применуваме **методот на контролни точки.** За таа цел земаме една контролна точка од областа D_1 или D_2 и проверуваме каков знак има изразот $ax + by + c$ во таа точка. Тој знак ќе го има изразот $ax + by + c$ на целата област (полурамнина) на која лежи контролната точка. Во другата полурамнина изразот $ax + by + c$ ќе има спротивен знак.



црт. 2

Пример 1. Да ја решиме неравенката $2x - y + 5 < 0$.

Решение. Ја решаваме неравенката по y, при што таа го добива видот $y > 2x+5$. Правата $2x - y + 5 = 0$, односно $y = 2x + 5$ ја разделува координатната рамнина на две полурамнини: горна D_1 и долна D_2 (црт.2). Бараното множество решенија на дадената неравенка $2x - y + 5 < 0$, односно $y > 2x+5$, го сочинуваат координатите на сите точки од горната полурамнина, односно над правата $y=2x+5$. Кратко велиме: множество решенија (или област на решенија) на дадената неравенка е полурамнината D_1 над правата $y = 2x + 5$, која на цртежот е шрафирана.

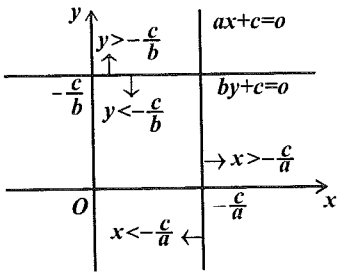
Тоа множество решенија алгебарски (аналитички) го запишуваме:

$$D_1 = \{ -\infty < x < \infty \ , \ 2x + 5 < y < \infty \}.$$

Во посебен случај : еден или два од коефициентите $a, b, c,$ на неравенката (2) може да се еднакви на нула.

а) Ако е, на пример, $a = 0$, неравенката (2) го добива видот $0x + by + c > 0$, односно $by + c > 0$. Равенката, $by + c = 0$ претставува права паралелна со Ox – оската, која Oy- оската ја сече во точката $y = -\frac{c}{b}$ (црт.3). Во тој случај множеството реше-

нија на неравенката $by + c > 0$ е полурамнината над *(ако $b > 0$)*, или полурамнината под *(ако $b < 0$)* правата $by + c = 0$. Ананлитички тоа го запишуваме :



црт. 3

за $y > -\frac{c}{b}$ со $\left\{-\infty < x < \infty,\ -\frac{c}{b} < y < \infty\right\}$;

а за $y < -\frac{c}{b}$ со $\left\{-\infty < x < \infty,\ -\infty < y < -\frac{c}{b}\right\}$

б) Ако е $b = 0$, тогаш неравенката (2) се сведува на $ax + c > 0$. Знаеме, равенката $ax + c = 0$ претставува права паралелна со Oy – оската, која Ox – оската ја сече во точката $x = -\frac{c}{b}$ (црт.3). Во тој случај, множеството решенија на неравенката $ax + c > 0$ е полурамнината десно *(ако $a > 0$)*, или лево *(ако $a < 0$)* од правата $ax + c = 0$. Аналитички множеството решенија

за $ax + c > 0$ *(ако $a > 0$)* е: $\{ -\frac{c}{a} < x < \infty\ ,\ -\infty < y < \infty \}$,

а за $ax + c > 0$ *(ако $a < 0$)* е: $\left\{ -\infty < x < -\frac{c}{a},\ -\infty < y < \infty \right\}$.

в) Ако е $a = b = 0$, $c \neq 0$, тогаш неравенката $0x + 0y + c > 0$ има множество решенија: целата координатна рамнина (ако $c > 0$), или нема решенија, ако $c < 0$.

62.2 СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ

Да го разгледаме системот линеарни неравенки со две променливи :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 > 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 > 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_kx + b_ky + c_k > 0 \end{cases} \qquad (4)$$

каде што некои, или сите може да се со спротивни насоки.

Видовме дека секоја одделна неравенка во системот (4) има множество решенија – некоја полурамнина (област) D_i, ($i = 1, 2, \ldots, k$) во кооординатната рамнина xOy. Множеството од сите решенија на системот (4) го добиваме како заеднички дел (пресек) од сите тие полурамнини – области D_i, т.е. $D = D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_k$. Во посебен случај, множеството решенија на системот (4)

– областа D може да биде многуаголник, или некоја област од рамнината огра-ничена со отворена искршена линија, а може да биде и празно множество, т.е. системот неравенки да нема решенија. Во последниот случај велиме дека системот неравенки е **противречен**.

Да го разгледаме сега системот од две линеарни неравенки со две променливи:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1>0 \\ a_2x+b_2y+c_2>0 \end{cases} \tag{5}$$

Тука се можни два случаја: правите $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ да се сечат или да се паралелни.

I. Да претпоставиме дека тие **се сечат** . Кога двете неравенки ќе ги решиме по променливата y , нека го добиеме еквивалентниот систем:

$$\begin{cases} y<k_1x+n_1 \\ y>k_2x+n_2 \end{cases} \text{, каде } k_2\neq k_1 \tag{6}$$

во кој неравенките имаат спротивни насоки.

За да постои системот (6) потребен и доволен услов е (согласно транзитивноста) да важи неравенката

$k_2x+n_2<k_1x+n_1$, или $(k_2-k_1)x<n_1-n_2$.

Оттука $x<\dfrac{n_1-n_2}{k_2-k_1}$, ако $k_2>k_1$, или $x>\dfrac{n_1-n_2}{k_2-k_1}$, ако $k_2<k_1$.

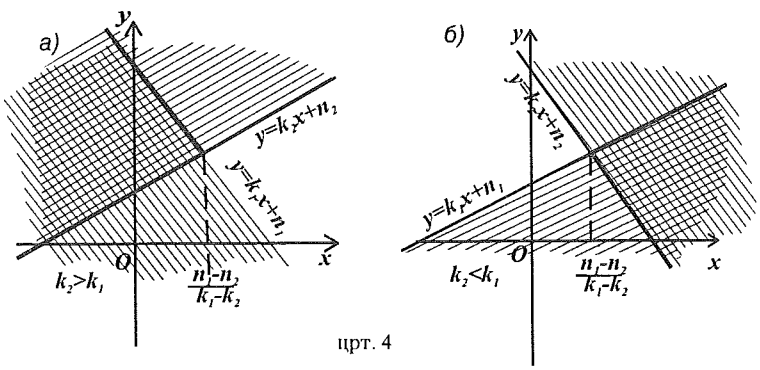
Општото решение на системот (6) ќе гласи :

$\{-\infty<x<\dfrac{n_1-n_2}{k_2-k_1},\quad k_2x+n_2<y<k_1x+n_1\}$, ако $k_2>k_1$, (црт. 4а) или

$\{\dfrac{n_1-n_2}{k_2-k_1}<x<\infty,\quad k_2x+n_2<y<k_1x+n_1\}$

ако $k_2<k_1$ (црт. 4б) .

Според тоа, во овој случај множеството решенија на системот (6) го сочинуваат точките што лежат над правата $y=k_2x+n_2$, но и под правата $y=k_1x+n_1$ (црт. 4а, б).



црт. 4

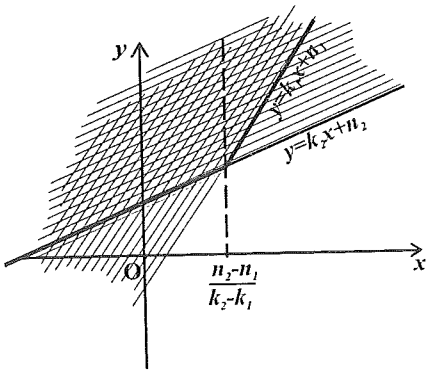
При решавањето на неравенките на системот (5) по променливата y, да допуштиме дека ќе го добиеме еквивалентниот систем

$$\begin{cases} y > k_1x + n_1 \\ y > k_2x + n_2 \end{cases}, \text{ каде } k_2 \neq k_1 \tag{7}$$

во кој двете неравенки се истонасочени.

Во овој случај, за секоја произволно избрана вредност на x, вредноста на y треба да биде поголема од поголемиот од броевите $k_2x + n_2$ и $k_1x + n_1$. Затоа е потребно да утврдиме кој од нив е поголем.

Нека $k_1x + n_1 \geq k_2x + n_2$ или $(k_1 - k_2)x \geq n_2 - n_1$, од каде $x \geq \frac{n_2 - n_1}{k_1 - k_2}$ при $k_1 > k_2$.



црт. 5

Нека сега $k_1x + n_1 \leq k_2x + n_2$ или $(k_1 - k_2)x \leq n_2 - n_1$ од каде $x \leq \frac{n_2 - n_1}{k_1 - k_2}$ при $k_1 > k_2$.

Според тоа, за променливата y ќе важи:

$y > k_1x + n_1$, ако $x \geq \frac{n_2 - n_1}{k_1 - k_2}$ и

$y > k_2x + n_2$, ако $x < \frac{n_2 - n_1}{k_1 - k_2}$

Општото решение на системот (7), ќе гласи:

$\{-\infty < x < \frac{n_2 - n_1}{k_1 - k_2}, \quad k_2x + n_2 < y < \infty\}$ (црт. 5)

и $\{\frac{n_2 - n_1}{k_1 - k_2} \leq x < \infty, \quad k_1x + n_1 < y < \infty\}$ (црт. 5)

II. Да претпоставиме дека правите $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ се паралелни. Тогаш системот неравенки (5) ќе се сведе на системот

$$\begin{cases} y < kx + n_1 \\ y > kx + n_2 \end{cases} \tag{8}$$

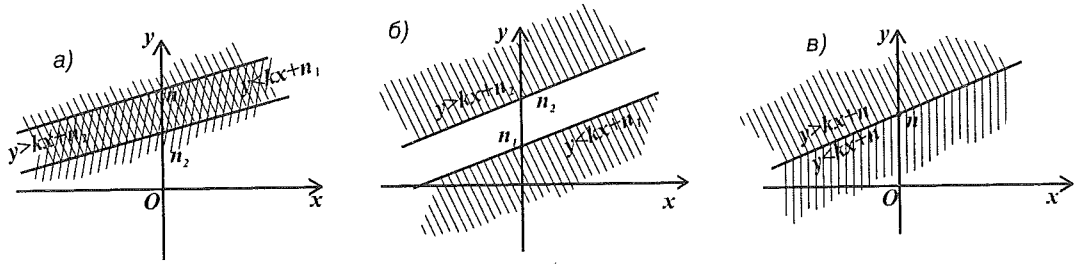
во кој неравенките имаат спротивни насоки, или на

$$\begin{cases} y > kx + n_1 \\ y > kx + n_2 \end{cases} \tag{9}$$

во кој неравенките имаат исти насоки (двете со знак $>$, или и двете со знак $<$).

Системот неравенки (8) во зависност од тоа дали е:

а) $n_1 > n_2$, б) $n_1 < n_2$ или в) $n_1 = n_2 = n$ ќе биде :



црт. 6

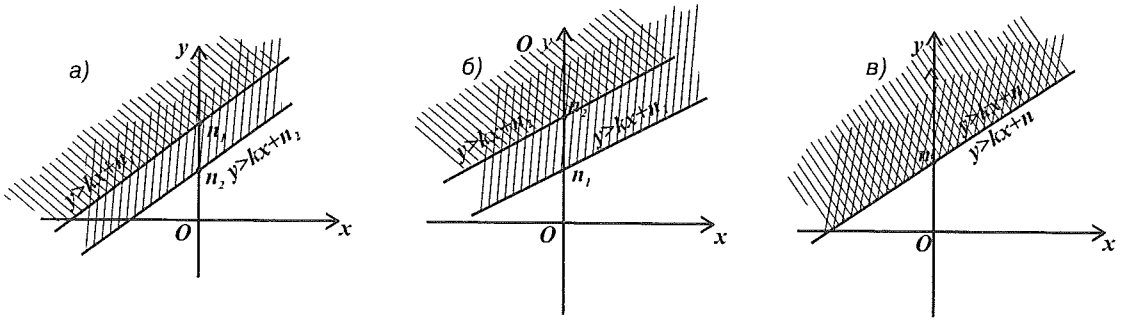
Во првиот случај а) тој има општо решение

$\{-\infty < x < \infty, \quad kx + n_2 < y < kx + n_1\}$ (црт. *6а*), а во случаите б) и в) тој нема решенија (црт. 6б, в).

Системот (9) исто така во зависност од тоа дали е :

а) $n_1 > n_2$, б) $n_1 < n_2$ или в) $n_1 = n_2 = n$ ќе биде :

Во случаите а) и в) системот (9) има општо решение $\{-\infty < x < \infty, \quad kx + n_1 < y < \infty\}$, а во случајот б) тој има општо решение $\{-\infty < x < \infty, \quad kx + n_2 < y < \infty\}$ (црт. *7а, б, в*)



црт. 7

Пример 2. Да го решиме системот линеарни неравенки:

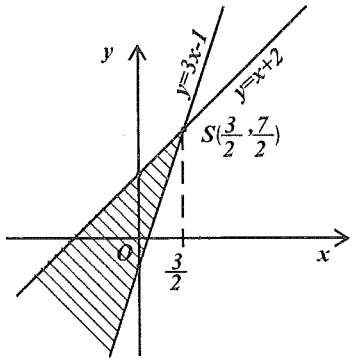
$$\begin{cases} 3x - y - 1 < 0 \\ x - y + 2 > 0 \end{cases}$$

Решение. Тој е еквивалентен со системот $\begin{cases} y > 3x - 1 \\ y < x + 2 \end{cases}$

За постоење на овој систем потребен и доволен услов е да важи

$3x - 1 < y < x+2$, односно $3x - 1 < x+2$. Оттука $x < \frac{3}{2}$. Значи, даденият систем има

општо решение: $\{-\infty < x < \frac{3}{2},\quad 3x-1 < y < x+2\}$



црт. 8

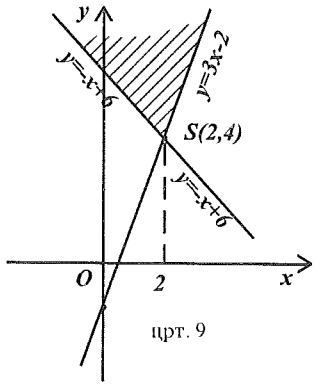
Решение на системот е која било подредена двојка (x, y) , каде $x < \frac{3}{2}$, а y – кој било број што е поголем од вредноста $3x - 1$, но помал од вредноста $x + 2$. На координатната рамнина тоа се точките што лежат над правата $y = 3x - 1$, но под правата $y = x + 2$ (црт. 8).

Пример 3. Да го решиме системот неравенки

$$\begin{cases} y > 3x-2 \\ y > -x+6 \end{cases}$$

Решение. Ги составуваме неравенките $3x-2 \geq -x+6$, од каде $x \geq 2$ и $3x-2 < -x+6$, од каде $x < 2$. Општото решение ќе гласи

$$y > \begin{cases} 3x-2, & \text{ako } x \geq 2 \\ -x+6, & \text{ako } x < 2 \end{cases} \qquad \text{(црт. 9)}$$



црт. 9

Пример 4. Да го решиме системот неравенки

$$\begin{cases} y > 2x-5 \\ y > -2x-1 \\ y < x-1 \end{cases} \qquad (9)$$

Решение. Геометриски, даденият систем определува множество од сите точки, што лежат над секоја од правите $y = 2x - 5$, $y = -2x - 1$, но истовремено да се и под правата $y = x - 1$. Како што гледаме од цртежот 10, областа на решенија на даденият систем ја сочинуваат сите точки од внатрешноста на триаголникот ABC. Да го решиме системот и алгебарски.

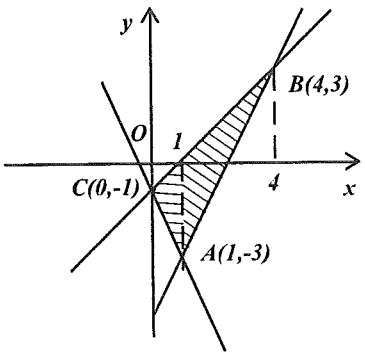
Ако го решиме системот од првите две неравенки во (9), добиваме

$$y > \begin{cases} 2x-5, & \text{ako } x \geq 1 \\ -2x-1 & \text{ako } x < 1 \end{cases}$$

За одредување на решението на даденият систем (9) ја решаваме вкупноста од следниве два система:

а)
$$\begin{cases} y < x-1 \\ y > -2x-1 \\ x < 1 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y < x-1 \\ y > 2x-5 \\ x \geq 1 \end{cases}$$



црт. 10

Од првите две неравенки на системот а) добиваме $-2x-1 < x-1$, од каде $x > 0$. Според тоа, системот а) го определува триаголникот

$$\{ -2x-1 < y < x-1,\ \ 0<x<1 \}. \qquad (10)$$

На ист начин го решаваме и системот б): од првите две неравенки на системот б), добиваме $2x-5 < x-1$, од каде $x < 4$. Така го добиваме триаголникот

$$\{ 2x-5 < y < x-1,\ \ 1 \leq x < 4 \} \qquad (11)$$

Општото решение на даденият систем (9) го сочинува унијата од областите (триаголниците) (10) и (11), која пак го формира триаголникот ABC на црт. 10.

ЗАДАЧИ

Да се решат неравенките и системите неравенки:

1. а) $3x-2y+4>0$ б) $x-4y-3<0$

2. а) $2x-y>0$ б) $x-y<0$ в) $x+y<0$

3. а) $2x-5>0$ б) $y+1\leq 0$ в) $3x-5>0$

4. а)
$$\begin{cases} x+y+1>0 \\ 2x-3y+4<0 \end{cases}$$
б)
$$\begin{cases} 2x-y+3>0 \\ 4x-2y+1<0 \end{cases}$$

5. а)
$$\begin{cases} 2x+5y-3>0 \\ 3x-y+4>0 \end{cases}$$
б)
$$\begin{cases} x+y-2>0 \\ x-y+3>0 \end{cases}$$

6*. а) $\begin{cases} 2x-3y+1>0 \\ -2x+3y-1<0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-2y+1\geq 0 \\ -x+2y-1\geq 0 \end{cases}$

7. а) $\begin{cases} 2x-4y+5>0 \\ -x+2y-4<0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+4>0 \\ 3x-y-3<0 \end{cases}$

8*. а) $\begin{cases} 2x-y+1>0 \\ 3x+y-1<0 \\ x+2y+3>0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+1<0 \\ y+4>0 \\ 2x+3y>0 \end{cases}$

9. а) $\begin{cases} y>x-1 \\ y<2x+1 \\ y>2x-1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} y>\frac{x}{3}+2 \\ y<2x-1 \\ y>2x-3 \end{cases}$

§ 63. ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ТРИ И ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

63.1 ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ТРИ ПРОМЕНЛИВИ

Да ги разгледаме : равенката $ax + by + cz + d = 0$, (1)

и неравенката $ax + by + cz + d > 0$, (2)

во кои променливите x, y, z може да ги толкуваме како тековни (променливи) координати на која било точка M во просторот.

Во аналитичката геометрија се докажува следнава :

Теорема [63. 1]. ***Равенката (1) во просторот определува некоја рамнина π, а неравенката (2) – еден од двата полупростора, на кои таа рамнина го разгладува (разбива) целиот простор.***

Самата рамнина π е заедничка **граница** на двата полупростора. Таа му припаѓа на кој било од двата определени полупростора, ако се користи алтернативниот

знак $\geq$, а не му припаѓа на полупросторот, ако се користи строгиот знак на неравенството $>$ или $<$.

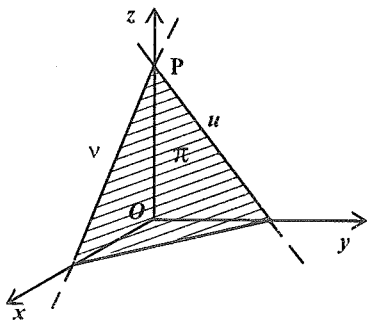
Доказ на ова теорема не даваме, но само ќе дадеме некои појаснувања, што ги сметаме за неопходни. Од коефицинтите a, b, c , сметаме дека е барем еден различен од нула. Нека, на пример $c \neq 0$. Тогаш равенката (1) може да се доведе во видот

$$z = kx + ly + p$$

Да видиме кои точки од множеството решенија M на равенката (3) лежат на координатната рамнина yOz. За таа цел во (3) ставаме $x = 0$ и добиваме

$$z = ly + p$$

Според тоа, пресекот на множеството M со рамнината yOz е права u, определена во yOz со равенката (4) (црт.11).



црт. 11

Аналогно добиваме дека, пресекот на множеството M со координатната рамнина xOz е права v , определена во рамнината xOz со равенката

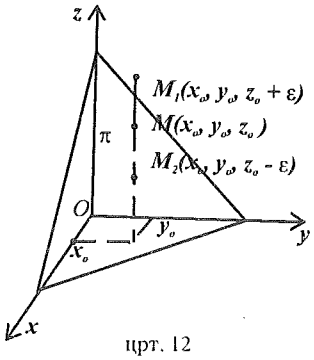
$$z = kx + p \qquad (5)$$

Двете прави u и v се сечат во точката $P\,(0, 0, p)$ (црт.11). Познато е дека правите u и v што се сечат, определуваат една единствена рамнина во просторот. Се покажува дека, токму таа рамнина , определена од правите u и v е рамнината π зададена со равенката (1).

Да разгледаме три точки: точката $M\,(x_0, y_0, z_0)$ што лежи на рамнината $\bar{\pi}$ (црт. 12) , точката $M_1\,(x_0, y_0, z_0 + \varepsilon)$, $(\varepsilon > 0)$, што лежи над рамнината $\bar{\pi}$ (црт. 12) и точката $M_2\,(x_0, y_0, z_0 - \varepsilon)$ што лежи под рамнината $\bar{\pi}$. Бидејќи е $M \in \bar{\pi}$, тогаш ќе важи $z_0 = kx_0 + l\,y_0 + p$, па според тоа ќе важи и

$$z_0 + \varepsilon > kx_0 + l\,y_0 + p, \quad z_0 - \varepsilon < kx_0 + l\,y_0 + p.$$

Оттука заклучуваме дека, координатите на точка M_1 ја задоволуваат неравенката $z > kx + ly + p$, а координатите на точката M_2 – неравенката $z < kx + ly + p$.



црт. 12

Освен тоа, оттука следува дека, множеството од сите точки, чии координати ја задоволуваат неравенката $ax + by + cz + d > 0$

е еден од двата полупростори (над или под) на кои рамнината $\bar{\pi}$ го разгледува целиот простор. Поточно, полупросторот над рамнината $\bar{\pi}$ е определен со (претставува множество решенија на) неравенката $z > kx + ly + p$, а полупросторот под рамнината $\bar{\pi}$ е определен со неравенката $z < kx + ly + p$.

Пример 1. Да ја решиме неравенката $3x - 2y - z + 4 > 0$.

Решение. Неравенката ја доведуваме во видот $z < 3x - 2y + 4$. Бараното множество решенија е полупросторот под рамнината $3x - 2y - z + 4 = 0$, кое аналитички го запишуваме:

$$\{-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad 3x - 2y + 4 < z < \infty\}.$$

Рамнината зададена со равенката (1) , во зависност од тоа дали некои од коефициентите a, b, c, и d се еднакви на нула може да ги има следниве посебни положби во координатниот систем $Oxyz$, и тоа:

1. Ако слободниот член на равенката (1) е $d = 0$, тогаш равенката $ax + by + cz = 0$ определува некоја рамнина, што минува низ координатниот почеток O, независно од тоа какви се коефициентите a, b, c .

2. Ако еден од коефициентите пред променливите a, b, c е еднаков на нула, тогаш равенката :

а) $ax + by + d = 0$ определува рамнина, што е нормална кон координатната рамнина xOy ,

б) $ax + cz + d = 0$ определува рамнина , што е нормална на координатната рамнина xOz ,

в) $by + cz + d = 0$ определува рамнина , што е нормална на координатната рамнина yOz .

3. Ако два од коефициентите a, b, c се еднакви на нула, тогаш:

а) равенката $ax + d = 0$ определува рамнина што е паралелна со координатната рамнина yOz ,

б) равенката $by + d = 0$ определува рамнина што е паралелна со координатната рамнина xOz ,

в) равенката $cz + d = 0$ определува рамнина што е паралелна со координатната рамнина xOy .

4. Ако $a = b = c = 0$, тогаш равенката $0x + 0y + 0z + d = 0$, $d \neq 0$ е противречна, т.е нема решенија, а равенката $0x + 0y + 0z + 0 = 0$ го определува целиот простор.

Пример 2. Да ги решиме неравенките со три променливи :

а) $3x - z - 2 > 0$, б) $2y + z - 1 > 0$, в) $y - 3 > 0$.

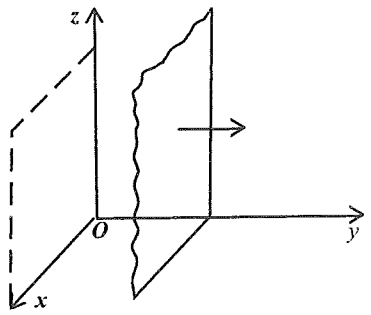
Решение.

а) Видовме, равенката $3x - z - 2 = 0$ определува рамнина, која е нормална на координатната рамнина xOz , а неравенката $z < 3x - 2$ го определува полупросторот под таа рамнина. Алгебарски, општото решение на неравенката

$$z < 3x + 0y - 2 \quad \text{e: } \{-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < 3x - 2\}$$

б) Неравенката $2y + z - 1 > 0$ или $z > -2y + 1$ го определува полупросторот над рамнината определена со равенката $z = -2y + 1$, која е нормална кон рамнината yOz . Алгебарски, општото решение гласи :

$$\{-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad -2y + 1 < z < \infty\}$$



црт. 13

в) Неравенката $y - 3 > 0$ или $y > 0x + 0z + 3$ го определува полупросторот што е расположен надесно од таа рамнина, која пак е паралелна со координатната рамнина $x0z$ (црт.13). Алгебарски, општото решение на неравенката го запишуваме:

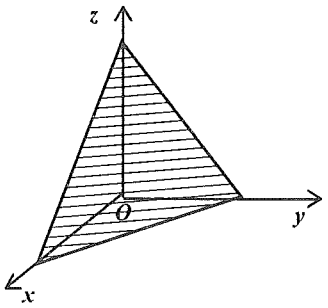
$$\{-\infty < x < \infty, \quad 3 < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty\}$$

63.2 СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ТРИ ПРОМЕНЛИВИ

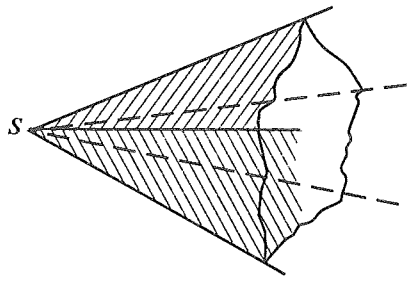
Да го разгледаме системот од k линеарни неравенки со три променливи

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 > 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 > 0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_kx + b_ky + c_kz + d_k > 0 \end{cases} \tag{6}$$

Видовме дека секоја од неравенките во системот определува некој полупростор, затоа областа (делот од просторот) што ја определува системот (6) претставува пресек од тие полупростори. Но пресекот на конечен број полупростори обично е некој **конвексен полиедар**, кој е исполнет од сите точки што лежат внатре (без граничните точки) на полиедарот. На црт.14 претставен е пример (при $k = 4$) во кој областа на системот е исполнет тетраедар. Меѓутоа, можен е и случај кога областа е неограничена (т.е. се простира во бесконечност), обично е некое **тристрано** или **повеќестрано исполнето ќоше** (црт.15).

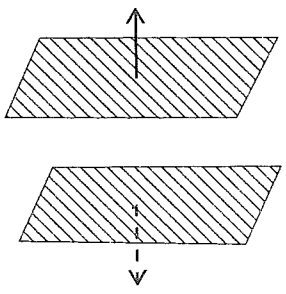


црт.14



црт.15

Понекогаш може да се случи воопшто да не постојат точки што ги задоволуваат сите неравенки во системот. Тогаш велиме дека системот е **противречен**, па неговата област е празно множество. Таков случај е претставен на црт.16.



црт. 16

Пример 3. Да се реши системот на линеарни неравенки

$$\begin{cases} 2x-3y-z+1<0 \\ x+2y+z-3>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z>2x-3y+1 \\ z>-x-2y+3 \end{cases}$$

Решение. Да испитаме кој од изразите на десните страни на неравенките е поголем. Неравенството $2x-3y+1 \geq -x-2y+3$, или $3x-y-2 \geq 0$ ќе важи, ако $y \leq 3x-2$. Неравенството, пак $-x-2y+3 > 2x-3y+1$ или $-3x+y+2>0$ важи, ако $y>3x-2$.

Според тоа,

$$z > \begin{cases} 2x-3y+1, & \text{ako} \quad y \leq 3x-2 \\ -x-2y+3, & \text{ako} \quad y>3x-2 \end{cases}$$

Значи, општото решение на даденият систем неравенки го сочинуваат две елементарни области:

$$\{-\infty<x<\infty, \quad -\infty<y\leq 3x-2, \quad 2x-3y+1<z<\infty\}$$
$$\{-\infty<x<\infty, \quad 3x-2<y<\infty, \quad -x-2y+3<z<\infty\}$$

Геометриска интерпретација . Даденият систем неравенки го определува множеството од сите точки во просторот, што се расположени над секоја од рамнините $z=2x-3y+1$ и $z=-x-2y+3$. Тоа множество точки всушност го сочинуваат сите внатрешни точки на еден диедар.

Напоредно со разгледувањето на дадениот систем неравенки (6), се покажало целисходно да го разгледаме и нему соодветниот **систем хомогени неравенки**

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z>0 \\ a_2x+b_2y+c_2z>0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_kx+b_ky+c_kz>0 \end{cases} \tag{7}$$

а исто така и соодветниот **систем хомогени равенки**

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_kx+b_ky+c_kz=0 \end{cases} \tag{8}$$

Системот хомогени равенки, знаеме, секогаш има едно решение *(0, 0, 0)*, кое се вика **нулто решение**. При испитувањето на системот линеарни неравенки (6) важно е да се знае дали соодветниот систем хомогени равенки (8) има и ненулти решенија. Во врска со тоа го воведуваме следниов поим:

Системот линеарни неравенки (6) се вика **нормален**, ако соодветниот систем хомогени равенки (8) има само нулто решение. Разбирливо е дека поимот нормален систем линеарни неравенки има смисла за систем линеарни неравенки со произволен број променливи.

Да забележиме, ако во даден систем неравенки (6) или (7) една (која било) од неравенките е **последица** на друга неравенка, или е **линеарна комбинација** од други две неравенки од тој систем, тогаш таа неравенка може да се изостави од системот, при што се добива систем со помал број неравенки, но еквивалентен на дадениот. За неравенката $L_i \equiv a_ix+b_iy+c_iz+d_i \geq 0$ велиме дека е линеарна комбинација, на пример, на првите две неравенки во системот (6) $L_1 \geq 0$ и $L_2 \geq 0$, ако постојат такви два позитивни броја k_1 и k_2, при што да важи $L_i \equiv k_1L_1+k_2L_2$.

Пример 4. Да го решиме системот линеарни неравенки :

$$\begin{cases} -2x+\ y-\ z-3>0 \\ \ \ x-\ y+2z+1>0 \\ \ \ x-2y+5z>0 \\ \ 2x-2y+4z+2>0 \end{cases} \tag{9}$$

Решение. Забележуваме, ако втората неравенка ја помножиме со 2, ја добиваме четвртата неравенка. Значи, четвртата неравенка во системот е после-

дица на втората неравенка. Потоа (малку потешко) откриваме дека третата неравенка е линеарна комбинација на првите две неравенки во системот (9). Навистина, ако втората неравенка ја помножиме со *3*, потоа ја собереме со првата ќе ја добиеме третата неравенка.

Така, даденият систем неравенки се сведува на системот :

$$\begin{cases} -2x + y - z - 3 > 0 \\ x - y + 2z + 1 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z < -2x + y - 3 \\ z < \frac{1}{2}(-x + y - 1) \end{cases}$$

За постоење на овој систем потребен и доволен услов е да важи неравенката $\frac{1}{2}(-x + y - 1) < -2x + y - 3$, од каде $y > 3x + 5$.

Општото решение на системот ќе биде

$$\{-\infty < x < \infty, \quad 3x + 5 < y < \infty, \quad \frac{1}{2}(-x + y - 1) < z < -2x + y - 3\}$$

Геометриска интерпретација. Системот неравенки (9) определува дел од просторот, што е расположен под рамнината $z = -2x + y - 3$, но и над рамнината $z = \frac{1}{2}(-x + y - 1)$.

Тој дел од просторот е исполнет диедар со раб, чија проекција врз рамнината xOy е правата $y = 3x + 5$. А пак полурамнината $y > 3x + 5$ е проекција на тој диедар врз координатната рамнина xOy.

Посебно ќе се задржиме на случајот, кога помеѓу неравенките на системот (6) ќе се појави и ваков подсистем од две неравенки:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d \geq 0 \\ ax + by + cz + d \leq 0 \end{cases} \tag{10}$$

или

$$\begin{cases} ax + by + cz + d > 0 \\ ax + by + cz + d < 0 \end{cases} \tag{11}$$

Очигледно е дека подсистемот (10) е еквивалентен (може да се замени) со равенката

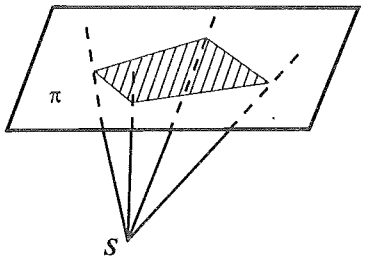
$$ax + by + cz + d = 0 \tag{12}$$

Меѓутоа, подсистемот (11) е противречен , т.е. тој нема решенија, па според тоа и целиот систем (6) е противречен.

Во првиот случај системот (6), кој го содржи подсистемот (10), ќе премине во таканаречен **мешан систем** од останатите неравенки на системот (6) и равенката (12).

Разбирливо е дека, областа (множеството) на решенијата на тој мешан систем ќе претставува обично некој **конвексен многуаголник** – дел од рамнината (12) (црт.17) .

На мешаните системи ќе се навратиме подоцна.



црт. 17

63.3 ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ ЛИНЕАРНИ НЕРАВЕНКИ СО ПОВЕЌЕ ОД ТРИ ПРОМЕНЛИВИ

Досега вниманието беше сконцентрирано на решавањето на линеарните неравенки и системите линеарни неравенки со две и три променливи. Тоа нешто беше диктирано главно од тоа што решенијата на тие неравенки и системи неравенки имаат нагледна геометриска смисла, како точки на рамнината или од просторот. Меѓутоа, со молчење да се заобиколи разгледувањето на линеарните неравенки и системите линеарни неравенки со повеќе од три променливи, би значело свесно одбегнување да се заокружи темата линеарни неравенки со повеќе променливи.

За геометриското толкување на неравенките и системите неравенки од n променливи неопходно е користењето на т.н. n – **димензионален простор**. Тој, како и правите, рамнините и обичниот Евклидов простор се состои од точки.

Секоја точка од n – димензионалниот простор ја определуваме со подреден избор од n реални броеви: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, кои ги викаме **координати на точката**.

Наместо да кажеме " точката M има координати $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ " ние пишуваме $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Точката $O(0, 0, \ldots, 0)$ се вика **координатен почеток** или само **почеток** .

Еве некои поими што се однесуваат на n – димензионалниот простор. Рамнини во n – димензионалниот простор има неколку типа: еднодимензионална, дводимензионална, итн, на крај ($n-1$) димензионална рамнина или **хипер рамнина**.

Хипер рамнина во n – димензионалниот простор претставува множество од сите точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, чии координати ја задоволуваат линеарната равенка

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b = 0 \qquad (13)$$

каде барем еден од коефициентите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ е различен од нула.

Аналогно, како кај обичниот тридимензионален простор, хипер рамнината (13) целиот n – димензионален простор го разделува на два дела: област (дел) во која е задоволена неравенката

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \geq 0 \tag{14}$$

и област (дел) во која е задоволена неравенката

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b \leq 0 \tag{15}$$

Тие области се викаат **полупростори**. Според тоа, секоја хипер рамнина го разделува n – димензионалниот простор на два полупростора, за кои таа е заедничка **граница**.

Нека е даден системот линеарни неравенки од n променливи:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a \geq 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n + b \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c \geq 0 \end{cases} \tag{16}$$

Секоја од неравенките во системот (16) определува некој полупростор, а сите неравенки во системот (16) заедно ќе определуваат некоја област во n -димензионалниот простор, која преставува **пресек** (заеднички дел) од конечен број полупростори.

ЗАДАЧИ

Реши ги системите линеарни неравенки:

1. а)

$$\begin{cases} 2x + y + z - 1 < 0 \\ x + 2y + z - 1 > 0 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} 3x - 2y + z - 4 < 0 \\ x + 2y + z + 1 > 0 \end{cases}$$

2. а)

$$\begin{cases} 2x + y - 3z + 1 < 0 \\ x - 2y + z - 3 > 0 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 4 > 0 \\ -x + 2y - 3z + 6 > 0 \end{cases}$$

3*. а)

$$\begin{cases} 3x + y - z + 2 > 0 \\ -3x - y + z + 5 < 0 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x - y + z + 2 > 0 \\ -x + y - z + 1 > 0 \end{cases}$$

4*. а)
$$\begin{cases} 4x+3y-z+2>0 \\ x-2y+z+1\geq 0 \\ x-2y+z+1<0 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x-y+2z-1>0 \\ 2x-y-z+2>0 \\ 3x-2y+z+1>0 \end{cases}$$

§ 64. ПОИМ ЗА ЛИНЕАРНО ПРОГРАМИРАЊЕ

Во последниве 50 – тина години системите линеарни равенки и линеарни неравенки наоѓат сé поголема примена, посебно во економиката и планирањето. Задачите со кои најчесто се среќаваме, тоа се задачи за изнаоѓање на најповолната варијанта на организација на производството, а со цел за намалување на расходите и зголемување на добивката.

Еве еден најупростен вид на таков проблем:

Задача. Од две рударски окна се вади руда: од окното А се вади 45 тони руда дневно, а од окното В – 75 тони руда дневно. Таа руда се транспортира во три топлиници за топење и преработка, чиј максимален капацитет е : I – та топлиница 30 тони дневно, II – та 50 тони дневно, и III – та 40 тони руда дневно. Транспортните трошоци во условни единици на рудата од окната А и В до топилниците I, II, III се дадени во следнава табела 1:

Табела 1.

	I топ.	II топ.	III топ.
Окно А	8	5	4
Окно В	6	4	5

Треба да се напреви план за превоз на рудата при услов да се направат најмали расходи.

Решение. Со x да го означиме количеството руда, што ќе се транспортира од окното А за топлиницата I, а со y – количество руда – од окното А до топлиницата II. А остатокот од производството на руда на окното А : $45 - (x + y)$ се транспортира во топлиницата III. Бидејќи капацитетот на топење и преработка на топлиницата I е 30 тони , а во неа од окното А се донесени x тони, од окното В треба да се транспортираат уште $(30 - x)$ тони. Исто така доаѓаме до заклучок дека од окното В во топлиницата II треба да се однесат уште $(50 - y)$ тони. Потоа, за да

се задоволат потребите на топлиницата III останува од окното B да се однесат $40-(45-x-y)=x+y-5$ (тони).

На тој начин планот на транспортот на рудата е утврден со следнава:

Табела 2.

	I топ.	II топ.	III топ.
Окно A	x	y	$45-x-y$
Окно B	$30-x$	$50-y$	$x+y-5$

Полниот износ на расходните за транспорт на рудата со вака утврдниот план ќе го добиеме кога соодветните броеви од табелите 1 и 2 ги помножиме, а добиените производи ги собереме:

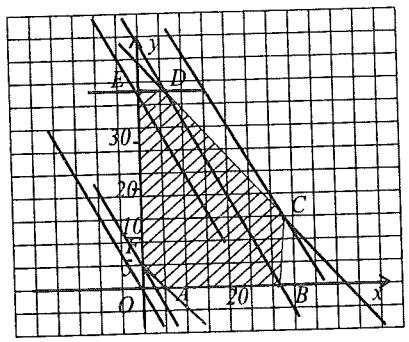
$S(x,y)=8x+5y+4(45-x-y)+6(30-x)+4(50-y)+5(x+y-5)=3x+2y+535.$

Согласно барањето во задачата треба да го најдеме минимумот на расходните, т. е. минимумот на функцијата

$$S(x,y)=3x+2y+535 \qquad (1)$$

Бидејќи величините x и y и сите броеви во табелата 2 означуваат количества на транспртираната руда, тогаш сите тие се ненегативни, т.е. ќе важи системот неравенки:

$$\{x\geq 0,\ y\geq 0,\ 45-x-y\geq 0,\ 30-x\geq 0,\ 50-y\geq 0,\ x+y-5\geq 0 \qquad (2)$$



црт. 18

Множеството решенија на системот неравенки (2) е областа претставена со шрафирање на црт. 18. Тоа е шестаголникот ABCDEF ограничен со правите: $x=0, y=0, 45-x-y=0, 30-x=0, 50-y=0$ и $x+y-5=0$. Наша задача е: од сите решенија на системот (2) да го одредиме она за кое линеарната функција $S(x,y)=3x+2y+535$ ќе добие најмала вредност. Бројот 535 е константен собирок – можеме да го отфрламе. Всушност, битно е да ја најдеме најмалата вредност на променливиот дел $3x+2y$ во функцијата $S(x,y)$. Знаеме, множеството точки за кои е $3x+2y=c$ е права линија. На цретежот 18 нацртани се неколку такви прави l_c. Тие линии се викаат **линии на нивото** на функцијата $S(x,y)=3x+2y$. Една од нив е правата l_0: $3x+2y=c\ (c=0)$, односно $y=-\frac{3}{2}x$ што мине низ кординатниот почеток. Оваа права нема заеднички точки со шрафираниот шестоаголник $ABCDEF$.

Ако таа права (линија на нивото) ја поместуваме (паралелно на себе) нагоре, прва нејзина единствена заедничка точка со многуаголникот е темето

F (0,5), а потоа сите повлечени линии на нивото на функцијата *S(x,y)* ќе го сечат многуаголникот, т.е. со него ќе имаат бесконечно многу заеднички точки. Во секоја од нив функцијата *S(x,y)* има иста вредност. Очигледно е дека, постојат само две (во општ случај) линии на нивото, паралелни со правата l_0 , кои минуваат низ две соодветни темиња на многуаголникот, при што целиот многуаголник да е расположен на една иста страна од таа линија. Во нашиот случај тоа се лините на нивото што минуваат низ темиња *F* и С. Во едно од тие две темиња функцијата *S(x,y)* ја добива најмалата, а во другото – најголемата своја вредност. Така, утврдуваме дека, функцијата *S(x,y) = 3x +2y + 535* добива најмала вредност во точката (темето) *F (0, 5)*, т.е за *x= 0, y = 5.* Заменувајќи ги тие вредности во табелата 2, планот на транспорт на рудата ќе биде:

	I топ.	II топ.	III топ.
Окно А	0 тони	5 тони	40 тони
Окно В	30 т.	45 т.	0 тони

Задачите од овој тип се викат **задачи од линеарно програмирање.** Во општ вид тие се сведуваат на следново:

Даден е систем од *m* линеарни неравенки со *n* променливи:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}, \qquad (2)$$

а исто така и некоја линеарна функција

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (3)$$

Треба од сите ненегативни решенија $(x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0,)$ на системот (2) да се избере она за кое линеарната функција (3) ќе добие најмала, односно најголема можна вредност.

Кон ваков тип задачи се сведува најголемиот број испитувања во економијата за изнаоѓање на оптимални (најдобри) производствени планови. До неодамна единствениот метод на решавање на овој тип задачи, бил решавање "од око ", или по пат на споредување и од можните конкретни варијанти избирање на најдобрата. Во последните триесетина години сложеноста на производството пораснала до тој степен, што за решавање на овој тип задачи било неопходно огромен број пресметувања. Извршувањето на тие пресметувања и избирање на најпогодната од

стотината најразлични варијанти денес е невозможно без современата електронска сметачка техника. Оваа задача била една од првите, за чие решавање биле составувани специјални програми. Оттука и потекнува називот "линеарно програмирање ".

ЗАДАЧИ

1. За производсвото на два вида производи потребни се три вида суровини, што ги има претпријатието во следниве количества: 34 единици од видот А, 18 единици од видот В и 16 единици од видот С. Во производството на една единица од I- от вид производ се користат (2, 0, 2) единици од трите вида суровини, а за II – от вид производ се користат (2, 3, 0) (нулата означува дека соодветната суровина на произвотството на тој вид производ не се користи). Добивката на претпријатието од реализацијата на една единица од првиот вид производ, е еднаква на 3 условни единици, а од секоја единица производ од вториот вид добивката е еднаква на 4 такви единици. Работата на претпријатието треба да се планира така што, тоа да има најголема добивака.

2. Во едно претпријатие се произведуваат два типа производи со капацитет 100 парчиња од првиот тип или 300 парчиња дневно од вториот тип, но во погонот за техничка контрола и пакување капацитетот е 150 парчиња дневно од кој било тип. Познато е дека цената по парче од првиот тип е два пати повисока од колку од вториот тип. Треба да се направи план на производство со кој ќе се реализира најголема можна добивка.

3. Одреди ја најмалата вредност на функцијата $f = 2x + y$ во областа на решенијата на системот неравенки:
$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ x - y \leq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ x + 4y - 12 \leq 0 \end{cases}$$

4. Помеѓу решенијата на системот неравенки :
$$\begin{cases} x \geq 0,\ y \geq 0 \\ 2x - y \leq 1 \\ x + 2y \leq 3 \end{cases}$$
избери го она за кое изразот $x^2 + y^2$ добива најголема вредност.

§ 65. АНАЛИТИЧКО ЗАДАВАЊЕ НА ОБЛАСТИ ОД РАМНИНАТА И ПРОСТОРОТ СО НЕРАВЕНКИ

Во §31 истакнавме дека неравенките често ги користиме како средство за определување на бројни множества. Видовме дека со неравенки ги определуваме сегментите и интервалите (конечни и бесконечни) од бројната оска. Од друга страна, пак, множествата решенија на неравенките и системите неравенки со една променлива претставуваат области на бројната оска и ги искажуваме со интервали. Сега ќе се запознаеме со аналитичкото определување на областите – делови од рамнината и просторот.

1. Дадена е некоја област D на рамнината, ограничена со делови од кривите (линиите), чии равенки се:

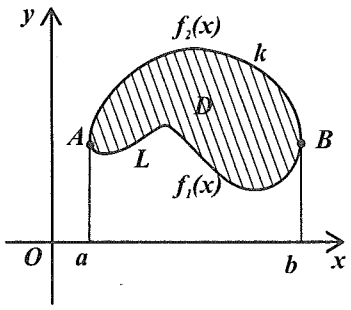
$$\begin{aligned} &P_1(x,y)=0\\ &P_2(x,y)=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &P_n(x,y)=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

ќе претпоставиме дека функциите (1) се непрекинати. Во тој случај за која било точка од областа D секоја од функциите (1) ќе добие по некоја позитивна или негативна вредност. Така ќе добиеме еден систем неравенки, чие множество решенија е токму областа D. Според тоа, тој систем неравенки аналитички ја определува нашата област D.

Ќе наведеме некои посебни случаи, кои најчесто ги среќаваме.

Нека $P(x, y) = 0$ (2)

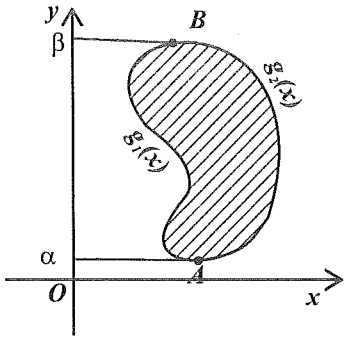
е равенката на една затворена крива, која со која било права $x = a$ нема повеќе од две пресечни точки (црт.19) и нека областа D е затворена со таа крива. Областа D ќе биде определена со една од неравенките $P(x, y) > 0$ или $P(x, y) < 0$. Кон кривата $P(x, y) = 0$ може да се повлечат две тангенти Aa и Bb паралелни со Oy – оската (црт.19). Ако ја решиме равенката (2) по y, ќе добиеме две функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, каде што $f_1(x)$ е долниот дел од кривата (2) ALB , а $f_2(x)$ горниот дел AkB . Во тој случај, областа D затворена со кривата (2) ја определуваме (задаваме) со системот неравенки



црт. 19

$$D = \{\, a < x < b,\ \ f_1(x) < y < f_2(x) \,\} \qquad (3)$$

Ако кривата (2) со произволна права $x = a$ има повеќе од два пресека, а со произволна права $y = b$ нема повеќе од два пресека (црт.20), тогаш повлекувајќи ги тангентите кон кривата (2), што се паралелни со Ox – оската, и после решавањето

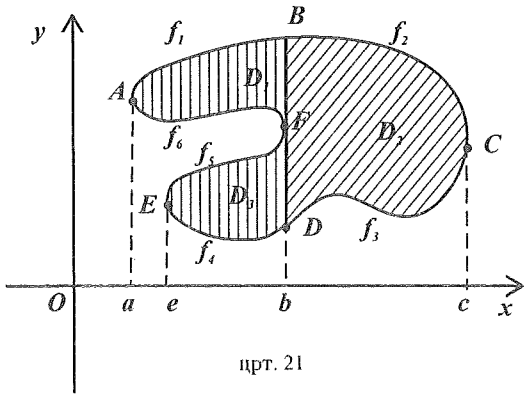


црт. 20

на равенката (2) по x ќе добиеме две криви $x = g_1(x)$ и $x = g_2(x)$. Во тој случај областа D ја определува системот равенки

$$D = \{\alpha < y < \beta, \quad g_1(y) < x < g_2(y)\}$$

Да видиме како постапуваме во случајот ако произволните прави: $x = a$ (паралелна со y - оската) и $y = b$ (паралелна со x - оска) со кривата (2) имаат повеќе од два пресека (црт.21). Во таков случај, повлекувајќи ги тангентите паралелни со Oy –оската, областаD (во нашиот случај) се разделува на три дела: D_1 – ограничен со ABF, D_2 - ограничен со BCDEF и D_3 - ограничен со DEF (црт.21). Ако $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$ и $f_6(x)$ се функции соодветни на кривите AB, BC, CD, DE, EF и FA, тогаш областа D ја запишуваме со



црт. 21

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 = \begin{bmatrix} a < x < b, & f_6(x) < y < f_1(x) \\ b < x < c, & f_3(x) < y < f_2(x) \\ e < x < b, & f_4(x) < y < f_5(x) \end{bmatrix}$$

Дадената област D може да се состои од два или повеќе свои составни дела D_1, D_2, D_3,...,. Ќе разгледаме случај кога областа D се состои од два дела D_1 и D_2 што се симетрични во однос на Ox – оската (црт.22). Областа D_1, која е ограничена со контурата ALKB, нека е определена со системот неравенки

$$D_1 = \begin{cases} a < x < b \\ f_1(x) < y < f_2(x) \end{cases}$$

Бидејќи контурата A'L'K'B' на областа D_2 е симетрична на контурата ALKB на областа D_1 во однос на Ox – оската, затоа A'L'B' ќе има равенка $y = -f_1(x)$, а A'K'B' – равенка $y = -f_2(x)$, па со оглед на тоа областа D_2 ќе биде определена со

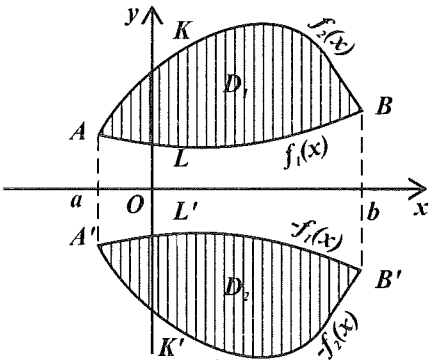
$$D_2 = \begin{cases} a < x < b \\ -f_2(x) < y < -f_1(x) \end{cases} \quad \text{(црт.22)}$$

А ако е $f_1(x) > 0$, следователно и $f_2(x) > 0$, тогаш областа $D = D_1 \cup D_2$ ја изразуваме

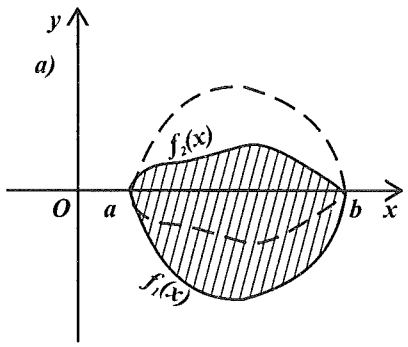
$$D = \begin{cases} a < x < b \\ f_1(x) < |y| < f_2(x) \end{cases} \qquad (5)$$

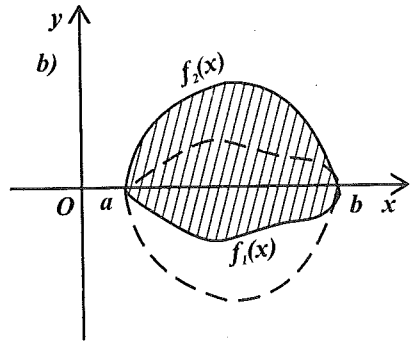
А ако е $f_2(x) < 0$, следователно ќе биде и $f_1(x) < 0$, тогаш областа $D = D_1 \cup D_2$ аналитички ја запишуваме

$$D = \begin{cases} a < x < b \\ -f_2(x) < |y| < -f_1(x) \end{cases} \qquad (6)$$



црт.22





црт.23

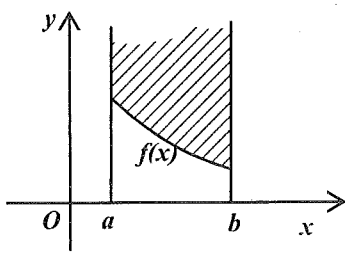
Ако, пак, $f_2(x) \geq 0$, а $f_2(x) \leq 0$, и ако $f_2(x) < |f_1(x)|$ (црт.23а) , тогаш областа D аналитички ја запишуваме

$$D = \begin{cases} a < x < b \\ |y| < |f_1(x)|, \end{cases} \qquad (7)$$

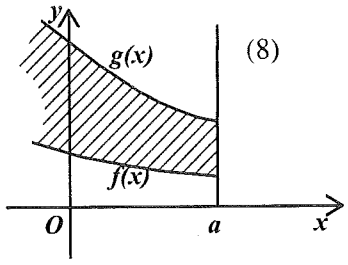
а ако е $f_2(x) > |f_1(x)|$ (црт.23б), тогаш областа D ја запишуваме:

$$D = \begin{cases} a < x < b \\ |y| < f_2(x) \end{cases} \qquad (8)$$

Да забележиме дека, определувањето на областа D дадено со (5) се јавува најопшто запишување и ги опфаќа случаите (7) и (8) .



црт. 24



црт.25

Со аналогна постапка може да се разгледа и случајот кога деловите D_1 и D_2 од областа D се симетрични во однос на y – оската.

Кај системите неравенки (3) и (4), во едната или во двете страни на неравенките може да стои и еден од симболите $-\infty$, ∞. На пример:

Системот неравенки $\{ a < x < b ,\ f(x) < y < \infty \}$ ја определува областа, која оддолу е ограничена со линијата $y = f(x)$, одгоре е неограничена; а од бочните страни е ограничена со правите $x = a$ и $x = b$ (црт.24).

Системот неравенки, пак, $\{ -\infty < x < a ,\ f(x) < g(x)\}$ ја определува фигурата на црт.25.

Множеството од сите точки на координатната рамнина, кои го задоволуваат системот неравенки

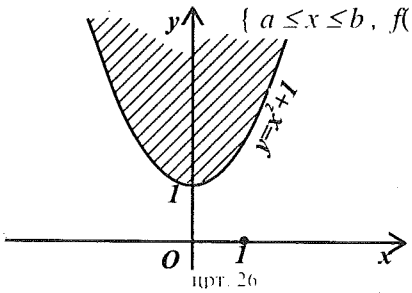
$$\{ a < x < b ,\ f(x) < y < g(x)\} \qquad (9)$$

или $$\{ c < x < d ,\ \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\} \qquad (10)$$

се вика **отворена елементарна област** на рамнината .

Ако кон множеството точки на отворената елементарна област се присоединат и точките од линијата со која е ограничена областа, се добива **затворена елементарна област**; која пак е определена со системот неравенки

$$\{ a \le x \le b ,\ f(x) \le y \le g(x)\}.$$



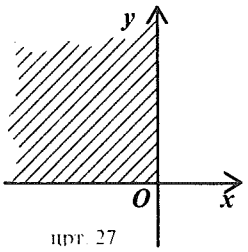
црт. 26

Пример 1. Множеството точки што лежат над параболата $y = x^2 + 1$ е област определена од системот неравенки

$$D = \{ -\infty < x < \infty, x^2 + 1 < y < \infty \}$$ (црт.26)

Пример 2. Областа што ја сочинува II – от квадрант на координатната рамнина xOy е определена со системот неравенки

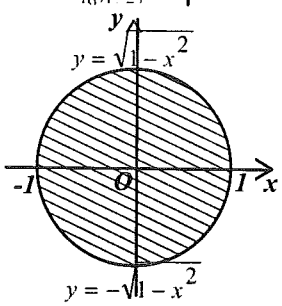
$$D = \{ -\infty < x < 0 , 0 < y < \infty \}$$ (црт.27)



црт. 27

Пример 3. Областа, што ја сочинува кругот $x^2+y^2 = 1$ ја определуваме со системот неравенки

$$D = \{-1 \le x \le 1,\ \ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$$ (црт.28)



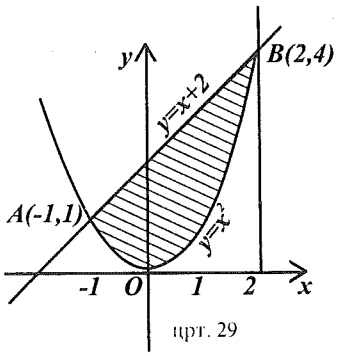
црт. 28

Пример 4. Да ја разгледаме областа во координатната рамнина xOy, што е ограничена оддолу со параболата $y = x^2$, а одгоре со правата $y = x + 2$ (црт.29). Правата и параболата се сечат во две точки A($-1, 1$) и B($2, 4$). Разгледуваната област можеме да ја определиме со следниов систем неравенки

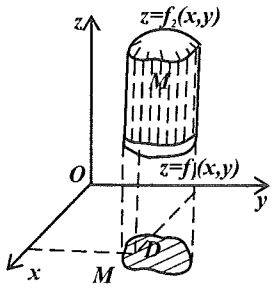
$$D = \{-1 \le x \le 2,\ \ x^2 \le y \le x + 2\}$$

2. Слично на ова, неравенките и системите неравенки од три променливи често ги користиме за определување (задавање) на точкови множества во просторот. На пример, да го разгледаме множеството точки, што го исполнуваат телото што е претставено во координатниот

систем $Oxyz$ на црт.30. Телото T ако е ограничено оддолу со некоја површина $z = f_2(x, y)$, а наоколу со цилиндрична површина, чии генератриси се паралелни со Oz оската (црт.30). Проекцијата на телото T врз координатната рамнина xOy нека е некоја рамнинска елементарна област D, која во рамнината xOy е определена со системот неравенки (9) или (10). Тогаш множеството точки, што го исполнуваат телото T, го определуваме со системот неравенки $f_1(x, y) < z < f_2(x, y)$, каде што x и y се координати на проекцијата M' врз рамнината xOy на произволна внатрешна точка M од разгледуваното тело T, а што го задоволуваат системот неравенки со кои е зададена рамнинската област D (црт. 30).



црт. 29



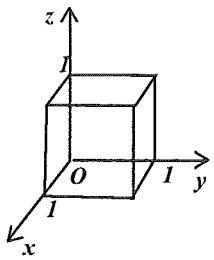
црт. 30

Пример 5. Множеството точки во просторот , што ја исполнуваат коцката (куб) со раб 1 и чие едно теме се совпаѓа со координатниот почеток (црт.31) определено е со системот неравенки :

$$\{ 0 < x < 1 , 0 < y < 1 , 0 < z < 1 \},$$

а ако и ѕидовите на коцката се приклучат кон неа, т.е. ако коцката е затворена , тогаш таа е определена со системот :

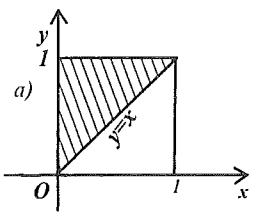
$$\{ 0 \le x \le 1 , 0 \le y \le 1 , 0 \le z \le 1 \}.$$

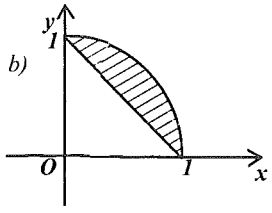


црт. 31

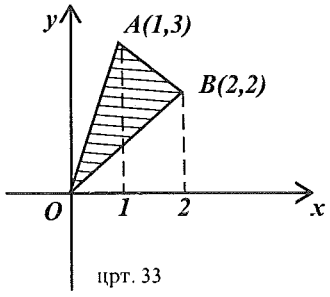
ЗАДАЧИ

1. Определи ја аналитички областа на: а) III квадрант, б) IV квадрант во координатната рамнина $x0y$.
2. Определи ја аналитички областа, што е шрафирана на: а) црт. 32а, б) црт. 32б.
3. Запиши ја аналитички внатрешната област на триаголникот OAB , чии темиња имаат координати : $O(0 , 0)$, $A(1, 3)$, $B(2, 2)$ (црт.33).

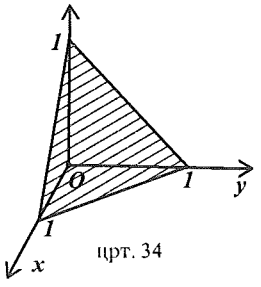




црт. 32



црт. 33



црт. 34

4. Определи го аналитички множеатвото точки што се внатрешни точки на тетраедарот, ограничен со рамнината $x + y + z = 1$ и координатните рамнини $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (црт.34) .

5. Нацртај и шрафирај ја областа , што е определена со системите неравенки:

а) $\{1 \le x \le 3, \quad x^2 \le y \le x+9\}$ б) $\{0 \le y \le 4, \quad y \le x \le 10 - y\}$.

6*. Задај го аналитички паралелограмот со темиња : $A(2, 2)$, $B(7,1)$, $C(9,4)$, $D(4, 5)$.

§ 66. НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ НЕРАВЕНКИ ОД ПОВИСОК СТЕПЕН И ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

При решавањето на неравенките и системите неравенки од втор и повисок степен со две и три променливи, обично ја користиме нивната геометриска интерпретација. Таа често ни дава претстава и го покажува патот на алгебарско решавање на дадената неравенка , односно систем неравенки.

Да ја разгледаме неравенката $P(x, y) > 0$, (1)

каде што $P(x, y)$ е некој полином од две променливи x и y. Обично (но има и исклучоци) равенката $P(x, y) = 0$ претставува некоја линија во координатната рамнина xOy . Во тој случај линијата $P(x, y) = 0$ го разбива множеството точки на рамнината (што не лежат на неа) на неколку области D_1 , D_2 , ... , D_k .

Во математичката анализа се докажува дека важи следнава :

Теорема [66.1]. ***Во секоја од областите D_i , на кои линијата $P(x, y) = 0$ ја разделува рамнината, полиномот $P(x,y)$ добива или позитивни, или негативни вредности.***

На таков начин, множеството решенија на неравенката (1) се состои од унијата на оние области D_i во кои полиномот $P(x, y)$ добива позитивни вредности. За утврдување која од неравенките $P(x, y) > 0$ или $P(x, y) < 0$ во дадена област е задоволена, го применуваме познатиот метод на контролни точки. За таа цел избираме контролна точка што лежи во соодветната област и проверуваме каков знак има полиномот $P(x, y)$ во таа точка. Тој знак полиномот $P(x, y)$ ќе го има на целата област.

Ако полиномот $P(x, y)$ не добива вредност нула во ниедна точка од рамнината xOy , тоа значи дека равенката $P(x, y) = 0$ не определува никаква линија. Во тој случај неравенката (1) или е идентично задоволена , или е противречна, т.е. нема решенија.

Аналогно , и решавањето на полиномните неравенки со три (или повеќе) променливи $P(x, y, \dots , z) > 0$ се сведува на одредување на оние облати на кои е разбиен обичниот (тридимензионален) (или повеќе димензионален) простор од

површината $P(x, y, \ldots, z) = 0$ и во кои полиномот $P(x, y, \ldots, z)$ добива позитивни вредности.

Решавањето, пак, на системите полиномни неравенки од неколку променливи се сведува на одредување, за секоја неравенка одделно, унијата од областите во кои таа е задоволена; а потоа и одредување на пресекот (заедничкиот дел) од сите тие унии од области.

Дробно рационалните неравенки со две (или повеќе) променливи од видот

$$\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} > 0, \tag{2}$$

како и целата рационална неравенка

$$P(x,y)Q(x,y) > 0 \tag{3}$$

се еквивалентни на вкупноста од системите неравенки :

$$\begin{cases} P(x,y) > 0 \\ Q(x,y) > 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} P(x,y) < 0 \\ Q(x,y) < 0 \end{cases}$$

Нив ги решаваме по истите правила, што важат за дробните рационални неравенки со една променлива, со таа разлика што наместо интервали на бројната оска, тука ќе разгледуваме области на бројната рамнина . Тоа значи дека, левата страна на неравенката (2) или (3) треба да ја разгледаме на областите од рамнината xOy на кои таа е разбиена од парот линии $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$, т.е . од линијата $P(x, y) \cdot Q(x, y) = 0$.

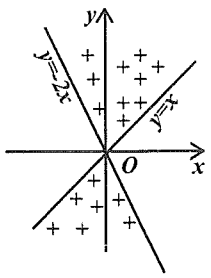
Како ги решаваме целите и дробните рационални неравенки, како и системите неравенки од нив, ќе покажеме на примери.

Пример 1 . Да се реши неравенката $y^2 + xy - 2x^2 > 0$.

Решение. Левата страна лесно се разложува на линеарни множители

$$(y - x)(y + 2x) > 0$$

Гледаме дека линијата $y^2 + xy - 2x^2 = 0$ се состои од две прави што се сечат и координатната рамнина ја делат на четири области, односно на два пара накрсни агли (црт. 35). Дадената неравенка има множество решенија што го сочинуваат парот накрсни агли, од кои едниот е областа (аголот) што е над правите $y = x$ и $y = -2x$ а другиот – под тие прави (црт. 35).



црт. 35

Алгебарско решение. Неравенката (4) е еквивалентна со вкупноста од системите линеарни неравенки :

$$\left[\begin{cases} y-x>0 \\ y+2x>0 \end{cases}, \begin{cases} y-x<0 \\ y+2x<0 \end{cases}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{cases} y>x \\ y>-2x \end{cases}, \begin{cases} y<x \\ y<-2x \end{cases}\right.$$

Нека $x>-2x$, од каде $x>0$. Потоа ако $-2x > x$, тогаш $x < 0$. Значи, првиот систем има општо решение

$$y>\begin{cases} x, & \text{ако } x>0 \\ -2x, & \text{ако } x<0 \end{cases}$$

Аналогно, добиваме дека вториот систем има општо решение

$$y<\begin{cases} x, & \text{ако } x<0 \\ -2x, & \text{ако } x>0 \end{cases}$$

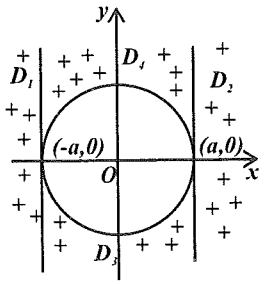
Унијата од овие две општи решенија ни го дава множеството решенија на дадената неравенка.

Пример 2. Неравенката $P(x,y)=x^2+y^2-a^2>0, (a>0)$ е задоволена во областа вон кружницата $x^2+y^2-a^2=0$. Всушност таа кружница ја дели координатната рамнина на две области: **внатрешна** (ограничена) и **надворешна** (неограничена). Во точката *(0, 0,)* од внатрешната облаast важи $P(0,0)=-a^2<0$, а во точката *(2a, 0)* од надворешната област имаме: $3a^2>0$.

Алгебарско решение. Дадената неравенка е еквивалентна на

$$y^2>a^2-x^2 \tag{5}$$

Ако $|x|>a$, т.е. ако $x<-a$ или $x>a$, тогаш неравенката (5) е задоволена за секоја вредност на y. Значи, имаме две елементарни области:



црт. 36

$D_1=\{-\infty<x<-a,\ -\infty<y<\infty\}$ и

$D_2=\{a<x<\infty,\ -\infty<y<\infty\}$. (црт. 36)

Ако $|x|\le a$, тогаш неравенката (5) е задоволена исто така во две области со приклучување на двете прави $x\pm a,\ y\neq 0$:

$D_3=\{-a\le x\le a,\ -\infty<y<-\sqrt{a^2-x^2}\}$ и

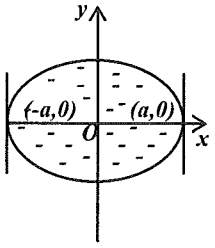
$D_4=\{-a\le x\le a,\ \sqrt{a^2-x^2}<y<\infty\}$

Унијата на тие области ја сочинуваат надворешната област на кружницата – множеството решенија на дадената неравенка.

Пример 3 .Да се реши неравенката

$$P(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\le 0\text{, каде } a>0, b>0.$$

Решение. Елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ ја разделува рамнината на две области: внатрешна и надворешна. Во точката *(0, 0)* од внатрешната област имаме $P(x,y)<0$. Според тоа, дадената неравенка е задоволена во внатрешната област на елипсата (црт. 37).



црт. 37

Алгебарско решение. Имаме : $y^2<\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)$

Ако $|x|>a$, т.е. $x<-a$ или $x>a$, тогаш неравенката (6) нема решенија.

Ако пак $|x|\le a$, т. е. $-a\le x\le a$, тогаш $-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$.

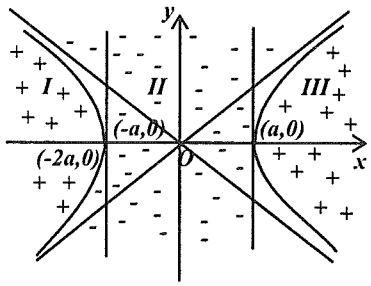
Значи, дадената неравенка има општо решение

$$\left\{-a\le x\le a,\quad -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}<y<\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right\}\text{ (црт.37).}$$

Пример 4. Хиперболата

$P(x,y)=\frac{x}{a^2}-\frac{y}{b^2}-1=0$ ја дели рамнината на три области I, II, и III . (црт. 38)

Решение. Да ја земеме точката *(0, 0)* од областа II . За неа добиваме $P(0,0)<0$. За точките $(\pm 2a,0)$ што лежат во областите I и III, добиваме $P(\pm 2a,0) = 3>0$. Според тоа, неравенката $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1>0$ е задоволена во двете области I и III, што се ограничени со левата и десната гранка на хиперболата ; а неравенката $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1<0$ е задоволена во областа меѓу гранките на хиперболата.



црт. 38

Аналитички тие области ги определуваме:

Област I и III : При $|x|>a$, $|y|<\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$

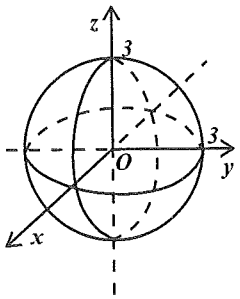
Област II : $\begin{cases} -a < x < a, & -\infty < y < \infty \\ |x| > a, & |y| > \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \end{cases}$ (црт. 38)

Пример 5. Да се реши неравенката $8y^2 - x^3 < 0$.

Решение. Неравенката е еквивалентна со $y^2 < \dfrac{x^3}{8}$. Очигледно е дека за $x<0$, неравенката нема решенија. За $x > 0$ двете страни на неравенката се позитивни, па таа е еквивалентна со $|y| < \sqrt{\dfrac{x^3}{8}} = \dfrac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{2}}$. Според тоа, дадената неравенка има општо решение $\left\{0 < x < \infty, \quad -\dfrac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{2}} < y < \dfrac{x\sqrt{x}}{2\sqrt{2}}\right\}$.

Пример 6. Да се реши неравенката $x^2 + y^2 + z^2 - 9 > 0$.

Решение. Од аналитичната геометрија знаеме дека, равенката $P(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ во просторот определува сфера со центар во координатниот почеток и радиус 3 (црт. 39). Сферата го разделува просторот на две просторни области: D_1 – внатре во сферата, и D_2 – надвор од сферата. Координатниот почеток *(0, 0, 0)* ѝ припаѓа на областа D_1, а за него имаме $P(0, 0, 0) = -9 < 0$. Значи, областа D_1 е негативна, а областа D_2 - позитивна. Според тоа, множеството решенија на дадената неравенка е областа D_2, која аналитички е зададена со системот :



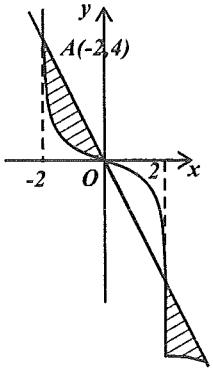
црт. 39

$$D_2 = \begin{cases} |z| > \sqrt{9 - x^2 - y^2} & \text{при } 9 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ -\infty < z < \infty & \text{при } 9 - x^2 - y^2 < 0 \end{cases}$$

Пример 7. Да се реши системот неравенки $\begin{cases} 2y + x^3 > 0 \\ y + 2x < 0 \end{cases}$

Решение. Првата неравенка е задоволена во областа над кубната парабола $2y + x^3 = 0$, односно $y = -\dfrac{1}{2}x^3$, а втората неравенка е задоволена во полурамнината под правата $y + 2x = 0$, односно $y = -2x$ (црт.40). Параболата и правата се сечат во точките $A(-2, 4)$, $O(0,0)$ и $B(2, -4)$.

Алгебарско решение. Системот е еквивалентен со $\begin{cases} y > -\dfrac{x^3}{2} \\ y < -2x \end{cases}$ или $-\frac{1}{2}x^3 < y < -2x$, од каде $-\frac{1}{2}x^3 < -2x$ или $x^3 > 4x$. Последната неравенка $x^3 - 4x > 0$, или $x(x+2)(x-2) > 0$ има множество решенија $M = (-2,0) \cup (2,\infty)$ (црт. 40).



црт. 40

Областа на решенијата на дадениот систем неравенки се состои од две елементерни области:

$$D_1 = \left\{ -2 < x < 0, \quad -\frac{1}{2}x^3 < y < -2x \right\}$$

и

$$D_2 = \left\{ 2 < x < \infty, \quad -\frac{1}{2}x^3 < y < -2x \right\}$$

Пример 8. Да ја решима неравенката

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - a^2\left(x^2 - y^2\right) < 0, \text{ каде } a > 0.$$

Решение . Неравенката прво ја доведуваме во видот :

$$y^4 + \left(2x^2 + a^2\right)y^2 + x^2\left(x^2 - a^2\right) < 0 \ , \tag{7}$$

а потоа со смената $z = y^2$ ја составуваме квадратната равенка

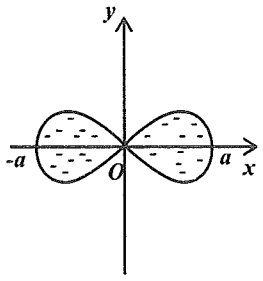
$$z^2 + \left(2x^2 + a^2\right)z + x^2\left(x^2 - a^2\right) < 0 \tag{8}$$

Бидејќи $D = \left(2x^2 + a^2\right)^2 - 4x^2(x^2 - a^2) = a^2\left(8x^2 + a^2\right) > 0$ и $z_1 + z_2 = -\left(2x^2 + a^2\right) < 0$, заклучуваме дека квадратната равенка (8) има две реални различни корени, при што едниот (помалиот) корен е негативен. Се поставува прашање каков знак има другиот корен. Ако е $x^2 + y^2 < 0$, односно ако $0 < |x| < a$, тогаш $z_1 z_2 = x^2\left(x^2 - a^2\right) < 0$ и $z_1 < 0 < z_2$. Ако, пак, $|x| > a$ тогаш $z_1 z_2 = x^2\left(x^2 - a^2\right) > 0$, што значи дека двата корени имаат исти знак, односно дека $z_1 < z_2 < 0$. Ако $x = \pm a$,или $x = 0$, тогаш $z_2 = 0$. Да се вратиме сега на неравенката (7). Таа ќе биде задоволена, ако $z = y^2$ се содржи меѓу корените z_1 и z_2 ; но бидејќи $y^2 \geq 0$ затоа мора да важи $0 \leq y^2 < z_2$. А тоа е можно само ако $0 < |x| < a$. Ако пак $|x| \geq a$ или $x = 0$, тогаш е $z_2 \leq 0$, што значи дека неравенката (7) нема решенија.

Според тоа, ќе важи $y^2 < z_2 = \dfrac{-\left(2x^2 + a^2\right) + a\sqrt{8x^2 + a^2}}{2}$ ако $|x| < a$.

Оттука заклучуваме дека дадената неравенка има решенија во областа

$$D=\left\{|x|<a,\ |y|<\sqrt{\frac{1}{2}\left(a\sqrt{8x^2+a^2}\right)-\left(2x^2+a^2\right)}\right\}.$$

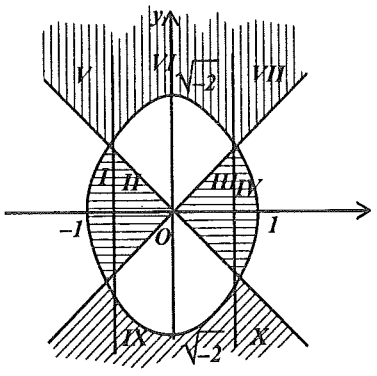


црт. 41

Геометриска интерпретација. Кривата чија равенка е $P(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^2-a^2\left(x^2-y^2\right)=0$ се вика **лемниската** (црт.41). Нераванката $P(x,y)<0$ е задоволена внатре во областа ограничена со кривата (црт.41), а неравенката $P(x,y)>0$ е задоволена во надворешната област на таа крива.

Пример 9. Да се реши неравенката $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}=\dfrac{2x^2+y^2-2}{y^2-x^2}>0$.

Решение. Геометриско решение. Линиите $2x^2+y^2-2=0$ и $y^2-x^2=0$ се елипса и еден пар прави $y=\pm x$. На цртежот 42 покажени се областите во кои се задоволени системите неравенки $P > 0$, $Q > 0$, како и во кои важи $P < 0$, $Q < 0$. Унијата од тие области претставува област во која е задоволена дадената дробно рационална неравенка.



црт. 42

Алгебарско решение. Да ја одредиме областа во која е $P < 0$, $Q < 0$, т. е. да го решиме системот неравенки $\begin{cases}2x^2+y^2-2<0\\x^2-y^2<0\end{cases}$ односно $\begin{cases}y^2<2\left(1-x^2\right)\\y^2<x^2\end{cases}$.

Бидејќи $y^2\ge 0$, затоа $2\left(1-x^2\right)>0$, од каде $0\le|x|<1$. Но бидејќи $0\le y^2<x^2$, затоа $|x|\ne 0$.

Да видиме сега кој од изразите $2\left(1-x^2\right)$ и x^2 е поголем. Ако $2\left(1-x^2\right)\le x^2$, или $x^2\ge\dfrac{2}{3}$, тогаш $|x|\ge\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Значи, неравенката $2\left(1-x^2\right)\le x^2$ важи при $|x|\ge\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, а неравенката ќе важи при $2\left(1-x^2\right)\ge x^2$, ќе важи при $|x|\le\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Оттука добиваме $|y| < \begin{cases} |x|, & \text{ако} \quad 0 < |x| \le \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{2(1-x^2)}, & \text{ако} \quad \sqrt{\frac{2}{3}} \le |x| < 1 \end{cases}$ (9)

Според тоа, при $x > 0$ од (9) следува:

$\left\{0 < x \le \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad -x < y < x\right\}$ (елементарна област III) и

$\left\{\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 1, \quad -\sqrt{2(1-x^2)} < y < \sqrt{2(1-x^2)}\right\}$ (елементарна област IV), а при $x < 0$,

од (9) имаме: $\left\{-\sqrt{\frac{2}{3}} < x < 0, \quad x < y < -x\right\}$ (елементарна област II) и

$\left\{-1 < x < -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad -\sqrt{2(1-x^2)} < y < \sqrt{2(1-x^2)}\right\}$ (елементарна област I) .

Тоа се четирите елементарни области I, II, III, и IV (црт.42) во кои е задоволен системот неравенки $P < 0$, $Q < 0$.

Аналогно, можеме да го решиме и системот неравенки $P > 0$, $Q > 0$. Негово решение е унијата од елементарните области V, VI, VII, VIII, IX и X (црт. 42). Обидете се да го сторите тоа.

ЗАДАЧИ

Реши ги неравенките и системите неравенки:

1. а) $y^2 - axy - 2a^2x^2 < 0$ б) $x^2 - x \le y - xy$

2. а) $x^2 - y^2 < 0$ б) $xy > 0$

3*. а) $x^3 + y^3 + 1 > 3xy$ б) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 0$

4*. а) $\begin{cases} y + x^2 - 2x < 0 \\ x^2 + y^2 \le 10 \end{cases}$ б) $\begin{cases} y + x^2 < 0 \\ y - x^2 > 1 \end{cases}$

5. а) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 25 \\ x + y + 1 \ge 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \ge 2x^2 - 2x - 7 \\ y - 2x - 9 \le 0 \end{cases}$

§ 67. МЕШАНИ СИСТЕМИ

Многу текстуални задачи и решавањето на ревенките со параметри, што се определени со дополнителни услови, често доведуваат до решавање на мешани системи од равенки и неравенки. При решавањето на овие системи постапуваме така што, прво ги одредуваме решенијата на равенката (или подсистемот равенки), или нивното општо решение; а потоа истите ги внесуваме во неравенките.

Како тоа го изведуваме во одделни случаи, ќе покажеме на следниве неколку примери:

Пример 1. Одреди ги решенијата на системот равенки

$\begin{cases} x + 3y = 3a + 1 \\ ax + y = 2a \end{cases}$, за кои важи условот : $x - y > 0$

Решение. Го решаваме системот равенки и добиваме :

а) При $a \neq \frac{1}{3}$ системот има решение $x = 1$, $y = a$. Неравенката $x - y > 0$ е исполнета ако $1 - a > 0$, или $a < 1$.

Значи, решенија се ($x = 1$, $y = a$), каде што $a < 1$ и $a \neq \frac{1}{3}$.

б) Ако $a = \frac{1}{3}$, тогаш системот е неопределен, т.е. тој содржи само една (независна) равенка $x + 3y = 2$. Оттука $y = -\frac{1}{3}(x + 2)$, каде x е произволен реален

број. Согласно условот $x - y > 0$ имаме $x+\frac{1}{3}(x+2)>0$, од каде $4x + 2 > 0$, или $x>-\frac{1}{2}$. Според тоа , при $a=\frac{1}{3}$ решенија се $(x>\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}(x+2))$.

Пример 2. Одреди ги решенијата на равенката $a(x-1) = 2x-5$, што се поголеми од 2 .

Решение. Треба да го решиме мешаниот систем

$$\begin{cases} a(x-1) = 2x-5 \\ x>2 \end{cases}$$

При $a = 2$, равенката $(a-2)x = a-5$ е противречна $(0x = -3)$; а при $a \neq 2$ таа има решение $x=\frac{a-5}{a-2}$.

Неравенката $x > 2$ ќе биде задоволена, ако $\frac{a-5}{a-2}-2>0$, или $\frac{-a-1}{a-2}>0$, односно $(a+1)(a-2)<0$, т.е. неравенката $x > 2$ е задоволена, ако $-1 < a < 2$.

Според тоа, бараните решенија на равенките се

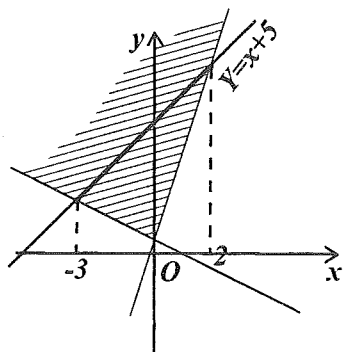
$x=\frac{a-5}{a-2}$, каде што $-1 < a < 2$.

Пример 3. Да се реши мешаниот систем

$$\begin{cases} x-y+5=0 \\ x+2y-1>0 \\ 3x-y+1<0 \end{cases}$$

Решение. Равенката во системот има општо решение $y = x + 5$. Го внесуваме во првата неравенка и добиваме $x + 2(x + 5) - 1 = 3x + 9 > 0$, од каде $x > -3$. А потоа го внесуваме и во втората неравенка $3x - (x + 5) + 1 = 2x - 4 < 0$, од каде $x < 2$. Според тоа , $y = x + 5$, каде што $-3 < x < 2$.

Геометриска интерпретација. Множеството решенија на мешаниот систем претставува дел (отсечка) од правата $y = x + 5$, што се содржи во внатрешноста на аголот што лежи над правите $x + 2y - 1 = 0$ и $3x - y + 1 = 0$ (црт.43) .

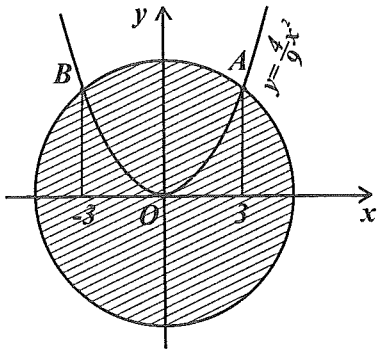


црт. 43

Пример 4. Да се реши мешаниот систем

$$\begin{cases} 9y-4x^2=0 \\ x^2+y^2\le 25 \end{cases}$$

Решение. Геометриско решение. Неравенката определува круг со радиус 5 и центар во



црт. 44

координатниот почеток, а равенката определува парабола со теме во координатниот почеток и со отворот свртен нагоре (црт.44). Да ги определиме пресечните точки на параболата $y=\frac{4}{9}x^2$ и кружницата $x^2 + y^2 = 25$. Тоа се точките А(*3, 4*) и В(*–3,4*). Множеството решенија на дадениот систем ќе биде заедничкиот дел (пресекот) на кругот и параболата, а тоа е лакот АВ од параболата меѓу точките А и В (црт. 44).

Алгебарско решение. Го добиваме општото решение на равенката: $y=\frac{4}{9}x^2$ и го внесуваме во неравенката $x^2+\frac{16}{81}x^4 \le 25$. Со решавањето на добиената неравенка го добиваме сегментот $-3 \le x \le 3$. Според тоа, множеството решенија на дадениот систем може да го запишеме $\{-3 \le x \le 3, \quad y=\frac{4}{9}x^2\}$.

ЗАДАЧИ

Реши ги мешаните системи:

1. а) $\begin{cases} 2x+5y-7>0 \\ 3x+y-4=0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+3y+1<0 \\ 2x+3y+5=0 \end{cases}$

2. а) $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x+y+2>0 \\ x-y+3<0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x-y+2<0 \\ x-2y+3>0 \end{cases}$

3. а) $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x^2+y^2 \le 5 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2 \le 25 \\ y^2-9x=0 \end{cases}$

4*. За кои вредности на *a* секое решение на неравенката $x^2 - x - 2 < 0$ е поголемо од кое било решение на неравенката $ax^2 - 4x - 1 \ge 0$?

§68. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ СО ДВЕ ПРОМЕНЛИВИ КОИ СОДРЖАТ АПСОЛУТНИ ВРЕДНОСТИ

Во §37 го разгледавме решавањето на равенки и неравенки со една променлива, што содржат апсолутни вредности. При нивното решавање се повикуваме на дефиницијата и основните својства на апсолутната вредност на реални броеви, а често го користиме и методот на интервали. Тука ќе продолжиме со решавање на таквите равенки, неравенки и системи од нив, кои содржат две променливи. И кај овие равенки и неравенки ќе се повикуваме на дефиницијата и својствата на апсолутна вредност, но наместо методот на интервали ќе го користиме **методот на области** во рамнината. Да го илустрираме нивното решавње на неколку примери.

Пример 1 . Да ја решиме равенката $|y-2x|=1-x$.

Решение. Оваа равенка, согласно дефиницијата на апсолутна вредност, е еквивалентна на вкупноста на равенки

$$\begin{bmatrix} y-2x=1-x \\ y-2x=-(1-x) \end{bmatrix}$$

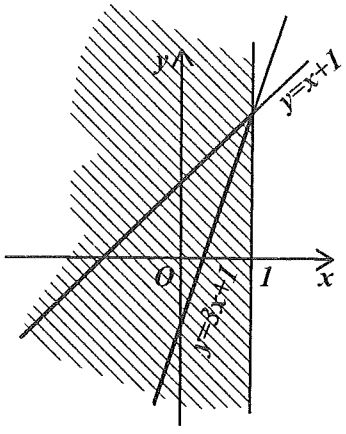
но само при услов $1-x\geq 0$.

Според тоа, дадената равенка е еквивалентна со системот

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y-2x=1-x \\ y-2x=x-1 \end{bmatrix} \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} y=x+1 \\ y=3x-1 \end{bmatrix} \\ x\leq 1 \end{cases} .$$

односно со вкупноста од системите:

$$\begin{bmatrix} \begin{cases} y=x+1 \\ x\leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=3x-1 \\ x\leq 1 \end{cases} \end{bmatrix}$$



црт. 45

Општото решение на дадената равенка е :

$$D=\begin{bmatrix} \{-\infty<x\leq 1, \quad y=x+1\} \\ \{-\infty<x\leq 1, \quad y=3x-1\} \end{bmatrix}$$

Геометриска интерпретација. Општото решение на дадената равенка е унијата од полуправите, што се делови од правите $y = x + 1$ и $y = 3x - 1$, а што лежат во левата полурамнина ограничена со правата $x = 1$ (црт.45).

Пример 2. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5 \\ |x+1|+4=4y \end{cases}$$

Решение. Од втората равенка, ако ја запишеме во видот: $|x+1|=4(y-1)$, заклучуваме дека мора да важи $y-1\geq 0$. Значи, ќе биде $|y-1|=y-1$. Со замена на $|x+1|=4(y-1)$ од втората во првата равенка, добиваме $4y - 4 + y - 1 = 5$. Оттука $y=2$. Тогаш дадениот систем се сведува на равенката $|x+1|=4$. Оваа равенка е еквивалентна на вкупноста $\begin{bmatrix} x+1=4 \\ x+1=-4 \end{bmatrix}$, односно $\begin{bmatrix} x=3 \\ x=-5 \end{bmatrix}$. Според тоа, дадениот систем има две решенија: $(3, 2)$ и $(-5, 2)$.

Пример 3. Да се реши системот равенки $\begin{cases} |x+y|=5 \\ |xy|=6 \end{cases}$

Решение. Во зависност од знаците на изразите што се наоѓаат под знакот на апсолутна вредност, системот ќе го разгледаме во четири одделни области на рамнината:

1. Нека $\begin{cases} x+y\geq 0 \\ xy\geq 0 \end{cases}$. Тогаш системот го добива видот $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$. Го решаваме и добиваме дека има две решенија $(3, 2)$ и $(2, 3)$.

2. Нека $\begin{cases} x+y\geq 0 \\ xy<0 \end{cases}$. Тогаш $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=-6 \end{cases}$. Системот има две решенија $(6,-1)$ и $(-1, 6)$.

3. Нека $\begin{cases} x+y<0 \\ xy<0 \end{cases}$. Тогаш $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=-6 \end{cases}$ системот има решенија $(1, -6)$ и $(-6,1)$.

4. Нека $\begin{cases} x+y<0 \\ xy>0 \end{cases}$. Тогаш $\begin{cases} x+y=-5 \\ xy=6 \end{cases}$ има решенија$(-2, -3)$ и $(-3, -2)$.

Според тоа, дадениот систем во секоја од горните области на рамнината има по две решенија, или вкупно осум решенија:
$(3, 2), (2, 3), (6, -1), (-1, 6), (1, -6), (-6, 1), (-2, -3), (-3, -2)$.

Пример 4. Да се реши неравенката $|x|+|y|<1$.

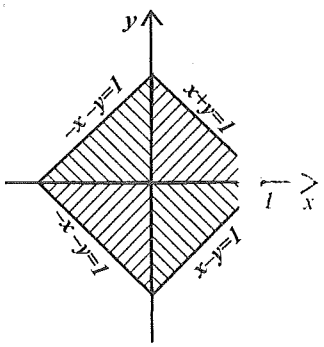
Решение. И тука ќе имаме четири случаи, четири области :

1. Нека $x \geq 0,\ y \geq 0$ (I квадрант). Тогаш $|x| = x$, $|y| = y$, па неравенката го добива видот $x + y < 1$, или $y < 1 - x$. Системот неравенки: $\{x \geq 0, y \geq 0,\quad y < 1 - x\}$ определува триаголник (без хипотенузата): $D_1 = \{0 \leq x < 1,\quad 0 \leq y < 1 - x\}$.

2. Нека $x \leq 0$, $y \geq 0$ (II квадрант). Тогаш $|x| = -x$, $|y| = -y$ па неравенката го добива видот $-x + y < 1$, или $y < x + 1$. Со системот неравенки : $\{x \leq 0, y \geq 0,\quad y < x+1\}$ е определен триаголникот $D_2 = \{-1 < x \leq 1,\ 0 \leq y < x+1\}$.

3. Нека $x \leq 0,\ y \leq 0$ (III квадрант). Тогаш неравенката го добива видот $-x - y < 1$, или $y < -x - 1$. Областа на решението е триаголникот $D_3 = \{-1 < x \leq 1,\ -x - 1 < y < 0\}$.

4. Нека $x \geq 0$, $y \leq 0$ (IV квадрант). Неравенката го добива видот $x - y < 1$, или $y < x - 1$. Областа на решението е триаголникот $D_4 = \{0 \leq x \leq 1,\ x - 1 < y < 0\}$.



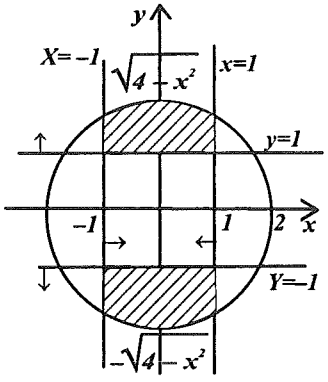
црт. 46

Унијата од тие четири триаголници определува квадрат, ограничен со правите $y = \pm x + 1$ и $y = \pm x - 1$, (црт. 46), т.е.

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 = \begin{bmatrix} \{0 \leq x < 1,\quad x - 1 < y < -x + 1\} \\ \{-1 < x \leq 0,\quad -x - 1 < y < x + 1\} \end{bmatrix}$$

Пример 5. Да го решиме системот неравенки $\begin{cases} x^2 + y^2 < 4 \\ |x| < 1 \\ |y| > 1 \end{cases}$

Решение. Првата неравенка $x^2 + y^2 < 4$ го определува кругот (без кружницата) со радиус 2 и центар во (0, 0). Втората неравенка $|x| < 1$ ја определува лентата $\{-1 < x < 1,\quad -\infty < y < \infty\}$, а третата неравенка $|y| > 1$ е еквивалентна на вкупноста



стр. 47

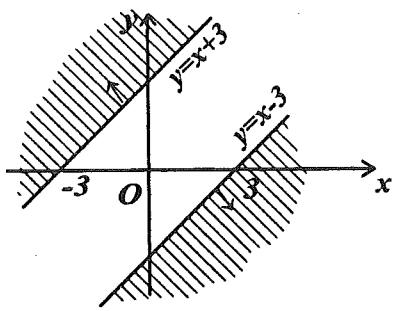
$\begin{bmatrix} y>1 \\ y<-1 \end{bmatrix}$, т.е. ја определува унијата од две полурамнини $y > 1$ и $y < -1$. Множеството решенија на дадениот систем е еднакво на пресекот од трите области, кој на црт.47 е шрафиран, а го запишуваме:

$$D=\begin{bmatrix} \{-1<x<1, \quad 1<y<\sqrt{4-x^2}\} \\ \{-1<x<1, \quad -\sqrt{4-x^2}<y<1\} \end{bmatrix}$$

Пример 6. Да се реши неравенката $\big||x-y|-1\big|>2$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна на вкупноста неравенки

$$\begin{bmatrix} |x-y|-1>2 \\ |x-y|-1<-2 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} |x-y|>3 \\ |x-y|<-1 \end{bmatrix}$$



црт. 48

Бидејќи втората неравенка во вкупноста нема решенија, затоа таа е еквивалентна само на првата неравенка, односно на вкупноста

$$\begin{bmatrix} x-y>3 \\ x-y<-3 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{bmatrix} y<x-3 \\ y>x+3 \end{bmatrix}$$

Значи, дадената неравенка има област на решенија, која е унија од две полурамнини, ограничени со правите $y = x - 3$ и $y = x + 3$, т.е.

$$D=\begin{bmatrix} \{-\infty<x<\infty, \quad -\infty<y<x-3\} \\ \{-\infty<x<\infty, \quad x+3<y<\infty\} \end{bmatrix} \text{(црт. 48)}$$

ЗАДАЧИ

1. Реши ги системите равенки:

а) $\begin{cases} y-2|x|+3=0 \\ |y|+x-3=0 \end{cases}$ (б) $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1 \\ y=5+|x-1| \end{cases}$

2. Реши ги неравенките:

а) $x+|y|\le 1$, б) $|x+y|>1$ в) $y^2+|x|\le 2$

3*. Реши ги системите неравенки:

а) $\begin{cases} |x+y|\ge y \\ x-y\le 0 \end{cases}$ (б) $\begin{cases} |2x-y|\le 3 \\ |x-2y|\le 3 \end{cases}$

§ 69. МЕТОДИ НА ДОКАЖУВАЊЕ НА НЕРАВЕНСТВАТА

Да се докаже дадено неравенство значи да се утврди дека тоа важи (е исполнето) идентички за секој систем дозволени вредности на променливите во него.

Општи методи за докажување на неравенствата не постојат, а посебно кога се има предвид големиот беој разнообразни неравенства, што пак условува и специфичен приод кон доказот на секое од нив. Понекогаш (неретко) при докажувањето се користат и специфични методи со примена на одредени остроумни досетки. Затоа, докажувањето на неравенствата се често пати тешки задачи.

Ние тука ќе се задржиме само на некои поважни приоди (методи), што се карактеристични за повеќе неравенства.

1⁰. Метод на трансформација на неравенството во еквивалентно очигледно неравенство.

Овој метод се заснова на тоа што, поаѓајќи од неравнството што треба да се докаже и со последователно негово заменување со еквивалентни неравенства сé додека не дојдеме до некое очигледно неравенство. При идентичните трансформации на неравенствата ги применуваме главно основните својства на неравенствата и теоремите за еквивалентност.

Познато е дека неравенството $f(x) \geq g(x)$ е еквивалентно со неравенството $f(x) - g(x) \geq 0$. Со тоа доказот на неравенството $f(x) > g(x)$ го сведуваме на доказот дека, разликата од левата и десната страна на неравенството е позитивна. А тоа за да го докажеме, се стремиме разликата да ја трансформираме во вид на збир или на производ на (со сигурност) позитивни изрази.

Пример 1. Да го докажеме неравенството $a^2 + b^2 > 2ab, \quad a \neq b$.

Доказ. Со пренесување на членот $2ab$ од десната на левата страна на неравенството го добиваме еквивалентното неравенство

$$a^2 - 2ab + b^2 > 0, \text{ односно } (a-b)^2 > 0 \qquad (1)$$

При услов $a \neq b$ тоа е секогаш задоволено, бидејќи квадратот на кој било број што не е нула е секогаш позитивен број.

Бидејќи даденото неравенство и неравенството (1) се еквивалентни, штом неравенството (1) при услов $a \neq b$ е точно, тогаш и даденото неравенство при услов $a \neq b$ е точно, штд.

При доказот би можеле да дојдеме и до очигледното неравенство (1), па со неколку идентични трансформации да дојдеме до даденото неравенство за доказ. Но тој пат е помалку или повеќе вештачки.

При доказот на некои неравенства, често се повикуваме и на некои познати основни неравенства. На пример:

Пример 2. Да се докаже неравенството $a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc$, каде што $a\neq b\neq c$ се рационални броеви.

Доказ. Согласно докажаното неравенство во претходниот пример, ќе важат неравенствата

$a^2+b^2>2ab$

$a^2+c^2>2ac$

$b^2+c^2>2bc$, кои ако ги собереме ќе го добиеме неравенството $2a^2+2b^2+2c^2>2ab+2ac+2bc$, односно $a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc$, штд.

2^0. Метод со допуштање на спротивното

Според овој метод, ако треба да се докаже неравенството $a^2+b^2>2ab$ (пример 1), тргнуваме од претпоставката дека тоа не е точно, туку дека е точно спротивното неравенство: $a^2+b^2\leq 2ab$, при $a\neq b$ (2)

Ако успееме со една или неколку трансформации да дојдеме до некое противречно (апсурдно) неравенство тогаш велиме дека нашата претпоставка (2) не е точна, туку е точно даденото неравенство. Така, на пример, со тренсформација на неравенството (2) лесно доаѓаме до апсурдното неравенство $(a-b)^2\leq 0$, при $a\neq b$.

3^0 Метод на засилување на неравенството

Овој метод се состои во следново: Дадено е неравенството $A>B$ (3)

Ако поголемата страна на неравенството (3) ја намалиме, или помалата страна ја зголемиме за некоја позитивна величина n^2, а притоа насоката на неравенството да не се промени, ќе го добиеме неравенството

$$A-n^2>B, \text{ односно } A>B+n^2. \quad (4)$$

За него велиме дека претставува **засилено неравенство** во однос на даденото неравенство (3). Ако успееме да докажеме дека засиленото неравенство (4) е точно, тогаш толку повеќе ќе биде точно и даденото неравенство (3), бидејќи $A>B+n^2>B$. Но, ако не е точно засиленото неравенство (4), не може да се тврди дека не е точно и даденото неравенство (3).

Пример 3. Да се докаже неравенство $x^4+y^4>x^2y^2$.

Доказ. Ако кон помалата негова страна го дадеме изразот x^2y^2 (кој добива само позитивни вредности), ќе го добиеме засиленото неравенство $x^4+y^4>2x^2y^2$. Ова неравенство може да се запише и вака: $\left(x^2-y^2\right)^2>0$. Тоа е задоволено за кои

било произволни вредности на x и y, освен за $x = y$. Оттука следува: Ако е точно засиленото неравенство тогаш толку повеќе ќе биде точно и даденото неравенство.

Покажи дека даденото неравенство е точно и кога е $x = y$!

4^0 **Метод на математичка индукција.**

Овој метод се заснова на следново расудување: II

Нека треба да се докаже неравенството $f(n) > 0$ (5)

Прво докажуваме дека неравенството (5) е точно за $n = 1$. Потоа претпоставуваме дека тоа е точно за некој природен број n (или за $n = k$), и при таа претпоставка, ако успееме да докажеме дека тоа е точно и за $n + 1$ (или за $n = k + 1$), тогаш заклучуваме дека неравенството (5) е точно за секој природен број n,бидејќи за $n = 1$; $1 + 1 = 2$; $2 + 1 = 3$, ... тоа е точно.

Методот на математичка индукција ќе го илустрираме при доказот на следново важно неравенство:

Пример 4. Неравенство на Бернули. Ако $h > -1$, тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$ важи неравенството $(1+h)^n \geq 1 + nh$ (6)

Доказ. За $n = 1$, тоа е точно $1 + h = 1 + h$. Претпоставуваме дека неравенството (6) е точно за $n = k$, каде што $k \geq 1$, т.е. нека важи

$$(1+h)^n \geq 1 + nh \tag{7}$$

Ако двете страни неравенството (7) ги помножиме со позитивниот број $h + 1$, го добиваме неравенството

$(1+h)^{k+1} \geq (1+kh)(1+h)$, или $(1+h)^{k+1} \geq 1 + (k+1) + kh^2$.

Бидејќи kh^2 е позитивен број, тогаш со неговото отстранување од десната (помала) страна, во толку побргу ќе важи неравенството (7), штд.

Од доказот дека неравенството (6) е точно за $n=1$ следува дека равенството во него е можно, ако и само ако $n = 1$.

Со тоа неравенството (6) е докажано.

Пример 5. Да се докаже: ако кон броителот и именителот на правилната дропка $\frac{a}{b}$, $(a < b)$ додадеме еден ист позитивен број k, вредноста на дропката се зголемува.

Доказ. Треба да го докажеме неравенството $\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$, (8)

каде што $a,b,k>0$ и $a<b$. Тоа е еквивалентно со неравенството $\frac{a+k}{b+k}-\frac{a}{b}>0$, или $\frac{b(a+k)-a(b+k)}{b(b+k)}>0$, односно $\frac{(b-a)k}{b+k}>0$. Ова е очигледно неравенство, бидејќи количникот на два позитивна броја секогаш е позитивен.

Пример 6. Да се докаже неравенството

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5....(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6....(2n)}<\sqrt{\frac{1}{2n+1}} \qquad (9)$$

Доказ. Согласно неравенството (8) при $k = 1$, имаме:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

Ако двете страни на ова неравенство ги помножиме со позитивниот број $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}$, добиваме

$$\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\right)^2<\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}=\frac{1}{2n+1}$$ штд.

Пример 7. Да се докаже дека за секој реален број x важи неравенството

$$x^4-6x^3+13x^2-8x+4>0.$$

Доказ. Левата страна ја трансформираме како што следува

$$x^4-6x^3+13x^2-8x+4=x^4-6x^3+9x^2+4x^2-8x+4=x^2(x^2-6x+9)+$$
$$+4(x^2-2x+1)=x^2(x-3)^2+4(x-1)^2$$

Бидејќи $x^2(x-3)^2\geq 0$, $4(x-1)^2\geq 0$, затоа ќе важи $x^2(x-3)^2+4(x-1)^2>0$ за секој $x\in R$, штд.

ЗАДАЧИ

Докажи ги неравенствата:

1. а) $(1+a)(1+b)>1+a+b,\quad a\triangleright 0,b>0$

б) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2,\quad a>0,b>0$

2. а) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4,\quad a>0,b>0,$

б) $\frac{2x}{x^2+1}<1.$

3. $a^4 - 2a^3 + 2a^2 - 2a + 1 \geq 0$

4. $(c+1)^3 > c(c+1)(c+2)$, ако $c > 1$.

5*. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! < (n+1)!$

6. $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$, ако $a > 0, b > 0$.

7*. $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$, при $a \geq 0, \quad b \geq 0 \quad c \geq 0$.

8. $x^2 + y^2 + x^2y^2 > 4xy - 1$, при $x \neq 1, \quad y \neq 1$.

9. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 > 2(a+b+c)$, ако $a \neq 1, \quad b \neq 1, \quad c \neq 1$.

10*. $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} > 6$, каде $a,b,c > 0, \quad a \neq b \neq c$.

11*. Ако a, b, c, d се позитивни броеви и ако $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, докажи дека важи неравенството $\frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}$.

§ 70. СРЕДНИ ВЕЛИЧИНИ

Нека имаме неколку ненегативни броеви a_1, a_2, ... , a_n. Ќе сметаме дека тие се нумерирани така што по големина да растат т.е. $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$.

Средна величина за тие броеви се вика секој број a, што не е поголем од најголемиот, ниту помал од најмалиот од дадените броеви, т.е. $a_1 \leq a \leq a_n$.

Овие величини наоѓаат голема примена во теоријата на веројатност и математичката статистика, а посебно при обработката на резултатите од испитувањата.

Очигледно е дека средни величини за дадени n броја имаме колку сакаме, но ние ќе разгледуваме само четири, кои најчесто се применуваат. Тоа се :

1^0. **Аритметичка средина** се вика бројот

$$A(a) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{\sum a_i}{n} \qquad (1)$$

2^0. **Геометриска средина** се вика бројот

$$G(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{\prod a_i}$$

3^0. **Хармониска средина** се вика бројот еднаков на реципрочната вредност од аритметичката средина на реципрочните вредности на дадените броеви:

$$H(a)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=\frac{n}{\sum\frac{1}{a_i}}$$

3^0. **Квадратна средина** се вика квадратниот корен од аритметичката средина на квадратите на дадените броеви:

$$K(a)=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum a_i^2}{n}}$$

Наша задача ќе биде: прво да докажеме дека броевите $A(a)$, $G(a)$, $H(a)$ и $K(a)$ навистина се средни величини, а потоа да утврдиме и некои неравенства меѓу нив.

Ќе докажеме дека $A(a)$ е средна величина.

Ако во изразот (1) сите броеви a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ги замениме со најмалиот од нив a_1, ќе добиеме

$$A(a)\geq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=a_1 \text{ , т.е. } A(a)\geq a_1.$$

Потоа во изразот (1) сите броеви a_i ако ги замениме со најголемиот од нив a_n, ќе добиеме:

$$A(a)\leq\frac{a_n+a_n+\ldots+a_n}{n}=a_n \text{ , т.е. } A(a)\leq a_n.$$

Оттука $a_1\leq A(a)\leq a_n$ штд.

Аналогно се докажува дека $G(a)$, $H(a)$, $K(a)$ се средни величини за броевите $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Сега ќе докажеме дека важи следново многу важно:

Неравенството на Коши. Теорема [70.1]. ***Аритметичката средина на ненегативните броеви не е помала од нивната геометриска средина*** т.е.

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} \qquad (2)$$

Доказ. Доказот ќе го спроведеме со математичка индукција. За таа цел прво ќе докажеме дека неравенството (2) важи за $n= 2$ т.е. дека важи неравенството

$$\frac{a_1+a_2}{2}\geq\sqrt{a_1\cdot a_2} \qquad (3)$$

Навистина : $\frac{a_1+a_2}{2}-\sqrt{a_1\cdot a_2}=\frac{a_1-2\sqrt{a_1\cdot a_2}+a_2}{2}=\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2}{2}\geq 0$

Значи, неравенството (2), што треба да го докажеме, важи за $n = 1$ и $n = 2$. Нека тоа важи за кој било број n и при таа претпоставка ќе докажеме дека тоа важи и за $n + 1$.

Да означиме : a_{n+1} – број поголем од бројот a_n ;

$$a_{n+1}\geq\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=A_n;\quad \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}=A_{n+1},\quad a_{n+1}=A_n+E,$$ каде

што $E\geq 0$. Од сите тие релации, добиваме :

$$A_{n+1}=\frac{n\cdot A_n+a_{n+1}}{n+1}=\frac{n\cdot A_n+A_n+E}{n+1}=A_n+\frac{E}{n+1},\ \text{т.е.}\ A_{n+1}\leq A_n+\frac{E}{n+1}.$$ Бидејќи двете страни на ова неравенство се ненегативни броеви, затоа можеме да го степенуваме на степен $n + 1$. Така добиваме :

$$(A_{n+1})^{n+1}=(A_n+\frac{E}{n+1})^{n+1}=A_n{}^{n+1}+(n+1)A_n{}^n\cdot\frac{E}{n+1}+\ \ldots\ \geq A_n{}^{n+1}+A_n{}^n\cdot E=$$
$$=A_n{}^n\cdot A_n+A_n{}^n\cdot E=A_n{}^n(A_n+E)=A_n{}^n\cdot a_{n+1}.$$

Оттука $(A_{n+1})^{n+1}\geq A_n{}^n\cdot a_{n+1}$. Меѓутоа $A_{n+1}\geq\sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}}$, т.е.

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\geq\sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}}.$$

Според тоа, неравенството (2) важи и за $n + 1$, што значи дека тоа важи за секој природен број $n \geq 1$. Со тоа неравенството на Коши е докажано. За него постојат и неколку други докази.

Ќе докажеме уште две теореми за средните величини:

Теорема [70.2]. ***Хармониската средина на ненегативни броеви не е поголема од нивната геометриска средина***, т.е.

$$H(a)\leq G(a) \qquad (4)$$

Доказ. Врз основа на неравенството на Коши за броевите $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\ldots,\frac{1}{a_n}$, ќе важи :

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}{n}\geq\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}}.$$

Земајќи реципрочни вредности на двете страни и менувајќи го знакот на неравенството во спротивен, добиваме

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \quad , \text{ т.е. } H(a) \le G(a).$$

Знакот на равенство кај неравенствата (2) и (4 важи при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Теорема [70.3]. ***Квадратната средина на ненегативни броеви не е помала од нивната аритметичка средина***, т.е.

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \tag{5}$$

(Равенството важи при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$).

Доказ. Со квадрирање на двете страни на неравенството (5) го добиваме неравенството:

$$\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n^2} \le \frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n} \quad , \text{ или}$$

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \le n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2) \tag{6}$$

кое е последица на неравенството (5) .

Неравенството (6) ќе го докажеме со методот на математичка индукција: При $n = 1$ гледаме дека важи $a_1^2 = a_1^2$.

Претпоставуваме дека тоа важи за кој било природен број $n \ge 1$. Требаше да докажеме дека, при таа претпоставка тоа важи и за $n + 1$, т.е. важи :

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1})^2 \le n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2) \tag{7}$$

Навистина :

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1})^2 = (a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 + 2a_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n) + a_{n+1}^2 \tag{8}$$

А врз основа на неравенството (6) имаме :

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1})^2 \le n(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 + a_{n+1}^2 + 2a_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n) \text{ или}$$

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1})^2 \le (n+1)(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2) -$$

$$-a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2-na_{n+1}^2+2a_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n) \quad \text{или}$$

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1})^2 \le (n+1)(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2) -$$

$$-(a_{n+1}-a_1)^2-(a_{n+1}-a_2)^2-\ldots(a_{n+1}-a_n)^2$$

Со отфрлање на негативните броеви: $-(a_{n+1}-a_1)^2-(a_{n+1}-a_2)^2-\ldots-$ $-(a_{n+1}-a_n)^2$ од десната страна на последното неравенство во толку побргу, ќе важи неравенството (7) , штд.

Со тоа теоремата е докажана .

Со досега докажаните три теореми утврдивме дека меѓу четирите средни величини постои следнава релација:

$H(a)\le G(a)\le A(a)\le K(a)$

На неравенствата (2), (4) и (5), како што ќе видиме, често ќе се повикуваме при докажување на други неравенства.

Пример. Да го докажеме неравенството $n!\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Доказ. Согласно неравенството на Коши за броевите *1, 2, 3, ... , n-1, n* важи неравенството $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\ldots.(n-1)n}\le\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}$ (8)

А согласно формулата за збир на првите n члена на аритметичка прогресија $\left(S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)\right)$ имаме дека : $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Внесувајќи го тоа во (8) го добиваме неравенството $\sqrt[n]{n!}\le\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}$. На крај степенувајќи ги двете страни на последното неравенство на степен n, добиваме $n!\le\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, штд.

ЗАДАЧИ

Докажи ги неравенствата :

1. $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$, каде $a>0, b>0, c>0$

2. $ab+1<a+b$, каде што $a>1, b<1$

3*. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge 3$, ако *a, b, c* се позитивни броеви.

4. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$,ако $a>0, b>0, c>0$

5. $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$, каде што $a>0, b>0, c>0$

6*. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{9}{2}$, $a,b,c>0$

7*. $(2n)!<[n(n+1)]^n$, ако $n>1$

8. Докажи дека за кои било позитивни броеви a и b , важи неравенството $\sqrt[n+1]{ab^n}\leq\frac{a+nb}{n+1}$.

§ 71. НЕКОИ ПОВАЖНИ НЕРАВЕНСТВА

Овде ќе докажаме неколку поважни неравенства, кои наоѓаат голема примена во математика.

Пример 1. Коши – Шварцово неравенство. За сите реални вредности на a_i и b_i $(i=1,2,...n)$ важи неравенството:

$$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2), \quad \text{или}$$

$$(\sum a_ib_i)^2\leq\sum a_i^2\cdot\sum b_i^2 \qquad (1)$$

Знакот на равенство важи само ако $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$

Доказ. Да го разгледаме изразот :

$$\sum(a_ix-b_i)^2=(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+...+(a_nx-b_n)^2 \qquad (2)$$

кој е ненегативен, а може да добие вредност нула само кога $b_i=xa_i(i=1,2,...,n)$.

Изразот (2) всушност, претставува квадратен трином по x :

$$x^2\sum a_i^2-2x\sum a_ib_i+\sum b_i^2$$

Ако квадратниот трином за секоја вредност на променливата x е ненегативен, т.е. позитивен или нула; тогаш неговата дискриминантна е непозитивна, затоа ќе важи: $D=(\sum a_ib_i)^2-\sum a_i^2\cdot\sum b_i^2\leq 0$, а тоа е токму Коши – Шварцовото неравенство, кое уште се вика и неравенство на Буњаковски.

Ова неравенство има голема примена како во теоријата, така и во применета математика. За него постојат уште и многу други докази. Еден од нив е доказот со користење на Лагранжовиот идентитет:

$\left(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)=\left(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2+$
$+\left(a_1b_3-a_3b_1\right)^2+...+\left(a_{n-1}b_n-a_nb_{n+1}\right)^2$, кога од него се изоставаат ненегативните собироци $\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2$, $(i,j=1,2,...n)$.

Пример 2. Да се докаже неравенството

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}<3 \tag{3}$$

Доказ. За $n = 1$ и $n = 2$ неравенството е точно $1+\frac{1}{1}<3$ и $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}<3$. Почнувајќи од четвртиот собирок во (3) броевите *3, 4, 5, ...,n* да ги замениме со помалиот број 2. Тогаш неравенството (3) се засилува (бидејќи

$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3....k}<\frac{1}{1\cdot 2\cdot 2....2}=\frac{1}{2^{k-1}}$), па ќе добиеме :

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}<3 \tag{4}$$

Меѓутоа, збирот што стои на левата страна во неравенството (4) лесно може да се одреди со помош на формулата $\left(S_n=\frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\right)$ за збир на првите n членови на геометриската прогресија со прв член $a_1 = 1$ и количник $q=\frac{1}{2}$, т.е.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Имајќи го предвид тоа, неравенството (4) го добива видот: $1+2-\frac{1}{2^{n-1}}<3$. Со тоа неравенството (3) е докажано.

Пример 3. Неравенство на Непер. За сите природни вредности на n, важи неравенството

$$2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3 \tag{5}$$

Доказ. Согласно неравенството на Бернули $\left((1+h)^n \geq 1+nh\right)$, имаме $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+\frac{1}{n}\cdot n = 2$, така што едно од тврдењата што се содржи во неравенството на Непер е докажано. Останува да го докажаме уште тврдењето:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3$$

При $n \geq 2$ согласно биномната Њутнова формула имаме:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} = 2+\frac{1}{1\cdot 2}(1-\frac{1}{n})+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot$$

$$\cdot(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{k-1}{n})+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{n-1}{n}).$$

Ако во овој израз за $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ во секоја од заградите $\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\cdot(1-\frac{1}{n})\cdot$ $\cdot(1-\frac{2}{n})\cdot\ldots\cdot(1-\frac{k-1}{n})+\ldots$ се изоставаат намалителите $\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots,\frac{k-1}{n}$, тогаш секоја од тие загради ќе добие вредност 1, па затоа изразот, што ќе се добие потоа, ќе има поголема вредност отколку $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, т.е. ќе важи неравенството

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

А согласно докажаното неравенство (3) во претходниот пример, следува дека важи и неравенството

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < 3 \text{ , а и } \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \text{ штд.}$$

Со тоа неравенството на Непер е целосно докажано.

Пример 4. Да го докажеме неравенството

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2 \qquad (7)$$

Доказ. Ако земеме предвид дека $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, тогаш неравенството (7) постанува

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 + (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \text{ , штд.}$$

Пример 5. Да се докаже дека, збирот од најголемиот и најмалиот член на која било пропорција со позитивни членови, е поголем од збирот на другите два члена (Евклид).

Доказ. Најголемиот член a на пропорција $a : b = c : d$, секогаш може да се доведе на прво место. Тогаш најмалиот член ќе биде на последно место, затоа што $d = \frac{bc}{a} = b \cdot \frac{c}{a} = c \cdot \frac{b}{a}$, а дропките $\frac{c}{a}$ и $\frac{b}{a}$ се правилни, односно помали од 1 .

Од изведената пропорција $\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}$, односно $\frac{a-b}{c-d} = \frac{a}{c} > 1$, бидејќи е $a>c$, со множење на двете страни со $c - d > 0$, добиваме

$a - b > c - d$, или $a + d > b + c$, штд.

Пример 6. Да се докаже неравенството

$$|x + y| \le |x| + |y| \tag{8}$$

Доказ. Од очигледните неравенства $-|x| \le x \le |x|$ и $-|y| \le y \le |y|$ со собирање на нивните соодветни страни, добиваме $-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y|$ кое пак е еквивалентно со неравенството $|x + y| \le |x| + |y|$, штд.

Да забележиме дека неравенството (8) е посебен случај од следново неравенство

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \tag{9}$$

чија точност се докажува со математичка индукција.

Покажавме дека тоа важи за $n = 2$. Да претпоставиме дека неравенството (9) е точно за некој природен број $n \ge 2$. Ќе покажеме дека тоа важи и за $n + 1$ собирок, т.е.

$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}| = |(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + x_{n+1}| \le |x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1}| + |x_{n+1}| \le$ (случај со два собирока) $\le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| + |x_{n+1}|$ (по претпоставка)

Значи, неравенството (9) ако важи за n собироци, тогаш тоа важи и за $n + 1$ собироци. Но, бидејќи тоа важи за два собирока, заклучуваме дека тоа ќе важи за произволен број собироци.

Пример 7. Да се докаже неравенството:

а) $|x+y| \geq |x| - |y|$, б) $|x-y| \geq |x| - |y|$

Доказ. а) Бидејќи $x = (x + y) + (-y)$ и $|-y| = |y|$, затоа согласно неравенството (8), имаме $|x| = |(x+y)+(-y)| \leq |x+y| + |-y|$, од каде $|x+y| \geq |x| - |y|$.

б) Бидејќи $x = (x-y) + y$, затоа согласно (8), имаме $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$, од каде

$$|x-y| \geq |x| - |y|.$$

ЗАДАЧИ

Да се докажат неравенствата :

1. Ако a, b, c се страни на триаголник , тогаш важи $(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$

2. $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}, \quad a,b,c,d > 0$

3*. $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \dfrac{(a+b)^3}{2}$, ако $a + b > 0$

4. $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$

5. $\dfrac{a}{\sqrt{b}} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad (a,b>0)$

6*. $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \geq \dfrac{4}{a+b}, \quad a>0, \quad b>0$

7. $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} + \dfrac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}} \leq \dfrac{1}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}}, \quad a,b,c,d>0$

8. $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}, \quad a,b,c \geq 0$

9*. $a^4+b^4 \geq 2$, ако $a+b=2$, $a, b \in \boldsymbol{R}$

10*. $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1} \geq n, \quad a_1,a_2,\ldots,a_n > 0$

§ 72. ПРИМЕНА НА НЕРАВЕНСТВАТА ВО ЕЛЕМЕНТАРНОТО ДОБИВАЊЕ НА ЕКСТРЕМИТЕ

Општиот метод за решавање на задачите во кои се бара одредување на најмалата и најголемата вредност на некоја величина ни го дава математичката анализа. Меѓутоа, има многу такви задачи, кои се решаваат по елементарен пат со помош на неравенства. Главно постојат два типа такви задачи.

Задача 1. Даден позитивен број S треба да се претстави во вид на збир од n позитивни собироци, за кои што нивниот производ да е најголем.

Решение. Бараните собироци да ги означиме x_1 , x_2 , ... , x_n . Тогаш $x_1 + x_2 + + \ldots + x_n = S$.

Согласно неравенството на Коши – Шварц имаме :

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \tag{1}$$

Ако $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = P$. Тогаш имаме

$$\sqrt[n]{P} \leq \frac{S}{n} \quad \text{или} \quad P \leq \left(\frac{S}{n}\right)^n \tag{2}$$

Неравенството (2) означува дека производот P при каков било избор на собироците x_1 , x_2 , ... , x_n не може да биде поголем од $\left(\frac{S}{n}\right)^n$. Според тоа, производот P ќе добие најголема можна вредност, кога неравенството (2) ќе премине во равенство. А тоа ќе биде кога собироците x_1 , x_2 , ... , x_n се еднакви меѓу себе т.е ако

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n \tag{3}$$

Значи, секој собирок треба да е еднаков на $\frac{S}{n}$.

Задача 2. Даден позитивен број P треба да се претстави во вид на производ од n позитивни множители, за кои нивниот збир S да е најмал.

Решение. Бараните множители да ги означиме $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Тогаш $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = P$.

Согласно неравенството на Коши – Шварц, имаме :

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Ако $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = S$ тогаш $\frac{S}{n} \geq \sqrt[n]{P}$ или $S \geq n\sqrt[n]{P}$ (4)

Последното неравенство покажува дека, збирот S при кој било избор на броевите x_1 , x_2 , ... , x_n не може да биде помал од $n\sqrt[n]{P}$. Според тоа, збирот S ќе добие најмала можна вредност, кога неравенството (4) ќе премине во равенство. А тоа ќе биде ако сите множители се еднакви меѓу себе, т.е. ако

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n \tag{5}$$

Значи, секој множител треба да е еднаков на $\sqrt[n]{P}$.

Забележуваме дека, оваа задача и задачата *1* имаат едно исто решение. Многу задачи за наоѓање на најмали и најголеми вредности се разложуваат на пар "двојствени" задачи. Во едната од нив треба да се одреди најголемата вредност на некоја величина, при услов другата величина да има постојана фиксна вредност. А, во двојствената задача на неа се бара да се одреди најмалата вредност на другата величина, при услов првата величина да задржува постојана фиксна вредност.

Пример 3. Со *400 m* жица треба да оградиме правоаголна парцела со најголема плоштина. Да се одредат димензиите на парцелата.

Решение. Правоаголната парцела нека има страни со должина x и y. Од условот на задачата следува дека $2x + 2y = 400$, или $x + y = 200$. Плоштината на парцелата е $P = xy$. Од неравенството меѓу геометриската и аритметичката средина, имаме:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \text{или} \quad xy \leq 100^2 = 10000 .$$

Значи, со расположивата жица не може да се огради правоаголна парцела, чија плоштина е поголема од $10000\ m^2$, а тоа е квадрат со страна долга $100\ m$.

Двојствена на оваа задача би била следнава задача:

Пример 4. Треба да оградиме правоаголна парцела со плоштина $P = 10000\ m^2$. Каква форма треба да има парцелата, при што должината на употребената жица за оградување да биде најмала.

Решение. Тука е дадена плоштината на парцелата $P = xy = 10000$. Од неравенството на Коши – Шварц имаме

$$\sqrt{10000} \leq \frac{x+y}{2} \quad \text{или} \quad x + y \geq 200 .$$

Бидејќи за оградување на правоаголна парцела се потребни $(2x + 2y)\ m$, затоа употребеното количество жица не може да биде помало од $2 \cdot 200 = 400m$. А токму $400\ m$ жица се потребни за оградување на квадратна парцела со страна долга $100\ m$.

Од разгледаните примери *3* и *4* заеднички заклучок би бил:

Од сите правоаголници со даден периметар најголема плоштина има квадратот.

Пример 5. Од сите правоаголни паралелопипеди со константен волумен V, да се најде таков со најмала плоштина $2P$.

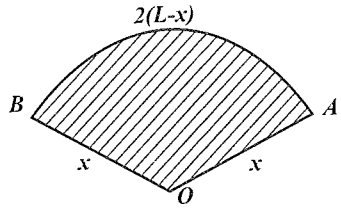
Решение. Нека x, y, z се димензии на паралелопипедот. Тогаш имаме $V = xyz$ и $2P = xy + xz + yz$. Бидејќи волуменот V е даден, затоа $V^2 = (xy)(xz)(yz)$. Бараме, при константен производ V^2, да ја одредиме најмалата вредност на збирот $P = xy + xz + yz$. Тоа ќе биде исполнето, ако е $xy = xz = yz$ или $x = y = z$. Значи, бараниот правоаголен паралелопипед ќе биде коцка. Оттука следува заклучокот: **Од сите правоаголни паралелопипеди со даден волумен, најмала плоштина има коцката.**

Пример 6. Од сите кружни исечоци со даден периметар $2L$ (црт.49) да се одреди оној со најголема плоштина.

Решение. Плоштината на кружниот исечок OAB на црт. 49 е:

$$P = \frac{2x(L-x)}{2} = x(L-x) = -x^2 + Lx.$$

Знаеме, квадратниот трином $ax^2 + bx + c$ за $x = -\frac{b}{2a}$ има максимум (ако $a < 0$), или минимум (ако $a > 0$) еднаков на $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Во нашиот случај, за $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{L}{-2} = \frac{L}{2}$ плоштината P ќе има максимум (бидејќи е $a < 0$). Според тоа, плоштината P на кружниот исечок ќе биде



црт. 49

$$P = \frac{4ac - b^2}{4a} = c - \frac{b^2}{4a} = 0 - \frac{L^2}{4(-1)} = \frac{L^2}{4}$$

Пример 7. При $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$ да се одреди најмалата вредност на дропката $\frac{(x+a)(x+b)}{x}$.

Решение. Ја трансформираме дропката $\frac{(x+a)(x+b)}{x} = \frac{ab}{x} + a + b + x$. Бидејќи a и b се константи и не влијаат на најмалата и најголемата вредност на дропката, затоа дадената дропка ќе има најмала вредност за онаа вредност на x, за која ќе има

најмала вредност збирот $\frac{ab}{x}+x$. Но, бидејќи производот на $\frac{ab}{x}$ и x е константен, затоа збирот $\frac{ab}{x}+x$ ќе има најмала вредност кога собироците се еднакви, т.е. ако $\frac{ab}{x}=x$. Оттука $x=\sqrt{ab}$.

Значи дадената дропка ќе има најмала вредност за $x=\sqrt{ab}$.

ЗАДАЧИ

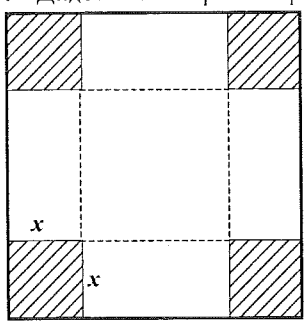
1. Одреди ја најмалата вредност на $z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, ако x и y се позитивни, а нивниот збир е $x+y=2a$, каде a е константа.

2. Одреди ја најмалата вредност на збирот $S=x^2+y^2+z^2$, ако $x+y+z=3a$, каде a е константа.

3. Докажи дека, производот на два множителя, чиј збир е константен, има најголема вредност ако множителите се еднакви.

4*. Дадено е парче ламарина, што има форма на квадрат со страна $6a$. При неговите агли треба да се изрежат четири квадратчиња со страна x и од останатиот дел треба да се склопи отворена кутија (црт. 50) . Какви димензии треба да имаат изрежаните квадратчиња, за да се добие кутија со најголем волумен.

5. Даден се периметарот $2p$ на триаголникот и должината a на една негова страна. Какви должини треба да имаат другите две страни на триаголникот, при што неговата плоштина да биде најголема.



6a
црт. 50

6. Да се најде правоаголник со најголема плоштина, ако должината на неговата дијагонала е c .

7*. Да се докаже дека, од сите правоаголници вписани во даден круг, најголема плоштина има квадратот.

8. Докажи дека од сите триаголници со даден периметар $2p$, најголема плоштина има рамностраниот триаголник.

9*. Во внатрешната област на триаголник да се одреди точка M , таква што производот од нејзините растојанија до трите страни да биде можно најголем.

73. ПОВАЖНИ НЕРАВЕНСТВА ВО ГЕОМЕТРИЈАТА

Во овој параграф ќе разгледаме некои поважни неравенства во геометријата, главно сврзани со елементите на триаголник, кои најчесто се применуваат.

Во овие неравенства променливи ќе бидат : должините на страните на триаголникот: a, b, c, што лежат спроти соодветните темиња и внатрешни агли $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$; висините : h_a , h_b, h_c , спуштени кон соодветните страни, тежишните линии (медијаните) m_a , m_b , m_c повлечени кон соодветните страни, радиусите r и R на впишаната и опишаната кружница, полупериметарот $p = \frac{a+b+c}{2}$ на триаголникот и сите тие добиваат секогаш позитивни реални вредности. Разгледувањето ќе го отпочнеме од наједноставните неравенства.

Пример 1. Секој надворешен агол на триаголникот е поголем од кој било внатрешен несоседен агол, т.е.

$$\angle A' > \angle B \quad \text{и} \quad \angle A' > \angle C \text{ , каде што } \angle A' = 180^0 - \angle A \qquad (1)$$

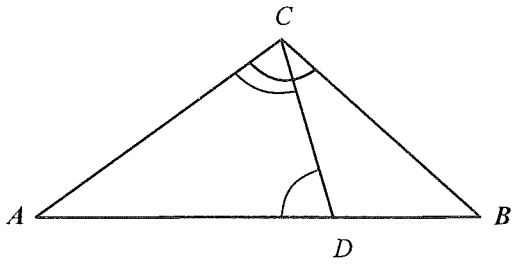
Доказ. Познато е дека, секој надворешен агол на триаголникот е еднаков на збирот од двата внатрешни несоседни агли, т.е. $\angle A' = \angle B + \angle C$. Од тука следува дека $\angle A' > \angle B$ и $\angle A' > \angle C$, штд.

Пример 2. Во секој триаголник спроти поголема страна лежи поголем внатрешен агол, и обратно , т.е.

$$a > b \rightleftarrows \angle A > \angle B \qquad (2)$$

Доказ. Во ΔABC (црт.51) ако е $\overline{AB} > \overline{AC}$ треба да докажеме дека $\angle ACB > \angle ABC$.

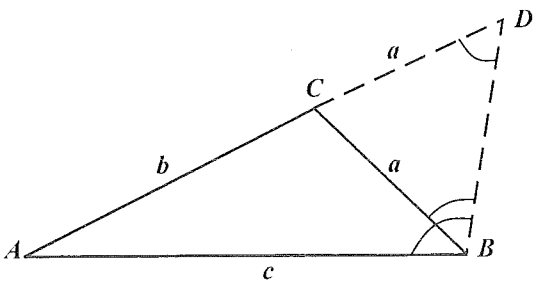
На поголемата страна AB да избереме точка D, таква што да е $\overline{AD} = \overline{AC}$ односно $\angle ACD = \angle ADC$. Тогаш $\angle ACB > \angle ACD = \angle ADC$. Но , бидејќи аголот ADC е надворешен за триаголникот BCD, затоа согласно (1) ќе важи $\angle ADC > \angle ABC$. А од $\angle ACB > \angle ADC$ и $\angle ADC > \angle ABC$ врз основа на транзитивноста ќе важи и $\angle ACB > \angle ABC$, штд.



црт. 51

Пример 3. Секоја страна на триаголникот е помала од збирот на другите две страни, а е поголема од апсолутната вредност на разликата од истите страни, т.е.

$$|b-c| < a < b+c \tag{3}$$



црт. 52

Доказ. На црт.52 имаме $\overline{CD} = \overline{CB}$, односно $\angle CDB = \angle CBD$.

Бидејќи темето C лежи во внатрешната област на аголот ABD, тогаш имаме $\angle ABD > \angle CBD = \angle ADB$. А согласно со (2) ќе биде $\overline{AC} + \overline{CB} > \overline{AB}$,

или $\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB}$. Од црт.51, пак имаме $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD}$ односно $\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AC}$ (бидејќи $\overline{AD} = \overline{AC}$). Но, бидејќи $\angle CDB > \angle ACD$, а $\angle ACD = \angle ADC$. Затоа ќе биде $\angle CDB > \angle ADC > \angle ACB - \angle ACD$, т.е. $\angle CDB > \angle ACB - \angle ACD$. Оттука, согласно (2) имаме $\overline{BC} > \overline{AB} - \overline{AC}$ (бидејќи $\overline{AD} = \overline{AC}$) (црт.51). Така неравенството (3) во потполност е докажано.

Пример 4. Да се докаже неравенството

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc \tag{4}$$

каде a, b, c се страни на триаголник.

Доказ. Нека $a \le b \le c$. Тогаш $a = c + x$ и $b = c + y$, каде $x \ge 0$, $y \ge 0$. Заменувајќи во неравенството (4) $a = c + x$ и $b = c + y$, тоа го добива видот

$$(c+x+y)(c-x-y)(c+x-y) - (c+x)(c+y)c \le 0 \tag{5}$$

Левата страна на (5) ја трансформираме како што следува :

$$(c+x+y)[c-(x-y)] - c(c^2+xy+cx+cy) =$$

$$= (c+x+y)[c^2-(x-y)^2] - c[c(c+x+y)+xy] =$$

$$= (c+x+y)c^2 - (c+x+y)(x-y)^2 - c^2(c+x+y) - cxy =$$

$$= -cxy - c^2(c+x+y) \le 0, \text{ или } cxy + c^2(c+x+y) \ge 0,$$

кое е очигледно. Знакот " = " важи ако триаголникот е рамностран.

Пример 5. Да се докаже дека важи $h_a \le \sqrt{p(p-a)}$, каде што $2p = a+b+c$, а h_a е висина на триаголникот.

Доказ. Од

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)\cdot\frac{2(p-b)2(p-c)}{a^2}} =$$
$$= \sqrt{p(p-a)\cdot\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{a^2}}.$$

Имајќи предвид дека

$(a+b-c)(a+c-b) = [a+(b-c)]\cdot[a-(b-c)] = a^2-(b-c)^2 \le a^2$ (бидејќи $(b-c)^2 \ge 0$), можеме да продолжиме

$$h_a = \ \ldots\ = \sqrt{p(p-a)\cdot\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{a^2}} \le \sqrt{p(p-a)}\ ,$$ штд.

Знакот на рамно има место ако триаголникот е рамностран.

Пример 6. Полупериметарот на триаголникот $p = \frac{a+b+c}{2}$ е поголем од која било негова страна.

Доказ. Треба да докажеме дека $p > a$, $p > b$ и $p > c$. Навистина $\frac{a+b+c}{2} > a$ или $a+b+c > 2a$, односно $b+c > a$ што веќе е докажано во примерот 3.

Пример 7. Радиусот на впишаната кружница во триаголникот не е поголем од половината на радиусот на опишаната кружница околу тој триаголник, т.е. важи $r \le \frac{R}{2}$.

Доказ. Од формулите за r и R : $r = \frac{1}{p}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ и

$R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ имаме

$$\frac{r}{R} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{p\cdot abc} = \frac{4\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}}{abc} =$$
$$= \frac{(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc} \le \frac{abc}{2abc} = \frac{1}{2}$$ (согласно неравенството 4). Оттука $\frac{r}{R} \le \frac{1}{2}$ или $r \le \frac{R}{2}$.

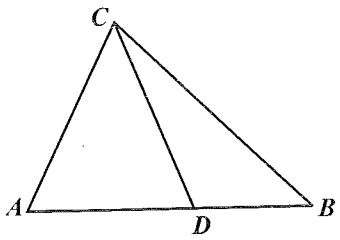
Пример 8. Да се докаже неравенството $a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc)$, каде што a, b, c се страни на триаголник.

Доказ. Ако $a\geq b\geq c$. Тогаш ќе важи: $a>b-c$, $b>a-c$ и $c>a-b$. Со квадрирање на овие неравенства, добиваме :

$a^2>b^2-2bc+c^2$, $b^2>a^2-2ac+c^2$, $c^2>a^2-2ab+b^2$. Апотоа собирајќи ги нивните соодветни страни го добиваме неравенството

$a^2+b^2+c^2>2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+ac+bc)$ или

$2(ab+ac+bc)>a^2+b^2+c^2$ штд.



црт. 53

Пример 9. Во триаголникот ABC темето C е сврзано со произволна точка D од основата AB (црт.53). Докажи дека важи неравенството

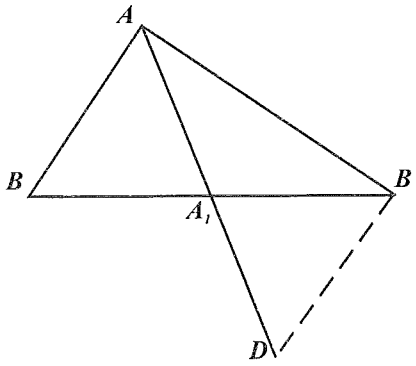
$$\overline{AC}+\overline{CB}-\overline{AB}<2\overline{CD} \qquad (6)$$

Доказ. Од триаголниците ACD и BCD имаме:

$\overline{AC}<\overline{AD}+\overline{CD}$ и $\overline{BC}<\overline{CD}+\overline{BD}$

Собирајќи ги соодветните страни на овие неравенства, добиваме:

$\overline{AC}+\overline{BC}<\overline{AB}+2\cdot\overline{CD}$ или $\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}<2\cdot\overline{CD}$, штд.



црт. 54

Пример 10. За медијаната (тежишната линија) m_a на триаголникот ABC (црт.54) важи двојното неравенство

$$\frac{1}{2}(b+c)-\frac{1}{2}\cdot a<m_a<\frac{1}{2}(b+c)$$

Доказ. Согласно неравенството (6) имаме:

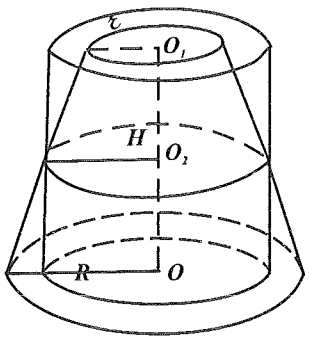
$\overline{AB}+\overline{AC}-\overline{BC}<2\cdot\overline{AA_1}$ или $\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)-\frac{1}{2}\overline{BC}<\overline{AA_1}$,

односно $\frac{1}{2}(b+c)-\frac{1}{2}a<m_a$. Со тоа го докажавме првото од двојното неравенство (7). Потоа на продолжението на медијаната AA_1 нанесуваме отсечка $\overline{A_1D}=\overline{AA_1}=m_a$. Од триаголникот ACD, имаме:

$\overline{AD}<\overline{DC}+\overline{AC}$ или $2\overline{AA_1}<\overline{AB}+\overline{AC}$.

Оттука $m_a<\frac{1}{2}(c+b)$, штд.

Пример 11. Волуменот на потсечен конус V_k е поголем од волуменот на цилиндар V_c што е со иста висина и има основа еднаква со средниот паралелен пресек на потсечениот конус, т.е. $V_c < V_k$ (црт.55). Докажи!



црт. 55

Доказ. Треба да докажеме дека

$$\pi H(\frac{R+r}{2})^2 < \frac{\pi H}{3}(R^2+r^2+Rr)$$

Тоа е еквивалентно со $3(R+r)^2 < 4(R^2+r^2+Rr)$ или $3(R^2+r^2+2Rr) < 4(R^2+r^2+Rr)$, односно $0 < (R-r)^2$, кое е очигледно.

ЗАДАЧИ

1. Докажи : Во триаголникот ABC , ако аголот C е тап , тогаш важи неравенството $c^2 > a^2+b^2$; ако аголот C е прав, тогаш важи равенството $c^2 = a^2+b^2$, и ако аголот C е остар, тогаш важи неравенството $c^2 < a^2+b^2$.

2*. Докажи дека, збирот од медијаните на триаголникот е поголем од полупериметарот, но е помал од периметарот на триаголникот.

3*. Докажи дека, за кој било триаголник важи неравенството
$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$, каде $p=\frac{a+b+c}{2}$.

4. Докажи дека, плоштината P на триаголникот ABC не е поголема од $\frac{a^2+b^2}{4}$, каде што a и b се негови страни.

5. Докажи дека, плоштината P на триаголникот ABC е помала од една шестина од збирот на квадратите на неговите страни.

6*. Докажи дека, плоштината на четириаголникот не е поголема од една четвртина од збирот од квадратите на неговите дијагонали.

7*. Да се докаже дека, меѓу страните на правоаголен триаголник постои релација $\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2} \leq c$, каде што a и b се катети , а c - хипотенуза.

8. Докажи дека, плоштината на триаголник не е поголема од $\frac{1}{2}(a^2 - ab + b^2)$, каде што a, b, c се страни на триаголникот.

9. Должината на секоја страна на многуаголник е помала од збирот на должините на останатите негови страни. Докажи !

10. Ако темињата на еден многуаголник лежат во внатрешната област или на самите страни на друг многуаголник, тогаш првиот многуаголник има периметар помал од периметарот на вториот. Докажи !

11*. Докажи дека, од сите правоаголници, што се впишани во даден триаголник, најголема плоштина има оној кај кого страната што е паралелна со висината на триаголникот е еднаква на половина од таа висина.

12*. Докажи дека, во секој триаголник ABC меѓу неговата плоштина P и радиусите на впишаната и опишаната кружница постои релацијата $P > 2\sqrt{Rr^3}$.

Глава IX

ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

§ 74. КОРЕНУВАЊЕ НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

1. Нека w и z се комплексни (реални или имагинарни) броеви и n – природен број.

Дефиниција 1. Ако важи $w^n = z$ **, тогаш велиме дека бројот** w **е** n **– ти корен на бројот** z **и пишуваме** $w = \sqrt[n]{z}$ **.**

Според тоа :

$$w = \sqrt[n]{z} \quad \Leftrightarrow \quad w^n = z \tag{1}$$

Или со други зборови: одредувањето на непознатата основа w на степенот w^n од равенството $w^n = z$ е **инверзна операција** на степенувањето и се вика **коренување.**

Бројот z во записот $\sqrt[n]{z} = w$ се вика **радиканд** или **подкоренов израз** , n – **коренов показател**, а $\sqrt[n]{z}$ или w – n – ти корен на бројот z. Симболот $\sqrt[n]{\ }$ ќе го викаме **радикал**, од причини да не дојде до недоразбирање и мешање со терминот **корен на полином** или **корен на равенка**, односно **неравенка. Радикал** ќе го викаме и секој алгебарски израз, чија последна операција е коренување.

Согласно усвоената дефиниција имаме дека: За секои $z \in C$ и $n \in N$ ќе важат следниве два идентитет:

$$\sqrt[n]{z} = z \tag{2}$$

и

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z \tag{3}$$

А согласно идентитетот (3) операцијата **коренување** (извлекување n – ти корен од бројот з) може да се толкува и како **разбивање на бројот** z на n еднакви меѓу себе множители:

$$z = \left(\sqrt[n]{z}\right)^n = \underbrace{\sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{z} \cdot \sqrt[n]{z} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{z}}_{n-\text{пати}} \tag{4}$$

Од дадената дефиниција следува уште дека

$\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[1]{z} = z$, за секои $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$

Познато е дека директната операција степенување во полето на комплексните и во полето на реалните броеви е еднозначно изводлива (определена), меѓутоа нејзината инверзна операција – коренување во полето на комплексните броеви е неедноѕначно изводлива. Поточно, во §5 точка 5.3 видовме дека n – ти корен на кој било комплексен (реален или имагинарен) број $z \neq 0$ во полето $\mathbb{C}$ на комплексните броеви има точно n различни вредности. Но, во математиката посебен интерес претставуваат множествата броеви во кои операцијата коренување е еднозначно определена.

2. Тука подолу посебно ќе се задржиме на операцијата коренување на реалните броеви.

Ќе докажеме дека важи следнава :

Теорема [74.1]. ***За кој било ненегативен реален број*** a ***и природен број*** n , ***постои еден и само еден ненегативен реален број*** x , ***за кој*** $x^n = a$.

Доказ. Да ја разгледаме низата од n – тите степени на целите броеви:

$$0^n,\ 1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ \ldots,\ k^n,\ \ldots \tag{5}$$

Членовите на оваа низа неограничено растат, бидејќи за кој било (произволен голем) број $N > 0$ и доволно голем број k постои неравенството $k^n > N$.

Навистина, нека k е кој било природен број поголем од 1 и поголем од N, т.е. $1 < k$ и $N < k$

Со множење (соодветните страни) на овие неравенства, добиваме $N < k^2$. Со повторно множење на последното неравенство и $1 < k$, добиваме $N < k^3$, итн, и на крајот $N < k^n$. Значи, меѓу членовите на низата (5) постојат броеви поголеми од бројот a . Да го означиме со p најмалиот од тие броеви. Тогаш е :

$$p^n \leq a < (p+1)^n .$$

Да го поделиме сегментот [p, $p+1$] на десет еднакви делови со броевите:

$p,\ p+\frac{1}{10},\ p+\frac{2}{10},\ \ldots,\ p+1$. Нека $p+\frac{q_1+1}{10}$ е најмал од тие броеви, чиј n – ти степен е поголем од a, тогаш ќе биде:

$$\left(p+\frac{q_1}{10}\right)^n \le a < \left(p+\frac{q_1+1}{10}\right)^n .$$

Потоа новодобиениот сегмент $\left[p+\frac{q_1}{10}, p+\frac{q_1+1}{10}\right]$ да го поделиме на десет еднакви делови и таа постапка да ја продолжиме натаму неограничено. На тој начин како резултат ќе добиеме реален број x, определен со десетичната дропка:

$x = p\,,\ q_1\ q_2 \ldots\ q_m\ \ldots$

Неговите приближни вредности со недостиг и со вишок:

$x_m^- = p,\ q_1 q_2 \ldots q_m$ и $x_m^+ = p,\ q_1 q_2 \ldots (q_m+1)$

го имаат следново својство:

$$\left(x_m^-\right)^n \le a < \left(x_m^+\right)^n \qquad (6)$$

Според тоа, согласно правилото за множење на реалните броеви, x^n е единствениот реален број што го задоволува неравенството

$$\left(x_m^-\right)^n \le x^n \le \left(x_m^+\right)^n \qquad (7)$$

за сите вредности на m.

Споредувајќи ги (6) и (7), добиваме $x^n = a$, од каде $x = \sqrt[n]{a}$. Броевите x_m^- и x_m^+ се приближни вредности на радикалот $\sqrt[n]{a}$ со точност $\frac{1}{10^m}$ и тоа со недостиг и со вишок соодветно.

Не постои друг ненегативен број y, за кој $y^n = a$.

Навистина, ако $y < x$, тогаш согласно својството 10^0 (види §31, точка 31.2) на неравенствата, ќе биде $y^n < x^n$, т.е. $y^n < a$. Ако, пак, $y > x$, тогаш $y^n > x^n$, односно $y^n < a$. Со тоа ја докажавме и единственоста на бројот $x = \sqrt[n]{a}$.

Докажаната теорема [74.1] всушност утврдува дека: операцијата коренување во множеството на ненегативните реални броеви е еднозначно изводлива, односно дека: ако $a \in P_0^+$, тогаш $\sqrt[n]{a}$ е еднозначно определен реален број за секој $n \in N$ и притоа $\sqrt[n]{a} \ge 0$.

Забележуваме дека, горната теорема ништо не кажува: при услов да е $a > 0$, дали во множеството на негативните реални броеви постои и друг реален број, што ја задоволува равенката $x^n = a$. Исто така таа ништо не кажува : во множеството P^- на негативните броеви дали постои (или не постои) реален број x, за кој $x^n = a$. Тие случаи на кои теоремата [74.1] не ни дава одговор ќе ги расветлиме подолу.

Теорема [74.2]. а) ***Ако*** $n = 2k$, $(k \geq 1)$ ***е парен природен број и*** $a > 0$, ***тогаш постојат два и само два реални броеви*** x ***и*** $-x$, ***за кои важат релациите*** $x^{2k} = a$ и $(-x)^n = a$.

б) ***Ако*** $n = 2k$ ***е парен природен број , а*** $a < 0$, ***тогаш не постои ниту еден реален број*** x , ***за кој важи*** $x^{2k} = a$, ***т.е.*** $\sqrt[2k]{a}$ ***(каде*** $a < 0$ ***) нема смисла.***

Доказ. а) Нека $n = 2k \in \mathbb{N}$ и $a > 0$. Тогаш согласно теоремата [74.1] секогаш постои единствен реален број x , за кој важи $x^{2k} = a$. Но, за единствениот позитивен реален број x постои и негов спротивен единствен негативен реален број $-x$. А штом важи $x^{2k} = a$, ќе важи и $(-x)^{2k} = a$. Значи,спротивниот негативен реален број $-x$ е исто така втора вредност на радикалот $\sqrt[n]{a}$ во множеството на реалните броеви.

б) Бидејќи парниот степен на кој било реален број x не може да биде негативен број, затоа што условот $x^{2k} = a$ никогаш не може да биде задоволен, ако е $a < 0$. Значи $\sqrt[2k]{a}$, ($a < 0$) нема смисла (во полето на реалните броеви).

Од Т[74.2] следува дека: за $a > 0$ и $n = 2k$, $(k \geq 1)$ парно, постојат точно две вредности на радикалот $\sqrt[2k]{a}$, од кои едната е ненегативна x, а другата е негативна $-x$. Со цел да биде сочувана еднозначноста на $\sqrt[n]{a}$, натаму (при $a > 0$), со $\sqrt[2k]{a}$ ќе ја означуваме само ненегативната вредност на радикалот (коренот), додека со $-\sqrt[2k]{a}$ ќе ја означуваме соодветната негативна вредност.

Дефиниција 2. За ненегативниот реален број $x = \sqrt[n]{a}$ (≥ 0), **при** $a \geq 0$ **за кој важи** $x^n = a$ **велиме дека е аритметички корен, или аритметичка вредност на коренот** $\sqrt[n]{a}$.

На пример: $\sqrt[4]{16} = 2$ (но не и -2) , $\sqrt[5]{0} = 0$, $\sqrt[3]{27} = 3$ се аритметички корени.

Теорема [74.3]. ***Ако*** $n = 2k + 1$ ***е непарен природен број и*** $a \in \mathbb{R}$, ***тогаш постои најмногу една реална вредност на*** $\sqrt[n]{a}$ ***и при тоа:*** $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$

Доказ. Нека $n = 2k + 1 \in \mathbb{N}$ и $a > 0$. Тогаш согласно Т[74.1] постои единствен ненегативен реален број $x = \sqrt[2k+1]{a}$ што е решение на равенката

$$x^{2k+1} = a \qquad (8)$$

Бидејќи при $x < 0$ равенката (8) не е задоволена (левата страна е негативен број, а десната страна позитивен број), затоа $\sqrt[2k+1]{a}$ е единствено решение на равенката (8) и во полето на сите реални броеви. Да ја разгледаме сега равенката

$$x^{2k+1} = -a \tag{9}$$

чија десна страна е негативна. Очигледно е дека, нејзино решение не може да биде ненегативен број x. Бидејќи $\left|x^{2k+1}\right| = |x|^{2k+1}$, тогаш од $|x|^{2k+1} = a$ следува $|x| = \sqrt[2k+1]{a}$. А од условот $x < 0$ добиваме $x = -\sqrt[2k+1]{a}$. Тоа е единствен корен на равенката (9). Нависина $(-\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = -(\sqrt[2k+1]{a})^{2k+1} = -a$, штд.

Од оваа теорема следува дека операцијата коренување со непарен коренов показател ($n = 2k + 1$) е еднозначно определена во полето на сите реални броеви, односно дека: ако $n = 2k + 1$ е непарен, тогаш $\sqrt[2k+1]{a}$ е еднозначно определен реален број за секој $a \in \mathbb{R}$ и при тоа има исти знак како и радикандот a.

На пример, $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[5]{-4} = -\sqrt[5]{4}$.

3. Да забележиме дека, основните идентитети (2) и (3), што важеа за кој било комплексен број z и $n \in \mathbb{N}$, важат и за секој ненегативен реален број $a \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$. Тие остануваат да важат и за кој било реален број $a \in \mathbb{R}$, но ако $n = 2k+ 1$ е непарен број. На пример, $\sqrt[4]{3^4} = 2$, $\left(\sqrt[4]{3}\right)^4 = 3$, $\sqrt[5]{(-2)^5} = -2$, $\left(\sqrt[5]{-2}\right)^5 = -2$.

Меѓутоа, ако $n = 2k$ е парен број, идентитетот (2) при $a < 0$ може да се применува само со следнава корекција:

Бидејќи $a^{2k} = |a|^{2k}$, а $|a| \geq 0$, затоа

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = \sqrt[2k]{|a|^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, & \text{ако } a \geq 0 \\ -a, & \text{ако } a < 0 \end{cases} \tag{10}$$

На пример, $\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{|-3|^4} = |-3| = 3$. Но, равенството $\left(\sqrt[4]{(-3)}\right)^4 = -3$ не можеме да го сметаме за точно бидејќи коренот (радикалот) $\sqrt[4]{-3}$ не постои (нема смисла).

ЗАДАЧИ

1. Кои од следниве равенства се точни во полето на реалните броеви :

а) $\sqrt{-1}=-1$, б) $\sqrt{(-1)^2}=-1$, в) $\sqrt{(-1)^2}=1$, г) $\sqrt[3]{(-1)^3}=-1$,

д) $\left(\sqrt[3]{-1}\right)^3=-1$, е) $\left(\sqrt[4]{-1}\right)^4=-1$.

2. Пресметај : а) $\sqrt{(-3)^2}-\sqrt[3]{(-5)^3}$, б) $\sqrt[4]{(-2)^4}+\sqrt[3]{-1}+\sqrt{1}$.

3. При кои услови радикалот $\sqrt[n]{a}$ е аритметички корен ?

4. За кои реални вредности на a е точно равенството :

а) $\sqrt[4]{a^4}=a$, б) $\sqrt[4]{a^4}=-a$, в) $\sqrt[4]{a^4}=|a|$?

5. За кои вредности на a , квадратниот радикал има реални вредности :

а) $\sqrt{a}$, б) $\sqrt{-a}$, в) $\sqrt{a^2}$, г) $\sqrt{-a^2}$, д) $\sqrt{(-a)^2}$?

6. Пресметај ја вредноста на изразот $\dfrac{\sqrt[n]{x^n}}{x}$, ако :

а) $n=2k$, $x>0$, б) $n=2k$, $x<0$, в) $n=2k+1$, $x\in\mathbb{R}$.

§ 75. ИЗВЛЕКУВАЊЕ НА n – ТИ КОРЕН ОД ПОЗИТИВНИ БРОЕВИ

1. Да го разгледаме извлекувањето на n – ти корен од позитивни реални броеви, при што ќе претпоставиме дека сите корени се аритметички корени. Претходно ќе докажеме две теореми.

Теорема [75.1]. ***Ако природниот број N не е n - ти степен на ниту еден природен број, тогаш $\sqrt{N}$ не е рационален број.***

Доказ. Согласно условот на теоремата бројот N не е ниту еден број од низата на n – тите степени на целите ненегативни броеви:

$$0^n,\ 1^n,\ 2^n,\ 3^n,\ \ldots,\ k^n,\ \ldots \qquad (1)$$

Според тоа, $\sqrt[n]{N}$ не може да биде цел број. Ќе докажеме дека $\sqrt[n]{N}$ не може да биде ниту дропка. Покрај таквото тврдење да дозволиме $\sqrt[n]{N}=\frac{p}{q}$, каде p и q се заемно прости броеви и $q\neq 1$. Тогаш треба да важи $N=\frac{p^n}{q^n}$. Меѓутоа, тоа равенство не е можно; бидејќи, ако p и q се заемни прости и $q\neq 1$; па затоа N не може да биде цел број. Тоа покажува дека претпоставката $\sqrt[n]{N}$ дека е дропка не е точна, а точно е тврдењето дека $\sqrt[n]{N}$ не е рационален број.

Бидејќи $\sqrt[n]{N}$ е реален број, а тој не е ниту цел, ниту рационален број, следува дека $\sqrt[n]{N}$ е ирационален број – непериодична десетична дропка со бесконечно многу децимали.

Теорема [75.2]. ***Ако броителот и именителот на нескратливата дропка*** $\frac{P}{Q}$ ***(каде*** $Q\neq 1$ ***) не се (секој) точни*** n ***– ти степени на природни броеви, тогаш*** $\sqrt[n]{\frac{P}{Q}}$ ***е ирационален број.***

Доказ. Да допуштиме $\sqrt[n]{\frac{P}{Q}}$ да е рационален број, т.е. да важи $\sqrt[n]{\frac{P}{Q}}=\frac{p}{q}$, каде p и q се заемни прости броеви. Тогаш $\frac{P}{Q}=\frac{p^n}{q^n}$. Бидејќи p^n и q^n се исто така заемно прости броеви следува дека $P=p^n$ и $Q=q^n$, што противречи на условот на теоремата. Според тоа, $\sqrt[n]{\frac{P}{Q}}$ е ирационален број, штд.

2. Нека a е реален број. Ако тој не е точен n – ти степен на некој природен број, тогаш очигледно е дека во низата (1) постои најголем број k^n што е помал од a; за кој важи:

$$k^n < a < (k+1)^n \text{, односно } k < \sqrt[n]{a} < k+1 \qquad (2)$$

Бројот k, што ги задоволува неравенствата (2) се вика **приближна вредност на** $\sqrt[n]{a}$ **со точност до** ***1*** **со недостиг,** а бројот $k+1$ – **приближна вредност на** $\sqrt[n]{a}$ **со точност до** ***1*** **со вишок.**

Со N да го означиме целиот дел на бројот a, т.е. нека $a = N + \alpha$, каде што $0 < \alpha < 1$. Важи следново :

Правило I . За наоѓање приближна вредност на $\sqrt[n]{a}$ со точност до 1 (со недостиг или вишок), доволно е да се одреди приближната вредност на $\sqrt[n]{a}$ со точност до 1 од целиот дел на a .

Доказ. Нека k е точната или приближната вредност на $\sqrt[n]{N}$ со точност до *1* со недостиг, т.е. нека $k^n \le N < (k+1)^n$. Бидејќи

$$(k+1)^n - k^n = nk^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot k^{n-2} + \ldots + 1 \ge 1 \quad \text{и} \quad 0 < \alpha < 1, \text{ затоа}$$

$k^n \le N + \alpha < (k+1)^n$. Оттука $k \le \sqrt[n]{N+\alpha} < (k+1)$, т.е. $k < \sqrt[n]{a} < (k+1)$. Според тоа, k и $k+1$ се приближни вредности на n – ти корен со точност до *1* и на бројот a, штд.

Бројот p се вика **приближна вредност на $\sqrt[n]{a}$ со недостиг со точност до $\frac{1}{m}$, ако важи неравенството** $p < \sqrt[n]{a} < p + \frac{1}{m}$, а бројот $p + \frac{1}{m}$ се вика приближна вредност на $\sqrt[n]{a}$ со вишок и со истата точност.

Правило II . За наоѓање приближна вредност на $\sqrt[n]{a}$ со точност до $\frac{1}{m}$ доволно е да се одреди вредноста на n – ти корен со точност до 1 од бројот am^n и резултатот да се подели со m .

Доказ. Нека важи $k^n \le am^n < (k+1)$. Тогаш е

$$k \le m\sqrt[n]{a} < k+1 \qquad \text{и} \qquad \frac{k}{m} < \sqrt[n]{a} < \frac{k}{m} + \frac{1}{m}.$$

Според тоа, $p = \frac{k}{m}$ и $p + \frac{1}{m}$ се бараните приближни вредности на $\sqrt[n]{a}$, штд.

Од горните две правила следува дека за добивање на n – ти корен од позитивен реален број со определена точност, доволно е да знаеме да одредиме n-ти корен од позитивен реален број со определена точност, доволно е да знаеме да одредиме n – ти корен од природен број со точност до *1* .

Пример 1. Да ја пресметаме вредноста на $\sqrt[3]{360245}$.

Решение. Бидејќи е $10^3 < 360245 < 100^3$ следува дека бараниот корен е двоцифрен број. Потоа проверуваме: $50^3 = 125000$, $60^3 = 216000$, $70^3 = 343000$, $80^3 = 512000$. Значи, $70^3 < 36245 < 80^3$. Бидејќи е $71^3 = 357911$ и $72^3 = 373248$, тогаш ќе биде $71 < \sqrt[3]{360245} < 72$. Според тоа, приближната вредност на $\sqrt[3]{360245}$ со точност до *1* со недостиг е *71* , а со вишок е *72* .

Пример 2. Да се одреди $\sqrt{6{,}5}$ со точност до $0{,}1$.

Решение. Тука е $a = 6{,}5,\ n = 2,\ m = 10,\ am^2 = 650.$
Од $25^2 = 625 < 650 < 676 = 26^2$, наоѓаме дека, бараните приближни вредности на $\sqrt{6{,}5}$ се $2{,}5$ и $2{,}6$.

3. За извлекување на n – ти корен од броеви блиски на единицата ја користиме следнава приближна формула:

$$\sqrt[n]{1+a} \approx 1+\frac{a}{n}\ ,\ \text{каде}\ |a|<1 \tag{3}$$

која следува од неравенството $$\sqrt[n]{1+a} \le 1+\frac{a}{n} \tag{4}$$

Доказ. Да ставиме $\sqrt[n]{1+a} \le 1+h$, добиваме $1+a \le (1+h)^n$ (а согласно неравенството на Бернули) $1+a \ge 1+nh$, т.е. $h \le \frac{a}{n}$, од каде $\sqrt[n]{1+a} \le 1+\frac{a}{n}$, штд.

Може да се покаже дека, при $a > 0$ и $n \ge 3$ формулата (3) ни ја дава приближната вредност на коренот со вишок со точност поголема отколку a^2, т.е. грешката е

$$\left(1+\frac{a}{n}\right)-\sqrt[n]{1+a} \le \frac{n-1}{n}\cdot a^2 < a^2$$

За квадратниот корен направената грешка при користењето на формулата (3) е помала од $\frac{a^2}{8}$, т.е. важи :

$$\left(1+\frac{a}{2}\right)-\sqrt{1+a} = \frac{\left[\left(1+\frac{a}{2}\right)-\sqrt{1+a}\right]\left[\left(1+\frac{a}{2}\right)+\sqrt{1+a}\right]}{\left(1+\frac{a}{2}\right)+\sqrt{1+a}} =$$

$$= \frac{\left(1+\frac{a}{2}\right)^2-(1+a)}{\left(1+\frac{a}{2}\right)+\sqrt{1+a}} = \frac{\frac{a^2}{4}}{\left(1+\frac{a}{2}\right)+\sqrt{1+a}} < \frac{\frac{a^2}{4}}{2} = \frac{a^2}{8}.$$

Пример 3. Да се пресмета коренот $\sqrt[4]{627}$ со точност *0,001* .

Решение. Имаме $627 = 625 + 2 = 5^4 + 2$. Добиваме $\sqrt[4]{627} = \sqrt[4]{5^4 + 2} = 5\sqrt[4]{1 + \frac{2}{5^4}}$.

Да ставиме $a = \frac{2}{5^4}$, па согласно формулата (3) добиваме:

$\sqrt[4]{627} = 5\sqrt[4]{1 + \frac{2}{5^4}} \approx 5\left(1 + \frac{2}{4 \cdot 5^4}\right) = 5{,}004$ со грешка помала отколку $5 \cdot \frac{2^2}{5^8} < \frac{1}{5^5} = 0{,}00032$.

За добивање на квадратни и кубни корени од реални броеви често се служиме со специјални нумерички таблици, а за пресметување на кои било n – ти корени од броеви можеме да користиме и логаритамски таблици, а во последно време на прво место по примена изби дигиталната сметачка машина.

ЗАДАЧИ

1. Провери кои од броевите се ирационални броеви:

   а) $\sqrt{4}$; $\sqrt{0{,}4}$; $\sqrt{0{,}004}$; б) $\sqrt{200}$; $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt{2304}$.

2. Преместај ја вредноста на коренот со точност до 1.

   $\sqrt{19}$, $\sqrt[3]{525}$, $\sqrt[4]{72568}$, $\sqrt[5]{1000}$, $\sqrt{3824}$.

3. Пресметај ја вредноста на коренот со точност до 0,01.

   $\sqrt{2700}$, $\sqrt[3]{20482}$, $\sqrt[4]{20{,}8}$.

§ 76. ОСНОВНИ СВОЈСТВА И ОПЕРАЦИИ СО КОРЕНИТЕ

1. Ќе покажаме дека за аритметичките корени важат следниве основни својства:

Теорема [76] ***Ако x и y се позитивни реални броеви и n – природен број. За нив важат еквиваленциите*** :

$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad x < y \tag{1}$$

$$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad x > y \tag{2}$$

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = y \tag{3}$$

Доказ. Нека важи $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$. Бидејќи на двете страни стојат позитивни реални броеви (аритметички корени), можеме да ги степенуваме на n – ти степен, па добиваме: $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n < \left(\sqrt[n]{y}\right)^n$, т.е. $x < y$. Според тоа, важи импликацијата

$$\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Rightarrow x < y \tag{1'}$$

Ќе докажеме дека важи и обратната импликација на (1').

Навистина, нека на пример $x < y$. Тогаш со допуштање на спротивното: ако $\sqrt[n]{x} \geq \sqrt[n]{y}$, ние ќе добиеме како последица $x \geq y$, што е во контрадикција со условот $x < y$. Тоа покажува дека важи и обратната импликација

$$x < y \Rightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \tag{1''}$$

А од импликациите (1') и (1'') следува еквиваленцијата (1), штд.

Аналогно се докажуваат и еквиваленциите (2) и (3).

Оваа теорема ни дава за право: докажувањето на својствата на операциите со корени да можеме да го вршиме и со помош на проверка.

Подолу изложените својства (теореми), врз чија основа ги вршиме идентичките трансформации на аритметичките корени и операциите над нив, ќе ги именуваме **правила** за извршување на соодветните трансформации или операции над корените.

I. **Правило за проширување на коренот: Вредноста на коренот не се менува, ако кореновиот показател го помножиме со произволен природен број k, а радикандот го степенуваме на k – ти степен**, т.е.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \tag{I}$$

Доказ. Нека $\sqrt[n]{a} = x$. (4)

Врз основа на дефиницијата за корен, од равенството (4) имаме: $a = x^n$, или ако двете страни ги степенуваме на k – ти степен, добиваме $a^k = x^{nk}$, од каде имаме

$$x = \sqrt[nk]{a^k} \tag{5}$$

А од (4) и (5) следува равенството $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$, штд.

II. **Правило за скратување на коренот. Вредноста на коренот не се менува, ако кореновиот показател и степеновиот показател на радикандот ги скратиме (поделиме) со нивниот заеднички множител,** т.е.

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}, \qquad \text{ако } a \geq 0 \tag{II}$$

Всушност ова е равенството (I) напишано во обратен ред.

III. **Правило за доведување на корените на заеднички коренов показател.**

Кои било два или повеќе корени со различни коренови показатели секогаш можат да се заменат со соодветно еднакви на нив корени со ист коренов показател.

На пример, ако се дадени корените $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[p]{c}$. Тие имаат коренови показатели соодветно m, n, p. Нивен најмал заеднички содржател нека е mnp. Согласно равенството (I прviот корен го прошируваме со np, вториот со mp и третиот со mn, па ќе добиеме : $\sqrt[m]{a} = \sqrt[mnp]{a^{np}}$, $\sqrt[n]{b} = \sqrt[mnp]{b^{mp}}$, $\sqrt[p]{p} = \sqrt[mnp]{c^{mn}}$.

IV. **Правило за споредување на корени. За утврдување кој од броевите $\sqrt[m]{a}$ или $\sqrt[n]{b}$ е поголем, доволно е да утврдиме кој од степените a^n или b^m е поголем.**

Доказ. По сведувањето на корените $\sqrt[m]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ на ист коренов показател, добиваме $\sqrt[mn]{a^n}$ и $\sqrt[mn]{b^m}$. Според тоа, доволно е да се споредат меѓу себе подкореновите броеви, штд.

На пример, $\sqrt[5]{5} < \sqrt[3]{3}$, бидејќи $5^3 < 3^5$.

V. **Правило за коренување на производ. Корен n – ти од производ е еднаков на производот од n – тите корени од секој множител одделно,** т.е.

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_k} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \sqrt[n]{a_3} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_k} \tag{V}$$

Доказ. Равенството (V) ќе го докажеме со проверка, кога двете негови страни одделно ќе ги степенуваме на n – ти степен :

$\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}\right)^n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_k$ (по дефиниција на корен) и

$\left(\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \sqrt[n]{a_3} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_k}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a_1}\right)^n \left(\sqrt[n]{a_2}\right)^n \dots \left(\sqrt[n]{a_k}\right)^n = a_1 a_2 \dots a_k$ (согласно правилото за степенување на производ).

Значи, n – тите степени на двете страни на равенството (V) се еднакви. Оттука следува, точноста на равенството (V), штд.

Равенството (V) кога ќе се запише во обратен ред, гласи:

$$\sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \cdot \sqrt[n]{a_3} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a_k} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_k}$$

Според тоа, правилото V може да се формулира и вака:

Производот на корени со исти коренов показател е еднаков на корен со истиот тој показател од производот на радикандите.

VI. **Правило за коренување на дропка (количник). Корен** n **– ти од дропка е еднаков на количникот од** n **– тиот корен на броителот и** n **– ти корен на именителот,** т.е.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \qquad \text{(VI)}$$

Доказ. Броителот и именителот на дропката $\frac{a}{b}$ ги разделуваме на по n еднакви множители и добиваме :

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{b}} = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n \text{, од каде } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{, штд.}$$

Равенството (VI) кога ќе го запишеме во обратен ред гласи:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Според тоа, правилото VI може да се формулира и вака :

Количникот од корени со исти коренов показател е еднакова на корен со истиот показател од количникот на радикандите.

VII. **Правило за степенување на корени. Да степенуваме** n **– ти корен, доволно е да се степенува на истиот степен подкореновиот израз,** т.е.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} \qquad \text{(VII)}$$

Доказ. Согласно дефиницијата на степен со природен показател имаме :

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{a}}_{k \text{ пати}},$$

а потоа применувајќи го правилото за множење на корени со исти коренов показател, добиваме $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{k \text{ пати}}} = \sqrt[n]{a^k}$, штд.

VIII. **Правило за коренување на степен. Да се најде** n **– ти корен од** k **– тиот степен на позитивен број** a **, доволно е да се степенува на** k **– ти степен** n **– тиот корен од бројот** a **, т.е.**

$$\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k \qquad \text{(VIII)}$$

IX. **Правило за коренување на корен. Да се коренува корен, доволно е да се помножат кореновите показатели, не менувајќи го подкореновиот израз,** т.е.

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[kn]{a} \qquad \text{(IX)}$$

Доказ. Ова равенство ќе го докажеме со проверка, кога двете негови страни одделно ги степенуваме на kn – ти степен :

$$\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^{kn} = \left[\left(\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}\right)^k\right]^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad \text{и} \quad \left(\sqrt[kn]{a}\right)^{kn} = a .$$

Оттука следува точноста на равенството (IX) .

X. **Правило за извлекување на множител пред знакот на корен.** Така се вика равенството

$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b} \qquad \text{(X)}$$

Доказ. Согласно правилото V имаме :

$$\sqrt[n]{a^n b} = \sqrt[n]{a^n} \cdot \sqrt[n]{b} = a\sqrt[n]{b}$$

XI. **Првило за внесување на множители под знакот на корен.** Така се вика равенството

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b} \qquad \text{(XI)}$$

кое всушност е истото равенство (X) само прочитано оддесно на лево.

Правилата X и XI кратко можеме да ги формулираме и вака:

При извлекување множител пред знакот на корен, всушност извлекуваме корен од него; а при внесување на множител под знакот на корен, истиот множител го степенуваме на степен еднаков на кореновиот показател.

2. Посебно ќе нагласиме дека, за корените што не се аритметички, својствата и правилата I – XI не важат во сите случаи.

Тие остануваат да важат и за произволни реални броеви $a \in \mathbb{R}$, т.е. и за $a<0$ само кај корените со непарен коренов показател. Но, при примената на тие правила треба да бидеме доследни на тоа дека при негативни подкоренови броеви кореновите показатели секогаш да се и да останат непарни. Така на пример, при $a<0$ правилото (II) $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$ е точно само ако n и k се непарни броеви.

На пример, $\sqrt[21]{-27} = \sqrt[7\cdot 3]{(-3)^3} = \sqrt[7]{-3} = -\sqrt[7]{3}$.

Или при примената на правилото (III) (доведување на корените на заеднички коренов показател) за најмал заеднички содржател на показателите треба да се избере непарен број. На пример: $\sqrt[3]{-3} = \sqrt[15]{(-3)^5}$ и $\sqrt[5]{-2} = \sqrt[15]{(-2)^3}$.

За корените, пак, со произволен природен показател n и произволен реален подкоренов број ($a \in \mathbb{R}$) горниве правила ќе важат и ќе можат да се применуваат само со подолу укажаните корективи:

1⁰. Правилото I $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$, при $a < 0$ и при $n = 2m$ не важи, бидејќи коренот $\sqrt[2m]{a}$ $(a < 0)$ не постои.

Правилото I при $a < 0$ и при $n = 2k + 1$ во општ случај не е точно. На пример: $\sqrt[3]{-2}$ е негативен реален број, а $\sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}$ е позитивен број. Според тоа, $\sqrt[3]{-2} \neq \sqrt[6]{(-2)^2}$.

2⁰. Правилото II $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}$, ако заедничкиот множител (делител) k, со кој ги скратуваме показателите на коренот и подкореновиот број, е парен број ($k = 2m$) и сакаме тоа да важи за кој било реален број a, тогаш равенството (II) треба да го трансформираме во следниов вид:

$$\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[2mn]{a^{2m}} = \sqrt[2mn]{|a|^{2m}} = \sqrt[n]{|a|} = \begin{cases} \sqrt[n]{a}, & \text{ako} \quad a \geq 0 \\ \sqrt[n]{-a}, & \text{ako} \quad a < 0 \end{cases} \qquad \text{(II')}$$

На пример: $\sqrt[4]{(-3)^2} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$.

При n непарен, k – парен број и $a < 0$, првилото (II) некорегирано не важи, бидејќи на левата страна од $a^k > 0$ следува дека $\sqrt[nk]{a^k} > 0$, а на десната страна е $\sqrt[n]{a} < 0$. На пример: $\sqrt[6]{(-5)^2} \neq \sqrt[3]{-5}$.

Навистина, $\sqrt[6]{(-5)^2} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[3]{5} > 0$, но $\sqrt[3]{-5} < 0$.

3⁰. Правилата V и VI при негативни подкоренови броеви и парен коренов показател не важат. На пример, равенството $\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$ не може да го сметаме за точно, бидејќи левата страна $\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{36} = 6$ постои, но десната страна $\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$ не постои.

Ако сакаме формулите (V) и (VI) да ги користиме при $n = 2k$, а без условите $a > 0$ и $b > 0$, тогаш тие треба да гласат:

$$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|}\cdot\sqrt[2k]{|b|} \qquad \text{(V')}$$

$$\sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}}, \quad \text{при} \quad b \neq 0 \qquad \text{(VI')}$$

4⁰. Првилата VII и VIII: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$ и $\sqrt[n]{a^k} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^k$ при $a < 0$ и $n = 2k$ парен коренов показател губат смисла, бидејќи коренот $\sqrt[n]{a}$ не постои.

5⁰. Правилото IX за коренување на корен при $a < 0$ е неприменливо, ако барем еден од показателите n или k е парен број, бидејќи во тој случај $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}}$ и $\sqrt[nk]{a}$ губат смисла.

6⁰. Правилото X за извлекување множители пред знакот на корен при $n = 2k$ и произволен подкоренов број $a \in \mathbb{R}$ го применуваме во следниов вид:

$$\sqrt[2k]{a^{2k}b} = \sqrt[2k]{|a|^{2k}b} = |a|\sqrt[2k]{b} = \begin{cases} a\sqrt[2k]{b}, & \text{ако} \quad a \geq 0 \\ -a\sqrt[2k]{b}, & \text{ако} \quad a < 0 \end{cases}$$

На пример: $\sqrt[4]{(-3)^4\cdot 5} = 3\sqrt[4]{5}$.

7⁰. Правилото XI за внесување множители под знакот корен со парен коренов показател го применуваме во следниов вид :

$$a\sqrt[2k]{b} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a^{2k}b}, & \text{ако} \quad a \geq 0 \\ -\sqrt[2k]{a^{2k}b}, & \text{ако} \quad a < 0 \end{cases}$$

На пример : $-3\sqrt[4]{5} = -\sqrt[4]{3^4\cdot 5} = -\sqrt[4]{405}$.

ЗАДАЧИ

1. Прошири ги со 2 следниве корени :

а) $\sqrt{5}$, б) $\sqrt[3]{2}$, в) $\sqrt[3]{a}$, г) $\sqrt[4]{x^3}$, д) $\sqrt[n]{2xy^2}$.

2. Скрати ги кореновите показатели на корените ако е можно :

а) $\sqrt[6]{27}$, б) $\sqrt[12]{125x^6y^9}$, в) $\sqrt[3n]{4^n x^{2n}}$, г) $\sqrt[4n]{16x^2y^{4n}}$, д) $\sqrt[n^2-1]{x^{n+1}}$.

3. Сведи ги на ист коренов показател корените :

а) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$; б) $\sqrt[4]{a^3b^2}$, $\sqrt{abx}$; в) $\sqrt[4]{x^2y}$, $\sqrt[n]{x^3y^2}$, $\sqrt[2n]{xy^3}$.

4. Спореди ги по големина броевите :

а) $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{3}$, б) $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[12]{10}$, в) $\sqrt[6]{6}$, $\sqrt[5]{5}$, г) $\sqrt[9]{64}$, $\sqrt[6]{16}$.

5. Подреди ги по големина броевите : 1 , $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[7]{7}$.

6. Упрости ги корените :

а) $\sqrt[6]{a^4b^2}$, $\sqrt[9]{(a+b)^6}$, б) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^2}$, $\sqrt[8]{x^4+2x^2y^2+y^4}$, в) $\sqrt[10]{32x^{5k}y^5}$, $\sqrt[8]{16x^{12}y^4}$.

7. Пресметај :

а) $\sqrt[3]{(-8)\cdot 7\cdot 125}$, б) $\sqrt[5]{3x^{10}y^{15}}$, в) $\sqrt[4]{\dfrac{81x^8y^4}{16a^{12}}}$.

8. Изврши ги означените операции со корените:

а) $5\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$, б) $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{-2}\cdot\sqrt[3]{-12}$, в) $\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^2}$, г) $\sqrt[5]{8}:\left(2\sqrt[3]{2}\right)$,

д) $\sqrt[6]{x^5y^4}:\sqrt[4]{\dfrac{x}{y}}$, ѓ) $\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, е) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2b}:\sqrt[4]{ab^3}$.

9. Разложи ги на множители изразите :

а) $\sqrt{3}+\sqrt{6}$, б) x^2-3 , в) $\sqrt{a^2-1}-\sqrt{a+1}$, г) $x+\sqrt{x}$, д) $x-1$.

10. Скрати ги дропките :

а) $\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{8}}{\sqrt{35}+\sqrt{28}}$, б) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$, в) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$.

11. Степенувај ги изразите:

а) $\left(\sqrt[3]{(-5)}\right)^3$, б) $\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)^2$, в) $\left(-2\sqrt[4]{3}\right)^4$, г) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{8}-\sqrt{2}}\right)^2$, д) $\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$.

12. Коренувај ги изразите :

а) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$, б) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}$, в) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}$.

13. Извлечи ги сите множители што можат да се извлечат пред знакот на корен :

а) $\sqrt[k]{a^{2k+5}}$, $\sqrt[k+1]{x^{2k^2-2}}$, б) $\sqrt{x^3y+2x^2y^2+xy^3}$, $\sqrt[3]{16(x^2-y^2)^2(x+y)}$,

в) $\sqrt[2k]{x^{2k+1}y^{4(k+1)}}$, $\sqrt[k]{\dfrac{2^{k+1}x^{2k+1}}{y^2z^{k+3}}}$

14. Внеси ги рационалните множители под знакот на корен :

а) $\dfrac{2x^2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{27a^2}{4x^3}}$, $\dfrac{a}{x}\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{a}}$, б) $(a+b)\sqrt[3]{\dfrac{2a^2}{a^2-b^2}}$, $a^k\sqrt[3]{\dfrac{x}{a^{2k}}}$.

15. За кои вредности на x се точни следниве равенства :

а) $\sqrt{x(x+1)}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+1}$, б) $\sqrt[3]{x(x+1)}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x+1}$, в) $\sqrt[2k]{x^{2k}}=x$,

г) $\sqrt[2k+1]{x^{2k+1}}=x$, д) $\sqrt[2k]{x^{2k}}=|x|$.

16. Не пресметувајќи ги корените, определи кој број е поголем :

а) $2\sqrt{5}$ или $5\sqrt{2}$, б) $3\sqrt{5}$ или $4\sqrt{3}$, в) $2\sqrt[3]{3}$ или $3\sqrt[3]{2}$, г) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ или $\sqrt{7}$, д) $\sqrt{10}-3$ или $\sqrt{5}-2$.

17. Изврши ги означените операции и упрости ги изразите :

а) $\sqrt{3x^3y^2}:\sqrt{x^2y}$, б) $\left(x\sqrt{y}-y\sqrt{x}\right)\left(y\sqrt{x}+x\sqrt{y}\right)$, в) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}:\sqrt{x^2-1}$,

г) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$.

§ 77. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Познато е дека, сите математички (аналитички) изрази ги делиме на **алгебарски** и **трансцедентни**; а алгебарските изрази, пак, на **рационални** и **ирационални алгебарски изрази.**

Ирационален алгебарски израз се вика секој израз во кој е застапена, покрај другите операции, конечен број пати и операцијата коренување. Примери на нумерички и функционални ирационални изрази можат да служат:

$$1+\sqrt{3}\ ,\ \frac{1}{1+\sqrt{2}}\ ,\ 2+\sqrt{x}\ ,\ 2x-5+\sqrt[3]{x^2y}\ ,\ \frac{1-\sqrt{x}}{2+\sqrt{y}}\ ,\ \sqrt[3]{5+\sqrt{x}}\ .$$

Забелешка. Изрази, кои содржат степени со ирационален показател, или променливи во степеновиот показател, на пример: $3^{\sqrt{2}}$, 2^{x}, 3^{2+x}, $5^{\sqrt{x}}$ не се ниту рационални, ниту ирационални. Таквите изрази спаѓаат во трасцедентни изрази.

Рационалноста или ирационалноста на даден алгебарски израз често ја врзуваме и за определена променлива во него. Велиме дека алгебарскиот израз е рационален по однос на x, ако ниту во еден дел од тој израз буквата x не се содржи во радикандот на некој корен. На пример, алгебарскиот израз

$x\sqrt{2y}+x^2\sqrt[3]{1+y^2}+3xy^2$ е рационален по однос на x, а ирационален по однос на y.

Алгебарските изрази обично ги разврстуваме според надворешниот вид, не исклучувајќи ја притоа можноста даден ирационален израз да е идентичен со некој рационален израз. На пример $\sqrt{x^4+2x^2+1}-1$, даден во ирационален вид, е идентично еднаков на рационалниот израз x^2.

Корените, што се содржат во ирационалните изрази ќе сметаме обично дека се аритметички корени. Имајќи го тоа предвид дозволените вредности на променливите во секој ирационален израз ќе ги одредиме од условите: сите подкоренови изрази на корените со парен коренов показател да се ненегативни и именителите на кои било изрази да не се анулират. За корените, пак, што не се аритметички потербно е да се прифатат сите корекции за нив дадени во претходниот параграф.

Слично како кај рационалните изрази и со ирационалните изрази можеме да вршиме разни идентични трансформации. На пример: извлекувањето множители пред знакот на корен, внесувањето на множители под знакот на корен, доведувањето на два и повеќе корена на еднаков коренов показател и др. Сé се тоа идентични трансформации што ги вршевме над корените. Понатаму ќе се запозанаеме и со други трансформации на ирационалните изрази, што ќе ги вршиме со однапред поставена цел да ги сведеме во попрост вид или друго. Сите идентични трансформации со ирационалните изрази ги вршиме врз основа на својствата и операциите со корени.

Ако трансформацијата на даден ирационал израз ја вршиме со цел истиот да се упрости, тогаш ако ирационалниот израз е без загради, прво ги извршуваме операциите степенување и коренување, а потоа операциите множење и делење. При множењето (делењето) на корените, ако тие имаат различни коренови показатели, претходно истите ги доведуваме на заеднички показател. Ако, пак, во ирационалниот израз се сретнуваат и загради, тогаш прво се ослободуваме од нив на начин исто како и кај рационалните изрази.

Пример 1. Да се упрости изразот $\sqrt[4]{15\sqrt[3]{2x^2:\left(3\sqrt[6]{x^2}\right)}}$, $x>0$.

Решение. Тука имаме коренување на количник од два корена:

$$\sqrt[4]{15\sqrt[3]{2x^2:\left(3\sqrt[6]{x^2}\right)}}=\sqrt[4]{5\sqrt[3]{2x^2}:\sqrt[3]{x}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{5^3\cdot 2x}}=\sqrt[12]{250x}$$

Пример 2. Да се упрости: $2a+\sqrt{a^2-4a+4}$, каде $a\in\mathbb{R}$.

Решение. $2a+\sqrt{a^2-4a+4}=2a+\sqrt{(a-2)^2}=2a+|a-2|=$

$$=\begin{cases}2a+a-2=3a-2, & ako \quad a\geq 2\\ 2a-(a-2)=a+2, & ako \quad a<2.\end{cases}$$

Пример 3. Да се извршат незначените операции

$$\left(\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\,.$$

Решение. $\sqrt[3]{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=$

$$\sqrt[3]{2-3}+\sqrt[6]{\left(5+2\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}=-1+\sqrt[6]{\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(2-2\sqrt{6}+3\right)}=$$

$$=-1+\sqrt[6]{25-24}=-1+1=0.$$

77.1 НОРМАЛЕН ВИД НА КОРЕНИТЕ. СЛИЧНИ КОРЕНИ.

1. Меѓу најпростите ирационални изрази спаѓаат таканаречените **едночлени ирационални изрази.** Тоа се ирационални изрази, што се добиенеи од броеви и букви со помош на операциите: множење, степенување и коренување, На пример, едночлени ирационални изрази се:

$$\sqrt{3},\qquad \sqrt[3]{\frac{a^2x}{\sqrt{x}}}\qquad 5ab^2\sqrt[4]{\frac{1}{a^2b}},\qquad 6a\sqrt[3]{3a\sqrt{a}}\,.$$

Ирационалниот израз $\sqrt[3]{1+x^2}$ не го сметаме за едночлен.

Една од почестите трансформации што ги вршиме на корените е нивно **доведување во нормален (упростен) вид.**

Даден едночлен или друг ирационален израз велиме е во нормален вид, ако неговиот подкоренов израз не содржи именител и множители кои можат да се извлечат пред знакот на корен, како и да е сведен на можно најмал коренов показател.

Примери : а) Корените $5\sqrt[3]{x^2}$, $-2a^2b\sqrt{x^3y}$, $\frac{3a}{b^2}\sqrt[5]{2a^2b^3}$ се во норамлен вид.

б) Корените : $2\sqrt{a^2b^3c}$, $a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$, $3ax^2\sqrt[6]{a^2x^2}$ не се во нормален вид, бидејќи од првиот корен можат да се извлечат множители пред знакот на корен, во вториот корен подкореновиот израз е дропка, а во третиот корен можат да се скратат показателите.

Како што гледаме, трансформацијата доведување на коренот во нормален вид бара да се извршат следниве три попрости трансформации со коренот:
1. Подкореновиот израз на коренот да се ослободи од именителот (ако има таков);
2. Да се извлечат пред знакот на коренот сите множители, што може да се извлечат; 3. Да се извршат потребните скратувања на показателите на коренот и на поткореновиот израз.

Пример 4 . Да се доведе го нормален вид коренот $a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$.

Решение. $a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}=a\sqrt[3]{\frac{a^2}{a\cdot a^2}}=a\sqrt[3]{\frac{a^2}{a^3}}=\frac{a}{a}\sqrt[3]{a^2}=\sqrt[3]{a^2}$ или, ако прво предкореновиот множител (a) го внесеме под корен $a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}=\sqrt[3]{\frac{a^3\cdot 1}{a}}=\sqrt[3]{a^2}$.

Пример 5. Да се доведе во нормален вид коренот $\sqrt{\frac{x^3+2x^2y+xy^2}{a^3}}$, при $a>0,\quad b>0,\quad y>0.$

Решение . $\sqrt{\frac{x^3+2x^2y+xy^2}{a^3}}=\sqrt{\frac{x(x+y)^2a}{a^3\cdot a}}=\frac{x+y}{a^2}\sqrt{ax}$.

2. Два корена велиме дека се **слични** , ако тие можат да се трансформираат во таков вид, што ќе се разликуваат само според некој рационален множител.
На пример, корените $\sqrt{8}$ и $\sqrt{18}$ се слични, бидејќи

$$\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=2\sqrt{2},\quad \sqrt{18}=\sqrt{3^2\cdot 2}=3\sqrt{2}.$$

Пример 6 . Да покажаме дека корените $2ab\sqrt[3]{1-\frac{a^3}{b^3}}$ и $4a^2b\sqrt[3]{a^3b^3-b^6}$ се слични.

Решение. $2ab\sqrt[3]{1-\frac{a^3}{b^3}} = 2ab\sqrt[3]{\frac{b^3-a^3}{b^3}} = \frac{2ab}{b}\sqrt[3]{b^3-a^3} = 2a\sqrt[3]{b^3-a^3} = -2a\sqrt[3]{a^3-b^3}$;

$4a^2b\sqrt[3]{b^3\left(a^3-b^3\right)} = 4a^2b^2\sqrt[3]{a^3-b^3}$.

Очигледно е дека, за утврдување дали два корена се слични или не, потребно е претходно истите да се доведат во нормален вид. Меѓутоа, може да се докаже дека: ***два n – ти корени се слични ако и само ако односот од нивните подкоренови изрази е еднаков на n– ти степен на рационален број или рационален израз.***

Пример 7. Да провериме дали корените се слични или не :

$$\sqrt[4]{162a^5x^{15}} \quad \text{и} \quad \sqrt[4]{\frac{y^8}{8a^3x}}$$

Решение. Го наоѓаме односот од нивните подкоренови изрази

$$Q = 162a^5x^{15} : \frac{y^8}{8a^3x} = \frac{162a^5x^{15}\cdot 8a^3x}{y^8} = \frac{1396a^8x^{16}}{y^8} = \left(\frac{6a^2x^4}{y^2}\right)^4$$

Забележуваме, тој однос е *4* - ти степен од рационалниот израз $\frac{6a^2x^4}{y^2}$.

Според тоа, дадените корени се слични. Навистина, тие во нормален вид гласат :

$$\sqrt[4]{162a^5x^{15}} = 3ax^3\sqrt[4]{2ax^3}, \quad \sqrt[4]{\frac{y^8}{8a^3x}} = \frac{y^2}{2ax}\sqrt[4]{2ax^3} .$$

77.2 СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА КОРЕНИ

Во општ случај збирот на два или повеќе корени не секогаш може да се запише (трансформира) со помош само на еден корен. Во специјален случај, ако меѓу собироците има слични корени, тогаш нив ги групираме и го извлекуваме заедничкиот множител пред заграда. Таа трансформација ја викаме **сведување на слични корени во збирот.**

Пример 8. Да се упрости $\sqrt{4x} + x^2\sqrt{\frac{1}{x}} + 5\sqrt{x^3} + a^2\sqrt{\frac{9}{x^3}}$.

Решение. Даденият израз претставува збир од четири корени. Нив прво ги доведуваме во нормален вид, а потоа, ако меѓу нив има слични корени, истите ги сведуваме. Така добиваме :

$$\sqrt{4x}+x^2\sqrt{\frac{1}{x}}+5\sqrt{x^3}+a^2\sqrt{\frac{9}{x^3}}=2\sqrt{x}+x^2\sqrt{\frac{x}{x^2}}+5x\sqrt{x}+x^2\sqrt{\frac{9x}{x^4}}=$$

$$=2\sqrt{x}+\frac{x^2}{x}\sqrt{x}+5x\sqrt{x}+\frac{3x^2}{x^2}\sqrt{x}=2\sqrt{x}+x\sqrt{x}+5x\sqrt{x}+3\sqrt{x}=$$

$$=(2+x+5x+3)\sqrt{x}=(5+6x)\sqrt{x}\,.$$

Собирањето и одземањето на корени го вршиме согласно правилата:

Правило I . Два или повеќе корени ги собираме, кога ќе ги напишеме еден по друг со истите знаци што ги имаат, потоа корените ги доведуваме во нормален вид и , ако меѓу нив има слични корени, вршиме сведување.

Пример 9. Да се соберат корените: $5\sqrt{a^3}$, $-a^2\sqrt{\frac{1}{a}}$ и $\sqrt{8a}$.

Решение. $5\sqrt{a^3}-a^2\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{8a}=5a\sqrt{a}-a^2\sqrt{\frac{a}{a^2}}+\sqrt{2^3a}=$

$$=5a\sqrt{a}-a\sqrt{a}+2\sqrt{2a}=(5a-a)\sqrt{a}+2\sqrt{2a}=4a\sqrt{a}+2\sqrt{2a}\,.$$

Правило II . Еден корен одземаме од друг, кога кон коренот намаленик го допишуваме спротивниот корен на намалителот.

Пример 10. Од $2x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ да се одземе коренот $-3\sqrt{xy^2}$.

Решение. $2x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}-(-3\sqrt{xy^2})=2x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}}+3y\sqrt{x}=\frac{2x}{x}\sqrt[3]{x^2}+3y\sqrt{x}=$

$$=2\sqrt[3]{x^2}+3y\sqrt{x}\,.$$

77.3. ТРАНСФОРМАЦИЈА НА КОРЕНОТ ОД ВИДОТ $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

При трансформацијата на некои ирационални изрази, освен својствата и правилата за операции со корени, понекогаш користиме и одредени формули. Така на пример, ирационалниот израз од видот $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ во одредени случаи може да се

претстави како збир од два попрости корена. Тоа го постигнуваме со помош на следниов идентитет на Лагранж :

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\ ,\quad A>0,\quad B>0,\quad A^2>B \qquad (1)$$

чија точност ја докажавме порано во §28 , точка 28.4.1.

Ќе покажеме како со помош на формулата (1) сложениот корен $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ во случај кога разликата A^2-B е полн квадрат го трансформираме во попрост израз.

Пример 11. Да се упрости изразот $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$.

Решение. Множителот 2 прво го внесуваме под знакот на внатрешниот корен: $\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{7-\sqrt{40}}$.

Гледаме: $A=7,\quad B=40,$ а $A^2-B=49-40=9$ е точен квадрат. Со примена на формулата (1) , добиваме:

$$\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{\frac{7+\sqrt{49-40}}{2}}-\sqrt{\frac{7-\sqrt{49-40}}{2}}=\sqrt{\frac{7+3}{2}}-\sqrt{\frac{7-3}{2}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}\ .$$

Наместо формулата (1) да ја користиме (двапати) одделно за изразите $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ и $\sqrt{A-\sqrt{B}}$, при трансформација на некои изрази можеме да користиме една од следниве формули:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}+\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \qquad (2)$$

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}-\sqrt{A-\sqrt{B}}=2\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \qquad (3)$$

Формулата (1) всушност е добиена со собирање и одземање на соодветните страни на овие две формули.

Пример 12. Да се упрости изразот

$$M=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}},\quad \text{при}\quad x\geq 1.$$

Решение. Согласно формулата (2) имаме :

$$M=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}+\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}=$$

$= 2\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}} = 2\sqrt{\frac{x+\sqrt{(x-2)^2}}{2}} = 2\sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}}$. Бидејќи

$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{ако } x \geq 2 \\ -(x-2), & \text{ако } 1 \leq x < 2 \end{cases}$, тогаш:

а) при $x \geq 2$, $M = \ldots = 2\sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}} = 2\sqrt{\frac{x+x-2}{2}} = 2\sqrt{x-1}$,

б) при $1 \leq x < 2$, $M = \ldots = 2\sqrt{\frac{x+|x-2|}{2}} = 2\sqrt{\frac{x-x+2}{2}} = 2\sqrt{1} = 2$,

Значи: при $x \geq 2$, $M = 2\sqrt{x-1}$, а при $1 \leq x < 2$, $M = 2$.

ЗАДАЧИ

1. Доведи ги корените во нормален вид :

$$\sqrt[3]{\frac{xy}{x+y}}, \quad \sqrt{\frac{x^3}{a^2+b^2}}, \quad \sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}, \quad \sqrt[3]{\frac{a}{a^2+2ab+b^2}}, \quad \sqrt[5]{\frac{a}{b}}.$$

2. Да се соберат корените :

а) $3\sqrt{2}+5\sqrt{8}-\sqrt{128}+\sqrt{32}$, б) $2\sqrt{3}+5\sqrt{12}-\sqrt{27}+3\sqrt{243}$,

в) $a\sqrt{\frac{1}{a}}+2\sqrt{a}-5\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}+(a+1)\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}$,

г) $3\sqrt{x^2y}+2xy\sqrt{\frac{1}{x}}+6\sqrt{xy^2}-3x^2\sqrt{\frac{y}{x^2}}$,

д) $5\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{xy^3}+4y\sqrt[5]{\frac{x}{y^2}}-2x\sqrt[5]{\frac{32y^3}{x^4}}$.

3. Изврши ги означените операции :

а) $\left(\frac{2x^2}{y}\sqrt{\frac{y}{3x}}\right)^3$, б) $\frac{3}{2y}\sqrt{\frac{2x^3}{y}}:\left(\frac{6}{4x}\sqrt{\frac{2x}{y^4}}\right)$,

в) $\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt[4]{x^3y^2}}\cdot\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt[6]{x^2y}}:\sqrt[3]{xy^2}$

4. Упрости ги изразите:

а) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}} - 2\sqrt[3]{a} - \sqrt[7]{\sqrt[3]{a^7}} - \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^5}}$

б) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^5}} \cdot \sqrt{\sqrt[6]{a^7}} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}$

в) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

5. Трансформирај ги корените во попрост вид :

а) $\sqrt{11+\sqrt{40}}$, б) $\sqrt{6+\sqrt{11}}$,

в) $\sqrt{17-2\sqrt{30}}$, г) $\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$,

6*. Дадени се броевите: $x = \sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ и $y = \sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Да се одреди: $x+y$, xy и x^2+y^2.

7. Пресметај:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

8*. Докажи го равенството:

а) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$, б) $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$

9*. Одреди ја вредноста на изразот :

а) $A = x + \frac{1}{x}$ за $x = \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

б) $B = \frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}} + \frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$ за $x = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

10. Пресметај:

а) $\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}$ при $x > 1$

б) $\sqrt{1+x+2\sqrt{x}} + \sqrt{1+x-2\sqrt{x}}$ при $0 \le x \le 1$

Упрости ги следниве изрази :

11. $\left[(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+a-b\right]\cdot\left[(a-b)\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-1\right)\right]$.

12. а) $\frac{x+\sqrt{x^2-4x}}{x-\sqrt{x^2-4x}}-\frac{x-\sqrt{x^2-4x}}{x+\sqrt{x^2-4x}}$ б) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x+\sqrt{xy}+y}$.

13. $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

14. а) $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}$, б) $\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$

15*. $\left(\frac{a^2\sqrt[4]{x}+x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x}+\sqrt{ax}}-\sqrt{a^2+x+2a\sqrt{x}}\right)^4$

16. $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$, б) $\left(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}\right)$

17. $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)\cdot\sqrt{\frac{x-y}{xy}}$

18. $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}$

19. $A=2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$

§ 78. РАЦИОНАЛИЗАЦИЈА НА ИМЕНИТЕЛОТ НА ДРОПКА

Дробен израз, што содржи корени, ќе го викаме изразот од видот $Q=\frac{M}{N}$, каде што барем еден од изразите M или N содржи корени.

Трансформацијата на дробен израз, кој во именителот содржи корени, во идентичен на него израз, кој во именителот нема да содржи ниту еден корен, се вика **рационализација на именителот** или **ослободување од ирационалноста на именителот.**

Пред да поминеме на разгледување на оваа нова трансформација на ирационалните изрази, ќе воведеме еден нов поим – **конјугиран ирационален множител.**

78. 1. КОЊУГИРАН ИРАЦИОНАЛЕН МНОЖИТЕЛ

Нека M е даден ирационален израз.

Дефиниција. Конјугиран множител на изразот M се вика секој ненула ирационален израз $S\neq 0$, за кој производот MS да е некој рационален израз. Обратно, и изразот M може да се разгледува како конјугиран множител на изразот S. На пример, изразите $\sqrt[5]{a^4x^3}$ и $\sqrt[5]{ax^2}$ еден за друг се конјугирани множители, бидејќи $\sqrt[5]{a^4x^3}\cdot\sqrt[5]{ax^2}=\sqrt[5]{a^5x^5}=ax$.

Како што може да се насети: за даден произволен ирационален израз одредувањето на неговиот конјугиран множител е мошне сложена задача, меѓутоа секогаш решлива. Постојат и општи методи за нејзино решавање, но тие се предмет на изучување на вишата алгебра. Во елементарната алгебра се разгледува одредување на конјугирани множители само за некои попрости случаи, и тоа :

1^0. За изразот од видот $M=\sqrt[n]{x^py^q...z^r}$, каде показателите p, q, ..., r се природни броеви помали од n, конјугиран множител ќе биде $S=\sqrt[n]{x^{n-p}y^{n-q}...z^{n-r}}$. Навистина, при $x>0$, $y>0$, ... , $z>0$, имаме:

$$MS=\sqrt[n]{x^py^q...z^r}\cdot\sqrt[n]{x^{n-p}y^{n-q}...z^{n-r}}=\sqrt[n]{x^ny^n...z^n}=xy...z.$$

2^0. За изразот од видот $M=\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B}$, каде A и B се рационални изрази, конјугираниот множител се определува врз основа на идентитетот

$$x^n-y^n=(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+...+y^{n-1}\right) \qquad (1)$$

Ако замениме

$x=\sqrt[n]{A}$, $y=\sqrt[n]{B}$ и $S=\sqrt[n]{A^{n-1}}+\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\sqrt[n]{A^{n-3}B^2}+\ldots+\sqrt[n]{B^{n-1}}$, добиваме :

$$MS=\left(\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B}\right)\left(\sqrt[n]{A^{n-1}}+\sqrt[n]{A^{n-2}B}+\ldots+\sqrt[n]{B^{n-1}}\right)=A-B \qquad (2)$$

Во посебен случај :

а) при $n = 2$, за изразот $M=\sqrt{A}-\sqrt{B}$, конјугиран множител е $S=\sqrt{A}+\sqrt{B}$, т.е. имаме:

$$MS=\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)=A-B \qquad (3)$$

б) При $n = 3$, за изразот $M=\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}$ негов конјугиран множител е $S=\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$, т.е имаме

$$MS=\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}\right)=A-B \qquad (4)$$

в) При $n = 4$, за изразот $M=\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{B}$, негов конјугиран множител е $S=\sqrt[4]{A^3}+\sqrt[4]{A^2B}+\sqrt[4]{AB^2}+\sqrt[4]{B^3}$, т.е. $MS = A - B$

3^0. За изразот од видот $M=\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}$, конјугираниот множител се определува врз основа на идентитетите:

$$x^{2k+1}+y^{2k+1}=(x+y)\left(x^{2k}-x^{2k-1}y+\ldots+y^{2k}\right) \qquad (5)$$

$$x^{2k}-y^{2k}=(x+y)\left(x^{2k-1}-x^{2k-2}y+x^{2k-3}y^2-\ldots-y^{2k-1}\right) \qquad (6)$$

Така на пример, во посебен случај:

а) При $n = 2$ за изразот $M=\sqrt{A}+\sqrt{B}$ согласно (6) конјугираниот множител е $S=\sqrt{A}-\sqrt{B}$, т.е. имаме:

$$MS=\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)=A-B$$

б) При $n = 3$, за изразот $M=\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}$ согласно (5) конјугираниот множител е $S=\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}$, т.е.

$$MS=\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}\right)=A+B \qquad (7)$$

в) При $n = 4$, за изразот $M = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B}$ согласно со (6) конјугираниот множител е $S = \sqrt[4]{A^3} - \sqrt[4]{A^2B} + \sqrt[4]{AB^2} - \sqrt[4]{B^3}$, т.е.

$$MS = \left(\sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B}\right)\left(\sqrt[4]{A^3} - \sqrt[4]{A^2B} + \sqrt[4]{AB^2} - \sqrt[4]{B^3}\right) = A - B \qquad (8)$$

4^0. Нека изразот M е полином од квадратниот корен $\sqrt{A}$, т.е. нека $M = P\left(\sqrt{A}\right) = P_1(A) + P_2(A)\sqrt{A}$, каде P_1 и P_2 се полиноми по однос на рационалниот израз A. Во овој случај за конјугиран множител на изразот M го земеме изразот $S = P_1(A) - P_2(A)\sqrt{A}$, па ќе имаме: $MS = P_1^2(A) - P_2^2(A) \cdot A$.

5^0. Изразот M, чиј конјугиран множител S го бараме нека е полином од неколку квадратни корени, т.е. нека

$$M = P\left(\sqrt{A}, \sqrt{B}, ..., \sqrt{C}\right)$$

Во тој случај добивањето на конјугиран множител може да се изврши со последователна примена на изложениот метод во 4^0. За таа цел изразот M прво ќе го разгледаме како полином од аргументот $\sqrt{A}$, т.е. ќе го претставиме во видот $S = P_1 + P_2\sqrt{A}$, каде P_1 и P_2 се полиноми од A и од останатите квадратни корени $\sqrt{B}, ..., \sqrt{C}$. При тоа ќе биде $S_A = P_1 - P_2\sqrt{A}$ и ќе добиеме израз $MS_A = P_1^2 - P_2^2 A$, кој не го содржи коренот $\sqrt{A}$, а ќе претставува полином по однос на останатите корени. За добиениот израз MS_A со аналогна постапка можеме да најдеме множител S_B, таков што изразот MS_AS_B нема да ги содржи корените $\sqrt{A}$ и $\sqrt{B}$, а ќе претставува полином од преостанатите квадратни корени, на крајот ќе го добиеме изразот $MS_AS_B \ldots S_C$, кој нема да содржи корени.

Според тоа, бараниот конјугиран множител на изразот $M = P\left(\sqrt{A}, \sqrt{B}, ..., \sqrt{C}\right)$ може да биде изразот $S = S_AS_B \ldots S_C$.

Пример 1. Да се одреди конјугиран множител на изразот $\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}$.

Решение. Го множиме даденият израз со $S_1 = \sqrt{a} + \sqrt[3]{a}$ и добиваме $MS_1 = \left(\sqrt{a} - \sqrt[3]{a}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}\right) = a - \sqrt[3]{a^2}$. За да се ослободиме и од коренот $\sqrt[3]{a^2}$, добие-

ниот израз го множиме со неговиот конјугиран множител $S_2 = a^2 + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^4}$ и го добиваме рационалниот израз

$$MS_1S_2 = \left(a - \sqrt[3]{a^2}\right)\left(a^2 + \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^4}\right) = a^3 - a^2.$$

Значи, бараниот конјугиран множител на даденият израз $M = \sqrt{a} - \sqrt[3]{a}$ ќе биде $S = S_1S_2 = \left(\sqrt{a} + \sqrt[3]{a}\right)\left(a^2 + a\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^4}\right)$

Пример 2. Да се одреди конјугираниот множител на изразот

$$1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2^2}.$$

Решение. Согласно (4) имаме

$\left[\left(1^2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}\right) + \sqrt[3]{2^2}\right] \cdot \left(1 - \sqrt[3]{2}\right) = 1 - 2 + \sqrt[3]{2^2} - 2 = \sqrt[3]{2^2} - 3$. Потоа, исто така според (4), добиваме: $\left(\sqrt[3]{4} - 3\right)\left(\sqrt[3]{4^2} + 3\sqrt[3]{4} + 9\right) = \left(\sqrt[3]{4}\right)^3 - 3^3 = 4 - 27 = -23$. Значи, бараниот конјугиран множител на даденият израз ќе биде :

$$\left(1 - \sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{4^2} + 3\sqrt[3]{4} + 9\right) = 3 - 7\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}.$$

Да се одреди конјугиран множител на даден ирационален израз ја овозможува и трансформацијата – рационализација на именителот или на броителот на кој било дробен ирационален израз $Q = \frac{M_1}{M_2}$. Ако S_2 е конјугиран множител на именителот M_2 тогаш важи равенството $Q = \frac{M_1S_2}{M_2S_2}$ $(\text{при } M_2 \neq 0)$ во кое именителот на дропката на десната страна нема да содржи корени. Аналогно, ако S_1 е конјугиран множител на броителот M_1 тогаш $Q = \frac{M_1S_1}{M_2S_1}$ $(\text{при } S_1 \neq 0)$ ќе претставува израз во кој броителот на дропката на десната страна нема да содржи корени.

Трансформацијата- рационализацијата на именителот (или на броителот) на дробен ирационален израз ќе ја покажеме со следниве примери:

Пример 3. Да се рационализира именителот на дропката $\frac{1}{\sqrt[3]{18}}$.

Решение. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{18}}=\dfrac{\sqrt[3]{2^2\cdot 3}}{\sqrt[3]{2\cdot 3^2}\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot 3}}=\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{3^3\cdot 2^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{12}}{3\cdot 2}=\dfrac{\sqrt[3]{12}}{6}$.

Пример 4. Да се упрости изразот $\dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$.

Решение. $\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{16-12}}=\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{12}}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Пример 5. Да се рационализира именителот на дропката

$$\frac{1}{3+3\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}}.$$

Решение. Именителот на дропката прво го разложуваме на множители:

$$\frac{1}{3(1+\sqrt{2})+\sqrt{5}(1+\sqrt{2})}=\frac{1}{(1+\sqrt{2})(3+\sqrt{5})}=\frac{(\sqrt{2}-1)(3-\sqrt{5})}{(2-1)(9-5)}=\frac{(\sqrt{2}-1)(3-\sqrt{5})}{4}.$$

Пример 6. Да се рационализира именителот на $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

Решение. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{2\cdot 3}+\sqrt[3]{2\cdot 2}}=\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\left(\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2^2}\right)\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)}=$

$$=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

Пример 7. Да се рационализира именителот на $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

Решение. Ќе се повикаме на идентитетот:

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

Да означиме: $x=\sqrt[3]{a}$, $y=\sqrt[3]{b}$, $z=\sqrt[3]{c}$. Тогаш

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}=\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)$$

Ги множиме броителот и именителот на дадената дропка со изразот $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}\right)$ и добиваме:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2}-\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{ac}-\sqrt[3]{bc}}{a+b+c-3\sqrt[3]{abc}}.$$

Ако производот abc е точен куб, тогаш решението на задачата е завршено. Во спротивен случај броителот и именителот на добиената дропка ги множиме со неполниот квадрат на збирот од два броја, т.е. со изразот:

$(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, а по множењето добиваме дропка, чиј именител ќе биде $(a+b+c)^3-27abc$.

Пример 8. Да се рационализира броителот на $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}$.

Решение. $\dfrac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\left(x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}{x\sqrt{xy}+yx-xy-y\sqrt{xy}}=\dfrac{x-y}{(x-y)\sqrt{xy}}=\dfrac{1}{\sqrt{xy}}.$

Пример 9. Да се рационалзира именителот на $\dfrac{1}{2+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{4}}}$.

Решение. $\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)+1}=\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{\left[\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)+1\right]\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}=\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{2-1+\sqrt[3]{2}-1}=$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\sqrt[3]{2^2}}{2}=\frac{2-\sqrt[3]{4}}{2}=1-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}.$$

ЗАДАЧИ

1. Да се одреди конјугираниот множител на изразот $\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$.

Рационализирај ги именителите на дропките *(2 – 7) :*

2. а) $\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}$, б) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, в) $\dfrac{a^3}{\sqrt[n]{a^{n-2}}}$, г) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

3. а) $\dfrac{a}{\sqrt{a-\sqrt{a}}}$, б) $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, в) $\dfrac{10}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{3}}$.

4. а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}$, б) $\dfrac{9}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{10}+\sqrt{15}}$, в) $\dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}$.

5*. а) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$, б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}$, в) $\dfrac{5x+1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x+1}}$

6*. а) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{5}}$ б) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$, в) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

7. а) $\dfrac{1}{\left(3-\sqrt[3]{3}\right)^3}$, б) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2\sqrt{3}-2}}$, в) $\dfrac{x^3-xy^2}{\sqrt{x-\sqrt{xy}}}$.

Упрости ги изразите *(8 – 11)*:

8. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+b}}\right):\left(1+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\right)$

9. $\dfrac{a+2+\sqrt{a^2-4}}{a+2-\sqrt{a^2-4}}+\dfrac{a+2-\sqrt{a^2-4}}{a+2+\sqrt{a^2-4}}$

10. а) $\dfrac{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}+\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}-\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}}-\dfrac{1}{a}$, б) $\dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$.

11*. а) $\dfrac{a+2\sqrt{ab}+9b}{\sqrt{a}+3\sqrt{b}-2\sqrt[4]{ab}}-2\sqrt{b}$, б) $\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$.

§ 79. ПРИМЕРИ ЗА ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

На следниве одбрани примери ќе презентираме неколку посебни приоди во трансформацијата на ирационалните изрази.

Пример 1. Да се упрости изразот $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$

Решение. Да земеме предвид и замениме $4=\sqrt{4}+\sqrt{4}$. Тогаш имаме:

$$A=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1.$$

Пример 2 . Да се упрости изразот

$$y=\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}\,,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Решение. Имаме $y=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=|x+2|+|x-1|+|x+3|$.

Броевите *–2, 1* и *3* множеството на реалини броеви го разделуваат на четири интервали: $(-\infty,-2]$, $(-2,1]$, $(1,3]$ и $(3,\infty)$. Ќе разликуваме четири случаи:

а) $x\in(-\infty,2]\Rightarrow|x+2|=-x-2,\quad|x-1|=-x+1,\quad|x-3|=-x+3$.
Значи, $y=(-x-2)+(-x+1)+(-x+3)=-3x+2$ при $x\le -2$.

б) $x\in(-2,1]\Rightarrow|x+2|=x+2,\quad|x-1|=-x+1,\quad|x-3|=-x+3$
Значи, $y=(x+2)+(-x+1)+(-x+3)=-x+6$ при $x\in(-2,1]$.

в) $x\in(1,3]\Rightarrow|x+2|=x+2,\quad|x-1|=x-1,\quad|x-3|=-x+3$
Значи, $y=(x+2)+(x-1)+(-x+3)=x+4$ при $x\in(1,3]$.

г) $x\in(3,\infty]\Rightarrow|x+2|=x+2,\quad|x-1|=x-1,\quad|x-3|=x-3$.
Значи, $y=(x+2)+(x-1)+(x+3)=3x-2$ при $x\in(3,\infty)$.

Според тоа: $y=\begin{cases}-3x+2, & \text{ако } x\le -2\\ -x+6, & \text{ако } -2<x\le 1\\ x+4, & \text{ако } 1<x\le 3\\ 3x-2, & \text{ако } x>3\end{cases}$

Пример 3. Да се пресмета вредноста на изразот $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

Решение. Нека $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=x$, тогаш

$$x^3=40+3\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}\cdot\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)$$

или $x^3=40+3\sqrt[3]{400+392}\cdot x$. Оттука $x^3-6x-40=0.$

Оваа равенка има еден реален корен $x=4$.

Според тоа, бараната вредност на изразот е 4.

Пример 4. Да се одреди збирот

$$S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$$

Решение. Со рационализација на именителот го добиваме равенството $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k}}{2}$.

Според тоа $S_n=\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2n+1}-1\right).$

Пример 5. Да се утврди кој од броевите $\sqrt{30}+\sqrt[3]{3}$ или $2\sqrt{8-\sqrt{15}}$ е поголем.

Решение . Двата броја се позитивни, бидејќи $8>\sqrt{15}$.

Нека $\sqrt{30}+\sqrt[3]{3}\ \vee\ 2\sqrt{8-\sqrt{15}}$, каде знакот $\vee$ означува еден од знаците $<$, $>$, $=$. Ги квадратираме двете страни, па добиваме: $30+2\cdot\sqrt{30}\cdot\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{9}\vee 4\left(8-\sqrt{15}\right)$, од каде $2\cdot\sqrt{30}\cdot\sqrt[3]{3}+4\sqrt{15}\vee 2-\sqrt[3]{9}$.

Бидејќи оваа релација е еквивалентна на појдовната, а од таму што и нејзината лева страна е позитивна, а десната – негативна, заклучуваме дека симболот $\vee$ го заменува знакот $>$.

Според тоа, ќе важи $\sqrt{30}+\sqrt[3]{3}>2\sqrt{8-\sqrt{15}}$.

Пример 6. Да се докаже равенството

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}=\frac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}$$

Решение. Левата и десната страна се позитивни, следува дека и нивните квадрати се еднакви:

$$\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}+2\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}\cdot\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}=\frac{2a+4}{\sqrt{a}}.$$

Потоа

$$2\sqrt{a}+2\sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}\right)}=2\sqrt{a}+2\sqrt{a-\frac{a^2-4}{a}}=$$

$$=2\sqrt{a}+2\sqrt{\frac{4}{a}}=\frac{2a+4}{\sqrt{a}},\ \text{штд.}$$

Пример 7. Да се докаже дека при $n>2$ важи неравенството $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$.

Доказ. Согласно правилото IV за споредување на корени, доволно е да докажеме дека важи $n^{n+1}>(n+1)^n$ или $\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}<1$, односно $\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<1$ или $\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1$. А согласно неравенството на Непер (види пример 3 во §71 неравенство (6)) имаме $\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<\frac{3}{n}\le 1$, ако $n\ge 3$, штд.

Пример 8. Да се пресмета вредноста на изразот

$$A=\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}\quad\text{за}\quad x=\frac{2ab}{b^2+1},\quad a>0,\quad b>1$$

Решение.

$$A=\frac{\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)^2}{\left(\sqrt{a+x}\right)^2-\left(\sqrt{a-x}\right)^2}=\frac{a+x+2\sqrt{a^2-x^2}+a-x}{a+x-a+x}=\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=$$

$$= \frac{a+\sqrt{a^2-\left(\frac{2ab}{b^2+1}\right)^2}}{\frac{2ab}{b^2+1}} = \frac{a+\sqrt{a^2\cdot\frac{\left(b^2+1\right)^2-4b^2}{\left(b^2+1\right)^2}}}{\frac{2ab}{b^2+1}} = \frac{a+a\sqrt{\frac{\left(b^2-1\right)^2}{\left(b^2+1\right)^2}}}{\frac{2ab}{b^2+1}} =$$

$$= \frac{a(1+\frac{b^2-1}{b^2+1})}{\frac{2ab}{b^2+1}} = \frac{b^2+1+b^2-1}{2b} = b.$$

Пример 9. Да се упрости изразот :

$$B = \left[1+\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2\right]\cdot\left[1+\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}\right)^2\right]$$

Решение. Забележуваме дека $-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ и $-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ се корени на квадратна равенка $x^2+px+q=0$. Да ги означиме со x_1 и x_2. Тогаш имаме $B=\left(1+x_1^2\right)\left(1+x_2^2\right)=1+\left(x_1^2+x_2^2\right)+\left(x_1x_2\right)^2=1+\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2+\left(x_1x_2\right)^2=$

$=1+(-p)^2-2q+q^2=p^2+(1-q)^2$. Значи, $B=p^2+(1-q)^2$.

Пример 10. Да се одреди вредноста на изразот

$$A=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}} \text{ за } x=3.$$

Решение. Бидејќи е $x^2\pm4x\sqrt{2}+8=\left(x\pm2\sqrt{2}\right)^2$, затоа изразот A може да се запише во видот

$$A=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{x-2\sqrt{2}}\right)^2}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\left(\sqrt{x+2\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}.$$

Потоа, ако се примени идентитетот на Лагранж за $x = 3$ и од

$\sqrt{3\pm 2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{9-8}}{2}}\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{9-8}}{2}}=\sqrt{\frac{4}{2}}\pm\sqrt{\frac{2}{2}}=\sqrt{2}\pm 1$ следува дека

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}=\frac{2}{1}=2$$

ЗАДАЧИ

1. Одреди ја вредноста на изразот

$$\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+x}}+\frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x}} \quad \text{за } x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Докажи ги равенствата (2 – 7):

2. $\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|=|x|+|y|$, за кои било $x, y \in R$ со еднаков знак.

3. $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$

4*. $\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

5. $\sqrt{1+n+\sqrt{1+2n}}+\sqrt{1+n-\sqrt{1+2n}}=\sqrt{2+4n}$

6*. $\left(\frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-1}-\frac{a}{2\sqrt{a}+1}-\frac{a}{4a-1}\right)\cdot\frac{2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a^5}}=\frac{1}{a}$

7. $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}=5+3\sqrt{2}$

Упрости ги следниве изрази (8 - 12) :

8*. $\left(\dfrac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}\right):\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}\right)-\sqrt[6]{x}$

9. а) $(x+y):\sqrt[n]{\dfrac{(x+y)^{n-1}}{x-y}}$, б) $\sqrt{\dfrac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}}:\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}$

10. а) $\sqrt{x+y+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sqrt{x+y+\sqrt{2xy}}$, б) $a^3:\sqrt{a^2\sqrt{a^2\sqrt{a}}}$

11. а) $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$, б) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}$

12. $\sqrt{a+b+c+\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ac+bc}}$

13. Изразот $\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}}$ да се претстави во вид на збир од три квадратни корени.

14. Да се одреди вредноста на изразот $M=\dfrac{a^2-6a+1}{a^2-1}$ за $a=3+\sqrt{8}$

§ 80. ОБОПШТУВАЊЕ НА ПОИМОТ ЗА СТЕПЕН

Поимот за n – ти степен на бројот a , симболички a^n, со показател природен број n , по дефиниција го воведуваме како производ на еднакви множители и сите еднакви на бројот a , т.е.

$$a^n \overset{def}{=} \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{пати}} \text{ , при n > 1 и } a^n \overset{def}{=} a \text{ при n = 1} \qquad (1)$$

Меѓутоа, симболите $a^0, a^{-3}, a^{\frac{1}{2}}, a^{\sqrt{2}}$, итн. немаат смисла согласно горната

дефиниција, бидејќи нема смисла бројот a да се помножи сам со себе *0,* или *–3,* или $\frac{1}{2}$ или $\sqrt{2}$ пати . Затоа, ако сакаме на симболот a^n, каде n е природен број, да му дадеме некоја одредена смисла; а во математиката такви барања често поставуваме, треба преку дополнителни дефиниции да го утврдиме тоа во секој случај одделно.

Поаѓајќи од горната дефиниција за степенот a^n со показател природен број и својствата на множењето, лесно доаѓаме до следниве основни својства (правила за операции со степени) :

(i) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$,

(ii) $\left(a^n\right)^m = a^{nm}$, а освен нив уште и :

(iii) $a^n : a^m = a^{n-m}$, при $n > m$ и $a \neq 0$

(iv) $(a \cdot b)^n = a^n b^n$,

(v) $(a : b)^n = a^n : b^n$, при $b \neq 0$

При секое ново проширување на поимот за степен, ќе се раководиме од следново барање (принцип): **За степените со кој било показател треба да останат во важност основните својства** (i) **и** (ii) **на степените со показател природен број.** А ако останат во важност својствата (i) и (ii), тоа повлекува дека ќе важат и останатите својства (iii) и (iv) и (v) на степените со показател природен број.

1^0. **Степен со показател нула.** Да видиме каква дефиниција треба да усвоиме за симболот a^0, при која ќе важи равенството (i) и за $n = 0$. Ако во равенството (i) ставиме $n = 0$, ќе добиеме $a^0 \cdot a^m = a^{0+m}$. Оттука следува дека, при $a \neq 0$ единствена можна алтернатива за a^0 е да ставиме $a^0 = 1$, а симболот 0^0 да остане недефиниран.

Ова расудување не е доказ за равенството $a^0 = 1$, туку тоа покажува само каква дефиниција треба да усвоиме за степенот a^0, за да равенството (i) остане сочувано. Значи, усвојуваме :

Дефиниција 1. Нултиот степен на кој било реален број, различен од нула е еднаков на единица, т.е.

$$a^0 \overset{def}{=} 1, \quad \text{при } a \neq 0$$

Значи, на симболот 0^0 не му придаваме никаква смисла.

Пример. $5^0 = 1$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$, $\left(\sqrt{3}\right)^0 = 1$, итн.

Точноста на равенството (ii) ја проверуваме непосредно :

$$\left(a^0\right)^n = 1^n = a^0, \quad \left(a^m\right)^0 = 1 = a^0, \quad \left(a^0\right)^0 = 1^0 = a^{0\cdot 0}.$$

Уочуваме дека, со вака усвоената дефиниција за степенот a^0 при $a \neq 0$ важат и останатите својства (iii), (iv) и (v) . За илустрација ќе го докажеме само својството (iv) :

Ако во равенството (iv) ставиме $n = 0$, ќе добиеме $(ab)^0 = a^0 b^0$, од каде при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ имаме $(ab)^0 = 1$, а исто така и $a^0 b^0 = 1 \cdot 1 = 1$.

2^0. **Степен со цел негативен показател.** Да појдеме пак од равенството (i) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. Ако во него ставиме $m = -n$, каде што $n \in \mathbb{N}$, тогаш ќе мора да важи: $a^n \cdot a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$.

Оттука $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (каде $a \neq 0$). Според тоа, за да се сочува својството (i) , треба да ја усвоиме следнава :

Дефиниција 2. Ако $a \neq 0$, тогаш усвојуваме дека важи :

$$a^{-n} \overset{def}{=} \frac{1}{a^n} \tag{3}$$

Изразот a^{-n} при $a = 0$ останува неопределен .

Својството (i) треба да важи за кои било цели броеви n и m . Ако на пример, бројот n е позитивен , а m – негативен цел број, т.е. $m = -k$ (каде k е позитивен цел број). Тогаш имаме :

$$a^n \cdot a^m = a^n \cdot a^{-k} = a^n \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{a^n}{a^k} = \begin{cases} a^{n-k}, \text{ако } n > k \\ \frac{1}{a^{k-n}}, \text{ако } n < k \end{cases}$$

Но, во вториот случај ќе биде $\frac{1}{a^{k-n}} = a^{-(k-n)} = a^{n-k}$.

Гледаме дека и во двата случаја важи

$$a^n a^m = a^{n-k} = a^{n+(-k)} = a^{n+m}$$

Постојат и други посебни случаи. Така на пример, ако и двата показателa n и m се негативни цели броеви, тогаш при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ имаме

$$a^{-n}a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^n a^m} = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)} = a^{(-n)+(-m)}.$$

Точноста на својството (ii) ја проверуваме непосредно:
Нека и двата показателa се негативни. Тогаш имаме :

$$\left(a^{-n}\right)^{-m} = \left(\frac{1}{a^n}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^m} = \frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} = a^{nm} = a^{(-n)(-m)}.$$

И тука постојат и други можни случаи. Предлагаме сами да ги проверите. Може да се докаже дека, со усвоената дефиниција 2 остануваат во важност и останатите својства (iii) , (iv), (v).

За илустрација ќе го докажеме само својството (iv) .

Нека $n = -k$ е цел негативен број, тогаш $k > 0$ и затоа:

$$(ab)^n = (ab)^{-k} = \frac{1}{(ab)^k} = \frac{1}{a^k b^k} = a^{-k}b^{-k} = a^n b^n.$$

Точно така се докажува и својството (v).

Во посебен случај степенот на дропка со цел негативен показател ќе биде:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad , \quad \text{т.е.} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \qquad (4)$$

Значи, ќе важи следново:

Правило. Дропка се степенува со цел негативен показател, кога нејзината реципрочна вредност се степенува со показател, што е спротивен на даденият.

Степените со цел показател многу често ги користиме во науката и техниката за пократко запишување на големите и многу мали броеви. Така, на пример :

а) Во *22,4* литри кислород при нормални услови се содржат 602400000000000000000000 молекули (Лош Мидов број). Тој број пократко го запишуваме : $6{,}024 \cdot 10^{23}$.

б) Масата на еден електрон (во мирување) изнесува:
0,00000000000000000000000000009107 грама.Тој резултат со помош на степен кратко го запишуваме : $9{,}107 \cdot 10^{-28}\ gr$.

3^0. **Степени со рационален показател.** Нека a е позитивен реален број, $a > 0$, а $r = \frac{m}{n}$ рационален број. Ќе си поставиме задача да го дефинираме степенот a^r со рационален показател, така што и за него да важат основните својства (i) и (ii) на степените со показател природен број.

Да ставиме во равенството (ii) во посебен случај $m = \frac{1}{n}$, тогаш ќе добиеме $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a$. Оттука $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

Или за степенот $a^r = a^{\frac{m}{n}}$ за да важи својството (ii) треба да важи равенството

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m$$

Оттука следува дека степенот $a^{\frac{m}{n}}$ треба да го дефинираме како n – ти корен од степенот a^m. Значи, ја усвојуваме :

Дефиниција 3. Ако $a \geq 0$, тогаш под симболот $a^{\frac{m}{n}}$ ќе го подразбираме аритметичкиот корен $\sqrt[n]{a^m}$, т.е.

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{def}{=} \sqrt[n]{a^m}, \text{ каде } m, n \in N \tag{5}$$

Во посебен случај за $m = 1$, имаме

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \tag{6}$$

Поради $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$, неизбежно се наметнува прашањето: дали е точно и равенството

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mk}{nk}} \tag{7}$$

Дека тоа равенство е точно, се гледа од равенството $\sqrt[mk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Да го провериме важењето на својствата (i) и (ii) за произволни позитивни рационални показатели $n = \frac{p}{q}$, $m = \frac{r}{s}$. За нив имаме:

(i) $$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt{a^{ps+rq}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$$

(ii) $$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[qs]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{sq}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$$

Во дефиницијата 3 претпоставивме m и n да се природни броеви, т.е. $r = \frac{m}{n}$ да е позитивен рационален број. Поимот за степен со негативен рационален показател, аналогно на степените со цел негативен показател, го дефинираме вака:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \tag{8}$$

Ако $r > 0$, природно е да се стави $0^r = 0$, но ако е $r < 0$, тогаш степенот 0^r нема мисла. Со проверка може да се покаже дека, основните својства (i) и (ii) се сочувани и за степените со негативен рационален показател. Предлагаме тоа да го покажете сами.

Во посебен случај, ако рационалниот број $r = \frac{m}{n} = k$ е цел број, т.е. $m = nk$, тогаш $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{nk}} = a^k$.

Тоа покажува дека, поимот за степен со цел показател е посебен случај од поимот за степен со рационален показател. Според тоа, за секој рационален број r и позитивен реален број a, степенот a^r е еднозначно определен.

Забележуваме дека изразот $a^{\frac{m}{n}}$ при $a < 0$ и $n \neq 1$ според дефиницијата *3* остана недефиниран. Причината е следна: Ако сакаме и тој израз да го опфатиме со воведената дефиниција *3*, тогаш равенството *(7)* нема да важи. На пример, поради $\sqrt[5]{-32} = -2$ би требало да имаме $(-32)^{\frac{1}{5}} = -2$; но од друга страна поради

$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$ ќе имаме $(-32)^{\frac{2}{10}}=\sqrt[10]{(-32)^2}=\sqrt[10]{32^2}=2$. Значи, доаѓаме до контрадакција со равенството *(7)* , бидејќи е $(-32)^{\frac{1}{5}}\neq(-32)^{\frac{2}{10}}$. Или во друг случај: $(-16)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{-16}$ доаѓаме до корен, кој во полето на реалните броеви нема смисла.

Затоа, ако ја користиме дефиницијата $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ и при $a < 0$, тогаш $a^{\frac{1}{n}}$(при $a<0$) може да се разгледува само за непарни вредности на n , бидејќи при парен број n, $\sqrt[n]{a}$ нема смисла.

Според тоа, при $a < 0$, степенот $a^{\frac{m}{n}}$ со рационален показател го разгледуваме само при следниве услови: дропката $\frac{m}{n}$ ако е нескратлива, а именителот $n = 2k + 1$ да е непарен број. Тогаш имаме: $a^{\frac{m}{2k+1}}=\left(a^{\frac{1}{2k+1}}\right)^m=\sqrt[2k+1]{a^m}$.

ЗАДАЧИ

1. Пресметај : а) $8-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, б) $2^{-5}-2^5-0{,}5^{-2}$, в) $(7-3^2)^{-1}$.

2. Кој број е поголем : а) 3^{-5} или 3^{-7} , б) 3^{-5} или 4^{-5}.

3.Трансформирај ги следниве изрази во изрази без негативни степенови показатели : $\frac{3a^{-2}c^{-3}}{5x^{-1}}$, $\frac{2^{-2}a^3}{3^{-1}x^2y^{-4}}$, $\frac{4a^{-3}}{5a^2c^{-2}x^{-3}}$.

4. Запиши ги дропките без именител $\frac{x}{ay^2}$, $\frac{5ax^2}{(a-b)^{-3}}$, $\frac{3x}{2y^{-2}}$.

5. Замени ги следниве степени со соодветните им корени :

$x^{\frac{3}{4}}$, $x^{-\frac{1}{3}}$, $x^{-0{,}5}$, $a^{0{,}25}$, $(x+y)^{\frac{2}{3}}$

6. Запиши ги корените во вид на степени со показател рационален број :

$\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[n-1]{a^2}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}$, $\sqrt[m]{x^{-2}}$, $\sqrt[4]{(a-b)^{-n}}$

Изврши ги означените операции во изразите (7 – 11) :

7. а) $\frac{4}{5}a^{-2}c^{-3}x\cdot 10a^{-4}c^{3}x^{-3}$, б) $\left(x^{-2}+ax-x^{0}\right):x^{-2}$.

8. а) $\left(x^{-2}+x^{-1}+1\right)\left(x^{-1}-1\right)$, б) $\left(x^{-3}y^{-1}\right)^{-1}:\left(x^{-2}y^{3}\right)^{-2}$

9. а) $x^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{3}{4}}:x^{-0,25}$, б) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)$, в) $9^{-\frac{1}{2}}+0,25^{-\frac{1}{2}}$

10. а) $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)$, б) $\left(x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{5}{6}}-x^{\frac{2}{3}}\right):x^{\frac{1}{2}}$, при $x>0$

11. а) $\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$, б) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{4}}\right)^{-2}$, в) $\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)^{3}$

12. Одреди ја вредноста на изразот $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ за

$$a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1} \text{ и } b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}.$$

Упрости ги следниве изрази (13 – 16) :

13. а) $2x^{-5}:x^{-8}+0,25^{-1}x^{-3}-x^{8}:x^{5}\cdot x^{0}$, б) $\left[\frac{2}{5}x^{-3}\left(y^{2}\right)^{-4}\right]^{-3}$

14. а) $\left[\frac{1+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}(x^{3}+y^{6})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left[1-xy\left(x^{3}+y^{6}\right)\right]}\right]^{-1}$, б) $\left(\frac{2x^{-\frac{5}{8}}}{x^{1,25}y^{-\frac{2}{3}}}:\frac{y^{-\frac{5}{9}}}{3x^{-0,75}}\right)^{-\frac{1}{4}}$

15. а) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{1}{x^{1,5}-1}$, б) $\left(\dfrac{9x^2y^{\frac{3}{4}}}{0{,}16x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

16. $a^{\frac{1}{2}}-\dfrac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{2}{a^{-\frac{3}{2}}}$.

§ 81. СВОЈСТВА НА СТЕПЕНИТЕ СО РАЦИОНАЛЕН ПОКАЗАТЕЛ

Видовме дека за степените со показател нула, цел негативен број и рационален број усвоивме такви дефиниции, при што да се сочувани и за нив основните својства (правила за операции) на степените со природен показател. Според тоа ќе важи:

Теорема [81.1] . ***Ако*** a ***и*** b ***се позитивни реални броеви, а*** r ***и*** s ***рационални броеви, тогаш важат равенствата:***

(i) $a^{r\cdot s}=a^{r+s}$

(ii) $\left(a^r\right)^s=a^{rs}$

(iii) $\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$, при $a\neq 0$

(iv) $(ab)^r=a^rb^r$

(v) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$, при $ab\neq 0$

Ќе докажеме дека степените со рационален показател ги имаат уште и следниве поважни својства :

Теорема [81.2]. ***Степеноѿ на ѿозиѿивен реален број*** a ***со кој било рационален ѿоказаѿел*** r ***е ѿозиѿивен број*** , т.е.

$$a>0\wedge r\in\Theta \;\Rightarrow\; a^r>0$$

Доказ. а) Ако $a>0$ и $r=n\in\mathbb{N}$, тогаш врз основа на дефиницијата за степен со природен показател и производ на позитивни броеви, имаме

$$a^r=a^n=a\cdot a\cdot\ldots\cdot a>0$$

б) Ако $a>0$ и $n=0$, тогаш $a^0=1>0$.

в) Ако $a>0$ и $r=-n$, (каде што $n\in\mathbb{N}$), тогаш $a^r=a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}>0$, бидејќи е $a^n>0$.

г) Ако $a>0$ и $r=\dfrac{m}{n}$, каде што $m,n\in\mathbb{N}$, тогаш $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}>0$, бидејќи $a^m>0$, а коренот е аритметички.

д) Ако $r=-s$, каде што s е позитивен рационален број, тогаш $a^r=a^{-s}=\dfrac{1}{a^s}>0$, бидејќи е $a^s>0$.

Теорема [81.3] ***За секој рационален број r важи $1^r=1$.***

Доказ. Нека $r=n\in\mathbb{N}$, тогаш $1^n=1\cdot1\cdot1\cdots1=1$. Ако $r=0$, тогаш $1^0=1$. Ако $r=-n$ ($n\in\mathbb{N}$), тогаш $1^r=1^{-n}=\dfrac{1}{1^n}=1$. Ако е $r=\dfrac{m}{n}>0$ ($m, n, \mathbb{N}$), тогаш $1^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{1^m}=\sqrt[n]{1}=1$, бидејќи $1^n=1$. Ако е $r=-s<0$ ($s\in Q^+$), тогаш $1^r=1^{-s}=\dfrac{1}{1^s}=\dfrac{1}{1}=1$. Со тоа теоремата е докажана.

Теорема [81.4] ***Степенот на позитивен реален број поголем од еден ($a>1$) со позитивен рационален показател е поголем од еден, а со негативен рационален показател е помал од еден т. е.***

$$a>1\Rightarrow\begin{cases}r>0\Rightarrow a^r>1 & (1)\\ r<0\Rightarrow a^r<1 & (2)\end{cases}$$

Доказ. а) Ако $r=n$, тогаш $a^r=a^n=a\cdot a\cdot a\cdots a>1$, бидејќи производот на броеви поголеми од единица е исто така поголем од 1. б) Ако $r=\dfrac{m}{n}>0$, каде

што m , $n \in \mathbb{N}$, тогаш $a^r = a^{\frac{m}{n}}$, а треба да докажаме дека $a^r = a^{\frac{m}{n}} > 1$. Да допуштиме дека $a^{\frac{m}{n}} \leq 1$. Со степнување на двете страни на n – ти степен, добиваме $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n \leq 1$,односно $a^m \leq 1$. Но бидејќи е $a > 1$, затоа е и $a^m > 1$, доаѓаме до контрадикција; значи, претпоставката дека $a^{\frac{m}{n}} \leq 1$ не е точна. Со тоа имплика-цијата (2) е докажана.

в) Нека сега е $r = -s$, каде што s е позитивен рационален број. Тогаш $a^r = a^{-s} = \frac{1}{a^s}$. Но ние веќе докажавме дека, ако $s > 0$ и $a > 1$, тогаш $a^s > 1$. Според тоа, $a^r = \frac{1}{a^s} < 1$, штд.

Со тоа теоремата е целосно докажана.

Теорема [81.5]. ***Степеноѿ на ѿозиѿивен реален бројѿомал од еден*** *(0 <a<1)* ***со ѿозиѿивен рационален ѿоказаѿел е ѿомал од*** *1* ***, а со неѓаѿивен рационален ѿоказаѿел, е ѿоѓолем од*** *1* ***, ѿ.е.***

$$0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} r > 0 \Rightarrow a^r < 1 & (4) \\ r < 0 \Rightarrow a^r > 1 & (5) \end{cases}$$

Оваа теорема се докажува аналогно како претходната . Предлагаме сами да ја докажете.

Теорема [81.6] . ***Ако*** $a \in \mathbb{R}^+$ ***и*** $r, s \in \mathbb{Q}$ ***, ѿоѓаш важи:***

$$a > 1 \Rightarrow \left(r > s \Rightarrow a^r > a^s\right) \quad (6)$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \left(r > s \Rightarrow a^r < a^s\right) \quad (7)$$

Доказ. Ако $a > 1$ и $r > s$. Од $r > s$ следува $r - s > 0$, а според Т[81.4] ќе имаме $a^{r-s} > 1$, т.е. $\frac{a^r}{a^s} > 1$. Бидејќи согласно Т[81.2] е $a^s > 0$, тогаш од $\frac{a^r}{a^s} > 1$ добиваме $a^r > a^s$, штд.

Ако пак $0 < a < 1$ и $r > s$, тогаш согласно Т[81.5] ќе биде $a^{r-s} < 1$, т. е. $\frac{a^r}{a^s} < 1$, односно $a^r < a^s$, штд.

Примери : $\pi^{0,2} < \pi^{\frac{1}{2}}$, бидејќи $\pi > 1$ и $\frac{1}{2} > 0,2$, $\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 > \left(\frac{\pi}{4}\right)^5$, бидејќи $\frac{\pi}{4} < 1$ и $5 > 3$.

Теорема [81.7] ***Ако а е позитивен реален број и различен од еден*** $(a > 0, a \neq 1)$, ***тогаш важи:***

$$a^r = a^s \Leftrightarrow r = s \tag{8}$$

Доказ. Ако е $r = s$, тогаш очигледно е дека ќе важи и равенството $a^r = a^s$. Да претпоставиме сега дека $a^r = a^s$. За рационалните броеви r и s постои една и само една од следниве три можности: $r > s$, $r < s$, $r = s$. Ако претпоставиме $r > s$, тогаш според Т [81.6], а во зависност од тоа дали е $a > 1$ или $0 < a < 1$, ќе добиеме $a^r > a^s$ или $a^r < a^s$ што противречи на претпоставката $a^r = a^s$. Слично, ако дозволиме $r < s$ пак според Т [81.6] ќе добиеме, или $a^r > a^s$ или $a^r < a^s$. Значи, пак доаѓаме до контрадикција со претпоставката $a^r = a^s$. Според тоа, останува дека $r = s$.

Врз основа на Т [81.6] и Т [81.7] по метод од спротивното лесно може да се докаже и обратното тврдење на Т [81.6] кое гласи:

Теорема [81.8] ***Ако*** $a \in \mathbb{R}^+$ *и* $r, s \in Q$, ***тогаш важи:***

$$a > 1 \Rightarrow \left(a^r > a^s \Rightarrow r > s\right) \tag{9}$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow \left(a^r > a^s \Rightarrow r < s\right) \tag{10}$$

Ќе ја докажаме уште следнава :

Теорема [81.9] ***Ако*** $a, b \in \mathbb{R}^+$ *и* $r, \in Q$, ***тогаш ќе важи:***

$$a > b \Leftrightarrow a^r > b^r, \qquad \text{при } r > 0 \tag{11}$$

$$a > b \Leftrightarrow a^r < b^r, \qquad \text{при } r < 0 \tag{12}$$

$$a = b \Leftrightarrow a^r = b^r, \qquad \text{за секој } r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \tag{13}$$

Доказ. Ќе ја докажаме само еквиваленцијата (11). Другите две еквиваленции се докажуваат аналогно.

Нека $r>0$. Да препоставиме дека $a>b>0$, тогаш ќе имаме $\frac{a}{b}>1$, а согласно Т [81.4] ќе важи $\left(\frac{a}{b}\right)^r>1$, односно $\frac{a^r}{b^r}>1$. Бидејќи е $b^r>0$, затоа од $\frac{a^r}{b^r}>1$ следува дека $a^r>b^r$. На таков начин докажаме дека важи импликацијата

$$a>b \Rightarrow a^r>b^r, \text{ при } r>0.$$

Останува да докажаме дека важи и обратната импликација

$$a^r>b^r \Rightarrow a>b, \text{ при } r>0.$$

Нека е $a^r>b^r$, каде што a и b се позитивни реални броеви, а r – позитивен рационален број. За броевите a и b постои само една од следниве три можности: $a>b$, $a<b$, $a=b$. Ако претпоставиме да е $a<b$, тогаш имаме дека $b>a$, а според претходното докажано тврдење, ќе добиеме дека: $b^r>a^r$ односно $a^r<b^r$, што противречи на претпоставката $a^r>b^r$. Ако пак допуштиме дека $a=b$, тогаш очигледно е дека ќе биде $a^r=b^r$. Значи, пак доаѓаме до контрадикција со претпоставка $a^r>b^r$. Според тоа, останува дека $a>b$, штд. Со тоа ја докажавме и импликацијата: $a^r>b^r \Leftrightarrow a>b$, при $r>0$.

На таков начин еквиваленцијата (11) е целосно докажана.

Примери: $3^{-5}>5^{-5}$, $8^{\frac{2}{3}}>3^{\frac{2}{3}}$, $7^{-\frac{1}{2}}>9^{-\frac{1}{2}}$, $0{,}75^{-2}>\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

ЗАДАЧИ

1. Кој број е поголем :

а) $5^{\frac{3}{4}}$ или $5^{-\frac{3}{4}}$, б) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ или $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1}$, в) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ или $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, г) $3^{\frac{1}{2}}$ или $9^{\frac{1}{4}}$,

д) $0{,}2^2$ или $5^{-1,5}$, ѓ) $2^{1,5}$ или $2^{\frac{3}{2}}$, е) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{5}}$ или 1, ж) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ или $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$?

2. Одреди каков знак има разликата а) $\sqrt[5]{2}-\sqrt[3]{2}$, б) $\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{8}$.

3. Спореди ги степените :

а) $5^{0,5}$, $3^{\frac{1}{2}}$, б) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, в) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$, г) $\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$, $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

§ 82. НИЗИ ОД РАЦИОНАЛНИ БРОЕВИ

82.1. ОСНОВНИ ПОИМИ ЗА БРОЈНА НИЗА

1. Природните броеви подредени по големина да растат:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

велиме дека ја образуваат **низата од природни броеви.** Слично на тоа, имаме: **низа од парни броеви, низа од непарни броеви, низа од прости броеви,** итн. Одделните броеви во низата ги викаме нејзини **членови** , кои обично ги нумерираме :

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{1}$$

За бројот a_n велиме дека е **општ член** на низата (1) . Низата со општ член a_n кратко ја означуваме со (a_n) или само со a_n . Така, на пример, низата со општ член: $a_n=n^2$ во развиен вид гласи:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots \tag{2}$$

со општ член $a_n = \frac{1}{n}$ гласи:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots \tag{3}$$

а со општ член $a_n = (-1)^{n+1}$ гласи:

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \ldots,\ (-1)^{n+1},\ \ldots \tag{4}$$

За низата (a_n) велиме дека е: **растечка,** ако $a_n < a_{n+1}$, за $\forall n \in \mathbb{N}$ (т.е. ако секој нареден член е поголем од претходниот); **опаѓачка,** ако $a_n > a_{n+1}$ за $\forall n \in \mathbb{N}$ (т.е. ако секој нареден член е помал од претходниот); **неопаѓачка** (т.е. да расте или да стагнира) ако $a_n \le a_{n+1}$; **нерастечка** (т.е. да опаѓа или да стагнира) ако $a_n \ge a_{n+1}$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Една низа (a_n) што има некое од наведените својства, се вика **монотона низа,** а ако има едно од првите две својства, таа уште е и **строго монотона.**

Низите можат да бидат **ограничени** или **неограничени**. Дадена низа (a_n) велиме дека е **ограничена,** ако постои (може да се избере) таков број K , што за секој $n \in \mathbb{N}$ важи неравенството $|a_n| < K$. Или со други зборови: дадена низа е

ограничена, ако сите нејзини членови по апсолутна вредност се помали од некој позитивен реален број K. Меѓутоа, постојат низи, кои се ограничени само **оддолу** или само **одгоре.** Таквите низи не ги сметаме за ограничени, а низи кои не се ограничени оддолу или одгоре ги викаме **неограничени низи.** Од низите (2), (3) и (4) неограничена е само низата (2), а ограничени се (3) и (4).

Членовите на низите обично геометриски ги претставуваме со точки на бројната оска. Очигледно е дека, ако низата (a_n) е монотона и ограничена, тогаш за бесконечно многуте точки (претставници на членовите на низата) мора да дојде до нивно натрупување во околината на некоја точка, која ја викаме **точка на натрупување на низата** (a_n). Или поточно: за бројот a велиме дека е точка на натрупување на низата (a_n) , ако за кој било број $\varepsilon > 0$, бесконечно многу членови на низата му припаѓаат на интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, а надвор од него може да има само конечен број членови од низата. Бројот a со наведеното својство се вика уште и **граница** или **лимес на низата** (a_n) и пишуваме

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \text{, или кратко } \lim a_n = a \text{ , или } a_n \to a \text{, кога } n \to \infty .$$

Во математичката анализа со помош на неравенства се дава следнава:

Дефиниција. Бројот a се вика граница на низата (a_n), ако за кој било даден (по желба мал) број $\varepsilon > 0$ постои природен број N, за кој неравенството

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad (5)$$

е исполнето за сите вредности на $n > N$.

Неравенството (5) треба да е исполнето за сите големи вредности на $n > N$, при што бројот N го определуваме зависно од дадениот број ε.

За низа, која има граница, велиме дека е **конвергентна низа**, а за која не е конвергентна, велиме дека е **дивергентна.**

Пример 1. Да докажеме дека $a = 1$ е граница на низата со општ член

$$a_n = \frac{n}{n+1} : \qquad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \ldots\ldots \to 1$$

Решение. Доказот се сведува на одредување на бројот N при зададени $a = 1$ и $\varepsilon > 0$, на пример за $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.

Неравенството $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \frac{1}{1000}$ е еквивалентно на $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{1000}$, од каде $n+1>1000$, или $n>999$. Значи $N = 999$.

Овој резултат покажува дека, членовите на низта $a_n = \frac{n}{n+1}$ почнувајќи од членот a_{1000} ќе се разликуваат од границата $a = 1$ за помалку од $\frac{1}{1000} = 0{,}001$.

Ќе покажеме дека важи следнава:

Теорема [82.1]. ***Ако една низа има граница, таа е единствена.***

Доказ. Да претпоставиме дека низата (a_n) има две граници a и b, при што $b \neq a$ и $a < b$. Ако ставиме $\varepsilon = \frac{1}{3}|b-a|$, тогаш ќе добиеме дека интервалите $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ ќе немаат заеднички точки, т.е. $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \varnothing$. Од тоа што a е граница на (a_n) следува дека надвор од интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ таа има само конечен број членови, па според тоа и во интервалот $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ има конечен број членови. Оттука следува дека b не е граница на низата (a_n), штд.

2. Конвергентните низи ги имаат следниве поважни својства :

Теорема [82.2]. ***Секоја конвергентна низа е ограничена.***

Доказ. Нека низата (a_n) е конвергентна и има граница a, а $\varepsilon > 0$ е некој даден реален број. Тогаш од тоа што a е граница на (a_n) следува дека надвор од интервалот $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ низата (a_n) има само конечен број членови (точки). Меѓу тие точки има една што е најоддалечена од a. Со M да го означиме растојанието на најоддалечената точка a_k од a. Тогаш сите точки на (a_n) ќе лежат во интервалот $(a-M, a+M)$, што значи дека низата (a_n) е ограничена, штд.

Да забележиме дека обратното тврдење од оваа теорема не е точно, т.е. **не секоја ограничена низа е и конвергентна.** На пример, низата $a_n = (-1)^{n+1}$ е ограничена но не е конвергентна.

Тука, ако покрај ограниченоста на низата (a_n) се придодаде и условот за монотоност, тогаш таа ќе биде конвергентна. Значи, ќе важи:

Теорема [82.3] . ***Секоја монотона и ограничена низа е конвергентна.***

Ќе ја докажеме уште следнава важна:

Теорема [82.4]. **Ако низите a_n и b_n се конвергентни со иста граница a и ако за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \leq c_n \leq b_n$, тогаш и низата (c_n) е конвергентна, при што** $\lim c_n = a$.

Доказ. Да земеме произволен број $\varepsilon > 0$. Бидејќи е $\lim a_n = a$, тогаш може да се најде некој број N_1, таков што за $n > N_1$ да важи $a-\varepsilon < a_n < a+\varepsilon$. Но бидејќи е и $\lim b_n = a$, затоа може да се најде и некој број N_2, за кој ако $n > N_2$ да важи $a-\varepsilon < b_n < a+\varepsilon$. Нека N_0 е број што е поголем од секој од броевите N_1 и N_2. Тогаш за $n > N_0$ истовремено ќе бидат исполнети горниве две релации, т.е. a_n, $b_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ и бидејќи е $a_n \le c_n \le b_n$, затоа при $n>N_0$ добиваме дека $a-\varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a+\varepsilon$. Значи, при $n > N_0$ имаме $a-\varepsilon < c_n < a+\varepsilon$, што покажува дека a е граница и на низата c_n, т.е. $\lim c_n = a$.

3. Нека се дадени конвергентни низи од рационални броеви (a_n) и (b_n), чии граници се $\lim a_n = a$ и $\lim b_n = b \neq 0$.

Со помош на нив можеме да ги формираме и следниве низи :

$(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, $\frac{1}{b_n}$, $b_n \neq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$, $\left(a\frac{a_n}{b_n}\right)$, $b_n \neq 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$, $\left(a^{b_n}\right)$ $a > 0$. За нив важи :

Теорема [82.5]. ***Ако низите*** (a_n) ***и*** (b_n) ***се конвергентни и*** $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, ***тогаш важи:***

(i) $\boldsymbol{lim}\,(a_n \pm b_n) = \boldsymbol{lim}\, a_n \pm \boldsymbol{lim}\, b_n = a \pm b$,

(ii) $\boldsymbol{lim}\,(a_n \cdot b_n) = \boldsymbol{lim}\, a_n \cdot \boldsymbol{lim}\, b_n = a \cdot b$,

(iii) $\boldsymbol{lim}\left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{\boldsymbol{lim}\, b_n} = \frac{1}{b}$, $b \neq 0$ и $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) $\boldsymbol{lim}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\boldsymbol{lim}\, a_n}{\boldsymbol{lim}\, b_n} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$ и $b_n \neq 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

(v) $\boldsymbol{lim}\left(a^{b_n}\right) = a^{\boldsymbol{lim}\, b_n} = a^b$, $a > 0$

Доказ. Ќе го доажеме само тврдењето (i). Нека $\lim a_n = a$ и $\lim b_n = b$. Поради тоа постојат n_1, $n_2 \in \mathbb{N}$, за кои за секој $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon_1$ и $n > n_2 \Rightarrow |b_n - b| < \varepsilon_2$. Ако ставиме $n_0 = max(n_1, n_2)$, тогаш за $n > n_0$ имаме

дека $n > n_1$ и $n > n_2$, па и $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Оттука за $n > n_0$ добиваме

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| = |(a_n - a) \pm (b_n - b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Со тоа тврдењето (i) во теоремата е докажано.

82.2. НИЗИ ОД ПРИБЛИЖНИ ВРЕДНОСТИ НА РЕАЛНИ БРОЕВИ

Знаеме дека секој реален број (рационален или ирационален) може да биде претставен во вид на бесконечна десетична дропка. Кај рационалните броеви, кога се зададени во вид на бесконечна периодична дропка, погодно е тоа што тие секогаш можат да се изразат и запишат и како количник на два цели броја, додека кај ирационалните броеви тоа не е можно.

Во практиката реалните броеви многу често ги заменуваме со рационални броеви (конечни десетични дропки), кои од нив се или помали или поголеми. За тие рационални броеви велиме дека се **приближни рационални вредности** на реалните броеви.

Да го земеме , на пример , ирационалниот број $\sqrt{2}$. Постепено, наоѓајќи ги неговите приближни вредности со точност до $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, итн. со недостиг и запишувајќи ги резултатите од тие пресметувања во тој редослед како ги добиваме, ќе ја добиеме низата рационални броеви :

$$1;\ 1{,}4\ ;\ 1.41\ ;\ 1{,}414\ ;\ 1{,}4142\ ;\ \ldots \qquad (6)$$

Тука формулата на општиот член на таа низа не е даден, но сепак постои закон за нејзинао формирање, тој е искажен **описно** (со зборови) и се состои во следново: за добивање на n –тиот член на низата потребно е да се извлече квадратен корен од бројот 2 со точност до $\frac{1}{10^n}$ (со недостиг). За ирационалниот број $\sqrt{2}$ можеме да формираме и друга низа на неговите приближни вредности исто со течност до $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$, итн. но со вишок :

$$2\ ;\ 1{,}5\ ;\ 1{,}42\ ;\ 1{,}415\ ;\ 1{,}4143\ ;\ \ldots \qquad (7)$$

Членовите на оваа низа ги добиваме кога на секој број (член) од низата (6) со недостиг, последната цифра – децимала ја зголемиме за 1.

На ист начин, со постепено наоѓање на приближните вредности на обичната дропка $\frac{1}{7}$ со точност до $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ итн. со недостиг или со вишок и запишувајќи ги одделно по тој редослед, ги добиваме низите рационални броеви :

$$0{,}1\ ;\ 0{,}14\ ;\ 0{,}142\ ;\ 0{,}1428\ ;\ 0{,}14285\ ;\ 0{,}142857\ ;\ \ldots \tag{8}$$

$$0{,}2\ ;\ 0{,}15\ ;\ 0{,}143\ ;\ 0{,}1429\ ;\ 0{,}14286\ ;\ 0{,}142858\ ;\ \ldots \tag{9}$$

Бидејќи дропката $\frac{1}{7}$ се претвора во бесконечна периодична десетична дропка $0,(142857)$, затоа ние можеме многу лесно без натамошни пресметувања) да ги одредиме кој било член од низата (8) . Но тоа не случај и со низта (6), бидејќи $\sqrt{2}$ е ирационален број и знаеме тој се претвора во бесконечна непериодична десетична дропка .

Да го разгледаме тоа во општ случај. Нека a е кој било позитивен реален број. Видовме, тој секогаш може да се запише во вид на бесконечна десетична дропка $a = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n \ldots$ каде што $a_0 = [a]$ е целиот дел на a , и за секој природен број i, a_i е цел број таков што $0 \le a_i \le 9$. Низата

$$\left(a_n^-\right): a_0^-,\quad a_1^- = a_0 + \frac{a_1}{10},\quad a_2^- = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100}, \ldots, a_n^- = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}, \ldots \tag{10}$$

е низа на приближни вредности на бројот a со недостиг, а низата

$$\left(a_m^+\right): a_0^+ = a_0 + 1,\quad a_1^+ = a_0 + \frac{a_1 + 1}{10},\quad a_2^+ = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{100}, \ldots, a_n^+ = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \ldots + \frac{a_n + 1}{10^n}, \ldots \tag{11}$$

е соодветната низа на приближни вредности на бројот a со вишок.

Овие две низи $\left(a_n^-\right)$ и $\left(a_n^+\right)$ забележуваме дека се монотони, и тоа низата $\left(a_n^-\right)$ е монотоно неопаднувачка (т.е. расте или стагнира), а низата $\left(a_n^+\right)$, пак е монотоно нерастечка (т.е. таа опаднува или стагнира). Значи, низата $\left(a_n^-\right)$ е неопаднувачка бидејќи секој нејзин нареден член a_{n+1}^- се добива, кога кон претходниот се додаде $\frac{a_n + 1}{10^{n+1}}$, односно кога кон десетичниот запис на членот a_n^- се допише на крајот уште една децимала.

Двете низи (a_n^-) и (a_n^+) се и ограничени : за сите вредносзти на n важат неравенствата $a_n^- \le a \le a_n^+$.

Бидејќи низите (a_n^-) и (a_n^+) се монотони и ограничени низи, следува дека тие се конвергентни и бројот a е нивна заедничка граница. Навистина:

$$|a - a_n^-| < |a_n^+ - a_n^-| \quad \text{и} \quad |a - a_n^+| \le |a_n^+ - a_n^-| .$$

Бидејќи $\lim(a_n^+ - a_n^-) = \lim\frac{1}{10^n} = 0$, затоа неравенствата $|a - a_n^-| < \varepsilon$ и $|a - a_n^+| < \varepsilon$ се исполнети за сите вредности на n, за кои е $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$. Според тоа

$$\lim a_n^- = \lim a_n^+ = a \qquad (12)$$

За $a = 0$, ставајќи $a_n^- = 0$ за секој $n \in \mathbb{N}$, добиваме дека $\lim 0 = 0$, т.е. за $a = 0$ равенството (12) важи .

Ако b е негативен реален број, тогаш $a = -b$ е позитивен, па ако е точно (12), дознаваме дека $\lim(-b) = a$.

Според тоа, важи следнава важна:

Теорема [82.6]. ***Секој реален број е граница на некоја монотона конвергентна низа од рационални броеви.***

82.3. НИЗИ ОД СТЕГАЧКИ ИНТЕРВАЛИ (ИЛИ СЕГМЕНТИ)

Користејќи ги низите (6) и (7) на приближни вредности на бројот $\sqrt{2}$ со недостиг и со вишок, наоѓаме дека важат неравенствата:

$$\begin{aligned} 1 &< \sqrt{2} < 2 \\ 1{,}4 &< \sqrt{2} < 1{,}5 \\ 1{,}41 &< \sqrt{2} < 1{,}42 \\ 1{,}414 &< \sqrt{2} < 1{,}415 \end{aligned}$$

Неравенството $1 < \sqrt{2} < 2$ покажува дека $\sqrt{2}$ се наоѓа меѓу рационалните броеви *1* и *2* , или дека $\sqrt{2} \in (1,\ 2)$, т.е. $\sqrt{2}$ е еден од бесконечно многуте броеви што лежат во интервалот (*1 ; 2*).

Со наредното неравенство $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ се одредува нов "потесен интервал" $(1{,}4;\ 1{,}5)$, таков што $\sqrt{2} \in (1{,}4;\ 1{,}5)$, но кој што е вклучен во интервалот $(1;\ 2)$, т.е. $\sqrt{2} \in (1{,}4;\ 1{,}5) \subset (1;\ 2)$.

Со наредните неравенства можат да се образуваат се " потесни и потесни интервали " , од кои секој нареден интервал е вклучен во претходниот. На пример, интервалот $(1{,}414;\ 1{,}415)$ е вклучен во интервалот $(1{,}41;\ 1{,}42)$, а пак тој е вклучен во интервалот $(1{,}4;\ 1{,}5)$ итн.

Бројот $\sqrt{2}$ се содржи во секој од тие интервали, но не е еднаков на ниту еден од броевите $1; 1{,}4; 1{,}41, \ldots ; 2; 1{,}5; 1{,}42, \ldots$

На таков начин од конвергентните низи (6) и (7) формираме трета низа од интервалите:

$$(1;\ 2),\ (1{,}4;\ 1{,}5),\ (1{,}41;\ 1{,}42),\ (1{,}414;\ 1{,}415)\ \ldots \qquad (13)$$

така наречена **низа на стегачки (вложени) интервали,** која во општ случај ја определуваме со следнава:

Дефиниција. Низите рационални броеви $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ **и** $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ **велиме дека образуваат низа на стегачки или вложени интервали**

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \ldots, (a_n, b_n), \ldots \qquad (14)$$

ако се исполнети следниве услови:

1^0. **Низата** (a_n) **е неопаднувачка** (нестрого растечка), **а низата** (b_n) **е нерастечка** (нестрого опаднувачка), т.е.

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots$$

$$b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \ldots \ge b_n \ge \ldots$$

2^0. **Секој член од првата низа е помал од кој било член на втората низа,** т.е. **важи** $a_n < b_n$ **за секој** $n \in \mathbb{N}$.

3^0. **Разликата** $b_n - a_n$ **за доволно големо** n **може да стане помала од кој било однапред даден произволно мал позитивен број** ε т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0.$

Низата стегачки интервали симболички ја означуваме $(a_n \mid b_n)$.

Аналогно се дефинира и низа на стегачки сегменти.

Јасно е дека, секој реален број (рационален или ирационален), односно секоја точка од бројната оска (рационална или ирационална), може да се претстави барем со една низа на стегачки интервали (односно сегменти). Ќе докажеме дека важи и обратното:

Теорема [82.7]. ***Секоја низа на стегачки интервали (сегменти) има една и само една заедничка точка за сите интервали, т.е. постои еден и само еден број c , што ја задоволува релацијата*** $a_n \le c \le b$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Доказ. За секој $n \in \mathbb{N}$ имаме

$$a_n < b_n \le b_1, \quad \text{т.е. } a_n < b_1 \text{ и } b_n > a_n \ge a_1, \text{ т.е. } b_n > a_1 .$$

Бидејќи низата (a_n) е монотона опаднувачка и ограничена, затоа таа е конвергентна и има граница $\lim b_n$. Понатаму, по услов (согласно 3^0) имаме $\lim b_n - \lim a_n = \lim(b_n - a_n) = 0$. Според тоа, $\lim b_n = \lim a_n$. Заедничката вредност на тие граници да ја означиме со c . При тоа за кој било n ќе биде: $a_n \le c$, и $b_n \ge c$, па оттука следува дека, за секој $n \in \mathbb{N}$ ќе важи $a_n \le c \le b_n$, т.е.
точката c му припаѓа на секој од интервалите (14) .

Останува да докажеме дека друга таква точка (број) не може да има. За таа цел ќе докажеме дека секоја точка c' заедничка за сите интервали (a_n , b_n) неминовно се совпаѓа со c . Да допуштиме дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $a_n \le c' \le b_n$.
Но бидејќи е $\lim a_n = \lim b_n$ затоа согласно T[82.4] ќе биде $\lim c' = c$, т.е. $c' = c$, штд.

Пример 2. Низите (a_n) и (b_n) со општи членови $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ и $b_n = 1 + \frac{1}{n}$ формираат низа на стегачки интервали:

$$(0;2), \quad \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right), \quad \left(\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right), \quad \left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right), \quad \ldots \quad ,\left(1-\frac{1}{n};1+\frac{1}{n}\right),\ldots$$

бидејќи за неа се исполнети условите 1^0 , 2^0 , и 3^0 :

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \quad \ldots \quad < 1 - \frac{1}{n} < \quad \ldots$$

$$2 > \frac{3}{2} > \frac{4}{3} > \frac{5}{4} > \quad \ldots \quad > 1 + \frac{1}{n} > \quad \ldots$$

при што $\lim(b_n - a_n) = \lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1-\frac{1}{n}\right)\right] = \lim\frac{2}{n} = 0$.

Согласно Т[82.7] дадената низа на стегачки интервали има само една точка заедничка за сите интервали. Очигледно е дека таа точка е точката 1.

Ако реалниот број a е зададен со низата стегачки интервали $\left(a_n^- \mid a_n^+\right)$ тоа симболички го запишуваме $a = \left(a_n^- \mid a_n^+\right)$. На пример :

$\sqrt{2} = (1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ldots \mid 2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ldots)$.

Според тоа, реалните броеви може да ги дефинираме и вака:

Дефиниција. Низите на стегачки интервали во множеството на рационалните броеви се викаат реални броеви.

Може да се покаже дека вака дефинираните реални броеви, како низи на стегачки интервали, можат да се определуваат и со нив да се изведуваат сите основни операции.

ЗАДАЧИ

1. Со формулата $a_n = f(n) = \sqrt{n-1}$ е зададена низа. Давајќи на n последователни вредности: *1, 2, 3, ...* го добиваме развиениот вид на таа низа:

$0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n-1}, \ldots$. Запиши го развиениот запис на низите:

а) $a_n = f(n) = 1$, б) $a_n = f(n) = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, в) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{за } n = 1 \\ 2^n + 1 & \text{за } n > 1 \end{cases}$.

2. Запиши ги првите шест члена на низата, чиј општ член е :

а) $a_n = -2^n$ б) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ в) $a_n = \dfrac{n+1}{(n+2)(n+4)}$

3. Запиши ја формолата на општиот член , ако се познати неколку нејзини први членови :

а) $2,\ -4,\ 8,\ -16, \ldots$ б) $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \ldots$ в) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}+1},\ \dfrac{1}{\sqrt{4}-1}, \ldots$

4. Определи од каков вид е низата, чиј општ член е :

а) $a_n = -\frac{1}{2^n}$, б) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, в) $a_n = \frac{1}{3^n}$, в) $a_n = \frac{n^2-1}{n}$.

5. Покажи дека низата со општ член $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$ има граница $a = 2$.

6. Покажи дека низите $a_n = 0$ и $b_n = \frac{1}{n}$ формират низа на стегачки сегменти:

$$[0,1],\ \left[0,\frac{1}{2}\right],\ \left[0,\frac{1}{3}\right],\ldots,\left[0,\frac{1}{n}\right],\ldots$$

7. Низата (a_n) е дефинирана со таканаречената **рекурентна формула** $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Запиши ги првите пет члена од неа и покажи од каков вид е таа.

8. Низата од броевите на Фибиначи определена е со рекурентната формула $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Напиши ги првите десет члена од низата.

9. Докажи дека низата со општ член $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ има граница $a = 0$.

§ 83. СТЕПЕНИ СО ИРАЦИОНАЛЕН ПОКАЗАТЕЛ

1. Да извршиме уште едно (последно) проширување на поимот степен, воведувајќи и степен со ирационален показател.

Да се запрашаме, што означува симболот a^α, каде што a е позитивен реален број различен од 1 и α е кој било ирационален број. Тој симбол ќе го осмислиме прво на еден конкретен пример, на пример, на симболите 2^π и $\left(\frac{1}{2}\right)^\pi$.

Познато е дека ирационалниот број π може да се претстави во вид на бесконечна непериодична десетична дропка со точност до $0{,}00001$ со недостиг со дропката $\pi = 3{,}14159\ldots$

Значи, низите рационални броеви:

$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ 3{,}14159;\ \ldots$ (1)

$4;\ 3{,}2;\ 3{,}15;\ 3{,}142;\ 3{,}1416;\ 3{,}14160;\ \ldots$ (2)

се низи на приближните вредности на бројот π со недостиг со точност до $1; 0{,}1; 0{,}01; 0{,}001$ итн. и со вишок соодветно.

Гледаме, првата низа (1) е монотоно растечна, а втората е монотоно опаднувачка, а и двете се ограничени. Според тоа, тие се конвергентни.

Забележуваме дека разликите: $4-3=1$; $3{,}2-3{,}1=0{,}1$; $3{,}15-3{,}14=0{,}01$; $3{,}142-3{,}141=0{,}001$, . . . се сé помали и помали, така што може да се добие произволно мала разлика. Значи, во низата (1) може да се добие таков рационален број поголем од π, а во низата (2) - таков рационален број поголем од π, кои произволно малку ќе се разликуваат еден од друг. Велиме дека низите рационални броеви (1) и (2) се стремат (односно определуваат) кон еден единствен ирационален број, а тоа е бројот π.

Да ги формираме следниве две низи од степените 2^{π} со показатели рационални броеви од низите (1) и (2):

$2^{3};\ 2^{3,1};\ 2^{3,14};\ 2^{3,141};\ 2^{3,1415};\ \ldots$ (3)

и $2^{4};\ 2^{3,2};\ 2^{3,15};\ 2^{3,142};\ 2^{3,1416};\ \ldots$ (4)

Забележуваме дека разликите : $2^4-2^3=2^4\left(1-\frac{1}{2^1}\right)$; $2^{3,2}-2^{3,1}=2^{3,2}\left(1-\frac{1}{2^{0,1}}\right)$;

$2^{3,15}-2^{3,14}=2^{3,15}\left(1-\frac{1}{2^{00,1}}\right)$; . . . се сé помали и помали, така што може да се добие произволно мала разлика. Тоа значи дека во низите (3) и (4) можат да се добијат такви два соодветни степена со рационални показатели, кои произволно ќе се разликуваат еден од друг. Велиме дека низите (3) и (4) од степени со рационални показатели определуваат еден единствен реален број, кој е поголем од секој реален број во низата (3), а е помал од секој реален број во низата (4) .

По дефиниција земаме дека тоа е токму степенот 2^{π} и за него важат неравенствата:

$$\begin{array}{ccccc} 2^{3} & < & 2^{\pi} & < & 2^{4} \\ 2^{3,1} & < & 2^{\pi} & < & 2^{3,2} \\ 2^{3,14} & < & 2^{\pi} & < & 2^{3,15} \\ 2^{3,141} & < & 2^{\pi} & < & 2^{3,142} \\ \vdots\vdots\vdots\vdots & & & & \vdots\vdots\vdots\vdots \end{array}$$

Слично, и низите од степени со рационални показатели :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3,1},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3,14},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3,141},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3,1415},\ \ldots \tag{5}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{4},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3,2},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3,15},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3,142},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{3,1416},\ \ldots \tag{6}$$

определуваат еден единствен реален број, кој е помал од секој член на првата низа (5), а е поголем од секој член на втората низа (6). Тој број е степенот $\left(\frac{1}{2}\right)^{\pi}$ и за него важат неравенствата:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\pi} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3,1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\pi} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3,2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{3,14} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\pi} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3,15}$$

::

Да го разгледаме сега во општ случај степенот со ирационален показател.

Нека α е кој било даден позитивен ирационален број. Да го претставиме во вид на бесконечна дропка $\alpha = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$

каде што α_0 е целиот дел на α, а $a_0, \alpha_1, \alpha_2, a_3, \ldots \alpha_n$ се децимали.

Со α_n^- и α_n^+ да ги означиме приближните вредности на α со недостиг и вишок соодветно, а со точност до $\frac{1}{10^n}$, т.е.

$$\alpha_n^- = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n} \text{ и } \alpha_n^+ = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \ldots + \frac{\alpha_n + 1}{10^n}$$

Значи, за секој $n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n^- < \alpha < \alpha_n^+$. Да ги формираме следниве две низи на степените со рационални показатели:

$$a^{\alpha_1^-},\ a^{\alpha_2^-},\ a^{\alpha_3^-},\ \ldots\ , a^{\alpha_n^-},\ \ldots \text{ и } a^{\alpha_1^+},\ a^{\alpha_2^+},\ a^{\alpha_3^+},\ \ldots\ , a^{\alpha_n^+},\ \ldots$$

Ќе докажеме дека за нив важи следнава :

Теорема [83.1]. ***За произволен позитивен број a низата:***

$$\left(a^{\alpha_1^-},\ a^{\alpha_1^+}\right)\ \left(a^{\alpha_2^-},\ a^{\alpha_2^+}\right)\ \ldots\ ,\left(a^{\alpha_n^-},\ a^{\alpha_n^+}\right)\ \ldots \qquad (7)$$

претставува низа на стегачки интервали.

Доказ. Доказот ќе го изведеме при претпоставка дека $a > 1$. Тогаш :

1^0. Низата $a^{\alpha_1^-},\ a^{\alpha_2^-},\ a^{\alpha_3^-},\ \ldots\ ,a^{\alpha_n^-},\ \ldots$ (8)

е растечка, а низата $a^{\alpha_1^+},\ a^{\alpha_2^+},\ a^{\alpha_3^+},\ \ldots\ ,a^{\alpha_n^+},\ \ldots$ (9)

е опаднувачка. Ова го заклучуваме одтаму што низата на приближни вредности $\left(\alpha_n^-\right)$ на бројот на α со недостиг е растечка а низата на приближни вредности $\left(\alpha_n^+\right)$ на α со вишок е опаднувачка; па при $a > 1$ ќе важат импликациите :

$$\alpha_1^- < \alpha_2^- \Rightarrow a^{\alpha_1^-} < a^{\alpha_2^-} \quad \text{и} \quad \alpha_1^+ > \alpha_2^+ \Rightarrow a^{\alpha_1^+} > a^{\alpha_2^+}.$$

2^0. При $a > 1$ за секоја вредност на n , важи :

од $\alpha_n^- < \alpha_n^+$ следува $a^{\alpha_n^-} < a^{\alpha_n^+}$.

3^0. Треба да докажеме уште дека $\lim\left(a^{\alpha_n^+} - a^{\alpha_n^-}\right) = 0$. Навистина:

$a^{\alpha_n^+} - a^{\alpha_n^-} = a^{\alpha_n^-}\left(a^{\alpha_n^+ - \alpha_n^-} - 1\right) < a^{\alpha_0+1}\left(\sqrt[10^n]{a} - 1\right)$, бидејќи

$a^{\alpha_n^+} - a^{\alpha_n^-} = \dfrac{1}{10^n}$ и $\alpha_n^- < \alpha < \alpha_0 + 1$. Бидејќи, пак, $\lim \sqrt[10^n]{a} = \lim a^{\frac{1}{10^n}} = 1$, затоа за

кој било даден $\varepsilon > 0$ и за доволно големи вредности на n , ќе биде $\sqrt[10^n]{a} - 1 < \dfrac{\varepsilon}{a^{\alpha_0+1}}$, па

тогаш е $0 < a^{\alpha_n^+} - a^{\alpha_n^-} < \varepsilon$. Според тоа важи $\lim\left(a^{\alpha_n^+} - a^{\alpha_n^-}\right) = 0$, штд. Случајот кога е $0 < a < 1$ се разгледува аналогно. Во тој случај низата $\left(a^{\alpha_n^-}\right)$ е опаднувачка а низата $\left(a^{\alpha_n^+}\right)$ е растечка.

Во случај ако $a = 1$, тогаш $a^{\alpha_n^-} = a^{\alpha_n^+} = 1$ за секој $n \in \mathbb{N}$.

Од доказот на горнава теорема следува дека : монотоните низи $\left(a^{\alpha_n^-}\right)$ и $\left(a^{\alpha_n^+}\right)$ имаат заедничка граница $\lim a^{\alpha_n^-} = \lim a^{\alpha_n^+}$. Таа е единствен реален број, кој при

$a > 1$ е поголем од сите броеви од видот $a^{\alpha_n^-}$, и е помал од сите броеви од видот $a^{\alpha_n^+}$; а при $0 < a < 1$ тој е помал од сите броеви од видот $a^{\alpha_n^-}$ и е поголем од сите броеви од видот $a^{\alpha_n^+}$. Затоа ја усвојуваме :

Дефиниција. Степенот a^α на позитивен број a со ирационален показател α се вика заедничка граница на низите $\left(a^{\alpha_n^-}\right)$ и $\left(a^{\alpha_n^+}\right)$, т. е.

$$a^\alpha \overset{def}{=} \lim a^{\alpha_n^-} = \lim a^{\alpha_n^+}$$

Степенот a^α, $a > 0$ е единствен реален број, кој за секој $n \in \mathbb{N}$ ги задоволува неравенствата: $a^{\alpha_n^-} < a^\alpha < a^{\alpha_n^+}$, ако е $a > 1$ и $a^{\alpha_n^-} > a^\alpha > a^{\alpha_n^+}$, ако $0 < a < 1$. Ако е $a = 1$, тогаш е $1^\alpha = 1$ за секој реален број α, а ако е $\alpha > 0$, секогаш е и $0^\alpha = 0$.

Ако $a \in \mathbb{R}^+$ и α - позитивен ирационален број, тогаш

$$a^{-\alpha} \overset{def}{=} \frac{1}{a^\alpha}, \text{ односно } a^{-\alpha} = \left(\frac{1}{a}\right)^\alpha. \tag{10}$$

Примери : $5^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{5^{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi} = 3^\pi$.

2. Правилата за операции на степените со рационален показател во потполност важат и за степените со ирационален показател .

Ќе докажаме дека за произволни реални броеви α и β важат неравенствата: (i) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ и (ii) $\left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Доказ. (i) Нека барем еден од броевите α и β е ирационален број. Низите рационални броеви (α_n) и (β_n) нека конвергираат (се стремат) кон броевите α и β, т.е. нека $\lim \alpha_n = \alpha$ и $\lim \beta_n = \beta$. Тогаш $\lim(\alpha_n + \beta_n) = \alpha + \beta$ и $a^\alpha = \lim a^{\alpha_n}$, $a^\beta = \lim a^{\beta_n}$. Потоа согласно својствата на конвергентните низи имаме:

$a^\alpha \cdot a^\beta = \lim a^{\alpha_n} \lim a^{\beta_n} = \lim\left(a^{\alpha_n} + a^{\beta_n}\right) = \lim a^{\alpha_n+\beta_n} = a^{\alpha+\beta}$, штд .

(ii) Да претпоставаме дека $a > 1$, $\alpha > o$, $\beta > 0$. Тогаш важи:

$1 < a^{\alpha_n^-} < a^\alpha < a^{\alpha_n^+}$. Од $a^{\alpha_n^-} < a^\alpha$ следува $\left(a^{\alpha_n^-}\right)^{\beta_n^-} < \left(a^\alpha\right)^{\beta_n^-}$ или $a^{\alpha_n^- \beta_n^-} < \left(a^\alpha\right)^{\beta_n^-}$ и аналогно од $a^\alpha < a^{\alpha_n^+}$ следува $\left(a^\alpha\right)^{\beta_n^+} < a^{\alpha_n^+ \cdot \beta_n^+}$.

Оттука $a^{\alpha_n^- \cdot \beta_n^-} < \left(a^\alpha\right)^{\beta_n^-} < \left(a^\alpha\right)^{\beta_n^+} < a^{\alpha_n^+ \cdot \beta_n^+}$.

Бидејќи е $\lim \alpha_n^- \beta_n^- = \lim \alpha_n^+ \beta_n^+ = \alpha\beta$, $\lim\left(a^{\alpha}\right)^{\beta_n^-} = \lim\left(a^{\alpha}\right)^{\beta_n^+} = \left(a^{\alpha}\right)^{\beta}$ и $\lim a^{\alpha_n^- \beta_n^-} = \lim a^{\alpha_n^+ \beta_n^+} = a^{\alpha\beta}$, затоа ќе биде $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha\beta}$, штд.

Во случај ако $0 < a < 1$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, тогаш следува да се замени само знакот $<$ со знакот $>$.

Може да се покаже, дека својствата на степените со рационален показател изложени во § 81 важат и за степените со ирационален показател, т.е. тие важат и за степените со реален показател.

Да забележиме уште и тоа дека, степени на негативен реален број со реален (рационален или ирационален) показател во елементарната алгебра не се разгледуваат. Така на пример, симболите $(-5)^{\sqrt{2}}$, $(-\pi)^{\sqrt{3}}$ остануваат недефинирани, т.е. немаат смисла.

На крај ќе ја докажеме уште и следнава важна:

Теорема [83.2]. ***Ако*** $a > 0$ ***и*** $a \neq 1$, ***тогаш за кој било даден позитивен број*** b ***постои единствен реален број*** x, ***таков што*** $a^x = b$. ***Тој број се вика логаритам од*** b ***при основа*** a ***и се означува со*** $\log_a b$, т.е. $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$.

Доказ. Ако $a > 1$, ќе ги разгледаме целите степени на бројот a:

$$\ldots, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a, a^2, a^3, \ldots$$

Нека a^{p+1} е најмалиот од тие броеви, што е поголем од b. Тогаш имаме:

$$a^p \leq b < a^{p+1}$$

Сегментот $[p, p+1]$ да го разделиме на 10 еднакви делови и на него избираме број (точка) q_1 таков што ќе го задоволува условот:

$$a^{p+\frac{q_1}{10}} \leq b < a^{p+\frac{q_1+1}{10}}$$

Потоа, ново добиениот сегмент $\left[p+\frac{q_1}{10}, p+\frac{q_1+1}{10}\right]$ го делиме на нови 10 еднакви делови и тој процес го продолжуваме натаму неограничено. На тој начин како резултат ќе добиеме десетична дропка, со која е определен некој реален број x:

$$x = p, q_1 q_2 q_3 \ldots q_n$$

Врз основа на начинот на одредување на децималите (десетичните места) на бројот x следува дека, за кои било негови приближни вредности x_n^- и x_n^+ ќе важи

$$a^{x_n^-} \le b < a^{x_n^+} \tag{11}$$

Но, единствениот реален број што ги задоволува неравенствата (11) е бројот a^x, па затоа имаме $a^x = b$.

Ако $0 < a < 1$, тогаш $\frac{1}{a} > 1$ и согласно докажаното за $a > 1$, постои единствен реален број x, таков што $\left(\frac{1}{a}\right)^x = b$. Но тогаш $a^{-x} = b$, штд.

Ако $a = 1$, теоремата не важи, бидејќи $1^x = 1$ е за секој реален број x.

Може да се докаже дека, логаритмите ги имаат следниве поважни својства-правила за операции со нив, но тука нема да ги докажуваме.

Теорема [83.3]. ***Ако*** $a, b, c \in \mathbb{R}$ ***и*** $a \neq 1$, ***тогаш важат својствата:***

1^0. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$

2^0. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

3^0. $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$

4^0 $a > 1 \Rightarrow \left(b < c \Leftrightarrow \log_a b < \log_a c\right)$

5^0 $0 < a < 1 \Rightarrow \left(b < c \Leftrightarrow \log_a b > \log_a c\right)$

6^0 $a > 1 \Rightarrow \left(b > 1 \Leftrightarrow \log_a b > 0\right)$

7^0 $0 < a < 1 \Rightarrow \left(b > 1 \Leftrightarrow \log_a b < 0\right)$.

На крајот да заклучиме дека, степените со рационален показател ги сметаме ирационални алгебарски изрази, додека пак, степените со ирационални показатели и логаритмите ги сметаме за трансцедентни изрази.

ЗАДАЧИ

1. Напиши неколку члена од низата на приближни вредности со недостиг и неколку члена од низата на приближни вредности со вишок на реалниот број :

а) $\sqrt{3}$, б) $10^{\sqrt{3}}$, в) $0{,}1^{\sqrt{3}}$, г) $5^{\sqrt{3}}$ д) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{3}}$.

2. Упрости ги изразите :

а) $\left[\left(\sqrt[4]{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{-3\sqrt{2}}$ б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{6}} : 10^{\sqrt{6}}$ в) $\left[\left(\sqrt{27}\right)^{-3\frac{1}{2}}\right]^{\frac{\sqrt{2}}{14}}$.

3. Упрости :

а) $\frac{6^{\sqrt{8}}}{6^{\sqrt{2}}} \cdot \frac{2^{\sqrt{32}}}{3^{\sqrt{18}}}$ б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4\sqrt{2}} \cdot 6^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{\sqrt{8}}$.

4. Докажи го равенството :

а) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}\right]^{-\sqrt{2}} = 81$, б) $\frac{3^{\sqrt{12}}}{4^{\sqrt{27}}} \cdot \frac{2^{\sqrt{108}}}{6^{\sqrt[3]{3}}} = -24^{-\sqrt{3}}$.

5. Кој број е поголем :

а) $\pi^{\frac{1}{2}}$ или $\pi^{\frac{3}{5}}$, б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ или $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$

в) $\left(\frac{3}{5}\right)^{1+\sqrt{2}}$ или $\left(\frac{3}{5}\right)^{2}$, г) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ или $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{5}-3}$

Глава X

ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

Равенката $f(x, y,..., z) = 0$ се вика **ирационална** , ако нејзината лева страна е некој ирационален израз во однос на променливите. Нив можеме да ги разгледуваме во полето на комплексните броеви или во полето на реалните броеви.

§ 84. ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ВО ПОЛЕТО НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

1. Познато е дека, секој радикал (корен) $\sqrt[n]{R(x, y,..., z)}$, каде што $R(x, y,..., z)$ е рационален израз од променливите (што се содржи во левата страна на равенката $f(x, y,..., z) = 0)$, за кој било систем комплексни вредности на променливите $x, y, ... z$; добива n различни вредности, ако подкореновиот израз $R(x, y,..., z)$ е различен од нула; или $\sqrt[n]{R(x, y,..., z)} = 0$, ако $R(x, y,..., z) = 0$. Според тоа, на секој даден систем комплексни вредности на аргументите : $x = a, y = b$, ... , $z = c$ соодветствува (одговара) некое конечно множество вредности на $f(x, y,..., z)$, чиј број зависи од бројот на радикалите и од нивните коренови показатели.

Дефиниција. Решение на ирационална равенка $f(x, y,..., z) = 0$ во полето на комплексните броеви, се вика секој систем вредности на променливите, за кој барем една од вредностите на ирационалниот израз $f(x, y,..., z)$ е еднаков на нула.

Ќе покажеме дека важи следнава:

Теорема [84.1]. ***Решавањето на ирационалната равенка во полето на комплексните броеви е еквивалентно на*** *(може да се замени со)* ***решавањето на некој систем рационални равенки.***

Доказ. Нека ирационалната равенка содржи само еден радикал:

$$f(x, y,..., z, \sqrt[n]{R(x, y,..., z)}) , \tag{1}$$

каде што $R(x, y,..., z)$ е рационален израз од променливите.

Да воведеме нова променлива u со смената :

$$u^n = R(x, y,..., z) \tag{2}$$

Тогаш решавањето на дадената равенка (1) се сведува на решавање на системот рационални равенки :

$$\begin{cases} f(x, y,..., z, u) \\ u^n = R(x, y,..., z) \end{cases} \tag{3}$$

Навистина, изразот $f(x, y,..., z, u)$ не содржи други корени (радикали), па затоа тој е рационален по однос на x, y, ... , z, u . Од другата страна, пак, согласно дефиницијата на n – ти корен во полето на комплексните броеви секоја вредност u на коренот $\sqrt[n]{R(x, y,..., z)}$ е решение на равенката (2), и обратно: За секое решение на равенката (2) вредноста на помошната променлива u е вредност на тој корен.

Ако ирационалната равенка содржи n прости корени:

$$f\left(x, y,.., z; \sqrt[k_1]{R_1}, \sqrt[k_2]{R_2},...\sqrt[k_n]{R_n}\right) = 0$$

чии подкоренови изрази се рационални, тогаш за секој радикал воведуваме посебно нова променлива и добиваме:

$$u_1^{k_1} = R_1, \quad u_2^{k_2} = R_2, \ldots, u_n^{k_n} = R_n$$

Меѓутоа, ирационалната равенка може да содржи и сложени корени, чии подкоренови изрази од своја страна пак содржат корени. Нека, на пример $\sqrt[k_1]{R_1}$ е сложен корен. Тогаш со неговата замена со нова променлива U_1 го добиваме системот равенки:

$$f\left(x, y,.., z; u_1, \sqrt[k_2]{R_2},...\sqrt[k_n]{R_n}\right) = 0, \quad u_1^{k_1} = R_1$$

во кој бројот на корени е намален за *1* . Воведувањето на нови променливи може да продолжи и натаму, при што по секоја замена бројот на корените се намалува, а бројот на равенките се зголемува. Бидејќи бројот на радикалите во ирационалната равенка е конечен, затоа по конечен број на чекори процесот на замена на радикалите ќе заврши и како резултат на него ќе добиеме систем рационални равенки. Со тоа теоремата е докажана.

2. Ако, по замената на дадената ирационална равенка со систем рационлни равенки, успееме од системот да ги исклучиме ново воведените променливи, тогаш ќе добиеме некоја алгебарска равенка (или систем равенки), што ќе ги содржат појдовните променливи.

На пример , нека е дадена ирационалната равенка со една променлива:

$$f\left(x, \sqrt[n]{A(x)}\right)=0 \tag{4}$$

Да ја замениме со системот рационални равенки:

$$\begin{cases} f(x, y)=0, \\ y^n = A(x) \end{cases}, \tag{5}$$

каде $f(x, y)$ и $A(x)$ се полиноми.

Ако од системот (5) ја исклучиме променливата y, ќе добиеме некоја рационална алгебарска равенка по однос на променливата x:

$$F(x)=0 \ , \tag{6}$$

каде $F(x)$ е полином од x .

Преминот од ирационалната равенка (4) кон равенката (6), која е последица на (4) и не содржи радикали, се вика **исклучување на радикалите.**

Во многу случаи при исклучување на радикалите не воведуваме нови променливи, туку вршиме одредени трансформации директно над дадената ирационална равенка, додека не добиеме соодветна равенка без радикали. Во таков случај решенијата на секоја новодобиена равенка подлежат на специјални испитувања за тоа: кои вредности на радикалите мораат да се земат за добиените вредности на променливите. Да забележиме, доколку решавањето на ирационалната равенка го вршиме преку нејзино сведување на систем рационални равенки, тогаш не се потребни дополнители испитувања, бидејќи вредностите на радикалите се во исто време и вредности на помошните променливи.

Пример 1. Да се реши равенката $x+\sqrt{8-x}=2$ во полето на комплексните броеви.

Решение. Воведуваме нова променлива $y=\sqrt{8-x}$, па го добиваме системот рационални равенки $\begin{cases} x+y=2 \\ y^2=8-x \end{cases}$ (7)

Со замена на y од првата во втората равенка, ја добиваме квадратната равенка $x^2-3x-4=0$, од каде $x_1=4,\ x_2=-1$. Тоа се бараните корени (решенија) на дадената ирационална равенка во полето на комплексните броеви.

Исклучување на радикалот може да се постигне и со квадрирање на двете страни на равенката $\sqrt{8-x}=2-x$ и со мали трансформации ќе ја добиеме истата квадратна равенка $x^2-3x-4=0$.

При решавањето на дадената ирационална равенка во полето на реалните броеви, кон системот рационални равенки (7) треба да се додаде и условот $y\geq 0$, што одговара на барањето радикалот $\sqrt{8-x}$ да е аритметички корен. Тој услов го задоволува само решението $x=-1$. Навистина $y=\sqrt{8-x}=2-x=2+1=3>0$, додека за $x=4$ имаме $y=\sqrt{8-x}=2-4=-2<0$.

Значи, во полето на реалните броеви дадената равенка има единствено решение $x=-1$. Вредноста $x=4$ е решение на равенката $x-\sqrt{8-x}=2$. Меѓутоа, равенките $x+\sqrt{8-x}=2$ и $x-\sqrt{8-x}=2$ во полето на комплексните броеви не се различни, бидејќи коренот $\sqrt{8-x}$ во полето $\mathbb{C}$ има две спротивни вредности $\sqrt{8-x}$ и $-\sqrt{8-x}$, каде $\sqrt{\ }$ е аритметички.

3. Нека $f(x,y,...,z)=0$ (8)

е дадена ирационална ревенка. Ако за ирационалниот израз f е познат неговиот конјугиран множител f_1, тогаш множејќи ја левата страна на (8) со $f_1(x,y,...,z)$ ќе добиеме равенка без радикали:

$$f(x,y,...,z)\cdot f_1(x,y,...,z)=0 \qquad (9)$$

При користењето на овој начин на исклучување на радикалите, можат да се добијат и **страничии (придобиени) корени**, кои не се корени на дадената равенка, а всушност ќе бидат корени на равенката $f_1(x,y,...,z)=0$. Нив можеме да ги отфрлиме (ако има такви) со проверка на решенијата.

Пример 2. Да се реши равенката $\sqrt{x(x^2-1)}-\sqrt{6(x-1)}=0$.

Решение. Заради исклучување на радикалите, левата страна на дадената равенкаќе ја помножиме со нејзиниот конјугиран ирационален множител и добиваме:

$$\left(\sqrt{x(x^2-1)}-\sqrt{6(x-1)}\right)\left(\sqrt{x(x^2-1)}+\sqrt{6(x-1)}\right)=0,$$

$x(x^2-1)-6(x-1)=0$ или $x^3-x-6x+6=0$ или $x^3-7x+6=0$.

Забележуваме дека добиената кубна равенка има еден корен $x = 1$, (бидејќи збирот од коефициентите е еднаков на $1 - 7 + 6 = 0$). Потоа од разложу-вањето: $x^3-7x+6=(x-1)(x^2+x-6)=0$, другите два корена ги добиваме од квадратната равенка $x^2+x-6=0$. Тоа се: $x_2 = 2$ и $x_3 = -3$. Значи, дадената ирационална равенка во полето на комплексните броеви има три решенија: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и $x_3 = -3$, а во полето на реалните броеви, проверката покажува дека таа има само две решенија: $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

4. Во најголем број случаи исклучувањето на радикалите може да се постигне и со последователно степенување на двете страни на равенката. На пример, равенката од видот

$$A(x)\sqrt[n]{B(x)}=C(x) \tag{9}$$

со степенување на двете страни на n – ти степен, ја добиваме алгебарската рационална равенка

$$A^n(x)\cdot B(x)=C^n(x) \tag{10}$$

Во полето на комплексните броеви равенките (9) и (10) се еквивалентни, а под коренот $\sqrt[n]{B(x)}$ ја подразбираме која било од неговите n различни вредности.

Ако дадената ирационална равенка содржи повеќе радикали, оваа постапка може последователно да се примени и кон останатите радикали, се додека не се добие равенка што не содржи радикали.

Пример 3. Да се реши равенката $\sqrt[4]{x+1}+\dfrac{\sqrt[4]{x+1}}{x}=\sqrt[4]{243x}$.

Решение. Равенката ја доведуваме во видот $(x+1)\sqrt[4]{x+1}=x\sqrt[4]{243x}$. Потоа двете страни на равенката ги степенуваме на четврти степен и добиваме

$(x+1)^5=x^4\cdot 243x$, односно $(x+1)^5=(3x)^5$ или $\left(\dfrac{x+1}{3x}\right)^5=1$.

Познато е дека $\sqrt[5]{1}$ има пет различни комплексни вредности, од кои само една е реален број 1; според тоа дадената равенка во полето на комплексните

броеви има пет различни решенија $x_k = \frac{1}{3\sqrt[5]{1}-1}$, од кои во полето на реалните броеви е само решението $x_0 = \frac{1}{2}$.

Пример 4. Да се реши равенката:
$\sqrt{4a+b-5x}+\sqrt{4b+a-5x}=3\sqrt{a+b-2x}$, каде a и b се параметри.

Решение. Ги квадрираме двете страни и по мало средување добиваме:

$$\sqrt{4a+b-5x}\cdot\sqrt{4b+a-5x}=2(a+b-2x)$$

Повторно квадрираме, па добиваме:

$$(4a+b)\cdot(4b+a)-5x(4a+b+4b+a)+25x^2=4\left(a^2+b^2+4x^2+2ab-4ax-4bx\right).$$

Оттука $x^2-ax-bx+ab=0$ или $x^2-(a+b)x+ab=0$.

Оваа квадратна равенка, ако $a\neq b$, во полето на комплексните броеви има две решенија: $x_{1,2}=\frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2}}{2}=\frac{a+b\pm(a-b)}{2}$ или $x_1=a$, $x_2=b$.

Но, во полето на реалните броеви дадената равенка има само едно решение: Од $x=\frac{a+b+|a-b|}{2}$ при $a>b$, имаме $x=a$, а при $a<b$ решение е $x=b$.

ЗАДАЧИ

Реши ги следниве равенки во полето на комплексните броеви:

1. а) $\sqrt{2x-6}+\sqrt{x+4}=5$, б) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$
2. а) $\sqrt{x^2+x+1}=x-4$, б) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$
3. а) $\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2+21}=8$, б) $\sqrt{3-x}=2x-3$
4. а) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$, б) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x}$
5*. а) $2\sqrt{x}=\frac{x+1}{3x-2}$, б) $\sqrt[3]{13-x}+\sqrt[3]{x+22}=5$
6. а) $\sqrt[4]{1-x^2}=1-\sqrt{x}$, б) $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}=12$
7. а) $\frac{\sqrt[5]{3+x}}{3}+\frac{\sqrt[5]{3+x}}{x}=\frac{64}{3}\sqrt[5]{x}$, б) $\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}=12$

§ 85. ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ ВО ПОЛЕТО НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

85.1. ОПШТИ ПОИМИ

Во елементарната алгебра ирационалните равенки (и системи равенки), ако посебно не е нагласено, секогаш ги решаваме во полето на реалните броеви. При тоа не треба да испуштиме од вид дека: при решавањето на ирационалните равенки и системи равенки во полето на реалните броеви, вредностите на променливите и на радикалите во нив мора да задоволуваат **дополнителни услови**, што произлегуваат од изводливоста на операцијата коренување и смислата на коренот $\sqrt[n]{a}$ во полето на реалните броеви. Тие услови се:

1^0. Вредностите на сите подкоренови изрази кај сите радикали мораат да бидат реални, а кај радикалите со парен коренов показател тие мораат да се ненегативни. Системите вредности на променливите што го задоволуваат овој услов велиме ја сочинуваат **дефиницоната област** D на ирационалната равенка, или **област на менување на променливите** (кратко ОМП) на равенката.

Дефиницоната област на ирационалната равенка е еднаква на пресекот од дефиниционите области на одделните радикали, што влегуваат во состав на равенката.

2^0. Вредностите на радикалите со парен коренов показател секогаш се ненегативни, т.е. $\sqrt[2k]{A}$ секогаш означува аритметички корен; а вредноста на радикалот со непарен коренов показател $\sqrt[2k+1]{A}$ (при реален A) е единствен реален број со знак како и A.

Затоа решавањето на ирационалната равенка

$$f\left(x, y, \ldots, z, \sqrt[2k]{R(x, y, \ldots, z)}\right) = 0 \ ,$$

која содржи еден радикал со парен коренов показател, е еквивалентно на решавањето на мешаниот систем:

$$\begin{cases} f(x, y, \ldots, z, u) = 0 \\ u^{2k} = R(x, y, \ldots, z) \\ u \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

бидејќи за секое решение на системот (1) , вредноста на помошната променлива u и подкореновиот израз $R(x, y,..., z)$ со воведната равенка е обезбедено да бидат ненегативни.

Ако ирационалната равенка содржи неколку радикали со парни коренови показатели, тогаш кон мешаниот систем (1) неопходно е да се придодадат сите неравенства, што ја обезбедуваат ненегативноста на радикалите и нивните подкоренови изрази.

Ќе забележиме дека, решавањето на ирационалната равенка во полето на реалните броеви според методот на исклучување на радикалите може да се врши и преку решавање на системот рационални равенки (1) без соодветните неравенки со кои се обезбедува исполнетост на условите 1^0 и 2^0 . Но, во тој случај, всушност, ги наоѓаме сите решенија на ирационалната равенка во полето на комплексните броеви, и од тоа множество решенија треба да ги изоставиме оние решенија, кои не ги исполнуваат условите 1^0 и 2^0, односно кои не ѝ припаѓаат на дефиниционата област на дадената равенка. Според тоа, ако дефиниционата област на ирационалната равенка е празно множество, тогаш без натамошно решавање на равенката, со сигурност можеме да заклучиме дека таа нема решенија.

Пример 1. Нека е дадена равенката $\sqrt{4-x}-\sqrt{x-8}=2$.

Првиот радикал има смисла само при $4-x\geq 0$, односно при $x\leq 4$, а вториот радикал – само при $x\geq 8$. Бидејќи $(-\infty,4]\cap[8,\infty)=\varnothing$, следува дека дефиниционата област на равенката е празно множество. Значи, дадената равенка нема реални решенија.

За дадена ирационална равенка дека нема реални решенија во некои случаи може да се утврди и без решавање и без одредување на нејзината дефиниционa област. На пример, ирационалната равенка $\sqrt{x-3}=-2$ нема решенија, бидејќи нејзината лева страна е ненегативна, за секоја дозволена вредност на променливата x. Исто така и равенката $\sqrt{x-2}+\sqrt[5]{x^2+1}+5=0$ нема решенија, бидејќи на левата страна имаме збир од два ненегативни броја и бројот 5, а тој збир не може да добие вредност нула за никоја вредност на променливата x .

Пример 2. Да се реши равенката $\sqrt[4]{x^3-2x^2-5x+6}+\sqrt{x^2+5x+6}=0$.

Решение. Збирот на неколку ненегативни собироци може да биде еданков на нула единствено, кога секој собирок е еднаков на нула. Имајќи го предвид тоа заклучуваме дека: дадената ирационална равенка е еквивалнтна на системот равенки $\begin{cases} x^3-2x^2-5x+6=0 \\ x^2+5x+6=0 \end{cases}$.

Забележуваме дека првата равенка има еден корен $x_1 = 1$. Од разложувањето $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-4x+3)$ ги одредуваме и другите два корена: $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. Втората равенка во системот има корени $x_1 = -3$ и $x_2 = -2$.

Гледаме, двете равенки во системот имаат само едно заедничко решение $x = -2$.

Значи, дадената равенка има само едно реално решение $x = -2$.

Пример 3. Да се одредат реалните решенија на равенката:

$$x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0.$$

Решение. Дадената равенка ќе ја претставиме во видот:

$x^2 - 6x + 9 + y - 4\sqrt{y} + 4 = 0$ или $(x-3)^2 + \left(\sqrt{y} - 2\right)^2 = 0$. Оттука следува дека дадената равенка е еквивалентна со системот:

$$\begin{cases} (x-3)^2 = 0 \\ \left(\sqrt{y} - 2\right)^2 = 0 \end{cases}, \text{ од каде } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Според тоа, дадената равенка има едно реално решение: $(3, 4)$.

Пример 4. Да се реши равенката $\sqrt{3x^2 + 5x - 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$.

Решение. Забележуваме, изразот $3x^2 + 5x + 1$ за секоја вредност на x е поголем отколку $3x^2 + 5x - 8$. Затоа важи $\sqrt{3x^2 + 5x + 1} > \sqrt{3x^2 + 5x - 8}$. Значи, левата страна на дадената равенка за секоја вредност на x е негативна, па затоа не може да биде еднаква на 1. Според тоа, дадената равенка нема решенија.

85.2 ИСКЛУЧУВАЊЕ НА РАДИКАЛИТЕ СО СВЕДУВАЊЕ НА СИСТЕМ РАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Познато е дека од сите комплексни вредности на радикалот со парен коренов показател $\sqrt[2k]{A}$ (каде $A > 0$), две вредности се реални: $\pm\sqrt[2k]{A}$. Затоа при решавање на равенките, кои содржат реални радикали, можат да се појават и **страничии корени**. Тоа се всушност корени на некоја од равенките, што се добиваат кога во дадената равенка се променат знаците пред некои радикали со парен коренов показател, со знаци спротивни на нив.

Пример 5. Да ја решиме равенката $x + \sqrt{x^2 + (x+7)^2} = 18$ во полето на реалните броеви.

Решение. Дадената равенка содржи еден радикал. Неговата дефиниционa областe $D = \mathbb{R}$. Ако воведеме $\sqrt{x^2+(x+7)^2} = y$, го добиваме системот рационални равенки

$$\begin{cases} x+y=18 \\ x^2+(x+7)^2 = y^2 \end{cases}.$$

Со замена на y од првата во втората равенка, ја добиваме квадратната равенка $x^2+(x+7)^2=(18-x)^2$, или $x^2+50x-275=0$, од каде $x_1 = 5$, $x_2 = -55$. И двете решенија се реални броеви, што значи ѝ припаѓаат на дефиниционата област и за нив е $y > 0$.

Според тоа, дадената равенка има две решенија: $x_1 = 5$, $x_2 = -55$.

Пример 6. Да се реши равенката $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$.

Решение. Воведуваме нови променливи: $8-x=u^4$, $89+x=v^4$, и го добиваме системот симетрични равенки $\begin{cases} u+v=5 \\ u^4+v^4=97 \end{cases}$ (2)

а за дефиниционата област, од системот услови: $8-x\geq 0$, $89+x\geq 0$, добиваме $D=[-89;8]$.

Системот (2) го сведуваме на систем од основни симетрични равенки $u+v=a$, $uv=b$. За таа цел го трансформираме збирот:

$$u^4+v^4=\left(u^2+v^2\right)^2-2u^2v^2=\left[(u+v)^2-2uv\right]^2-2u^2v^2 .$$

Потоа, наместо $u+v$ и u^4+v^4 заменувајќи ги нивните вредности од (2), добиваме: $97=(25-2uv)^2-2u^2v^2$ или по средување $u^2v^2-50uv+264=0$. Од оваа равенка, решавајќи ја по однос на uv, добиваме: $(uv)_1=6$, $(uv)_2=44$.

Така системот симетрични равенки (2) го сведуваме на вкупност од два система:

$$\begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases}, \quad \begin{cases} u+v=5 \\ uv=44 \end{cases}$$

Вториот систем нема реални решенија, а од првиот систем добиваме:

$$u_1=2,\quad v_1=3 \quad \text{и} \quad u_2=3,\quad v_2=2$$

Бидејќи е $8-x=u^4$, тогаш следува: $x_1=-8$, $x_2=-73$. Гледаме, тие припаѓаат на дефиниционата област $-8,-73\in[-89,8]$, од што следува дека, дадената равенка има две решенија: $x_1=-8$ и $x_2=-73$.

Методот воведување на нова променлива го применуваме, освен за исклучување на радикалите во ирационалните равенки и нивно сведување на систем рационлни равенки, уште и за нивна замена со други попрости (рационални или ирационални) равенки по однос на новата променлива, кои знаеме да ги решиме.

Пример 7. Да се реши равенката: $\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} = 0$.

Решение. Ако замениме $\sqrt[3]{x} = t$, тогаш $\sqrt[3]{x^2} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 = t^2$, па дадената равенка го добива видот $t^2 - 2t - 3 = 0$, која е квадратна по однос на новата променлива t. Таа има две решенија: $t_1 = -1$, $t_2 = -3$. Од $\sqrt[3]{x} = -1$ добиваме $x_1 = -1$, а од $\sqrt[3]{x} = 3$ добиваме $x_2 = 27$. Тоа се бараните корени на дадената равенка .

Пример 8. Да се реши равенката $x^2 - x + 2\sqrt{x^2 - x - 1} = 4$.

Решение. Таа е еквивалентна со $x^2 - x - 1 + 1 + 2\sqrt{x^2 - x - 1} = 4$.

Ако ставаме $\sqrt{x^2 - x - 1} = t \quad (t \geq 0)$, тогаш $x^2 - x - 1 = t^2$, па дадената равенка преминува во $t^2 + 1 + 2t = 4$ или $t^2 + 2t - 3 = 0$, од каде $t_1 = 1$ и $t_2 = -3$. На таков начин решавањето на дадената равенка го сведуваме на вкупноста од две равенки:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x - 1} = 1 \\ \sqrt{x^2 - x - 1} = -3 \end{cases}$$

Втотрата равенка во вкупноста нема решенија, а од првата равенка добиваме: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Проверката покажува дека тие се решенија и на дадената равенка.

85.3. ИСКЛУЧУВАЊЕ НА РАДИКАЛИТЕ СО СТЕПЕНУВАЊЕ НА ДВЕТЕ СТРАНИ НА РАВЕНКАТА

Исклучувањето на радикалите во многу случаи во практиката го вршиме преку последователно степенување на двете страни на ирационалната равенка. Притоа секогаш треба да ги имаме предвид теоремите во § 56 за еквивалентност на равенките и системите равенки, кои важат и за ирационалните равенки и системи равенки. Според нив, степенувањето со непарен показател на двете страни на равенката доведува до еквивалентна равенка во полето на реалните броеви; но степенувањето со парен показател доведува до **последица** на појдовната равенка.

Според теорема Т[56.4] равенката $\left[F(x, y, ..., z)\right]^{2k} = \left[\phi(x, y, ..., z)\right]^{2k}$ (3)

е еквивалентна во полето на реалните броеви на вкупноста од равенките $F = \phi$ и $F = -\phi$.

Ако равенката $F = -\phi$ во полето на реалните броеви нема решенија, тогаш во тој случај равенката $F = \phi$ е еквивалентна со равенката (3).

Многу често ќе ја применуваме и следнава важна:

Теорема [85.1]. ***Равенката*** $\sqrt[2k]{A(x,y,...,z)} = B(x,y,...,z)$ ***во полето на реалните броеви е еквивалентна со мешаниот систем:***

$$\begin{cases} A(x,y,...,z) = B^{2k}(x,y,...,z) \\ B(x,y,...,z) \geq 0 \end{cases}$$

Навистина, равенката $A = B^{2k}$ е еквивалентна на вкупноста од две равенки $\sqrt[2k]{A} = B$ и $\sqrt[2k]{A} = -B$, но ако важи $B > 0$, тогаш втората равенка во вкупноста нема решенија, бидејќи е $\sqrt[2k]{A} > 0$.

Пример 9. Да се реши равенката $x^2 - 5 + \sqrt{x^2 - 6} = 7$.

Решение. Дадената равенка содржи само еден радикал. Него го оставаме на левата страна, а другите членови ги пренесуваме на десната страна: $\sqrt{x^2 - 6} = 12 - x^2$.

Оваа равенка согласно Т[85.1] е еквивалентна на мешаниот систем:

$$\begin{cases} x^2 - 6 = \left[12 - x^2\right]^2, \\ 12 - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

Ја решаваме равенката $x^4 - 25x^2 + 150 = 0$. Таа има решенија: $x_1 = \sqrt{10}$, $x_2 = -\sqrt{10}$, $x_3 = \sqrt{15}$, $x_4 = -\sqrt{15}$. Решенијата x_1 и x_2 ја задоволуваат неравенката во системот, а решенијата x_3 и x_4 – не ја задоволуваат истата.

Според тоа, дадената равенка има две реални решенија: $x_1 = \sqrt{10}$ и $x_2 = -\sqrt{10}$.

Пример 10. $\dfrac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \dfrac{3}{x}$.

Решение. Го извршуваме одземањето на дропките на левата страна, и добиваме

$$\frac{4\left(x - \sqrt{x^2 + x}\right) - \left(x + \sqrt{x^2 + x}\right)}{\left(x + \sqrt{x^2 + x}\right)\left(x - \sqrt{x^2 + x}\right)} = \frac{3}{x} \quad \text{или} \quad \frac{3x - 5\sqrt{x^2 + x}}{-x} = \frac{3}{x}.$$

При $x \neq 0$, последната равенка е еквивалентна на $3(x+1)=5\sqrt{x^2+x}$, а оваа е еквивалентна на мешаниот систем:

$$\begin{cases} 9(x+1)_2 = 25x(x+1) \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \tag{4}$$

Ја решаваме равенката $9(x+1)^2 = 25x(x+1)$ или $(x+1)[9(x+1)-25x]=0$, од каде $x_1=-1, \quad x_2=\frac{9}{16}$. Бидејќи најдените решенија x_1 и x_2 ја задоволуваат и неравенката во системот (4), следува дека дадената равенка има две реални решенија $x_1=-1, \quad x_2=\frac{9}{16}$.

Пример 11. Да се реши равенката $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$.

Решение. Ги квадрираме двете страни на равенката и добиваме :

$$x+1-2\sqrt{x+1}+1=x-\sqrt{x+8}, \text{ или } 2+\sqrt{x+8}=2\sqrt{x+1}.$$

Повторно квадрираме, па добиваме: $4+4\sqrt{x+8}+x+8=4(x+1)$ или $4\sqrt{x+8}=3x-8$.

Трет пат квадрираме и ја добиваме рационалната равенка:

$$16(x+8)=9x^2-48x+64 \text{ или } 9x^2-64x-64=0,$$

која има два корена $x_1=8, \quad x_2=-\frac{8}{9}$. Проверката покажува дека само $x = 8$ е корен на дадената равенка.

Пример 12. Да се реши равенката

$$\sqrt{x^2+4x+8}+\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{2(x^2+4x+6)}.$$

Решение. Да означиме со y еден од подкореновите изрази. Најпогодно е да замениме $x^2+4x+6=y$. Тогаш равенката ќе го добие видот:

$$\sqrt{y+2}+\sqrt{y-2}=\sqrt{2y} \tag{5}$$

Се ослободуваме од радикалите со квадрирање на двете страни:

$$y+2+y-2+2\sqrt{y^2-4}=2y \text{ или } 2\sqrt{y^2-4}=0, \text{ од каде } y^2-4=0, \; y_1=2,$$

$y_2 = -2$. Од овие два корена, само коренот $y = 2$ ја задоволува равенката (5) (при $y=-2$ два подкоренови изрази се негативни). Ја решаваме равенката $x^2 + 4x + 6 = 2$ и добиваме $x = -2$. Тоа е решение на дадената равенка.

ЗАДАЧИ

1. Одреди ја дефиниционата област на равенката:

а) $\sqrt{x^2 - 4} = 1 + \sqrt{x-1}$, б) $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{x-1} + 3$

2. Образложи зошто следниве равенки немаат решение :

а) $\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{3-x} = 5$, б) $\sqrt{x-5} + \sqrt{4-x} = 3$, в) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 0$

г) $\sqrt{4-x^2} - \sqrt{x-5} = x-1$

3. Напамет одреди ги решенијата на равенката :

а) $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x-1} = 0$, б) $\sqrt[4]{x(x+2)} + \sqrt{x^2 - 4} = 0$

4. Докажи дека равенката $x^2 - 5x + 4\sqrt{x} + 13 = 0$ нема решение.

Реши ги равенките во полето на реалните броеви (5 – 10) :

5. а) $\sqrt{1+3x} + 1 = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$, б) $\sqrt{1 - x^2} = 1 - \sqrt{x}$

6*. а) $\sqrt[4]{x+15} - \sqrt{x-1} = 2$, б) $\sqrt[4]{41+x} + \sqrt{41-x} = 4$

7. а) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$, б) $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$

8*. а) $\sqrt[2mn]{x^{m+n}} - \frac{1}{2}\left(\sqrt[m]{x} + \sqrt[n]{x}\right) = 0$, б) $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x-15} = 4$

9*. а) $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$, б) $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = x - 8$

10. а) $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{2} + 4$, б) $\sqrt{x^2 + 11} + x^2 + 11 = 42$

§ 86. ЕКВИВАЛЕНТНОСТ НА НЕКОИ ТРАНСФОРМАЦИИ

1. Знаеме дека, квадрирањето и општо степенувањето со парен показател на двете страни на дадена (ирационална) равенка во општ случај не доведува до еквивалентна равенка, туку до последица на дадената. При извршувањето на оваа нееквивалентна трансформација над ирационалната равенка, неминовно треба да очекуваме и појава на странични (придобиени) решенија кај добиената равенка, а кои не се решенија на појдовната равенка.

За отстранување на придобиените корени, знаеме, неопходна е **проверка** на сите најдени решенија на добиената равенка по извршената нееквивалентна трансформација. Што се однесува до проверката, таа станува непотребна само во случаите, кога е иследувана еквивалентноста на секоја трансформација применувана во процесот на решавање.

При решавањето на ирационалните равенки, од немала важност е и следењето на дефиниционата област на појдовната и добиените равенки. Да забележиме: при решавањето на равенките често применуваме трансформации кои ја менуваат (прошируваат или стеснуваат) дефиниционата област на појдовната равенка. На пример, од невнимание за промената на дефиниционата област, честопати правиме ваква грешка: равенката $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ отфрлајќи го именителот ја заменуваме со равенката $f(x)=0$. Меѓутоа, со отфлањето на именителот се проширува дефиниционата област; кон неа се приклучуваат и вредностите на x за кои именителот е еднаков на нула. Според тоа, треба да се очекува појавување и на придобиени решенија .

Нема да погрешиме, ако ја имаме предвид еквивалентноста:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(x) \text{ постои и } g(x)\neq 0. \end{cases}$$

Друг пример. Од невнимание понекогаш правиме и ваква грешка: равенката $f(x)\cdot\varphi(x)=g(x)\varphi(x)$ скратувајќи со $\varphi(x)$, ја заменуваме со равенката $f(x)=g(x)$. Меѓутоа, со отфрлањето на множителот $\varphi(x)$ од двете страни, дефиниционата област се стеснува, кое нешто е пропратено со губање на решенијата на $\varphi(x)=0$.

Нема да погрешиме до колку водиме сметка за еквивалентноста:

$$f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ \varphi(x)=0. \end{cases}$$

Сметаме дека нема да биде отповеќе, ако ги наведеме и следниве две еквивалентности:

$$f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\ \varphi(x)\ \text{постои}\end{cases}$$

$$f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\ \varphi(x)\ \text{постои и}\ \varphi(x)\neq 0\end{cases}$$

При решавањето на ирационалните равенки често ги применуваме следниве трансформации:

(i) $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=r(x)\Rightarrow\sqrt{f(x)\cdot g(x)}=r(x)$

(ii) $\dfrac{\sqrt{f(x)}}{\sqrt{g(x)}}=\varphi(x)\Rightarrow\sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}}=\varphi(x)$

(iii) $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2=g(x)\Rightarrow f(x)=g(x)$

кои во општ случај не се еквивалентни, бидејќи ја прошируваат дефиниционата област на појдовната равенка. Навистина, решението на секоја добиена равенка, за кое е $f(x)<0$ и $g(x)<0$ нема да биде решение и на појдовната равенка.

Пример 1. Да се реши равенката $\dfrac{1}{\sqrt{x-6}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+6}}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-36}}$.

Решение. Гледаме, дадената равенка има дефиниционa област $D=(6,\infty)$. При $x>6$ ни еден до именителите на дропките не е еднаков на нула, затоа множејќи ги двете страни на равенката со $\sqrt{x^2-36}$, добиваме $\sqrt{x+6}-\sqrt{x-6}=2$ или $\sqrt{x+6}=2+\sqrt{x-6}$.

Со квадрирање на двете страни на оваа равенка, имаме:

$x+6=4+x-6+4\sqrt{x-6}$ или $2=\sqrt{x-6}$, откаде $x=10$.

2. Основен метод при решавање на ирационалните равенки, кои содржат кубни корени е степенувањето на двете страни на равенката на трет степен. При тоа погодно е да се користи формулата:

$(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$.

Пример 2. Да се реши равенката $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

Решение. Дефиниционата област на равенката е $D=\mathbb{R}$. Ги степенуваме двете страни на трет степен и добиваме:

$$x+1+3x+1+3\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{3x+1}\cdot\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)=x-1.$$

Во оваа равенка изразот $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}$, гледаме дека е лева страна на дадената равенка. Заменувајќи го тој израз со еднаквиот нему израз $\sqrt[3]{x-1}$ што се наоѓа на десната страна во дадената равенка, добиваме:

$$\sqrt[3]{x+1}\cdot\sqrt[3]{3x+1}\cdot\sqrt[3]{x-1}=-(x+1)$$

Степенувајќи повторно на трет степен, добиваме:

$$(x+1)(3x+1)(x-1)=-(x+1)^3 \text{ или } (x+1)\left[(x+1)^2+(3x+1)(x-1)\right]=0$$

или $4x^2(x+1)=0$, од каде $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. И двата корена припаѓаат на дефиниционата област, но проверката ни покажува дека коренот $x_1 = 0$ е придобиен корен, т.е. не е корен на дадената равенка. Тој се појавил како резултат на замената на левата страна на дадената равенка $\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}\right)$ со десната страна $\left(\sqrt[3]{x-1}\right)$, која пак не е идентички еднаква на левата страна.

Овој пример покажува дека дури и припаѓањето на најденото решение на дефиниционата област на равенката секогаш не е гаранција дека тоа не е придобиено решение. Тоа сепак не значи, дека наоѓањето на дефиниционата област на равенката секогаш е бессмислено. Можат да се наведат многу примери кога знаењето на дефиниционата област значително го упростува решавањето на равенката.

Пример 3. Да се реши равенката $\sqrt[3]{x^3+9x^2-2}=x+1$.

Решение. Двете страни ги степенуваме на трет степен и добиваме:

$$x^3+9x^2-2=(x+1)^3, \text{ или } 2x^2-x-1=0.$$

Добиената равенка е еквивалентна на дадената, па според тоа нејзините решенија $x_1 = 1$ и $x_2=-\frac{1}{2}$ се бараните решенија и на дадената равенка.

3. Во одредени ирационални равенки може да се случи еден или неколку подкоренови изрази да се точни квадрати.

Пример 4. Да се реши равенката $\sqrt{1-3x}+5=\sqrt{x^2-4x+4}$.

Решение. Дадената равенка може да се запише во видот :

$$\sqrt{1-3x}+5=\sqrt{(x-2)^2}, \text{ или } \sqrt{1+3x}+5=|x-2| \qquad (1)$$

Дефиниционата област на равенката е $x \le \frac{1}{3}$, а во неа ќе биде $|x-2| = -(x-2)$.

Со оглед на тоа равенката (1) е еквивалентна на $\sqrt{1-3x}+5 = 2-x$, или $\sqrt{1-3x} = -(3+x)$, а оваа е еквивалентна на мешениот систем

$$\begin{cases} 1-3x = [-(x-2)]^2 \\ 3+x \le 0 \end{cases}$$

Равенката од системот има решенија $x_1 = -1$, $x_2 = -8$. Гледаме, двете решенија припаѓаат на дефиниционата област на равенката, но само решението $x = -8$ го задоволува неравенството на системот. Според тоа, дадената равенка има единствено решение $x = -8$.

Пример 5. Да се реши: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

Решение. Бидејќи е $x+3-4\sqrt{x-1} = (x-1)-4\sqrt{x-1}+4 = \left(\sqrt{x-1}-2\right)^2$ и $x+8-6\sqrt{x-1} = (x-1)-6\sqrt{x-1}+9 = \left(\sqrt{x-1}-3\right)^2$, зато дадената ирационална равенка е еквивалентна на равенката:

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right| + \left|\sqrt{x-1}-3\right| = 1 \qquad (2)$$

Радикалот $\sqrt{x-1}$ е реален, ако $x \ge 1$. Тогаш

$$\left|\sqrt{x-1}-2\right| = \begin{cases} \sqrt{x-1}-2, \text{ако } \sqrt{x-1} \ge 2, \text{т.е. ако } x \ge 5, \\ 2-\sqrt{x-1}, \text{ако } 0 < \sqrt{x-1} < 2, \text{т.е. ако } 1 \le x < 5, \end{cases}$$

$$\left|\sqrt{x-1}-3\right| = \begin{cases} \sqrt{x-1}-3, \text{ако } \sqrt{x-1} \ge 3, \text{т.е. ако } x \ge 10, \\ 3-\sqrt{x-1}, \text{ако } 0 < \sqrt{x-1} < 3, \text{т.е. ако } 1 < x < 10, \end{cases}$$

Според тоа, левата страна на равенката (2) е еднаква на:

$$\begin{cases} 5-2\sqrt{x-1}-2, \text{ако } 1 \le x < 5, \\ 1, \text{ако } 5 \le x \le 10, \\ 2\sqrt{x-1}-5, \text{ако } x > 10. \end{cases}$$

На сегментот $5 \le x \le 10$ равенката е задоволена идентички ($1 = 1$), на сегментот $1 \le x < 5$ равенката $5-2\sqrt{x-1} = 1$ нема реални решенија. Исто така и

во интервалот $x > 10$ равенката $2\sqrt{x-1}-5=1$ нема решенија. Според тоа, дадената равенка има бесконечно множество решенија: M = [5 , 10].

4. Кај некои ирационални равенки до полесно исклучување на радикалите доаѓаме и по пат на множење на двете страни на равенката со израз, што е конјугиран множител на левата страна.

Пример 6. Да се реши равенката: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=8$.

Решение. Дефиниционата област на равенката е $x \geq -4$. Конјугираниот множител на изразот од левата страна на равенката да го означиме со y, т.е. нека $\sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}=y$. Множејќи ги двете страни на дадената равенка со соодветните страни на оваа равенка, добиваме: $(x+4)-(x+20)=8y$, од каде $y = -2$. Од системот равенки

$$\begin{cases}\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}=8\\ \sqrt{x+4}-\sqrt{x+20}=-2\end{cases}$$

собирајќи ги нивните соодветни страни, добиваме $2\sqrt{x+4}=6$, или $\sqrt{x+4}=3$, од каде $x + 4 = 9$, односно $x = 5$. Оваа вредност припаѓа на дефиниционата област и ја задоволува дадената равенка.

Пример 7. Да се реши равенката: $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+2x-8}=1$.

Решение. Поаѓајќи од идентитетот $\left(\sqrt{x^2+2x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2+2x-8}\right)^2=9$, а имајќи ја предвид и почитувајќи ја дадената равенка, следува дека важи равенката $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2+2x-8}=9$. А собирајќи ги соодветните страни на дадената и оваа равенка, добиваме: $2\sqrt{x^2+2x+1}=10$ или $\sqrt{x^2+2x+1}=5$, од каде $x^2+2x-24=0$, или $x_1=4$, $x_2=-6$.

Ако не ја одредуваме дефиниционата област, тогаш е задолжителна проверката на добиените решенија. Таа покажува дека и двете решенија ја задоволуваат дадената равенка.

5. Понекогаш при решавањето на некои ирационални равенки погодно е да се искористи формулата за сложениот корен $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$, или една од формулите (2) или (3) во § 77, и тоа во случај ако $A^2 - B$ е точен квадрат. Следниве два примера го илустрираат тоа.

Пример 8. Да се реши: $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

Решение. Сложените изрази: $P_1(x)=\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}$ и

$P_2(x)=\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}$ да ги трансформираме со примена на формулата за $\sqrt{A+\sqrt{B}}$.

$$P_1(x)=\sqrt{\frac{x-2+\sqrt{(x-2)^2-(2x-5)}}{2}}+\sqrt{\frac{x-2-\sqrt{(x-2)^2-(2x-5)}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{x-2+\sqrt{(x-3)^2}}{2}}+\sqrt{\frac{x-2-\sqrt{(x-3)^2}}{2}}=\sqrt{\frac{x-2+|x-3|}{2}}+\sqrt{\frac{x-2-|x-3|}{2}}$$

Аналогно добиваме и: $P_2(x)=\sqrt{\frac{x+2+|x-7|}{2}}+\sqrt{\frac{x+2-|x-3|}{2}}$.

Дефиниционата област на дадената равенка е $x\geq\frac{5}{2}$.

Ќе ги разгледаме одделно случаите:

а) ако $x\geq 7$, тогаш $|x-7|=x-7$ и $|x-3|=x-3$,

б) ако $3\leq x<7$, тогаш $|x-7|=7-x$ и $|x-3|=x-3$,

в) ако $\frac{5}{2}\leq x<3$, тогаш $|x-7|=7-x$ и $|x-3|=3-x$.

Во случајот а) имаме: $P_1(x)=\sqrt{\frac{x-2+x-3}{2}}+\sqrt{\frac{x+2-x+3}{2}}=\sqrt{\frac{2x-5}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$P_2(x)=\sqrt{\frac{x+2+x-7}{2}}+\sqrt{\frac{x+2-x+7}{2}}=\sqrt{\frac{2x-5}{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Во случајот б) имаме: $P_1(x)=\sqrt{\frac{x-2+x-3}{2}}+\sqrt{\frac{x-2-x+3}{2}}=\sqrt{\frac{2x-5}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$P_2(x)=\sqrt{\frac{x+2+7-x}{2}}+\sqrt{\frac{x+2-7+x}{2}}=\sqrt{\frac{2x-5}{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Аналогно добиваме дека и во случајот в) ќе биде:

$$P_1(x)=\sqrt{\frac{2x-5}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\text{ , а }P_2(x)=\sqrt{\frac{2x-5}{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}\qquad(3)$$

Гледаме и во трите случаи, добиваме ист резултат (3).

Оттука следува дека дадената равенка е еквивалентна на равенката:

$2\sqrt{\frac{2x-5}{2}}+\frac{4}{\sqrt{2}}=7\sqrt{2}$, или $2\sqrt{2x-5}+4=14$, или $\sqrt{2x-5}=5$, од каде добиваме $x = 15$.

Пример 9. Да се реши равенката: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

Решение. Дефиниционата област на равенката ја одредуваме од уловите: $x-1\geq 0$ и $x-2\sqrt{x-1}\geq 0$. Од првата неравенка имаме $x\geq 1$, а при тој услов од втората неравенка $x\geq 2\sqrt{x-1}$, добиваме $x^2\geq 4(x-1)$ или $x^2-4x+4\geq 0$, односно $(x-2)^2\geq 0$.

Значи, дефиниционата област ќе биде $x\geq 1$, или $D=[1,\infty)$. Левата страна на равенката со примена на формулата (3) во § 77 ја трансформираме во:

$$\sqrt{x+\sqrt{4(x-1)}}-\sqrt{x-\sqrt{4(x-1)}}=2\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-4(x-1)}}{2}}=2\sqrt{\frac{x-\sqrt{(x-2)^2}}{2}}=2\sqrt{\frac{x-|x-2|}{2}}$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката:

$$2\sqrt{\frac{x-|x-2|}{2}}=2, \text{ или } \sqrt{\frac{x-|x-2|}{2}}=1 \qquad (4)$$

Бидејќи $|x-2|=\begin{cases}x-2, \text{ако } x\geq 2\\ -(x-2), \text{ако } x<2\end{cases}$, затоа:

а) Ако $x\geq 2$, тогаш равенката (4) го добива видот $\sqrt{\frac{x-(x-2)}{2}}=1$ или $1 = 1$. Тоа значи дека секоја вредност на x од интервалот $[2,\infty)$ е решение на равенката (4).

б) Ако $x<2$, тогаш равенката (4) го добива видот $\sqrt{\frac{x+(x-2)}{2}}=1$ или $\sqrt{x-1}=1$, од каде $x = 2$.

Бидејќи $2\notin(-\infty,2)$, следува дека во интервалот $(-\infty,2)$ равенката нема решенија. Од тоа што $[2,\infty)\subset D=[1,\infty)$ и равенката (4) е еквивалентна со дадената равенка, следува дека множеството решенија на дадената равенка го сочинуваат сите реални броеви од интервалот $[2,\infty)$, т.е. $M=[2,\infty)$.

ЗАДАЧИ

1. Дали равенките се еквивалентни :

а) $\sqrt{\frac{x-5}{x+1}}=\sqrt{2}$ и $\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+1}}=\sqrt{2}$

б) $\sqrt{x^2-9}=\sqrt{7}$ и $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+3}=\sqrt{7}$.

Реши ги следниве равенки во полето на реалните броеви :

2*. а) $x^2-4(x+2)\sqrt{x+1}+8(x+1)=0$

б) $\sqrt{x^2-16}=\sqrt{x-4}\cdot\sqrt{x+4}$

3. а) $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{x+1}}=4$ б) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{7-x}=2$.

4. а) $\frac{\sqrt{x^2-8x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+7}=\frac{7}{\sqrt{x+1}}$, б) $\frac{\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}}{\sqrt{27+x}-\sqrt{27-x}}=\frac{27}{x}$.

5. а) $2x\sqrt[3]{x}-4x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=6$, б) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x}$

6. $\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+2}}+\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+3}}=\frac{7}{x+2}\cdot\sqrt{\frac{x+2}{x+3}}$

7. $\sqrt{2\sqrt{7}+\sqrt{x}}-\sqrt{2\sqrt{7}-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{28}$

8. $\sqrt[3]{2+\sqrt{10+2x}}+\sqrt[3]{\sqrt{15-2x}-9}=0$

9. $\sqrt[4]{(x+2)^2}+\sqrt[4]{(x-1)^2}=4\sqrt[4]{x^2-1}$

10*. $\sqrt{x+3-2\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=4$.

§ 87. ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ СО ПАРАМЕТРИ

На неколку поедноставни примери ќе го покажаме решавањето на ирационални равенки, кои содржат параметри. Нивното решавање значително се усложнува со дискусијата што треба да се спроведе за најдените решенија, во зависност од промената на параметрите.

Пример 1. Да се реши равенката $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{2a}$, каде a е реален параметар.

Решение . Двете страни на равенката ги степенуваме на трет степен земајќи ја предвид и дадената равенка , добиваме:

$a+x+a-x+3\sqrt[3]{a+x}\cdot\sqrt[3]{a-x}\cdot\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)=2a$ или $3\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot\sqrt[3]{2a}=0$. При $a\neq 0$ добиената равенка се сведува на $\sqrt[3]{a^2-x^2}=0$, или $a^2-x^2=0$ од каде $x=\pm a$.

Ако е $a=0$, тогаш дадената равенка го добива видот $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{0}$ и идентички е задоволена за секој $x\in\mathbb{R}$.

Според тоа, при $a\neq 0$ равенката има две решенија $x_{1,2}=\pm a$.

Ако $a=0$, тогаш равенката е идентички задоволена за секој реален број x.

Пример 2. Да се реши равенката $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$.

Решение. Да означиме $a-x=u^4$, $b-x=v^4$, тогаш $a+b-2x=u^4+v^4$. Дадената равенка го добива видот $u+v=\sqrt[4]{u^4+v^4}$. Двете страни ги степенуваме на четврти степен: $u^4+4u^3v+6u^2v^2+4uv^3+v^4=u^4+v^4$ или $uv\left(2u^2+3uv+2v^2\right)=0$, а оваа равенка се распаѓа на вкупност од три равенки:

$u=0,\quad v=0,\quad 2u^2+3uv+2v^2=0$. Оттука имаме:

Ако $u=0$, тогаш $x_1=a$. Ако $v=0$, тогаш $x_2=b$.

Последната равенка од вкупноста ја трансформираме во видот:

$2\left(u^2+v^2\right)=-3uv$. Со квадрирање на двете страни, добиваме: $4\left(u^4+v^4\right)=u^2v^2$, од каде враќајќи се на старите ознаки, имаме:

$$4(a+b-2x)=\sqrt{(a-x)(b-x)}$$

Од оваа равенка се добиваат уште две решенија, но и двете се комплексни. Значи, дадената равенка има само две реални решенија $x_1=a$ и $x_2=b$.

Пример 3. Да се реши: $\dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{b}$, каде $a>b>0$.

Решение. Равенката ја трансформираме во видот:

$$\sqrt[n]{a+x}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt[n]{x}}{b} \quad \text{или} \quad \sqrt[n]{a+x}\,\frac{x+a}{ax}=\frac{\sqrt[n]{x}}{b}, \quad \frac{\sqrt[n]{a+x}}{\sqrt[n]{x}}\,\frac{a+x}{x}=\frac{a}{b},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a+x}{a}\cdot\frac{a+x}{x}}=\frac{a}{b}, \quad \left(\frac{a+x}{x}\right)^{\frac{1}{n}+1}=\frac{a}{b}, \quad \left(\frac{a+x}{x}\right)^{n+1}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n} \quad \text{или} \quad \frac{a}{x}+1=\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}$$

$$\text{или} \quad \frac{a}{x}=\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}-1, \quad x=\frac{a}{\sqrt[n+1]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}-1}$$

Пример 4. Да се реши равенката: $\sqrt[3]{(a+x)^2}-\sqrt[3]{a^2-x^2}+\sqrt[3]{(a-x)^2}=\sqrt[3]{a^2}$.

Решение. Да го одредиме коњугираниот множител на изразот што е десна страна на дадената равенка. Тоа е изразот: $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}$, ако со него ги помножиме двете страни на дадената равенка, добиваме:

$$a+x+a-x=3\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right),$$

т.е. $$\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\frac{2a}{\sqrt[3]{a^2}}, \text{ или } \sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=2\sqrt[3]{a}\,.$$

Двете страни на последната равенка ги степенуваме на трет степен, со што добиваме: $a+x+a-x+3\sqrt[3]{a+x}\sqrt[3]{a-x}\left(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\right)=8a$,

$2a+3\sqrt[3]{a^2-x^2}\cdot 2\sqrt[3]{a}=8a$, или $\sqrt[3]{a^2-x^2}=\sqrt[3]{a^2}$, односно $a^2-x^2=a^2$, од каде $x = 0$. Проверката покажува дека $x = 0$ е единствено реално решение на дадената равенката.

Приме 5. Да се реши равенката: $\sqrt{a+x}-\sqrt[3]{a+x}=0$.

Решение. Да ставиме $\sqrt[6]{a+x}=y$, тогаш $\sqrt{a+x}=y^3$, $\sqrt{a+x}=y^2$, па равенката го добива видот $y^3-y^2=0$, или $y^2(y-1)=0$. Оттука $y_1=0$, $y_2=1$. Од $\sqrt[6]{a+x}=0$ имаме $x_1=-a$, а од $\sqrt[6]{a+x}=1$ имаме $x_2=1-a$. Значи, дадената равенка има решенија $x_1=-a$ и $x_2=1-a$.

Пример 6. Да се реши равенката $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

Решение. При $x\geq 0$ равенката е еквивалентна на $a-\sqrt{a+x}=x^2$. Оваа ја трансформираме како што следува: $x^2-a+\sqrt{a+x}=0$,

$x^2-(a+x)+\left(x+\sqrt{a+x}\right)=0$, $x^2-\left(\sqrt{x+a}\right)^2+\left(x+\sqrt{a+x}\right)=0$,
$\left(x+\sqrt{a+x}\right)\left(x-\sqrt{a+x}+1\right)=0$.

Последната равенка е еквивалентна на вкупноста $\left[\begin{array}{l} x+\sqrt{a+x}=0 \\ \sqrt{a+x}=x+1 \end{array}\right.$.

Првата равенка од вкупноста при $x > 0$ нема реални решенија, бидејќи $x+\sqrt{a+x}>0$, а при $x = 0$ следува дека $a = 0$. Проверката покажува дека $x_1 = 0$ при $a = 0$ е решение на равенката. Втората равенка од вкупноста при $x \geq 0$ е еквивалентна на квадратната равенка $x^2+x-(a-1)=0$, од каде $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$. Решението е $x_2=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$ при $a\geq\frac{3}{4}$ го задоволува условот $x \geq 0$, но $x_3=\frac{-1-\sqrt{4a-3}}{2}$ не го задоволува тој услов, па според тоа дадената равенка има решенија: при $a = 0$, $x_1 = 0$, и при $a>\frac{3}{4}$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$.

Пример 7. Да се реши равенката: $\frac{\sqrt{1+a^2x^2}-ax}{\sqrt{1+a^2x^2}+ax}=\frac{1}{c^2}$.

Решение. Го рационализираме именителот на дропката и добиваме:

$\left(\sqrt{1+a^2x^2}-ax\right)^2=\frac{1}{c^2}$. Изразот $\sqrt{1+a^2x^2}-ax$, секогаш е позитивен, затоа имаме $\sqrt{1+a^2x^2}-ax=\frac{1}{|c|}$, $\sqrt{1+a^2x^2}=ax+\frac{1}{|c|}$. Ги квадрираме двете страни на последната равенка и добиваме: $1+a^2x^2=a^2x^2+\frac{2ax}{|c|}+\frac{1}{|c|^2}$, или $\frac{2ax}{|c|}=1-\frac{1}{|c|^2}$, или $x=\frac{|c|^2-1}{2a|c|}$, или $x=\frac{c^2-1}{2a|c|}$. Според тоа дадената равенка има решение:

При $c>0$, $x=\frac{c^2-1}{2ac}$ и при $c<0$, $x=\frac{1-c^2}{2ac}$.

Пример 8. Да се реши равенката $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$.

Решение. Бидејќи е $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}>0$, за секоја вредност на x, затоа равенката нема решенија, ако $a\le 0$. Ќе сметаме да е $a>0$. Равенката ја запишуваме во видот $\sqrt{|x|+1}=\sqrt{|x|}+a$.

Гледаме дека двете страни се позитивни за секој x ($a>0$). Ги квадрираме двете страни, и добиваме еквивалентна равенка

$$|x|+1=|x|+2a\sqrt{|x|}+a^2 \ , \quad \text{или} \quad 2a\sqrt{|x|}=1-a^2 \tag{1}$$

При $a>1$, бидејќи левата страна е позитивна, а десната – негативна, равенката нема решенија. Нека $0<a<1$, тогаш равенката (1) е еквивалентна на $4a^2|x|=\left(1-a^2\right)^2$, од каде $|x|=\dfrac{\left(1-a^2\right)^2}{4a^2}$, односно $x_{1,2}=\dfrac{\pm\left(1-a^2\right)^2}{4a^2}$. Според тоа, ако $0<a<1$ дадената равенка има две решенија: $x_{1,2}=\dfrac{\pm\left(1-a^2\right)^2}{4a^2}$. Ако $a=1$, тогаш равенката има решение $x_3=0$.

Ако $a\le 0$ равенката нема решенија.

Пример 9. Да се реши равенката $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\dfrac{b}{a}$.

Решение. Равенката е во вид на пропорција. Ја составуваме изведената пропорција: збирот на членовите од првиот однос кон нивната разлика се однесуваат исто како збирот на членовите од вториот однос кон нивната разлика:

$$\frac{\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)+\left(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\right)}{\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)-\left(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\right)}=\frac{b+a}{b-a}\,(a\ne b), \quad \frac{2\sqrt{a+x}}{2\sqrt{a-x}}=\frac{b+a}{b-a}.$$

Ги квадрираме двете страни и повторно ја формираме изведената пропорција: $\dfrac{a+x}{a-x}=\dfrac{(b+a)^2}{(b-a)^2}$, $\dfrac{2a}{2x}=\dfrac{(b+a)^2+(b-a)^2}{(b+a)^2-(b-a)^2}$ или $\dfrac{a}{x}=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$. Оттука $x=\dfrac{2a^2b}{a^2+b^2}$. Проверката покажува дека добиеното решение ја задоволува дадената равенка.

Ако е $b=a$, тогаш дадената равенка го добива видот:

$\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=1$ или $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}$, или $2\sqrt{a-x}=0$ откаде $x=a$.

ЗАДАЧИ

Реши ги следниве ирационални равенки со параметри (1 – 5):

1. а) $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}=\sqrt{2x}$, б) $\sqrt{a+x}=a-\sqrt{x}$.

2. а) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2-2}=a$, б) $\sqrt{a+x}+x^2=a$

3. а) $\sqrt[n]{\frac{a-x}{b+x}}+\sqrt[n]{\frac{b+x}{a-x}}=2$, б) $\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x}$

4. а) $\sqrt{x^2-1}+x=a$, б) $\sqrt{a-x}+\sqrt{b+x}=\sqrt{a+b}$

5*. а) $\sqrt[5]{\frac{a+x}{a}}+\sqrt[5]{\frac{a+x}{b}}=\sqrt[5]{\frac{x}{ab}}$, б) $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}=a+b$

§ 88. СИСТЕМИ ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ

Системите ирационални равенки ќе ги решаваме во полето на реалните броеви и се решаваат на ист начин како и системите рационални равенки.

Пример 1. Да се реши системот равенки: $\begin{cases}\sqrt{\frac{3x}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{3x}}=2\\ xy-54=x+y\end{cases}$.

Решение. Заменуваме $\sqrt{\frac{3x}{x+y}}=u$. Првата равенка го добива видот $u+\frac{1}{u}=2$, или $u^2-2u+1=0$, или $(u-1)^2=0$. Оттука $u = 1$, т.е. $\sqrt{\frac{3x}{x+y}}=1$. Од последната равенка добиваме $y = 2x$ и го заменуваме во втората равенка на системот: $x\cdot 2x-54=x+2x$, или $2x^2-3x-54=0$. Оттука $x_1=6$, $x_2=-\frac{9}{2}$, а од $y = 2x$ имаме: $y_1 = 12$, $y_2 = -9$.

Значи, дадениот систем има решенија: $(6, 12)$ и $(-\frac{9}{2}, 9)$.

Пример 2. Да го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2} + 2\sqrt{x^2+1} + y^2 = 3 \\ x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+1}} + y^2 = 0 \end{cases}$$

Решение. Го рационализираме именителот на дропката и со y ја поделуваме втората равенка од системот, и добиваме: $\frac{x}{y} + \sqrt{x^2+1} - x + y = 0$. Потоа го заменуваме радикалот $\sqrt{x^2+1} = -\frac{x}{y} + x - y$ од втората во првата равенка, па ја добиваме равенката:

$$\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + y^2 + 2x - 2y = 3, \text{или } \left(\frac{x^2}{y^2} + 2x + y^2\right) - 2\left(\frac{x}{y} + y\right) = 3.$$

Со внесување на нова променлива $\frac{x}{y} + y = z$ равенката го добива видот $z^2 - 2z - 3 = 0$, од каде $z_1 = -1$, $z_2 = 3$. Сега првата равенка на даденият систем можеме да ја запишеме во видот $\left(\frac{x^2}{y^2} + 2x + y^2\right) - 2x + 2\sqrt{x^2+1} = 3$, т.е. $z^2 - 2x + 2\sqrt{x^2+1} = 3$. Ако $z = -1$, тогаш $\sqrt{x^2+1} = x+1$, од каде $x = 0$. Втората равенка на системот за $x = 0$ станува $y^2 + y = 0$, од каде $y_1 = 0$, $y_2 = -1$; но за $y = 0$ првата равенка нема смисла. Значи, ($x = 0$, $y = -1$) е едно решение на даденият систем. Ако пак $z = 3$, тогаш $x = \frac{4}{3}$, втората равенка за $x = \frac{4}{3}$ по мали трансформации го добива видот $3y^2 + y + 4 = 0$, т.е. нема реални корени.

Според тоа, даденият систем ирационални равенки има единствено реално решение $(0, -1)$, кое го потврдува и проверката.

Пример 3. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} - \sqrt{x-\sqrt{y}} = 1 \\ \sqrt{x^2-y} + \sqrt{x^2+y} = 1 \end{cases}$$

Решение. Да означиме $\sqrt{y}=z$. Тогаш системот ќе го добие видот

$$\begin{cases}\sqrt{x+z}-\sqrt{x-z}=1\\ \sqrt{x^2-z^2}+\sqrt{x^2+z^2}=1\end{cases}.$$

Првата равенка ја квадрираме и добиваме: $x+z+x-z-2\sqrt{x^2-z^2}=1$, или $\sqrt{x^2-z^2}=x-\frac{1}{2}$. При $x\geq\frac{1}{2}$ квадрираме повторно: $x^2-z^2=x^2-x+\frac{1}{4}$, од каде добиваме $z^2=x-\frac{1}{4}$. (1)

Заменувајќи го радикалот $\sqrt{x^2-z^2}$ со $x-\frac{1}{2}$, втората равенка на системот станува: $\sqrt{x^2+z^2}=\frac{3}{2}-x$. При $x\leq\frac{3}{2}$ ја квадрираме и од неа го одредуваме z^2:

$$z^2=\frac{9}{4}-3x. \qquad (2)$$

Потоа ги споредуваме изразите за z^2 од првата и втората равенка, односно, од (1) и (2), имаме: $x-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}-3x$. Оттука $x=\frac{5}{8}$, кој ги задоволува условите $x\geq\frac{1}{2}$ и $x\leq\frac{3}{2}$; а y од $y=z^2=x-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$. Според тоа, даденият систем равенки има единствено реално решение $\left(\frac{5}{8},\ \frac{3}{8}\right)$.

Предлагаме да се изврши проверка на добиеното решение.

Пример 4. Да се реши системот равенки: $\begin{cases}x^2+xy+y^2=84\\ x+\sqrt{xy}+y=14\end{cases}$.

Решение. Левата страна на првата равенка ја разложуваме на множители: $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=(x+y)^2-\left(\sqrt{xy}\right)^2=\left(x+y+\sqrt{xy}\right)\left(x+y-\sqrt{xy}\right)=84$. Оттука, согласно втората равенка, добиваме: $14\left(x+y-\sqrt{xy}\right)=84$, т.е. $x+y-\sqrt{xy}=6$.

Од системот $\begin{cases}x+y+\sqrt{xy}=14\\ x+y-\sqrt{xy}=6\end{cases}$

со собирање и одземање на соодветните страни, добиваме $x+y=10,\ \sqrt{xy}=4$. На крајот го решаваме ситемот $\begin{cases} x+y=10 \\ xy=16 \end{cases}$ и добиваме две решенија: $(2,\ 8)$, $(8,\ 2)$.

Проверката покажува: и двете решенија го задоволуваат дадениот систем равенки.

Пример 5. Да се реши системот равенки $\begin{cases} \sqrt{x}-\sqrt{y}=a \\ \sqrt{xy}=b \end{cases}$.

Решение. Ги квадрираме и двете страни на двете равенки во системот и тој го добива видот

$$\begin{cases} x+y-2\sqrt{xy}=a^2 \\ xy=b^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y=a^2+2b \\ xy=b^2 \end{cases} \tag{3}$$

Решавањето на овој систем се сведува на квадратна равенка :

$$z^2-\left(a^2+b\right)z+b^2=0,$$

која има решенија $z_{1,2}=\dfrac{a^2+b\pm\sqrt{a^2\left(a^2+4b\right)}}{2}$.

Системот (3) има две решенија (z_1 , z_2) и (z_2 , z_1), но само решението (z_1 , z_2), односно $\left(\dfrac{a^2+b+\sqrt{a^2\left(a^2+4b\right)}}{2},\dfrac{a^2+b-\sqrt{a^2\left(a^2+4b\right)}}{2}\right)$ е решение на дадениот систем равенки.

Пример 6. Да се реши системот

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=y \\ x^4-y^4=144a^4 \end{cases}.$$

Решение. Првата равенка ја квадрираме и добиваме:

$$x^2+y^2-\sqrt{x^4-y^4}+x^2-y^2=y^2 \quad \text{или} \quad 2x^2-2\sqrt{x^4-y^4}=y^2.$$

Во добиената равенка заменуваме $x^4-y^4=144a^4$ од втората равенка на системот, па добиваме

$$y^2=2x^2-24a^2 \tag{4}$$

Оттука го добиваме y^4 и го заменуваме во втората равенка на системот. Така, добиваме $x^4-\left(4x^4-96a^2x^2+720a^4\right)=144a^4$, или по средување:

$x^4 - 32a^2x^2 + 240a^4 = 0$. Од оваа биквадратна равенка добиваме $x_{1,2} = \pm\sqrt{20}\cdot a$ и $x_{3,4} = \pm\sqrt{12}\cdot a$. Од равенката (4), пак, го добиваме y. За секоја од вредностите $x_{1,2} = \pm\sqrt{20}\cdot a$ имаме $y_{1,2} = \pm 4a$, а за секоја од вредностите $x_{1,2} = \pm\sqrt{20}\cdot a$ имаме $y_{3,4} = 0$. Така добиеме шест пара решенија. Проверката покажува дека некои од нив важат само при $a \geq 0$, а други - само при $a < 0$, и тоа: а) Ако $a \geq 0$, системот има решенија:

$$\left(2a\sqrt{5},4a\right)\ \left(-2a\sqrt{5},4a\right)\ \left(2a\sqrt{3},0\right) \text{ и } \left(-2a\sqrt{3},0\right).$$

Ако $a < 0$, тогаш системот има две решенија :

$$\left(2a\sqrt{5},-4a\right) \text{ и } \left(-2a\sqrt{3},-4\right).$$

Пример 7 . Да се реши системот:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = a \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2-y^2} = a^2 \end{cases}, \quad \text{каде } a > 0.$$

Решение. Да ги квадрираме двете страни на првата равенка:

$$\sqrt{x^2+y^2} = x - \frac{a^2}{2}. \tag{5}$$

Тогаш од втората равенка на системот добиваме

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{3a^2}{2} - x \tag{6}$$

Потоа, ако ги квадрираме двете страни на втората равенка на системот, добиваме:

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2-y^2} = \frac{a^4}{2} - x^2 .$$

Оттука, согласно (5) и (6), добиваме: $\left(x - \frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{3a^2}{2} - x\right) = \frac{a^4}{2} - x^2$, или по средување: $x = \frac{5}{8}\cdot a^2$.

Потоа од равенката (6), по нејзино квадрирање и замена на x со $x=\frac{5}{8}\cdot a^2$, за y^2 добиваме $y^2=\frac{3}{8}\cdot a^4$, од каде $y_1=a^2\sqrt{\frac{3}{8}}$, $y_2=-a^2\sqrt{\frac{3}{8}}$. Со проверка може да се покаже дека системот равенки има само едно решение: $\left(\frac{5}{8}\cdot a^2,\ a^2\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$.

ЗАДАЧИ

Реши ги следниве системи ирационални равенки *(1 – 6)* :

1. а) $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2}\\ x+xy+y=9\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}}+1\\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78\end{cases}$ $(x>0,\ y>0)$

2*. а) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{5}{2}\sqrt[6]{xy}\\ x+y=65,\ \ (xy\geq 0)\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+y\sqrt{xy}=420\\ y^2+x\sqrt{xy}=280\end{cases}$

3. а) $\begin{cases}\frac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right)=x-y\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y-2\sqrt{xy}=4\\ x+y=10\end{cases}$

4. а) $\begin{cases}\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{17}=0\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=6\end{cases}$ б) $\begin{cases}1+y+\sqrt{x}=0\\ y+\sqrt{x+23}=0\end{cases}$

5*. а) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4\\ xy=27\end{cases}$ б) $\begin{cases}7\sqrt[3]{xy}-3\sqrt{xy}=4\\ x+y=20\end{cases}$

6. а) $\begin{cases}\sqrt{1-\sqrt{x^2-y^2}}=\sqrt{x-1}\\ 4x+y^2=4\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sqrt{xy}-\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\\ x\sqrt{y}-y\sqrt{x}=2\end{cases}$

§ 89 . ИРАЦИОНАЛНИ НЕРАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

Ирационална неравенка се вика неравенката од видот $f(x,y,\ldots,z)>0$ или $f(x,y,\ldots,z)<0$, каде $f(x,y,\ldots,z)$ е некој ирационален израз по однос на променливите $x,y,\ldots,z$.

Во елементарната алгебра ирационалните неравенки, исто како и рационалните алгебраски неравенки ги разгледуваме само во полето на реалните броеви. Затоа сите радикали со парен коренов показател, што ќе се сретнуваат во ирационалните неравенки, ќе сметаме дека се аритметички корени (т.е. тие и нивните подкоренови изрази да се ненегативни); а сите радикали со непарен коренов показател ќе сметаме (тие и нивните подкоренови изрази) дека можат да бидат (без ограничување) кои било реални броеви . Да ја земеме, на пример, неравенката од видот $f\left(x,y,\ldots,z,\sqrt[n_1]{R_1},\sqrt[n_2]{R_2},\ldots,\sqrt[n_k]{R_k}\right)>0$.

Решавањето на оваа неравенка во полето на реалните броеви може да се замени со следниов мешан систем без радикали:

$$\begin{cases} f(x,y,\ldots,z,\ u_1,u_2,\ldots,\ u_k)>0 \\ u_1^{n_1}=R_1,\ \ u_2^{n_2}=R_2,\ldots,u_k^{n_k}=R_k \end{cases}$$

со присоединување кон него и на неравенства што треба да ги задоволуваат вредностите на радикалите со парен коренов показател, имено: ако, на пример, $n_1=2k$, тогаш освен равенката $u_1^{2k}=R_1$ треба да се присоедини и неравенството $u_1\geq 0$.

Во посебен случај, решавањето на неравенката $f\left(x,\sqrt{g(x)}\right)>0$ секогаш може да се замени со решавање на мешаниот систем:

$$\begin{cases} f(x,y)>0 \\ y^2=g(x),\ \ y>0. \end{cases}$$

Меѓутоа, исклучување на радикалите кај ирационалните неравенки, исто како и кај рационалните равенки, секогаш може да се постигне со постепено изолирање на еден или два радикала и со последователно степенување на двете страни на неравенствата со степен еднаков на кореновиот показател. Притоа, неопходно е постојано да имаме предвид дека трансформацијата степенување со парен степен доведува до последица, а не до еквивалентна на појдовната неравенка, кое нешто може да биде пропратено и со појава на придобиени (странични) решенија. Затоа во такви случаи секогаш е неопходна проверка на добиените решенија на неравенката. Но, бидејќи при решавањето на неравенките обично се добиваат бесконечни множества од решенија, затоа очигледно е дека проверката

на сите добиени решенија практично станува невозможно. Затоа сите трансформации, што ќе ги вршиме над ирационалните неравенки треба да бидат еквивалентни, а со цел проверката на решенијата да стане непотребна. Тоа ќе го постигнеме, ако секогаш го имаме превид и го почитуваме следново:

1^0. Ирационалната неравенка од видот $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x)$ е еквивалентна на системот неравенки $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < [g(x)]^{2k} \end{cases}$.

2^0. Ирационалната неравенка од видот $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x)$ е еквивалентна на вкупноста од следниве системи неравенки:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^{2k} \end{cases}.$$

3^0. Ирационалните неравенки $\sqrt[2k+1]{f(x)} < g(x)$ и $f(x) < [g(x)]^{2k+1}$ се еквивалентни.

Пример 1. Да ги решиме следниве прости неравенки :

а) $\sqrt{x} < 1$, б) $\sqrt{x} < -1$, в) $\sqrt{x} > 1$, г) $\sqrt{x} > -1$.

Решение. Врз основа на својствата 1^0 и 2^0, имаме :

а) Неравенката $\sqrt{x} < 1$ е еквивалентна на системот $\begin{cases} x \geq 0 \\ x < 1 \end{cases}$. Според тоа, таа има множество решенија $0 \leq x < 1$, т.е. $M = [0, 1)$.

б) Неравенката $\sqrt{x} < -1$ нема решенија, бидејќи ненегативен број $\sqrt{x}$ не може да е помал од -1.

в) Неравенката $\sqrt{x} > 1$ е еквивалентна на системот $\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 1 \end{cases}$, од каде следува дека таа има множество решенија $M = (1, \infty)$.

г) Неравенката $\sqrt{x} > -1$ е еквивалентна на неравенката $x \geq 0$, т.е има множество решенија, а тоа е интервалот $M = [0, \infty)$.

При решавањето на ирационалните неравенки голема улога освен определувањето на дефиниционата област D на неравенката , уште и утврдувањето на знаците на секоја страна на неравенката за различни вредности на променливите.

Пример 2. Да се реши неравенката $\sqrt{x^2-3x-10} < 9-x$ (1)

Решение. Дефиниционата област на неравенката ја добиваме од условот $x^2-3x-10 \geq 0$, од каде добиваме: $D=(-\infty, 2]\cup[5, \infty)$.

Во областа D за некои вредности на x десната страна на неравенката (1) може да добива позитивни, а за други вредности на x таа може да добива негативни вредности, додека пак за сите вредности на x во областа D левата страна на неравенката (1) добива само ненегативни вредности. Очигледно е дека за вредностите на x за кои десната страна на неравенката (1) добива негативни вредности, таа не може да има решенија. А за вредностите на x од областа D за кои е $9-x>0$, двете страни на неравенката (1) се ненегативни. При тие услови, дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $x^2-3x-10<(9-x)^2$, или на $15x-91<0$.

Како што гледаме (а тоа е во согласност својството 1^0) решавањето на дадената неравенка го сведуваме на решавање на системот неравенки:

$$\begin{cases} x^2-3x-10 \geq 0 \\ 9-x>0 \\ x^2-3x-10<(9-x)^2 \end{cases}$$

Ако го решиме тој систем добиваме дека $-\infty < x \leq -2$ или $5 \leq x < 6\frac{1}{15}$.

Значи, дадената неравенка има множество решенија: $M=(-\infty,-2]\cup[5, 6\frac{1}{15})$.

Пример 3. Да се реши неравенката $\sqrt{x^2-3x+2} > 2-x$ (2)

Решение. Дефиниционата област на неравенката ја добиваме од условот $x^2-3x+2 \geq 0$, од каде добиваме $D=(-\infty, 1]\cup[2, \infty)$.

Очигледно е дека, секоја вредност на $x \in D$, за која десната страна на неравенката (2) има негативна вредност, т.е. $2-x<0$, е нејзино решение. Тоа значи дека сите решенија на системот неравенки $\begin{cases} x^2-3x+2 \geq 0 \\ 2-x<0 \end{cases}$ се решенија и на дадената неравенка.

Меѓутоа, неравенката (2) има и други решенија. За вредностите на $x \in D$, за кои десната страна на неравенката (2) има позитивни вредности, таа е еквивалентна на неравенката $x^2-3x+2>(2-x)^2$. Според тоа и сите решенија на системот неравенки $\begin{cases}2-x\geq 0\\ x^2-3x+2>(2-x)^2\end{cases}$ се исто така решенија на дадената неравенка.

Како што гледаме (а тоа е во согласност со својството 2^0), решавањето на неравенката (2) го сведуваме на решавање на вкупноста од два система неравенки:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-3x+2\geq 0\\ 2-x<0\end{cases}\\ \begin{cases}2-x\geq 0\\ x^2-3x+2>(2-x)^2\end{cases}\end{array}\right. \qquad (3)$$

Првиот систем има решение $x > 2$, а вториот систем нема решенија. Според тоа, вкупноста (3), односно дадената неравенка (2) има множество решенија $M=(2,\infty)\cup\varnothing=(2,\infty)$.

Пример 4. Да се реши неравенката $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}>1$.

Решение. Дефиниционата област на неравенката ја определуваме од системот неравенки $\begin{cases}x+1\geq 0\\ 3-x\geq 0\end{cases}$, од каде добиваме $-1\leq x\leq 3$, т.е. $D=[-1,3]$.

Во областа D двете страни на неравенката се ненегативни, па затоа таа е еквивалентна на неравенката $\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)^2>1$ или на $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{3-x}>-\frac{3}{2}$ (4)

Но бидејќи левата страна на неравенката (4) е ненегативен број, а десната страна е негативен број, затоа таа ќе биде задоволена за секоја вредност x од областа на дефинираност D.

Според тоа, на неравенката (4) а исто така и дадената неравенка има множество решенија, што се совпаѓа со дефиниционата област на неравенката $M=[-1,3]$.

Пример 5. Да се реши неравенката $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}>\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

Решение. За одредување на дефиниционата област D, ќе го разгледаме вториот радикал. Тој постои, ако важи $x-\sqrt{x}\geq 0$ или $x\geq\sqrt{x}$. При $x<0$ оваа

неравенка нема решенија, а при $x \geq 0$ таа е еквивалентна на $x^2 \geq x$, од каде $x \geq 1$. Гледаме дека останатите радикали при $x > 0$ постојат. Значи, дефиниционата област на дадената неравенка е: $x \geq 1$. Забележуваме, дека во областа D изразот $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ е позитивен, па затоа со него можеме да ги помножиме двете страни на неравенката, по што добиеме:

$$x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x} > \sqrt{x}, \quad \text{или} \quad x > \sqrt{x^2-x}.$$

Последната неравенка во дефиниционата област е еквивалентна на неравенката $x^2 \geq x^2 - x$ од каде следува $x > 0$. Двете неравенки $x > 0$ и $x \geq 1$ се задоволени само за вредностите $x \geq 1$.

Значи, множеството решенија на дадената неравенка е интервалот $M = [1, \infty)$.

Пример 6. Да се реши: $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15} > \sqrt{4x^2-18x+18}$.

Решение. Дефиниционата област на неравенката ја одредуваме од системот неравенки $\begin{cases} x^2-8x+15 \geq 0, & x^2+2x-15 \geq 0, & 4x^2-18x+18 \geq 0. \end{cases}$

Првата неравенка во системот има множество решенија:

$D_1 = (-\infty, 3] \cup [5, \infty)$, втората $D_2 = (-\infty, -5] \cup (3, \infty]$, а третата $D_3 = (-\infty, 3] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Оттука за областа D, имаме

$$D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = (-\infty, -5] \cup \{3\} \cup [5, \infty)$$

а) При $x = 3$, дадената неравенка преминува во $0 > 0$. Значи, $x = 3$ не е решение на неравенката.

б) При $x \leq -5$ и $x \geq 5$ двете страни на дадената неравенка се позитивни. Дадената неравенка да ја претставиме во видот:

$$\sqrt{(x-3)(x-5)}+\sqrt{(x-3)(x+5)} > \sqrt{4(x-3)\left(x-\frac{3}{2}\right)} \quad \text{или}$$

$$\sqrt{|(x-3)|}\cdot\sqrt{|x-5|}+\sqrt{|(x-3)|}\cdot\sqrt{|x+5|} > 2\sqrt{|(x-3)|}\cdot\sqrt{\left|x-\frac{3}{2}\right|}.$$

Бидејќи е $x \neq 3$, делејќи со $\sqrt{|(x-3)|}$ ја добиваме еквивалентната неравенка

$$\sqrt{|x-5|}+\sqrt{|x+5|} > 2\sqrt{\left|x-\frac{3}{2}\right|}. \qquad (5)$$

Да ја решиме неравенката (5) при $x \le -5$. При $x \le -5$ таа го добива видот $\sqrt{|5-x|}+\sqrt{|-5-x|} > 2\sqrt{\left|\frac{3}{2}-x\right|}$.

Бидејќи двете страни се позитивни, со нивно квадрирање добиваме

$$-2x+2\sqrt{x^2-25} > 4\left(\frac{3}{2}-x\right) \text{ или } \sqrt{x^2-25} > 3-x .$$

Оваа неравенка согласно својството 2^0 е еквивалентна на вкупноста од системите $\begin{cases} x^2-25 \ge 0 \\ 3-x<0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3-x \ge 0 \\ x^2-25 > 9-6x+x^2 \end{cases}$.

Но, при услов $x \le -5$ овие два система немаат решенија.

Значи , при $x \le -5$ неравенката (5) нема решенија.

Да ја решиме неравенката (5) при $x \ge 5$. Во тој случај таа го добива видот: $\sqrt{x-5}+\sqrt{x+5} > 2\sqrt{x-\frac{3}{2}}$.

По квадрирањето на двете нејзини страни и упростувањето, добиваме $\sqrt{x^2-25} > 3-x$. При $x \ge 5$ двете страни на оваа неравенка се ненегативни, па по нивното квадрирање, добиваме:

$$x^2-25 > x^2-6x+9 \text{ или } x > \frac{17}{3} = 5\frac{2}{3} .$$

Гледаме, двете неравенства $x \ge 5$ и $x \ge 5\frac{2}{3}$ се задоволени само за вредностите $x \ge 5\frac{2}{3}$. Според тоа, неравенката (5) па и дадената неравенка има множество решенија, а тоа е интервалот $M = \left(5\frac{2}{3}, \infty\right)$.

Пример 7. Да се реши неравенката $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1} > 1$.

Решение. Кубниот корен го оставаме сам на левата страна:

$\sqrt[3]{2-x} > 1-\sqrt{x-1}$ и двете страни ги степенуваме на трет степен. Добиената неравенка е еквивалентна на дадената:

$$2-x > \left(1-\sqrt{x-1}\right)^3 , \text{ или } 1-(x-1) > \left(1-\sqrt{x-1}\right)^3 .$$

Заменуваме $\sqrt{x-1}=y$, па последната неравенка преминува во $1-y^2>(1-y)^3$ или $(1-y)(1+y-1+2y-y^2)>0$ или по упростување и разложување на множители: $y(y-1)(y-3)>0$.

Оваа кубна неравенка по y има решенија: $0<y<1$, $y>3$, од каде ја добиваме вкупноста неравенки $0<\sqrt{x-1}<1$, $\sqrt{x-1}>3$. Од неа добиваме: $1<x<2$, $x>10$. Значи, дадената неравенка има множество решенија $M=(1,2)\cup(10,\infty)$.

Пример 8. Да се реши неравенката $\sqrt{2ax-x^2}\geq a-x$, каде a е реален параметар.

Решение. Имајќи го предвид идентитетот $(a-x)^2=a^2-2ax+x^2$, од каде $2ax-x^2=a^2-(a-x)^2$, дадената неравенка ја запишуваме во видот $\sqrt{a^2-(a-x)^2}\geq a-x$.

Заменуваме $a-x=y$, па неравенката преминува во видот

$$\sqrt{a^2-y^2}\geq y \qquad (6)$$

Дефиниционата област на неравенката (6) е $-a\leq y\leq a$.

Ако $-a\leq y\leq 0$, или $-a\leq a-x\leq 0$, или $a\leq x\leq 2a$, тогаш неравенката (6) е задоволена. Да земеме дека $0\leq y\leq a$, тогаш неравенката (6) е еквивалентна на $a^2-y^2\geq y^2$, од каде $y^2\leq\frac{a^2}{2}$, или $|y|\leq\frac{a}{\sqrt{2}}$. Но, бидејќи $y\geq 0$, затоа ќе биде $y\leq\frac{a}{\sqrt{2}}$. Според тоа имаме $0\leq y\leq\frac{a}{\sqrt{2}}$, т.е. $0\leq a-x\leq\frac{a}{\sqrt{2}}$, или $-\frac{a}{\sqrt{2}}\leq x-a\leq 0$, односно $a-\frac{a}{\sqrt{2}}\leq x\leq a$. Значи, дадената неравенка има множество решенија $M=\left[a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),a\right]$.

Пример 9. Да се реши неравенката $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$, $(a>0)$.

Решение. При $a>0$ дадената неравенка е еквивалентна на

$$2a+2\sqrt{a^2-x^2}>a^2 \text{ или } 2\sqrt{a^2-x^2}>a^2-2a \qquad (7)$$

Дефиниционата област на дадената неравенка е сегментот $D=[-a,a]$, т.е. $-a\leq x\leq a$, или $|x|<a$.

Да ги испитаме решенијата на неравенката (7) за различни вредности на параметарот a.

а) Нека $a^2-2a<0$, т.е. $0<a<2$. Тогаш неравенката (7) па и дадената неравенка ќе биде задоволена за секоја вредност на x од сегментот $[-a,a]$.

б) Ако е $a=2$, тогаш неравенката (7) го добива видот $\sqrt{4-x^2}>0$, и ќе биде задоволена за секоја вредност од интервалот $(-2,2)$, т.е $-2<x<2$.

в) Нека $a^2-2a>0$. Тогаш неравенката (7) е еквивалентна на системот

$$\begin{cases} 4\left(a^2-x^2\right)>a^2(a-2)^2 \\ |x|<a \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2<a^3\cdot\dfrac{4-a}{4} \\ |x|<a \end{cases} \tag{8}$$

Ако е $a\geq 4$, тогаш првата неравенка во системот нема решенија. Останува да земеме дека $2<a<4$. Тогаш првата неравенка во системот (8) ќе гласи

$$|x|<\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)} \tag{9}$$

Забележуваме дека, при $2<x<4$ ќе важи неравенството $\dfrac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}<a$. Навистина, тоа е еквивалентно на $\sqrt{a(4-a)}<2$ или $a(4-a)<4$, или $a^2-4a+4=(a-2)^2>0$.

Значи, при $2<a<4$ ќе важи неравенката (9), односно $-\dfrac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}<x<\dfrac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$

Според тоа, дадената неравенка има решенија:

а) при $0<a<2$, $-a<x<a$

б) за $a=2$, $-2<x<2$

в) при $2<a<4$, $-\dfrac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}<x<\dfrac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}$

г) при $a\geq 4$ неравенката нема решенија.

Пример 10. Да се докаже неравенството: $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}<3$, при услов левата страна да содржи конечен број радикали.

Доказ. Во последниот внатрешен радикал бројот 6 да го замениме со 9, тогаш последователно целата страна добива вредност 3:

$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}}}=3$, но левата страна на даденото неравенство е помала од добиениот израз по извршената замена на бројот 6 со 9. Според тоа даденото неравенство е точно.

Пример 11 . Да се покаже неравенството :

$$\sqrt{2} > \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \ldots > \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}\,.$$

Доказ . Треба да докажаме $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$. Односно $\dfrac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} < 1$.

Радикалите ги сведуваме на исти коренов показател , па добиваме $\dfrac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \dfrac{\sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n}}{\sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}}} = \sqrt[n(n+1)]{\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}} = \sqrt[n(n+1)]{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\cdot\dfrac{1}{n}} = \sqrt[n(n+1)]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\dfrac{1}{n}}$. Но изразот $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ согласно неравенството на Непер: $2 \le \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ (види неравенство (5) во §71), ако го замениме со *3* , добиваме $\sqrt[n(n+1)]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\dfrac{1}{n}} < \sqrt[n(n+1)]{\dfrac{3}{n}}$. Меѓутоа, ако $n \ge 3$, тогаш $\dfrac{3}{n} \le 1$. Според тоа, точно е неравенството $\dfrac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} < 1$, ако $n \ge 3$, штд.

ЗАДАЧИ

Реши ги ирационалните неравенки *(1 – 5) :*

1. а) $\sqrt{x^2+4x+4} < x+6$ б) $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6} > 2$

2. а) $(1+x)\sqrt{x^2+1} > x^2-1$ б) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} -> 1$

3. а) $\sqrt{x+3} > \sqrt{x-9} + \sqrt{5-x}$ б) $\sqrt{1-x} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} \ge 2$

4. а) $\sqrt{x+5} > \sqrt{x+7} + \sqrt{2x-5}$ б) $\sqrt{1-x} \le \sqrt[4]{5+x}$

5*. а) $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} \le \sqrt{a+b-2x}$ б) $2x + \sqrt{a^2-x^2} > 0$.

ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Нека z и $\overline{z}$ се два конјугирано комплексни броеви. Одреди го $\mathrm{Re}(z)$, ако $I_m(z)=2$, а $z\cdot\overline{z}=13$

2. Докажи ги следниве тврдења :

а) $z=0\Leftrightarrow|z|=0$, б) $z_1\cdot z_2=0\Leftrightarrow(z_1=0\vee z_2=0)$.

3. При кои услови ќе важат равенствата:

а) $|z+w|=|z|-|w|$, б) $|z-w|=|z|+|w|$

4. Каков агол градат векторите , што соодветсвуваат на комплексните броеви $a+bi$ и $-b+ai$?

5. Одреди го модулот и аргументот на комплексниот број

а) $\dfrac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}$, б) $\dfrac{2}{\sqrt{2}+i}$

6*. Докажи дека: три точки z_1, z_2 и z_3 од комплексната рамнина, ако лежат на една права, тогаш односот $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_2}$ е реален број.

7. Пресметај: а) $\dfrac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$, б) $\dfrac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}$, в) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^8$

8. Со помош на Моавровата формула изрази го $\cos5\varphi$ и $\sin5\varphi$ преку функциите $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

9. Пресметај: а) $(1+\sin\varphi+i\cos\varphi)^8$, б) $\dfrac{(1-i)^7\cdot(-\sqrt{3}-i)^2}{(1+i)^{15}}$

10. Пресметај ги следниве изрази, изразувајќи ги претходно во тригонометриска форма:

а) $\dfrac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$, б) $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$

11*. Пресметај $\dfrac{1}{1-z}$, каде што $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

12. Покажи дека коренот $\sqrt[n]{z}$, $(z=\cos\varphi+i\sin\varphi)$ има реални вредности само при услов $\dfrac{\varphi+2k\pi}{n}=k\pi$. Врз основа на тоа покажи дека $\sqrt[n]{a+bi}$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$ нема ниту една реална вредност.

13. За кои вредности на a и b бројот 1 ќе биде двократна нула за полиномот $3x^5-4x^2+ax+b$?

14. За кои вредности на a и b полиномот ax^4+bx^3+1 ќе биде делив со $(x-1)^2$? Во тој случај одреди ги корените на равенката $ax^4+bx^3+1=0$.

15*. Докажи дека полиномот :.
$P(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ е делив со: а) $x-1$, б) $x+1$.

16. Докажи дека $x-1$ е делител на полиномот $P(x)=x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1$.

17*. Докажи дека полиномот $P(x)=x\left(x^{n-1}-na^{n-1}\right)+a^n(n-1)$ е делив со $(x-a)^2$.

18. Да се одреди остстокот од делењето на полиномот $P(x)=x^5+3x^4-2x^2-1$ со полиномот $\varphi(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$.

19*. Одреди го остстокот од делењето на полиномот $x^{50}+x^{40}+x^{30}+x^{20}+x^{10}+1$, со x^2+1.

20*. Да се докаже дека полиномот $P(x)=(x+1)^{2n}-x^{2n}-2x-1$ е делив со полиномот $Q(x)=2x^3+3x+x$.

21*. Одреди ги параметрите p и $k\neq 0$, така што полиномот x^4+px^2+k да биде делив со полиномот x^2+px+k.

22. Да се упрости изразот:

$$\frac{1}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)+\frac{3}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{6}{(x+y)^5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right).$$

Разложи ги дропките на реални прости дропки од прв и втор вид:

23. а) $\dfrac{1}{x^3-1}$, б) $\dfrac{x^2}{x^4-16}$, в) $\dfrac{1}{x^4+4}$.

24. а) $\dfrac{x^2}{x^6+27}$, б) $\dfrac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$, в) $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}$.

Упрости ги изразите :

25. $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

26. $\left(a+b-\dfrac{4ab}{a+b}\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)$

27. $\left[\dfrac{3}{x-y}+\dfrac{3x}{x^3-y^3}\cdot\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right]:\dfrac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}-\dfrac{x-5y}{x-y}$

28 $\dfrac{1}{2(1+x^n)}+\dfrac{1}{2(1-x^n)}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{x^{2n}}-1}$

29. $A=\left[\dfrac{y^2+xy}{2x}:(y^2-x^2)\right]:\left[\dfrac{(x+y)^2}{4xy}-1\right]$

30. $B=\dfrac{1}{x^2+xy}+\dfrac{2x}{y^3-x^2y}-\dfrac{x+y}{y^2x-x^2y}$

Реши ги равенките од трет степен со помош на формулата на Кардано:

31. а) $x^3-2x^2+x-2=0$, б) $x^3-2x^2-2x-3=0$

32. а) $x^3-3x-52=0$, б) $x^3-5x^2-2x+10=0$

33. а) $x^3-2x^2+25x-50=0$, б) $x^3-3abx+a^3+b^3=0$

34. Одреди кој услов треба да го задоволуваат коефициентите p и q на равенката $x^3+px+q=0$ за да таа има еден двократен корен.

35*. Реши ја равенката $x^3+px^2+qx+r=0$ при услов ако:

а) $x_1=x_2x_3$, б) $x_1=x_2+x_3$.

Реши ги равенките *(36 – 45)*

36. а) $x^8+1=0$, б) $x^9+1=0$, в) $x^{12}-1=0$

37. а) $x^8-4x^4+13=0$, б) $x^6-3x^3-4=0$

38. а) $x^6-15x^3-324=0$ б) $6x^6-19x^3+15=0$

39. а) $x(x+1)(x^2+x+1)=42$ б) $x(x+1)(x+2)(x+3)=8$

40. а) $(x^2+1)(x+1)^2-x^2=0$ б) $(x-2)(x-3)(x-4)=6$

41. $(1-x^2)^3-(x^2-1)^3-(x^2+2x+1)(1-x)^2=0$

42. $x^4+\left(k-\frac{1}{k}\right)x^3-2k^2x^2+\left(k-\frac{1}{k}\right)x+1=0$

43. $(7-4\sqrt{3})x^2+(2-\sqrt{3})x-2=0$

44*. $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}=a+b+c$

45*. $\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ac}+\frac{x-c}{ab}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

46. Во равенката $x^4+ax^3+bx^2+6x+2=0$ еден од корените е $1+\sqrt{3}$. Најди ги другите корени ако $a,b\in Q$.

47. Да се реши равенката $x^3-21x^2+140x-300=0$, ако $x_3=2x_2$

48. Да се состави квадратна равенка, чии корени се еднакви соодветно на збирот и производот од корените на равенката $x^2+px+q=0$.

49*. За кои вредности на p и q корените на квадратната равенка $x^2+px+q=0$ се еднакви на p и q.

50. За кои вредности на параметарот k и двата корена на равенката $x^2-(2k+1)x+k^2+k-2=0$ ќе лежат во интервалот *(–1, 5)*

Реши ги неравенките и системите неравенки

51. а) $x^2-|x|\geq x|x-1|$, б) $|x^2-2x-3|<3$

52. а) $\dfrac{|2x-3|-|x|}{|3x+2|+x-2}\leq 1$ б) $|x^2-2|x|+1|>1$

53. $\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{3}{4x+3}<\dfrac{2}{3x+2}+\dfrac{4}{5x+4}$

54. а) $\begin{cases}\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}<\dfrac{3x}{4}+\dfrac{7}{8}\\ \dfrac{x+1}{4}<2-\dfrac{1-2x}{3}\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x-\dfrac{x-1}{2}<4x-5\\ x+\dfrac{x}{5}>4x-\dfrac{2}{7}\end{cases}$

55. Даден е изразот $R(x)=\dfrac{x^2+1}{(k-2)x^2+2x+k}$. За кои вредности на k неговата дефиниционa област ќе биде множеството $\mathbb{R}$ на сите реални броеви ?

56. За кои вредности на параметарот p изразот $(p+2)x^2-5x+1$ добива негативни вредности за секоја вредност на x.

57*. За кои вредности на p и k квадратниот трином $x^2-px-(k-1)$ ќе добива негативни вредности само во интервалот $(1, 2)$?

58*. За кои вредности на k збирот од квадратите на корените на равенката $x^2+(k+2)x+k=0$ ќе биде минимален ?

59. За кои вредности на параметарот k, неравенката: $|x^2+kx+1|<2$,

б) $kx^2+2x+1>0$ ќе биде задоволена за секоја вредност на x ?

60. За кои вредности на параметарот k, неравенката $x^2+kx+k^2-1<0$ ќе има множество решенија $D = (0, 1)$.

61. Изведи формула за развивање на $(x+y+z)^3$.

62*. Докажи, ако $a + b + c = 2p$, тогаш важи равенството
$a(p-a)^2+b(p-b)^2+c(p-c)^2+2(p-a)(p-b)(p-c)=abc$.

63. Докажи дека полиномот $f(x,y,z)=(x+y)^5+z^5$ е делив со полиномот $x+y+z$.

Разложи ги на неразложиви множители во полето на реалните броеви полиномите:

64*. а) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

б) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

65. а) $a^3+a^2+3a^2b+2ab+3ab^2+b^2+b^3$

б) $(x+y)^4+x^4+y^4$

66. Пресметај ја сумата од квадратните на корените на равенката $x^3+2x-3=0$.

67. Реши го системот линеарни равенки:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+0x_3-3x_4+2x_5=1 \\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2 \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7 \\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25 \end{cases}$$

Реши ги системите равенки *(68 – 73)*:

68*. а) $\begin{cases} ax+y+z=4 \\ x+by+z=3 \\ x+2by+z=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$

69. $\begin{cases} 3x^3+4xy+y^2-41x-21y+110=0 \\ x^2-4y^2-9x+50y-136=0 \end{cases}$

70. а) $\begin{cases} x^2+y^2=8 \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$, б) $\begin{cases} x^5+y^5=a^5 \\ x+y=a \end{cases}$

71. а) $\begin{cases} (x+y+1)^2+(x+y)^2=25 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$, б) $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=c \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{c} \end{cases}$

72*. $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y, & \dfrac{2y^2}{1+y^2} = z, & \dfrac{2z^2}{1+z^2} = x \end{cases}$

73. $\begin{cases} (x+y+z) = 2 \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y) = 1 \\ x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y) = -6 \end{cases}$

74*. Реши ги неравенките :

а) $x^3+y^3+x^3 < 3xyz$, б) $(7y+2x-3)(5y-3x-11)(2y+5x-23) > 0$,

в) $\big||x-y|-1\big| > 2$, г) $\big|x^2-2|x|+1\big| > 1$, д) $x^2-3x+x|x+2| < 3$.

75. Областа D, што е определена со неравенките: а) $x^2+y^2 \le x$, б) $y \ge x$, $x > 1$, $y \le 4$, в) $0 < y \le 2$, $y \le x \le y+4$ да се определи со помош на унија од елементарни области од видот

$$\{a < x < b, \quad f(x) < y < g(x)\} \qquad (1)$$

76. Елементарната област D , што е определена со систем неравенки од видот (1) да се определи со помош на систем неравенки од видот:

$$\{\alpha < y < \beta, \quad \varphi(y) < x < \psi(y):$$

а) $\{0 \le x \le 2, \quad x^2 \le y \le 2x$, б) $\{0 \le x \le 1, \quad \dfrac{x^2}{2} \le y \le \sqrt{3-x^2}$

77*. Секоја квадратна равенка од видот $x^2 + px + q = 0$, што е определена со два реални броја p и q, се договараме да ја претставуваме со точка (p, q) на координатната рамнина (p , q). На пример,равенката $x^2 - 3x + 5 = 0$ ја претставуваме со точката $(-3 , 5)$, равенката $x^2 + 2$ – со точката $(0 , 2)$, итн.

а) Која област од координатната рамнина (pOq) ја зафаќаат квадратните равенки, што имаат реални корени? ,

б) На која крива се расположени точките, што им соодветствуваат на неравенките, што имаат еден двократен реален корен? ,

в) Кое множество точки им соодветствува на равенките, кои имаат:

1) реални позитивни, 2) реални негативни корени, 3) реални со спротивни знаци ?

г) Со која точка може да се претстави равенката, ако е познато дека еден од нејзините корени е еднаков на *1* ?

д) На која област лежат точките, што им соодветствуваат на равенките, чии корени се реални и нивниот збир е еднаков на *2* .

78*. Најди цилиндар со можно најголем волумен, што ќе биде впишан во топка со радиус R.

79*. Докажи дека за кој било триаголник важи неравенството $p^2 \geq 27r^2$.

80. Во триаголникот ABC впишана е кружница, а во неа впишан е рамностран триаголник $A_1B_1C_1$. Докажи дека периметарот на триаголникот ABC не е помал од удвоениот периметар на триаголникот $A_1B_1C_1$.

81*. Упрости го ирационалниот израз :

$$\left[\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-1+x}\right]\left[\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{1}{x}\right], \quad (0<x<1)$$

82. Докажи дека триномот $x^3 + px + q$ добива вредност нула за:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{q^3}{27}}}$$

83. Нека $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}$. Докажи дека важи равенството :

$$\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}$$

84. Докажи дека $\sqrt[3]{2}$ не може да се претстави во вид $p+\sqrt{q}$, каде p и q се рационални броеви ($q > 0$ и не е полн квадрат).

85*. Докажи: Ако $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$, тогаш $(a+b+c)^3=27abc$.

86. Да се рационализира именителот на дропката:

а) $\frac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{27}+3}$, б) $\frac{1}{\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2}}$

87. Упрости го изразот: $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$

88. Одреди ја вредноста на изразот:

$$A=\frac{x^2-2x\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}+3}{1-\sqrt{3}} \text{ за } x=\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$$

89*. При кој услов коренот $\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$ може да се претстави во вид на збир од три корени $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, каде x, y, z се позитивни рационални броеви.

90. Аритметичка средина (A), геометриска (G) и хармониска средина (H) за броевите a и b, знаеме се $A=\frac{a+b}{2}$, $G=\sqrt{ab}$ и $\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Докажи дека G е геометриска средина за A и H.

Реши ги ирационалните равенки (91 – 98):

91*. $\left(x^2+6x+11\right)\sqrt{x-2}=5x^2-10x+1$

92*. $\left(\sqrt{x}-2\right)^4+\left(\sqrt{x}-3\right)^4=1$

93. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$

94. $\sqrt[n]{(1+x)^2}-\sqrt[n]{(1-x)^2}=\sqrt[n]{1-x^2}$

95*. $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x}$

96*. $\frac{(x+a)\sqrt{x+b}+(x+b)\sqrt{x+a}}{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+a}}=\sqrt{ab}$, $ab>0$

97. $\sqrt[3]{(x+a)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}$

98. $2\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}$

99*. Одреди ги сите двојки реални броеви (x , y) што ја задоволуваат равенката: $\frac{36}{\sqrt{x-2}}+4\sqrt{x-2}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}+\sqrt{y-1}-28=0$.

100. Реши го системот ирационални равенки :

а) $\begin{cases}\sqrt{4x+y-3z+7}=2\\ \sqrt[3]{2y+5x+z+25{,}5}=3\\ \sqrt{y+x}-6x=0\end{cases}$,

б) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\sqrt{a}\\ \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}=\left(\sqrt{41}-3\right)a\end{cases}$

Реши ги следниве ирационални неравенки (101 – 109):

101. а) $\dfrac{1-\sqrt{8x-3}}{4x} \geq 1$, б) $\dfrac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}} \geq x-1$

102. а) $\dfrac{2x}{\sqrt{2x+9}} < \sqrt{1+2x}-1$, б) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{1-x} > 1$

103. а) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x} < 35-2x$, б) $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x} < 1$

104*. а) $\dfrac{1}{x+\sqrt{2-x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{2-x^2}} \geq \dfrac{1}{2}$, б) $\dfrac{\sqrt{2-x^4}}{x} < 1$

105. а) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2} > \sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$, б) $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} \geq 1$

106. а) $\sqrt{x^2+3x-28} > x+1$, б) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2+x} < 1$

107*. а) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}} > \dfrac{x-1}{x}$, б) $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 3+2x$

108. а) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x} > 0$, б) $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x} \geq 1$

109. а) $\sqrt{a^2-x^2} > x+1$, б) $\sqrt{\dfrac{x+a}{x-a}} < a$

Докажи ги неравенствата (110 – 112) :

110. $2 > \sqrt{3} > \sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{5} > \ \ldots \ > \sqrt[n-1]{n} > \sqrt[n]{n+1}$

111. а) $\sqrt[n]{a}-1 < \dfrac{a-1}{n}$, б) $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt[n]{n}$

112. а) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$, б) $\dfrac{x}{\sqrt{y}}+\dfrac{y}{\sqrt{x}} > \sqrt{x}+\sqrt{y}$, $x \neq y$.

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

ВОВЕД

§ 1 - стр. 12

1. а) Може да ги означува броевите *0, -2* или *3*, б) може да го означува кој било ненегативен реален број, в) не може да означува ниту еден реален број.
2. Изразот е: а) ирационален и по однос на двете променливи, б) трансцедентен по однос на x, а цел рационален по однос на y, в) , г) цел рационален по однос на x, а дробно рационален по однос на y , д) цел рационален и по однос на двете променливи, ѓ) трансцедентен по x , а дробно рационален по однос на y .
3. а) $D=\{x \mid x\in\mathbb{R}\wedge x>1\}$, б) $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;\ 2\}$, в) $D=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R},xy\neq 0\}$, г) $D=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R},y\geq 3\}$.
4. Равенството е: а) неапсолутен идентитет, важи за $x\geq 1$; в) , г) апсолутен идентитет. **5.** а) $a>0,\quad a\neq 1,\quad x\in\mathbb{R}$, б) $a\in\mathbb{R},x>a$, в) $a\in\mathbb{R},x\leq a$, г) $a\in\mathbb{R},\quad a>2,\quad x\in\mathbb{R}$, д) $a,b\in\mathbb{R},\quad ab\neq 0,\quad x,y\in\mathbb{R}$, ѓ) $a\in\mathbb{R},\quad x\in\mathbb{R}$.

ГЛАВА I

КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

§ 2 – стр.

1. За : а) $x=1$, $y=1$, б) $x=1$, $y=6$, **2.** а) $1-2i$, б) $\frac{1-i}{2}$, в) $\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)$. **3.** а) , б) , в) 0 , г) $7-i$.

4. Доказ. Нека $z=x+yi$. а) $\overline{(-z)}=\overline{-x-yi}=-x+yi=-(x-yi)=-\bar{z}$, б) Прво $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$, па имаме $\overline{z^{-1}}=\overline{\left(\frac{x-yi}{x^2+y^2}\right)}=\frac{x+yi}{x^2+y^2}$. Аналогно и: $(\bar{z})^{-1}=\left(\overline{x+yi}\right)^{-1}=(x-yi)^{-1}=\frac{1}{x-yi}=\frac{x+yi}{x^2+y^2}$. Според тоа: $\overline{z^{-1}}=\left(\bar{z}\right)^{-1}$.

5. а) $2\sqrt{3}$, б) $-4i$, в) 7 , г) $\frac{-1-4i\sqrt{3}}{7}$, д) $4i$. **6.** $Re(z)=\frac{29}{37}$, $Im(z)=\frac{11}{37}$, б) $Re(z)=3$, $Im(z)=-3$, в) $Re(z)=\frac{5}{26}$, $Im(z)=\frac{25}{26}$. **7.** а) 9, б) 1. **8. Доказ.** Нека $|z|=|a+bi|=1$. Тогаш од $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}=1$ следува $a^2+b^2=1$, односно $z\cdot\bar{z}=1$ или $\bar{z}=\frac{1}{z}$. **9. Доказ.** $\left|\frac{z}{\bar{z}}\right|=\frac{|z|}{|\bar{z}|}=\frac{|a+bi|}{|a-bi|}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+(-b)^2}}=1$. **10.** а) $\sqrt{2}+2$, б) $-8i\sqrt{2}$. **11.** а) $\left|\frac{x+i}{x-i}\right|=\frac{|x+i|}{|x-i|}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+(-1)^2}}=1$, б) $\left|\frac{1-xi}{1+xi}\right|=\frac{|1-xi|}{|1+xi|}=\frac{\sqrt{1+(-x)^2}}{\sqrt{1+x^2}}=1$.

12. Доказ. $\left|\frac{x+yi}{x-yi}\right| = \frac{|x+yi|}{|x-yi|} = \frac{\sqrt{x^2+^2}}{\sqrt{x^2+(-y)^2}} = 1$. **13. Доказ.** Нека $z = x + yi$. Тогаш $iz = i(x+yi) = xi + yi^2 = -y + xi$.

Оттука следува: а) $Re(iz) = -y = -Im(z)$, б) $Im(iz) = x = Re(z)$. **14.** Да. Множеството C_Q со операциите собирање и множење е бројно поле. **15.** а) $\pm(2+i)$, б) $\pm(5-2i)$, в) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(7-i)$, г) $\pm(3-2i)$. **16.** а) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}+i)$,

б) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$, в) $\sqrt[4]{1} = \sqrt{\sqrt{i}} = \sqrt{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}$. **Одг.** $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)} = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$,

$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)} = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\right)$ **17.** $\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+i) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-i) = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

§ 3 - стр. 28

1. $z_1 = -2+i$, $z_2 = -5i$, $z_3 = -4+0i$, $z_4 = 2+2i\sqrt{3}$. **3.** а) Кружницата со центар во точката, што му одговара на бројот $3i$ и со радиус $r = 5$, б) круг со центар во точката $3-i$ и радиус $r = 2$, в) симетрала на отсечката, чии крајни точки се $(1, 0)$, $(4, 0)$, г) нека $z = x + yi$, дадената равенка ја трансформираме како што следува: $z\cdot\bar{z} + 3(z+\bar{z}) = 0$, $x^2 + y^2 + 3\cdot 2x = 0$, $(x+3)^2 + y^2 = 9$, а тоа е равенка на кружница со центар во точката $(-3, 0)$ и радиус $r = 3$. **4.** а) $1 \le |z| \le 2$, б) $-2 \le Re(z) \le 2$, $0 \le Im(z) \le 2$, в) $|z-1-i| \le \sqrt{2}$.

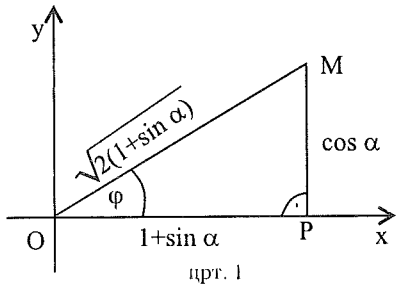
5. Доказ. Нека $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогаш $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = |a+c+(b+d)i|^2 +$

$+|a-c+(b-d)i|^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2 + (a-c)^2 + (b-d)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 =$

$= 2(a^2+b^2) + 2(c^2+d^2) = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$, што. **6.** Лежат на една права.

7. $|-5+3i-(-2-i)| = |-5+3i+2+i| = |-3+4i| = \sqrt{9+16} = 5$. **8.** $M\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$, $z = \frac{a+c}{2} + \frac{b+d}{2}i$.

§ 4 – стр. 33



црт. 1

1. За z_1: $r = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{6}$; за z_2: $r = \sqrt{2}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$;

за z_3: $r = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$; за z_4: $r = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$;

за z_5: $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

2. а) $z_1 = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) = \frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$,

б) **Решение.** $r = \sqrt{(1+\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha} = \sqrt{2(1+\sin\alpha)}$. Од правоаголниот триаголник OMP на црт.1, каде што на точката M и соодветствува даденот комплексен број z_2, имаме:

$$\cos\varphi = \frac{1+\sin\alpha}{\sqrt{2(1+\sin\alpha)}} = \sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{2(1+\sin\alpha)}} = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}} \quad \text{и}$$

$\sin\varphi = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2(1+\sin\alpha)}} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{2(1+\sin\alpha)}} = \sqrt{\frac{1-\sin^2\alpha}{2(1+\sin\alpha)}} = \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}$. Според тоа:

$z_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2(1+\sin\alpha)}\left(\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{2}} + i\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{2}}\right)$, в) $z_2 = 3\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

3. а) $3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$,

б) $8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 8\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) = 8\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 8\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$.

4. а) $-i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, б) $3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$, в) $2 + 2i = 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$,

г) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, д) $\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}$.

5. $\bar{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi$, $z^{-1} = \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$. **6.** $Arg\ z = k\cdot\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

7. Тоа се состои од точките: а) на кругот $k(O, r)$ без центарот O , б) на полуправата OP – бисектриса на I квадрант, в) на кружницата $k(O, 1)$, г) на I квадрант заедно со точките на позитивните делови од реалната и имагинарната оска, д) на полукругот $k(0, 5)$ што е над реалната оска.

§ 5 – стр. 43

1. а) $\sqrt{6}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$, б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}(1-i)$.

2. а) $2\sqrt{2}\left(\cos 120^0 + i\sin 120^0\right) = \sqrt{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$, б) $\sqrt{2}\left(\cos 30^0 + i\sin 30^0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\sqrt{3} + i\right)$,

в) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-30^0\right) + i\sin\left(-30^0\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - i\right)$. **3.** Модулот останува ист, а аргументот : а) се зголемува за $\frac{\pi}{2}$,

б) се намалува за $\frac{\pi}{2}$. **4.** а) $4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + i\sqrt{3}\right)$, б) $8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i$,

в) $32\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 32\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 16\left(-\sqrt{3} + i\right)$. **5.** а) 1 , б) 0 . **6.** а) $-32\sqrt{3}\cdot i$, б) $-64 - (-64) = 0$, в) 0 .

7. Доказ. Нека $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ Тогаш $a - bi = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ па ќе биде $(a+bi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ и $(a-bi)^n = r^n(\cos n\varphi - i\sin n\varphi)$. **8.** а) $w_0 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$, $w_1 = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$, $w_2 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$, $w_3 = \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$,

б) $w_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9} - i\sin\frac{\pi}{9}\right)$, $w_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9} + i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$, $w_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9} + i\sin\frac{11\pi}{9}\right)$,

в) $w_0 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{18}+i\sin\frac{7\pi}{18}\right)$, $w_1 = -2\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right)$, $w_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{18}-i\sin\frac{7\pi}{18}\right)$, г) $\pm\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{6}}{2}}+i\sqrt{-1+\frac{\sqrt{6}}{2}}\right)$,

д) $\pm\left(3-2i\sqrt{2}\right)$. **9.** а) $i^{\frac{3}{4}} = \left\{\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}; -\sin\frac{3\pi}{8}+i\cos\frac{3\pi}{18}; -\cos\frac{3\pi}{8}-i\sin\frac{3\pi}{8}; \sin\frac{3\pi}{8}-i\cos\frac{3\pi}{8}\right\}$,

б) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{2}{3}} = \left\{\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right); \sqrt[3]{4}\left(-\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right); \sqrt[3]{4}\left(-\cos\frac{4\pi}{9}-i\sin\frac{4\pi}{9}\right)\right\}$,

в) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{\frac{4}{5}} = \left\{\sqrt[3]{16}\left(\cos\frac{2\pi}{15}+i\sin\frac{2\pi}{15}\right); \sqrt[5]{16}\left(\cos\frac{8\pi}{15}+i\sin\frac{8\pi}{15}\right); \sqrt[5]{16}\left(-\cos\frac{\pi}{15}+i\sin\frac{\pi}{15}\right);\right.$

$\left.-\sqrt[5]{16}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right); \sqrt[5]{16}\left(\cos\frac{4\pi}{15}-i\sin\frac{4\pi}{15}\right)\right\}$. **10.** а) $\frac{\sqrt{3}}{18}\left(\sqrt{3}-i\right)$,

б) $\sqrt[4]{-16} = \left\{\sqrt{2}(1+i), \sqrt{2}(-1+i), -\sqrt{2}(1+i), \sqrt{2}(1-i)\right\}$,

в) $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{\cos\pi+i\sin\pi} = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, i, -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i, -i, \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$

11. а) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{10} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10} = \cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} = i$,

б) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{30} = \varepsilon_1^{30} = \left(\varepsilon_1^3\right)^0 = 1^{10} = 1$, в) $\sqrt{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{24}+i\sin\frac{7\pi}{24}\right)$.

12. $w_1 = 1+i$, $w_2 = -1+i$, $w_3 = -1-i$, $w_4 = 1-i$.

13. $\sqrt[8]{1} = \left\{1, \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), i, \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i), -1, \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i), -i, \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right\}$

14. Доказ. Нека ε и η се две кои било вредности на n-ти корен на единицата, т.е. ако $\varepsilon, \eta \in E_n$ и $\varepsilon^n = 1, \eta^n = 1$. Тогаш од $(\varepsilon:\eta)^n = \varepsilon^n : \eta^n = 1:1 = 1$. Следува дека $\varepsilon:\eta \in E_n$. **15. Доказ.** Нека $\varepsilon \in E_n$, т.е. $\varepsilon^n = 1$. Од $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^n = \frac{1^n}{\varepsilon^n} = \frac{1}{1} = 1$ следува дека $\varepsilon^n \in E_n \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} \in E_n$.

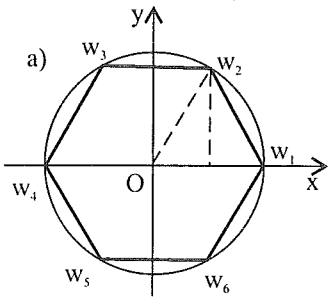
16. $\varepsilon_1^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+i^2\cdot 3-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \varepsilon_2$. Аналогно $\varepsilon_2^2 = \varepsilon_1$.

Потоа $\frac{1}{\varepsilon_2}=\frac{2}{-1-i\sqrt{3}}=\frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{(-1)^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2\left(-1+i\sqrt{3}\right)}{1-3i^2}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=\varepsilon_1$; $\varepsilon_0\cdot\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2=1\cdot\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=$

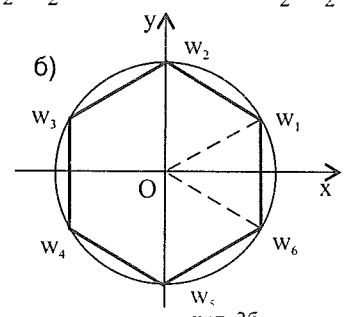
$\frac{(-1)^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2}{4}=\frac{1-3i^2}{4}=\frac{4}{4}=1$, $\varepsilon_0+\varepsilon_1+\varepsilon_2=1+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-1+0=0$

17. а) $w_1=1+0i$, $w_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $w_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $w_4=-1+0i$, $w_5=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $w_6=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, (црт. 2а)

б) $w_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $w_2=0+i$, $w_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $w_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $w_5=0-i$, $w_6=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ (црт. 2б).



црт. 2а



црт. 2б

ГЛАВА II

ПОЛИНОМИ ОД ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

§ 6, § 7 – стр. 49

1. а) $P(-2)=2\cdot(-8)-4-10-1=-31$, б) $Q(1)=1-4+3+2-5+10=7$, в) $R(2)=32+8+2+1=43$,
2. а) $f(-3)=158$, б) $g(5)=9486$. **3.** $P(-1)=-4$, $P(4)=0$, **4.** а) $P(1)=8-i$, б) $P(i)=9-6i$, в) $P(-i)=9+4i$,
г) $P(2-i)=-5-84i$. **5. Доказ.** а) $P(x)=\frac{1}{2}\cdot x(x-1)$ е целовредносен, бидејќи производот на два сукцесивни цели броеви е делив со 2, б) $Q(x)=\frac{1}{6}\cdot x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x=\frac{1}{6}x\left(x^2+3x+2\right)=\frac{1}{6}x(x+1)(x+2)$ очигледно е целовредносен.
6. а) Полиномот $P(x)$ од пети степен согласно Т[7 .1] е целовредностен, бидејќи шест негови вредности: $P(-2)=-1$, $P(-1)=0$, $P(0)=0$, $P(1)=1$, $P(2)=9$ и $P(3)=42$ се цели броеви,

б) $f(x)=\frac{1}{6}\cdot x(2x-1)\left(x^2-1\right)=\frac{1}{6}\cdot(x-1)\cdot x(x+1)(2x-1)$ е целовредностен, бидејќи производот од три сукцесивни броеви е секогаш делив со 6, в) полиномот $g(x)$ не е целовредностен. На пример, вредноста $g(1)=-\frac{2}{3}$ не е цел број.

§ 8 – стр. 52

1. а) $(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=\left(x^4-1\right)$, б) $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=$
$\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2+1+x\right)\left(x^2+1-x\right)$, в) $x^6-1=\left(x^3-1\right)\left(x^3+1\right)=$
$(x-1)\left(x^2+x+1\right)(x+1)\left(x^2-x+1\right)$. **2.** $b_0=0$, $a_0=-4$, $b_2=-2$, $b_3=1$, б) $A=2$,

$C=-1, D=3, F=-5$, в) Од $(x-a)^2+c = x^2-2ax+a^2+c = x^2-6x+7$ добиваме $-2a=-6$, $a^2+c=7$, односно $a=3$ и $c=-2$.

§ 9 – стр. 62

1. а) $A+B=x^5+x^4+3x^3-x^2-2x+6$, б) $A+B=-2x^3-5x^2+2x+3$, в) $P+Q=2x^3-3x+5$.

2. а) $AB=3x^6-11x^5+22x^4-17x^3+18x^2-23x+5$ б) $PQ=6x^6-7x^5+16x^4-20x^3+10x^2-17x+4$.

3. а) $x^6-2x^5-5x^4+4x^3-4x^2+x+2$, б) $x^4-3x^3-2x^2+12x-8$, в) $x^5-x^4-9x^3-23x^2+24x+36$.

4. а) $x^7+2x^6+2x^4-5x^3-3x^2+4x-7$, б) $x^5+x^4+6x^3+10x^2+6x$. **5.** $q(x)=x^2+3x-4$, $r(x)=2x-7$.

6. а) $q(x)=2x^2+3x+11, r(x)=25x-6$, б) $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}$, $r(x)=\frac{16}{9}x-\frac{32}{9}$, в) $q(x)=x^3+4x^2-4x-2$, $r(x)=6x+5$, г) $q(x)=x^3-x$, $r(x)=x-1$, д) $q(x)=x^2-1$, $r(x)=-x^2-x$.

7. $q(x)=2x^3+5x^2+13x+42$, $r=127$. **8.** а) $q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$, $r=-327$,

б) x^3-2x^2-2x, $r=-1$, в) $q(x)=x^2++(-2+i)x-2i$, $r=1$, г) $q(x)=4x^2-(3+4i)x-1+7i$, $r=8-6i$.

9. Бараниот остаток со некој полином од прв степен $r(x)=mx-n$, при што треба да важи идентитетот $x^{50}-x^{30}+2x^{10}-4=(x-1)(x+1)\cdot q(x)+mx+n$. Од него за $x=1$, а потоа за $x=-1$ го добиваме системот равенки $\begin{cases} m+n=-2 \\ -m+n=-2 \end{cases}$ од каде добиваме: $m=0$, $n=-2$. Значи, бараниот остаток од делењето на полиномот $P(x)$ со x^2-1 е еднаков на $r=-2$. **10. Решение.** Од $P(x)=(x-a)\cdot q_1(x)+\alpha$ и $P(x)=(x-b)\cdot q_2(x)+\beta$ имаме: $P(a)=\alpha$ и $P(b)=\beta$. Нека $P(x)=(x-a)(x-b)q(x)+(mx+n)$, т.е. $R(x)=mx+n$. Задачата се сведува на одредување на коефициентите m и n. Нив ги добиваме од системот равенки: $\begin{cases} P(a)=ma+n=\alpha \\ P(b)=mb+n=\beta \end{cases}$ од каде добиваме

$m=\frac{\alpha-\beta}{a-b}$, $n=\frac{b\alpha-a\beta}{a-b}$. Значи, $R(x)=mx+n=\frac{\alpha-\beta}{a-b}x+\frac{b\alpha-a\beta}{a-b}$.

§10 – стр. 65

1. а), б), г) е делив, в) не е делив. **2.** Полиномот $P(x)=x^3+a^3$ е делив со $x+a$, но не е делив со $x-a$, бидејќи остатокот од делењето на $P(x)$ со $x+a$ е нула: $P(-a)=(-a^3)+a^3=-a^3+a^3=0$, а остатокот од делењето со $x-a$ е различен од нула: $P(a)=a^3+a^3=2a^3\neq 0$. **3.** а), б) не е делив, в), г) е делив, бидејќи $(\mp ai)^2+a^2=a^2i^2+a^2=-a^2+a^2=0$. **4.** $P(x)=x^{2k+1}-a^{2k+1}$ е делив со $x-a$, бидејќи $P(a)=a^{2k+1}-a^{2k+1}=0$, а со помош со на Хорнеровата шема, добиваме:

	1	0	0	0	...	0	0	0	$-a^{2k+1}$
a	1	a	a^2	a^3	...	a^{2k-2}	a^{2k-1}	a^{2k}	0

Оттука: $x^{2k+1}-a^{2k+1}\equiv(x-a)\left(x^{2k}+ax^{2k-1}+a^2x^{2k-2}+\ldots+a^{2k-1}x+a^{2k}\right)$.

5. Доказ. При делењето на полиномот $P(x)$ и $Q(x)$ со $x+(a+b)$ добиваме остаток нула:

$r = P[-(a+b)] = P(-a-b) = (-a-b+a)^4 - b^4 = (-b)^4 - b^4 = 0$. Исто така и:

$Q[-(a+b)] = Q(-a-b) = (-a-b+a)^5 - b^5 = (-b)^5 - b^5 = 0$.

6. а) За кој било (парен или непарен) број n, б) за кој било парен природен број n.

7. Доказ. При делењето на полиномот $P(x) = (x+a+b)^3 - x^3 - a^3 - b^3$ со $x+a$ и со $x+b$ добиваме остаток нула: $r = P(-a) = (-a+a+b)^3 - (-a)^3 - a^3 - b^3 = b^3 + a^3 - a^3 - b^3 = 0$, а исто така и $r = P(-b) = (-b+a+b)^3 - (-b)^3 - a^3 - b^3 = 0$. **8.** Од условот $r = P(-3) = (-3)^3 + 4(-3)^3 + k(-3) + 15 = 0$, односно од $-3k - 27 + 36 + 15 = 0$ добиваме $k = 8$.

9. Доказ. $r = P\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}+1\right)^{2n} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n} + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 1 + 1 = 0$.

10. Доказ. $r = P(1) = n \cdot 1^{n+1} - (n+1) \cdot 1^n + 1 = n - (n+1) + 1 = 0$. Од Хорнеровата шема имаме :

	n	$-(n+1)$	0	0	...	0	0	0	1
1	n	-1	-1	-1	...	-1	-1	-1	0

Според тоа: $q(x) = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \ldots - x - 1$.

11. Од условите: $P(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2 + 2a + b = 0$ и $P(3) = 2 \cdot 3^3 + 3^2 + 3a + b = 0$, односно од системот $\begin{cases} 2a + b = -20 \\ 3a + b = -63 \end{cases}$ добиваме: $a = -43$, $b = 66$.

§ 11 – стр. 72

1. а) $D(f,g) = x^2 + 7x + 12$, б) $D(A,B) = x^2 + 1$. **2.** а) $D(f,g) = x^3 + 1$, б) $D(f,g) = x + 2$, в) $D(f,g) = 1$, г) $D(f,g) = x^2 - 2x - 3$. **3.** а) $(3-x) \cdot f(x) + (x^2 - 4x + 4) \cdot g(x) = x^2 + 5x$, б) $(-x-1) \cdot f(x) + (x+2) \cdot g(x) = x^2 - 2$. **4.** а) $A(x) = x$, $B(x) = -3x^2 - x + 1$, б) $A(x) = 3x^2 + x - 1$, $B(x) = -3x^3 + 2x^2 + x - 2$. **5.** $A(x) = 3x^3 + 3x^2 - 7x + 2$, $B(x) = -3x^3 - 6x^2 + x + 2$.

§ 12 – стр. 74

1. $m = -3$, $n = 2$. **2.** $a = 3$, $b = -2$. **3.** За параметрите p и k постојат три можности: а) $p = k = 0$, б) $p = k = 1$ и в) $p = 0$, $k = -1$. **4.** При услов $a = -c^2 - 1$, $b = c$. **5. Упатство.** Дељивоста на кој било полином $P(x)$ со $x^2 - 1$ е еквивалентна на неговата дељивост со $x - 1$ и со $x + 1$. **Одговор.** $a = -2$, $b = 0$. **6.** $a = -50$, $b = -10$. **7.** $p = 2$, $k = 9$. **8.** $A(x) = 9x^2 - 26x - 21$, $B(x) = -9x^3 + 44x^2 - 39x - 7$. **9.** $a = 3$, $b = -4$.

§ 13 – стр. 79

1. О даденитe бројви нули на $f(x)$ се: -2, 1 и 2. **2.** Бројот -1 е заедничка нула на $f(x)$ и $g(x)$; бројот 3 е нула само на $f(x)$, а бројот $\frac{1}{2}$ е нула само на $g(x)$. **3.** Бројот $x = -2$ е трикратна нула на $f(x)$. **4.** $a = b = 5$. **5.** Бројот $x = 5$ е трикратна нула на $f(x)$. **6.** Делив е. $x^5 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 6 = (x+1)(x+2)(x-3)(x^2+1)$.

7. Идентични се $f(x) \equiv \varphi(x)$. **8. Упатство.** Реши го системот равенки $f(-1) = -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 = 0$, $f(0) = a_3 = 6$, $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 10$, $f(2) = 8a_0 + 4a_1 + 2a_2 + a_3 = 24$, по однос на коефициентите a_0, a_1, a_2 и a_3.

Одговор. Баранот полином од трет степен е $f(x)=2x^3-x^2+3x+6$. **9. Доказ.** Целиот рационален израз $P(x)$ е од втор степен. Тој добива вредност нула за $(2+1)$ различни вредности на x: $P(a)=\frac{(a-b)}{(a-b)}\frac{(a-c)}{(a-c)}+0+0-1=1-1=0$, $P(b)=0+1+0-1=0$, $P(c)=0$ па согласно со Т [13.3] $P(x)$ е нула полином. **10.** $P(x)=x^4-3x^3-2x^2+4x+5$.

§ 14, § 15 – стр. 84

1. $P(x)=x^4-5x^3+5x^2+5x-6$. **2.** $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=a$, $x_1x_2x_3=-b$ и при услов $x_2=x_3$: $x_1+2x_2=0$, $2x_1x_2+x_2^2=a$, $x_1x_2^2=-b$ $x_1=\frac{3b}{a}$, $x_2=x_3=-\frac{3b}{2a}$ при услов $4a^3+27b^2=0$.

3. $a=1$, $b=-2$. **4.** $a^3-4ab+8c=0$. **5. Решение.** Од $Q(x)=x^3-2x^2-5x+6$ имаме

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-5 \\ x_1x_2x_3=-6 \end{cases}$$

а од $P(y)=y^3+py^2+qy+r$ и $y_1=x_1+x_2$, $y_2=x_2+x_3$, $y_3=x_3+x_1$ имаме:

$$\begin{cases} y_1+y_2+y_3=-p \\ y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=q \\ y_1y_2y_3=-r \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1+x_2+x_2+x_3+x_3+x_1=-p \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_1+x_2)(x_3+x_1)+\ldots=q \\ (x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)=-r \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} 2(x_1+x_2+x_3)=-p \\ 3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1^2+x_2^2+x_3^2=q \\ 2x_1x_2x_3+x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_2^2x_3+x_1x_3^2+x_2x_3^2=-r \end{cases}$$

Оттука добиваме: $p=-4$, $q=-1$, $r=5$; $P(y)=y^3-4y^2+5$.

6. Решение. Од $P(x)=x^3-3x^2+2x+5$ и Виетовите правила: $x_1+x_2+x_3=3$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2$, $x_1x_2x_3=-5$, имаме:

а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=-\frac{2}{5}$, б) од $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$ имаме:

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=3^2-2\cdot 2=9-4=5$. **7. Решение.** Од $P(x)=x^3-2x^2+25x-50$, равенствата: $x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=25$, $x_1x_2x_3=50$ и од условот $x_2=-x_1$, имаме: $x_1-x_1+x_3=2$, $-x_1^2+x_1x_3-x_1x_3=25$, $-x_1^2x_3=50$, а оттука $x_3=2$, $x_{1,2}=5$.

§ 16 – стр. 88

1. $P(x)=x^4-2x^3+7x^2+18x+26$. **2.** $P(x)=(x-1)^2\cdot(x-i)^3\cdot(x+i)^3=$

$=(x^2-2x+1)(x^2+1)=x^8-2x^7+4x^6-6x^5+6x^4-6x^3+4x^2-2x+1$. **3. Упатство.** Даденият полином подели го со производот $(x-1+i)(x-1-i)=(x-1)^2+1=x^2-2x+2$. **Одговор.** $x_1=1-i$, $x_2=1+i$, $x_3=-1-i$, $x_4=-1+i$.

4. Упатство. Примени ги Виетовите правила и условот $x_3=2x_1$. **Одговор.** $x_1=-1$, $x_2=3$, $x_3=-2$.

5. $P(x)=(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})=x^4-6x^3+5x^2+14x-4$.

§ 17 – стр. 92

1. Доказ. Исполнет с критериумот на Езејнштејн: а) за $p = 2$, б) за $p = 2$, в) за $p = 3$ и за $p = 5$. **2. Решение.** Нека даденият полином с разложлив на два квадратни триноми со рационални коефициенти, т.е. $x^4 + px^2 + q = \left(x^2 + k_1x + s_1\right)\left(x^2 + k_2x + s_2\right)$, односно

$x^4 + px^2 + q = x^4 + \left(k_1 + k_2\right)x^3 + \left(s_1 + k_1k_2 + s_2\right)x^2 + \left(k_1s_2 + k_2s_1\right)x + s_1s_2$. Тогаш треба да важат равенствата: $k_1 + k_2 = 0$, $s_1 + k_1k_2 + s_2 = p$, $k_1s_2 + k_2s_1 = 0$, $s_1s_2 = q$ (*) а) Ако $k_1 = 0$, тогаш и $k_2 = 0$. Во овој случај од равенствата (*) следува дека s_1 и s_2 треба да ги задоволуваат условите $s_1 + s_2 = p$ и $s_1s_2 = q$, односно да се два различни рационални корени на квадратната равенка $z^2 - pz + q = 0$, а за тоа потребен и доволен услов е дискриминантата $p^2 - 4q$ да биде квадрат на рационален број. б) Нека $k_1 \neq 0$. Тогаш $k_2 = -k_1$, а од равенствата (*) следува дека: $s_1 = s_2$, $q = s_1^2$, $2s_1 - p = k_1^2$. Според тоа, полиномот $x^4 + px^2 + q$ за да биде разложив потребно и доволно е да биде исполнет еден од следниве два услова: а) $p^2 - 4q$ да биде квадрат на рационален број, б) q да е квадрат на рационалниот број s_1, а $2s_1 - p$ да е квадрат на рационалниот број k_1. **3. Доказ.** Ако даден полином од трет степен е разложив во полето на рационалните броеви, тој мора да има барем еден множител од прв степен со рационални коефициенти и затоа има рационална нула.

§ 18 – стр. 97

1. а) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, б) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_2 = 3$, в) $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_2 = 5$, г) $x_1 = 2$. **2.** а) $x_1 = \frac{3}{4}$, б) $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -2$, в) $x_1 = \frac{1}{2}$, г) $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$. **3.** а) $f(x) = (x+2)^3\left(x^2+1\right)$, б) $g(x) = (x+1)(x+2)(x-3)\left(x^2+1\right)$, в) $\varphi(x) = (x+1)(x+3)(x+4)$. **4.** За полиномите $A(x)$ и $C(x)$ исполнети се условите во Т[18.4] затоа тие немаат цели нули. За полиномите $B(x)$ и $E(x)$ не се исполнети условите од Т[18.4], меѓутоа покрај тоа полиномот $B(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ нема цели нули, бидејќи $B(-1) \neq 0$ и $B(1) \neq 0$, а други цели нули тој не може да има. **5.** $P(x)$ има цели нули : $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$, а $Q(x)$: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ и $x_3 = 3$.

6. Доказ. Полиномот разложен на линеарни множители гласи: $(n-2)(n-1)\cdot n\cdot(n+1)(n+2)$. Ако n е природен број, тогаш тој е производ од пет последователни (сукцесивни) цели броеви, меѓу кои задолжително има најмалку по еден број делив со 2, 3, 4 и 5. Значи, даденият полином секогаш ќе биде делив со $2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$.

§ 19 – стр. 104

1. а) **Упатство.** Трансформирај го полиномот $18P(x) = 54x^3 - 12x^2 + 9x - 2$ со трансформацијата $18P(x) \to P^*(x) = 18P(54x)$. **Одговор.** а) $x_1 = \frac{12}{54} = \frac{2}{9}$, б) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = -\frac{1}{2}$. **2.** а) $x_1 = -1$, б) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{2}{3}$. **3.** а) $P^*(x) = 2x^8 - 6x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 1$, б) $P^*(x) = P(ix) = (ix)^5 - 4(ix)^3 + ix - 2 =$

$= i^5x^5 - 4i^3x^3 + ix - 2 = ix^5 + 4ix^3 + ix - 2$. **4. Решение.** $P^*(x) = P\left[(1+i)x\right] = (1+i)^4x^4 + 1 =$

$\left[(1+i)^2\right]^2x^4 + 1 = (2i)^2x^4 + 1 = -4x^4 + 1$. **5. Упатство.** Врз даденият полином $P(x)$ изврши ја трансформацијата:

а) $P(x) \to P^*(x) = P(x+3)$, б) $P(x) \to P^*(x) = P(x-2)$. **Одговор.** а) $P^*(y) = y^4 - 14y^3 + 59y^2 - 70y$, каде $y = x + 3$, б) $P^*(y) = y^4 + 6y^3 - y^2 - 30y$, каде што $y = x - 2$. **6.** $P^*(y) = y^4 - 4y^2 - 5y - 1$, каде $y = x - 1$.

7. Доказ. По развивањето на полиномите: а) $P(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$

б) $Q(x)=\dfrac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ по степените на $x-1$, тие го добиваат видот:

а) $P^*(y)=y^2+3y+3$, б) $P^*(y)=y^6+7y^5+21y^4+35y^3+35y^2+21y+7$, каде $y=x-1$. Гледаме, за полиномите $P^*(y)$ и $Q^*(y)$ исполнет е критериумот на Езејнштејн за простиот број : а) $p=3$, б) $p=7$. Значи, тие и дадените полиноми се неразложливи во полето на рационалните броеви. **8. Доказ.** Дадениот полином $P(x)$ со трансформацијата $P(x)\to P^*(x)=x^nP(\dfrac{1}{x})$ преминува во полиномот $f(x)$ (види (12) во т.19.3). Според тоа, ако полиномот $P(x)$ е неразложив, тогаш и полиномот $f(x)$ е неразложив.

§ 20 – стр. 109

1. а) $L(x)=\dfrac{1}{24}\cdot x^4+\dfrac{11}{12}\cdot x^3-\dfrac{73}{24}\cdot x^2+\dfrac{1}{12}\cdot x+5$, б) $L(x)=-\dfrac{4}{3}\cdot x^3+10x^2-\dfrac{65}{3}\cdot x+15$,

в) $L(x)=\dfrac{1}{2}\left[5-(1-i)x-x^2-(1+i)x^3\right]$. **2.** а) $N(x)=-x^4+4x^3-x^2-7x+5$, б) $N(x)=\dfrac{x^3}{1260}-\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{11}{90}\cdot x-\dfrac{2}{21}$,

в) $N(x)=x^3-9x^2+21x-8$. **3.** $P(x)=\dfrac{1}{24}\cdot x^4-\dfrac{1}{12}\cdot x^3+\dfrac{11}{24}\cdot x^2+\dfrac{7}{12}\cdot x+1$,

в) $P(x)=\dfrac{1}{120}\cdot x^4-\dfrac{1}{8}\cdot x^3+\dfrac{17}{24}\cdot x^2-\dfrac{15}{8}\cdot x+\dfrac{137}{60}$. **5. Доказ.** а) Левата страна на равенството несомнено е полином од степен не помал од два по однос на променливата x. За да докажеме дека тој е нула полином , согласно Т[13.3] доволно е да покажеме дека тој за три $(2+1)$ различни вредности на x добива вредност 0. Значи, полиномот на левата страна од идентитетот за $x=a$, $x=b$ и $x=c$ добива вредност 0, б) Двете страни на ова равенство несомнено се полиноми од втор степен. Тие два полинома за три различни вредности на променливата x : $x=a$, $x=b$ и $x=c$ добиваат соодветно еднакви вредности. Според тоа, согласно Т[13.4] тие се идентични полиноми, штд.

ГЛАВА III

ДРОБНИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

§ 21 – стр. 113

1. а) $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$, б) $D=\mathbb{C}\setminus\{3, 2i, -2i\}$. **2.** а) $\dfrac{1}{x^2-1}$, б) $\dfrac{1}{x-1}$, в) $\dfrac{1}{x^2+1}$.

3. а) $\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}$, б) $\dfrac{x^2-xy+y^2}{\left(x^2+y^2\right)(x-y)}$. **4.** Тие се еднакви: $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+3x+2}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+1}$, $R(-2)=\dfrac{-2-1}{-2+1}=3$.

5. Упатство. Покажи дека бројителот на дропката е делив со именителот и одреди го количникот.

6. а) Бидејќи $\dfrac{n^2+5n+4}{n+1}=n+4$, затоа таа е природен број за секој $n\in\mathbb{N}$, б) дропката $\dfrac{2n^2-n+3}{2n-1}=n+\dfrac{3}{2n-1}$ не е природен број за секој $n\in\mathbb{N}$, в) не е природен број за секој n.

§ 22 – стр. 120

1. а) $-\frac{1}{x^2+1}$, б) $12x$. **2.** а) $\frac{1}{x+1}$, б) $x+1$. **3.** $\frac{4x}{3(x-4)}$. **4.** а) $2(x+1)$, б) 1. **5.** $\frac{5x}{x-3}$. **6.** $\frac{1}{x+1}$.

§ 23 – стр. 132

1. а) $\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+3}$, б) $\frac{-1}{x-1}+\frac{3}{x-2}$, в) $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{3}{x-4}$, г) $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{5(x+2)}-\frac{2}{5(x-3)}$.

2. а) $\frac{2}{3(x-1)^2}+\frac{2}{9(x-1)}-\frac{2}{9(x+2)}$, б) $\frac{-1}{x^2}+\frac{0}{x}+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}$, в) $\frac{-3}{2x}+\frac{5}{3(x-1)}-\frac{1}{6(x+2)}$.

3. а) $\frac{1}{4(x-1)^2}+\frac{2}{2(x^2-2x+3)^2}-\frac{1}{4(x^2-2x+3)}$, б) $\frac{3}{x+2}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)}+\frac{x-3}{x^2+1}$,

в) $\frac{1}{8(x-2)}-\frac{1}{8(x+2)}+\frac{1}{2(x^2+4)}$. **4.** а) $\frac{2}{x-1}+\frac{-2+i}{2(x-i)}+\frac{-2-i}{2(x+i)}$, б) $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{\varepsilon}{x-\varepsilon}+\frac{\varepsilon^2}{x-\varepsilon^2}\right)$, $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$,

в) $-\frac{1}{16}\left(\frac{1+i}{x-1-i}+\frac{1-i}{x-1+i}+\frac{-1+i}{x+1+i}+\frac{-1-i}{x+1+i}\right)$ г) $\frac{1}{16}\left(\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{3}{x+1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x^2+1)^2}+\frac{1}{x^2+1}\right)$.

5. Упатство. Претходно трансформирај ги дропките во збир од цел израз и правилна дропка:

а) $\frac{n^2-n-2}{n+1}=n-2+\frac{4}{n+1}$. **Одг.** за $n=0$, 1 и 3, б) $\frac{2n^2+3n-3}{n-2}=2n+7+\frac{11}{n-2}$. **Одг.** за $n=3$ и $n=13$,

в) $\ldots=2n^2-3n+1+\frac{6}{n+3}$. **Одг.** за $n=0$ и $n=3$.

ГЛАВА IV

ПОЛИНОМНИ РАВЕНКИ ОД ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

§ 24, § 25 – стр. 139

1. а) $x=1-\frac{5}{4}i$, б) $x=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$. **2.** а) $x=-\frac{3}{5}(1+2i)$, б) $x=-\frac{2}{5}+\frac{4}{5}i$. **3.** а) $x_1=2$, $x_2=i$, б) $x_1=\frac{5+\sqrt{41}}{2}+i$,

$x_2=\frac{5-\sqrt{41}}{2}+i$. **4.** а) $x_1=2+i$, $x_2=1-i$, б) $x_1=1-3i$, $x_2=-1+i$. **5.** а) $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

б) $x_1=-1$, $x_2=\sqrt{3}$. **6.** а) $x_1=2+\sqrt{3}$, $x_2=1-\sqrt{3}$, б) $x_1=3$, $x_2=-\sqrt{5}$. **7.** а) $x_1=5$, $x_2=\frac{3}{7}$,

б) $x_1=\frac{25}{12}$, $x_2=5$. **8.** $x_1=2+\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2=2-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **9.** а) $2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-4)$, б) $8\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$,

в) $8(-2+i)(-2-i)$. **10.** а) $x^2-6x+7=0$, б) $x^2-2x-11=0$, в) $x^2-4x+1=0$.

§ 26 – стр. 146

1. а) $x_{1,2}=-1-i$, $x_3=2+2i$, б) $x_{1,2}=i$, $x_3=-2i$. **2.** а) $x_1=-1$, $x_{2,3}=\frac{-5\pm 5i\sqrt{3}}{2}$, б) $x_1=-7$, $x_{2,3}=-1\pm i\sqrt{3}$.

3. а) $x_1=-3$, $x_{2,3}=\frac{3\pm i\sqrt{3}}{2}$, б) $x_1=-3$, $x_{2,3}=\frac{3\pm 5i\sqrt{3}}{2}$. **4.** а) $x_1=-1$, $x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{21}}{2}$, б) $x_{1,2}=1$, $x_3=-2$.

5. а) $x_1=2$, $x_{2,3}=-1\pm 3i\sqrt{3}$, б) $x_1=2$, $x_{2,3}=1\pm 4i\sqrt{3}$. **6.** а) $x_1=1$, $x_2=-3$, $x_3=2$, б) $x_1=-1$, $x_2=5$, $x_3=-4$. **7.** а) $(x+2)(x-1)(x-4)=x^3-3x^2-6x+8=0$, б) $(x+3)(x^2+1)=x^3+3x^2+x+3=0$.

8. $(x+i)^3=x^3+3ix^2-3x-i=0$. **9.** а) $(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3})(x+2)=x^3-6x-4=0$,

б) $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+3)=x^3+3x^2-2x-6=0$.

§ 27 – стр. 150

1. а) $x_{1,2}=-1\pm 3i$, $x_{3,4}=1\pm i$, б) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=-2$. **2.** а) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_{3,4}=\pm i$,

б) $x_{1,2}=-2\pm 2\sqrt{2}$, $x_{3,4}=-1\pm i$, **3.** а) $x_1=5$, $x_2=4$, $x_3=-3$, $x_4=-2$, б) $x_{1,2}=1$, $x_{3,4}=-3$.

4. а) $x_{1,2}=\pm i$, $x_{3,4}=+1\pm i\sqrt{2}$, б) $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

5. $(x+3)(x-2)(x^2+1)=x^4+x^3-5x^2+x-6=0$.

6. $x^4-(-1-2+2+3)x^3+(2-2-3-4-6+6)x^2-(4+6-6-12)x+12=x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$.

§ 28 – стр. 164

1. а) $x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, б) $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **2.** $x_1=-1$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=-2$,

б) $x_1=-1$, $x_{2,3}=1$, $x_{4,5}=\frac{1\pm\sqrt{15}}{4}$. **3.** а) $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4}=-2\pm\sqrt{3}$,

б) $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_{4,5}=-2\pm\sqrt{3}$ **4.** а) $x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{15}}{4}$, $x_{3,4}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$,

б) $x_1=3$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=2$, $x_4=\frac{1}{2}$. **5.** а) $x_{1,2}=1$, $x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{24}}{5}$, б) $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-3$, $x_4=-\frac{1}{3}$.

6. а) $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=-\frac{1}{2}$, б) $x_1=1$, $x_2=\frac{3}{4}$, $x_3=\frac{4}{3}$. **7.** а) $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{-2\pm i\sqrt{5}}{3}$

б) $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{-2\pm\sqrt{3}}{2}$, $x_4=2$, $x_5=\frac{1}{2}$. **8.** а) $x_1=2$, $x_2=-\frac{1}{2}$, $x_3=3$, $x_4=-\frac{1}{3}$,

б) $x_{1,2}=\pm 1,\quad x_3=-2,\quad x_4=-\frac{1}{2}$. **9.** а) $x_{1,2}=\pm 1,\quad x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, б) Во множеството на реалните броеви има корени $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **10.** а) $x_1=-\frac{1}{2},\quad x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}$, б) $x_1=2,\quad x_{2,3}=-1\pm i\sqrt{3}$, в) $x_1=-1$, $x_{2,3}=\frac{1}{2}\left(1\pm i\sqrt{3}\right)$.

11. а) $\sqrt[4]{-i}$ = , $-i=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $x_k=\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}$, $k=0,1,2,3$.

$x_0=\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}-i\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $x_1=\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}$, $x_2=\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}$,

$x_3=\cos\frac{11\pi}{8}+i\sin\frac{11\pi}{8}$. б) $x=\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2(\cos 0+i\sin 0)}$; $x_k=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\right)$, $k=0,1,2$;

в) $x=\sqrt[7]{1}=\sqrt[7]{\cos 0+i\sin 0}$, $x_k=\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$, $k=0,1,2,3,4,5,6$.

12. а) $x_{1,2}=\sqrt{2}(1\pm i),\quad x_{3,4}=2(-1\pm i)$, б) $x_1=-1,\quad x_{2,3}=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$,

$x_{4,5}=\frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$, в) $x_1=2,\quad x_{2,3}=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$, $x_{4,5}=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$.

13. а) $x_{1,2}=\pm 2,\quad x_{3,4}=-1\pm i\sqrt{3}$, $x_{5,6}=1\pm i\sqrt{3}$, б) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}i,\quad x_{3,4}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i\right),\quad x_{5,6}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i\right)$,

в) $x=\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}$, $x_k=\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}$, $k=0,1,2,3,4,5$.

14. а) $x_{1,2}=\pm\sqrt[4]{3},\quad x_{3,4}=\pm i\sqrt[4]{3},\quad x_{5,6}=\pm\sqrt[4]{2},\quad x_{7,8}=\pm i\sqrt[4]{2}$, б) $x_{1,2}=\pm 2,\quad x_{3,4}=\pm 2i$,

$x_{5,6}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i),\quad x_{7,8}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$.

15. а) $x_1=-\frac{1}{2},\quad x_{2,3}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4},\quad x_4=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2},\quad x_{5,6}=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\left(\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\frac{1\pm i\sqrt{3}}{4}\right)$,

б) $x_1=1,\quad x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2},\quad x_4=2,\quad x_{5,6}=-1\pm i\sqrt{3}$. **16.** $x_{1,2}=\pm i\sqrt{2},\quad x_{3,4}=\pm i\sqrt{5}$, б) $x_{1,2}=\pm 1,\quad x_{3,4}=\pm 2$.

17. а) $x_{1,2}=\pm 1,\quad x_{3,4}=\pm\frac{1}{4}$, б) $x_1=2,\quad x_2=4,\quad x_3=3+\sqrt{5},\quad x_4=3-\sqrt{5}$. **18.** а) $x_{1,2}=\pm 1,\quad x_{3,4}=\pm i\sqrt{\frac{10}{3}}$,

б) $x_{1,2}=\pm i,\quad x_{3,4}=\pm 2i$. **19.** а) $x_{1,2}=\pm 1,\quad x_{3,4}=\pm 3$, б) $x_{1,2}=\pm 5,\quad x_{3,4}=2$.

§ 29 – стр. 167

1. а) $x^3+(p-1)x-p=(x-1)\left(x^2+x+p\right)=0$. **Одговор** $x_1=1$, $x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4p}}{2}$,

б) $x_1=0,\ x_2=a,\ x_{3,4}=\dfrac{-a\pm a\sqrt{7}\ i}{4}$. **2.** а) $x_{1,2}=\pm 1,\quad x_{3,4}=\pm\dfrac{1}{a}$ б) $x_{1,2}=\pm(k+1),\quad x_{3,4}=\pm(k-1)$.

3. а) $x_{1,2}=\pm\dfrac{b}{c},\quad x_{3,4}=\pm\dfrac{a}{c}i$, б) $x_{1,2}=\pm\dfrac{a}{b},\ x_{1,2}=\pm\dfrac{b}{a}$

4. а) $x_{1,2}=\pm\sqrt{-2ab+\sqrt{a^4+6a^2b^2+b^4}}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{-2ab-\sqrt{a^4+6a^2b^2+b^4}}$, б) $x_1=1$,

$x_{2,3}=\dfrac{1}{2}\left(1-a\pm\sqrt{a^2-2a-3}\right)$. **5.** $x_1=\dfrac{a+b}{a}$, $x_{2,3}=\dfrac{-1\pm i\sqrt{3}}{2a}(a+b)$, б) $x_{1,2}=\dfrac{(a+b)\sqrt{2}}{2a}(1\pm i)$,

$x_{3,4}=\dfrac{(a+b)\sqrt{2}}{2a}(-1\pm i)$. **6.** а) $x_{1,2}=\pm\sqrt{3a}$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt{3a}$, $x_{5,6}=\pm\sqrt{a}$, $x_{7,8}=\pm i\sqrt{a}$,

б) $x_{1,2}=\pm a,\quad x_{3,4}=\pm ai$, $x_{5,6}=\pm b,\quad x_{7,8}=\pm bi$. **7.** а) $x_1=\dfrac{a+b}{2}$, $x_{2,3}=\dfrac{a+b}{2}\pm\dfrac{(a+b)\sqrt{3}i}{2}$,

б) $x_{1,2}=\pm(2k-p),\quad x_{3,4}=\pm(2k-p)i$. **8.** а) $x_{1,2}=\pm 5,\quad x_{3,4}=\pm\sqrt{a}$, б) **Упатство.**

$D=\left(a^2+b^2\right)^2-4ab\left(a^2-b^2\right)=a^4+b^4+2a^2b^2-4a^3b+4ab^3=a^4+b^4+4a^2b^2-2a^2b^2-4a^3b+4ab^3=$

$=\left(a^2-2ab-b^2\right)^2$. **Одг.** При $a^2\neq b^2$, $x_1=\dfrac{a}{a+b}$, $x_2=\dfrac{b}{a-b}$. **9. Решение.** Левата страна ја разложуваме на

множители: $(a-b)(a-x)^2(x-b)^2=a^2b^2(a-b)$. Ако $a\neq b$, тогаш $(x-a)(x-b)=\pm ab$. Оттука

$x_1=0,\quad x_2=a+b,\quad x_{3,4}=\dfrac{1}{2}\left(a+b\pm\sqrt{a^2-6ab+b^2}\right)$. Ако $a=b$, равенката е задоволена идентички.

10. Упатство. Со множење на првиот со четвртиот и вториот со третиот множител добиваме:

$\left[x^2+(2a+3)x+a^2+3a\right]\left[x^2+(2a+3)x+a^2+3a+2\right]=b$. Воведуваме помошна променлива

$y=x^2+(2a+3)x+a^2+3a$ и добиваме $y^2+2y-b=0$, од каде $y=-1\pm\sqrt{1+b}$. За определување на x ја

решаваме вкупноста квадратни равенки

$$\begin{bmatrix} x^2+(2a+3)x+a^2+3a+1+\sqrt{1+b}=0 \\ x^2+(2a+3)x+a^2+3a+1-\sqrt{1-b}=0 \end{bmatrix}$$

11. $\left(y+a-\dfrac{a+b}{2}\right)^4+\left(y+b-\dfrac{a+b}{2}\right)^4=\left(y+\dfrac{a-b}{2}\right)^4+\left(y-\dfrac{a-b}{2}\right)^4=c$. Со развивање на биномите согласно

биномната формула, доаѓаме до биквадратната равенка $2y^4+12\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2y^2+2\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^4=c$. Со смената $x=y-5$

дадената равенка $(x+6)^4+(x+4)^4=82$ се сведува на биквадратната равенка $y^4+6y^2-40=0$, од каде

$y_{1,2}=\pm 2,\quad y_{3,4}=\pm i\sqrt{10}$. **Одг.** $x_1=-3,\quad x_2=-7,\quad x_3=-5+i\sqrt{10},\quad x_4=-5-i\sqrt{10}$. **12. Доказ.** Дадената равенка

е еквивалентна со квадратната равенка $(a+b+c)x^2-2(ab+ac+bc)x+3abc=0$. Нејзина дискриминанта е

$D=4(ab+ac+bc)^2-12abc(a+b+c)=2(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2+4ab^2c+4a^2bc+4abc^2-$

$-6a^2bc-6ab^2c-6abc^2)=\ 2(2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-2a^2bc-2ab^2c-2abc^2)=$

$= 2\left[(a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2) + (a^2b^2 - 2ab^2c + b^2c^2) + (a^2b^2 - 2abc^2 + b^2c^2)\right] =$

$= 2\left[(ab-ac)^2 + (ab-bc)^2 + (ac-bc)^2\right] \geq 0$. Значи, за секои $a, b, c \in \mathbb{R}$ важи $D \geq 0$, односно корените на равенката се реални. **13. Решение.** Баранѝте цели броеви нека се $x - 1$, x, $x + 1$. Од равенката $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = p$, добиваме $x = \pm\sqrt{\frac{p-2}{3}}$. За да биде $x \in \mathbb{Z}$ потребно е параметарот p да го исполнува условот $\frac{p-2}{3} = k^2$, каде $k \in \mathbb{Z}$ односно да биде $p = 3k^2 + 2$. Баранѝте броеви се $\pm\sqrt{\frac{p-2}{3}} - 1$, $\pm\sqrt{\frac{p-2}{3}}$; $\pm\sqrt{\frac{p-2}{3}} + 1$, каде што $p = 3k^2 + 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

14. Решение. Изразот $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2(p-2) = p^2 - 2p + 4 = p^2 - 2p + 1 + 3 = (p-1)^2 + 3$ ќе има најмала вредност за $p = 1$.

§ 30 – стр. 172

1. а) Дадената равенка има дефиниционо област $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$. По ослободување од именителите ја добиваме равенката $x^2 - 2x + 1 = 0$, односно $(x-1)^2 = 0$, која има двократен корен $x = 1$. Бидејќи коренот $1 \notin D$, затоа тој не е корен на дадената равенка. Според тоа, дадената равенка нема решенија. б) $x_1 = -5$, $x_2 = 5$.

2. а) $x = 3$, б) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{30}{7}$. **3.** а) Нема решенија, б) $x_1 = -10$, $x_2 = 15$.

4. Упатство. Користи ја смената $x^2 - 5x + 3 = y$. **Одговор.** $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$, б) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 4$.

5. Нема решанија. **6.** а) При $c \neq 0$, $c \neq -1$ равенката има решенија $x_1 = \frac{c}{c+1}$, $x_2 = c + 1$, б) при $a \neq 0$, $c \neq 0$ равенката има решенија $x_1 = \frac{a}{c}$, $x_2 = \frac{c}{a}$. **7.** а) При $a \neq 0$ $x_{1,2} = 2a^2 \pm a\sqrt{4a^2 + 1}$, б) при $a \neq 0$ $x_{1,2} = \frac{a}{2}\left(-3 \pm \sqrt{3}\right)$.

8. а) При $a + c \neq 0$, $a \neq c$ равенката има решенија $x_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 + ac + c^2}$, а при $a + c \neq 0$ и $a = c$ решение е секој реален број $x \neq a$, б) $x_1 = a + b$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$. **9.** При $ab \neq 0$ равенката ја доведуваме во видот $(a+b)^2x^2 + (a+b)^2x + ab(a+b) = 0$. **Одговор.** Ако $a + b = 0$ и $ab \neq 0$, тогаш решение на равенката е секој реален број $x \neq 0$. Ако, пак, $a + b \neq 0$ и $ab \neq 0$, тогаш равенката има решенија $x_1 = -a$, $x_2 = -b$. Ако $ab = 0$, равенката нема решенија, б) При $a \neq 0$ равенката има решенија $x_{1,2} = -a$. **10. Решение.** Равенката ја трансформираме во видот $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a+b} = -\left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b}\right)$, односно $\frac{2x+a+b}{x(x+a+b)} = -\frac{2x+a+b}{(x+a)(x+b)}$ $(*)$. При услов $x \neq 0$, $x + a + b \neq 0$, $x + a \neq 0$ и $x + b \neq 0$, равенката $(*)$ има решение $x_1 = -\frac{a+b}{2}$. Ако $2x + a + b \neq 0$, тогаш од $(*)$ добиваме $x(x+a+b) = -(x+a)(x+b)$, т.е. $2x^2 + 2(a+b)x + ab = 0$, од каде $x_{2,3} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

11. Решение. Кон двете страни на равенката го додаваме бројот 3 и добиваме:

$\frac{a+b-x}{c}+1+\frac{a+c-x}{b}+1+\frac{b+c-x}{a}+1+\frac{4x}{a+b+c}=1+3$, или

$\frac{a+b+c-x}{c}+\frac{a+b+c-x}{b}+\frac{a+b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}-4=0$, односно

$\frac{a+b+c-x}{c}+\frac{a+b+c-x}{b}+\frac{a+b+c-x}{a}-\frac{4(a+b+c-x)}{a+b+c}-4=0$. Оттука

$(a+b+c-x)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0$, односно $x=a+b+c$.

12. Доказ. Дадената равенка прво ја сведуваме на видот $x^2-(p+q+r)x+pq+p+q=0$. Потоа добиваме:

$D=(p+q+r)^2-4(pq+p+q)=p^2+q^2+4+2pq+4p+4q-4pq-4p-4q=p^2+q^2+4-2pq=(p-q)^2+4>0$.

ГЛАВА V

НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМИ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

§ 31, § 32, § 33 – стр. 190

1. а) $M=(6,\infty)$, б) $M=(140,\infty)$. **2.** а) $M=(-9,\infty)$, б) $M=\left(-\infty,\frac{9}{7}\right)$. **3.** а) Нема решенија, т.е. $M=\varnothing$, б) $M=\left(\frac{55}{13},\infty\right)$. **4.** а) $M=(-4,\infty)$, б) $M=\left(-\infty,-\frac{4}{5}\right)$. **5.** а) При $a>-2$ неравенката има решение $x>\frac{2a-5}{a+2}$, а при $a<-2$, тогаш $x<\frac{2a-5}{a+2}$. б) Ако $k>-3$, тогаш решение е $x<\frac{2k-1}{k+3}$, а ако $k<-3$, тогаш решение е $x>\frac{2k-1}{k+3}$. **6.** а) $x<\frac{3}{2}\cdot a-1$, б) за секој $c>2$ неравенката има множество решенија $M=\left(-\infty,-\frac{c^2+6}{c-2}\right)$, а за секој $c<2$, тогаш е $M=\left(-\frac{c^2+6}{c-2},\infty\right)$. **7.** а) $M=\left(\frac{5}{2},\infty\right)$, б) $M=\varnothing$. **8.** а) $M=\varnothing$, б) $M=(4,\infty)$. **9.** а) $M=\left(3;3\frac{1}{2}\right)$, б) $M=(-3,1)$. **10.** а) $M=(1,4)\cup(3,7)=(1,7)$, б) $M=(-1,\infty)\cup\varnothing=(-1,\infty)$. **11.** а) $M=(2,3)$, б) $M=\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right)$, в) $M=(6,\infty)$, г) $M=\varnothing$.

§ 34 – стр. 195

1. а) За секој $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup(2,\infty)$, б) за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{4}\right\}$, б) за секој $x\in(-2,3)$. **2.** За секој $k\in(-1,3)$. **3.** а) $M=(2,3)$, б) $M=\varnothing$, в) $M=\mathbb{R}$. **4.** а) $M=(-\infty,0)\cup(2,\infty)$, б) $M=(-\infty,-3]\cup[1,\infty)$, в) $M=(-2,6)$. **5.** а) $M=\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$ б) $M=\left(-\infty,\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2},\infty\right)$, в) $M=\left(\frac{2}{5},1\right)$.

6. а) $M=\left(-\infty,-\sqrt{7}\right)\cup\left(\sqrt{7},\infty\right)$, б) $M=(1,9)$. **7.** а) $M=(-3,1)\cap\varnothing=\varnothing$, б) $M=(-\infty,2)\cup(3,5)\cup(8,\infty)$

8. а) $M=\left(-\frac{19}{2},\frac{29}{2}\right)\cap\left(-\frac{5}{3},2\right)=\left(-\frac{5}{3},2\right)$, б) $M=\mathbb{R}\cap\varnothing=\varnothing$.

9. а) $M=(-5,7)\cap[(-\infty,-2)\cup(3,-\infty)]=(-5,-2)\cup(3,7)$, б) $M=(1,3)\cap\left(1,\frac{3}{2}\right)=\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

10. а) $M=\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-1,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(0,\frac{5}{2}\right)$, б) $M=(-3,1)\cap\mathrm{R}\cap\left(-\frac{4}{3},1\right)=\left(-\frac{4}{3},1\right)$.

11. а) $M=\mathrm{R}\cap(-3,2)=(-3,2)$, б) $M=\left[(-\infty,-3)\cup\left(\frac{5}{2},\infty\right)\right]\cap\varnothing=\varnothing$.

§ 35 – стр. 198

1. а) $M=(-\infty,-1)\cup(3,4)$, б) $M=(1,3)$. **2. Упатство.** Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $(x-1)^2(x+3)^2>0$. **Одговор.** $M=\mathbb{R}\setminus\{1,-3\}$. **3. Упатство.** Дадената неравенка е еквивалентна со $(x-3)(x+1)^4<0$. **Одговор.** $M=(-\infty,3)\setminus\{-1\}$. **4.** $M=(-\infty,-3]\cup[-2,-1]\cup[4,\infty)$. **5. Упатство.** Дадената неравенка е еквивалентна со $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$. **Одговор.** $M=(-\infty,1)\cup(2,3)\cup(4,\infty)$.

6. $M=(-3,-1)\cup(2,4)\cup(8,\infty)$. **7.** Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $(x+2)(x-3)>0$ без бројвите $x=1$ и $x=-5$. **Одговор.** $M=(-\infty,-2)\cup(3,\infty)\setminus\{-5\}=(-\infty,-5)\cup(-5,-2)\cup(3,\infty)$.

§ 36 – стр. 201

1. а) $M=(-1,2)\cup(3,\infty)$, б) $M=\left(-\frac{1}{2},3\right)$. **2.** а) $M=(-\infty,2)\cup(3,\infty)$, б) Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $(x+1)(x-2)<0$. **Одговор.** M=(–1,2). **3.** Дадената неравенка е еквивалентна со $\left(x+\frac{5}{4}\right)(x-5)(x+1)(x+2)(x-1)<0$. **Одговор.** $M=(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{5}{4},-1\right)\cup(1,5)$. **4.** а) Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката $x(2x-5)(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)<0$. **Одговор.** $M=(-4,-3)\cup(-2,-1)\cup\left(0,\frac{5}{2}\right)$,

б) $M=(-\infty,-3)\cup(1,4)$. **5.** а) $M=(-4,-2)\cup(3,5)$, б) $M=\left(-\infty,\frac{7}{2}\right)$.

§ 37 – стр. 210

1. а) $x=0$, б) $M=[-1,1]$. **2.** а) $x=0$, б) $x=-2$. **3.** а) $x=5$, б) нема решенија. **4.** а) $M=\{-3,0,1,4\}$, б) $\lambda=\frac{5}{4}$. **5.** а) $M=(-\infty,-1)\cup(9,\infty)$, б) $M=(-5,2)\cup(2,9)$, в) $M=(-\infty,-2)\cup(12,\infty)$. **6.** а) $M=(2,3)\cup(3,5)$,

б) $M=[-1,\infty)$. **7.** а) $M=(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(2,\infty)$, б) $M=(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$. **8.** а) $M=\left(\frac{1}{2},\infty\right)$,

б) $M=\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2},\infty\right)$. **9.** а) $M=[0,3]$, б) $M=\mathbb{R}$. **10.** $M=(-4,\infty)$.

§ 38 – стр. 212

1. За $x\in(-4,1)\cup(1,\infty)$. **2. Упатство.** Квадратната равенка $x^2+px+q=0$ има два позитивни реални корена, ако ги исполнува условите: $D=p^2-4q\geq 0$, $q>0$, $p<0$. **Одг.** За секој $k\in\left[\frac{8}{7},4\right)$. **3. Упатство.** Квадратната равенка $x^2+px+q=0$ треба да ги исполнува условите: $p^2-4q\geq 0$, $q>0$ $p>0$. **Одговор.** За секој $k\in(-4,-3)$. **4. Решение.** Ги испитуваме знаците на дискриминантата $D=(k+2)^2+4k(k-1)$ и коефициентите $p=-\frac{k+2}{k}$ и $q=-\frac{k-1}{k}$ во зависност од промената на параметарот k, и тоа :

k	$-\infty$		-2		0		1	∞
D		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
p		$-$	0	$+$		$-$	$-$	$-$
q		$-$	$-$	$-$		$+$	0	$-$

Одговор . За $k=0$ равенката с линеарна и има решение $x=\frac{1}{2}$.

При $k\neq 0$ имаме : а) Ако

$k\in(-\infty,-2)\Rightarrow p<0,\quad q<0\Rightarrow\left(|x_1|>|x_2|\Rightarrow x_1>0,\quad x_2<0\right)$,

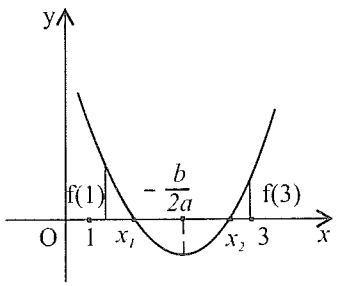
б) Ако $k=-2\Rightarrow p=0,\quad q<0\Rightarrow|x_1|=|x_2|$ и $x_1<0,\quad x_2>0$,

в) Ако $k\in(-2,0)\Rightarrow p>0,\quad q<0\Rightarrow\left(|x_1|>|x_2|\Rightarrow x_1<0,\quad x_2>0\right)$,

г) Ако $k\in(0,1)\Rightarrow p<0,\quad q>0\Rightarrow x_1>0,\quad x_2>0$,

д) Ако $k=1\Rightarrow p<0,\quad q=0\Rightarrow x_1=0,\quad x_2>0$

ѓ) Ако $k\in(1,\infty)\Rightarrow p<0,\quad q>0\Rightarrow\left(|x_1|>|x_2|\Rightarrow x_1>0,\quad x_2<0\right)$.



црт. 3

5. Упатство. Неравенката $ax^2+bx+c<0$ е задоволена за секој $x\in\mathbb{R}$, ако и само ако $a=k-1<0$ и $D=k^2-4k(k-1)>0$. **Одг.** $k\in(0,1)$. **6. Доказ.** Равенката при $p\neq 0$ ја трансформираме во видот $x^2-(2p+3)x+3p+2=0$. Таа има дискриминанта $D=4p^2+9>0$. **7.** За $x=-2$, $x=-1$. **8. Упатство.** Дискриминантата треба да е $D<0$. **Одговор.** За секој $p\in\mathbb{R}$. **9. Упатство.** Коефициентите на квадратниот трином $f(x)=x^2-px+4=0$ треба да ги исполнуваат следниве услови: $D>0$, $f(1)>0$, $f(3)>0$ и $1<-\frac{b}{2a}<3$ (црт.3). **Одговор.** За секој $p\in(2,4)$. **10. Упатство.** Коефициентите треба да ги задоволуваат условите: а) $D=0$ и $\frac{a}{b}<0$, б) $D=0$ и $\frac{b}{a}>0$. **Одговор.** за k = 49, б) k = 1. **11. Упатство.** Функцијата f ја трансформираме во видот $f(x)=3x^2-2(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2$. **Одговор.** $x=\frac{a+b+c}{3}$. **12. Упатство.** Коефициентите на квадратниот трином треба да ги задоволуваат условите : $a>0$, $D<0$. **Одговор.** за секој $k\in(0,\infty)$.

ГЛАВА VI

ПОЛИНОМИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

§ 39, § 40 – стр. 219

1. а) $-3x-9xy^2-6xyz+3xz^2+4xz+8y^2+2$, б) $-2x^3+5x^2y+4x^2z+-2xy^2-2xyz+4y^2z$,
в) $2x^2-2xy-2xz+2y^2+2xyz+2z^2$. **2.** а) $6x^3yz+x^2y^2z^2+5xy^2+2xyz-3xz^3-2y^3+4$,
б) $6yz\cdot x^3+y^2z^2\cdot x^2+\left(5y^2+2yz-3z^3\right)\cdot x-2y^3+4$, в) $x^2y^2z^2+6x^3yz-3xz^3+\left(5xy^2+2xyz+2y^3\right)+4$.

§ 41, § 42 – стр. 223

1. xyz. **2.** $26x^3+120x^2y-24xy^2-120y^3$. **3.** $2x^2+2y^2+2z^2$. **4.** $-6x^2+20xy+19y^2+4$.
5. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac-6bc$.

§ 43, § 44 – стр. 227

1. $4a^2xy+4abxy$. **2. Решение.** Со примена на идентитетот б) во задача 6, имаме:
$(a+b+c-d)^2+(a+b-c+d)^2+(a-b+c+d)^2+(-a+b+c+d)^2=[(a+b)+(c-d)]^2+$
$[(a+b)-(c-d)]^2+[(c+d)+(a-b)]^2+[(c+d)-(a-b)]^2=2(a+b)^2+2(a-b)^2+2(c+d)^2+$
$+2(a-b)^2=4a^2+4b^2+4c^2+4d^2$.

3. Решение. $(x+y+z)(x+y-z)(z+x-y)(z+y-x)=\{[(x+y)+z][(x+y)-z]\}\cdot\{[z+(x-y)][z-(x-y)]\}=$
$\left[(x+y)^2-z^2\right]\left[z^2-(x-y)^2\right]=\left(2xy+x^2+y^2-z^2\right)\cdot\left(z^2-x^2-y^2+2xy\right)=4x^2y^2-\left(x^2+y^2-z^2\right)^2=$
$=4x^2y^2-\left(x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2\right)=2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^4-y^4-z^4$.

4. Упатство. Примени ја формулата за куб на бином. **Одговор.** $[(x-y)+(x+y)]^3=[2x]^3=8x^3$. **5.Упатство.** Примени ја формулата за збир и разлика на кубови. $[(x+y)+z]^3-[(x+y)-z]^3-\{[z+(x+y)]^3+[(z-x-y)]^3\}=\ldots$.
Одговор. $24xyz$. **6. Доказ.** а) $(x+y)^2-(x-y)^2=(x+y+x-y)(x+y-x+y)=2x\cdot 2y=4xy$.

б) $(x+y)^2+(x-y)^2=2\left(x^2+y^2\right)^2$. **7. Доказ.** $P=[(x+1)(x+4)]\,[(x+2)(x+3)]+1=$
$=\left[\left(x^2+5x\right)+4\right]\left[\left(x^2+5x\right)+6\right]+1=\left(x^2+5x\right)^2+10\left(x^2+5x\right)+25=\left(x^2+5x+5\right)^2$.

§ 45 – стр. 231

1. Решение. а) $(x+1)^6=x^6+6x^5+15x^4+10x^3+15x^2+6x+1$, а) $(2a+3b)^5=$
$=(2a)^5+5(2a)^4\cdot 3b+10(2a)^3(3b)^2+10(2a)^2(3b)^3+5\cdot 2a\cdot(3b)^4+(3b)^5=32a^5+240a^4b+720a^3b^2+1080a^2b^3$
$+810ab^4+243b^5$, в) $(x-a)^7=x^7+7x^6a+21x^5a^2-35x^4a^3+35x^3a^4-21x^2a^5+7xa^6-a^7$.

2. Решение. Согласно биномната формула (10)

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}xy^n,$$

$$(x-y)^n=\binom{n}{0}x^n-\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}xy^n.$$

Ако ги собереме, а потоа одземеме соодветните страни, добиваме :

$(x+y)^n+(x-y)^n=2x^n+2\cdot\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+2\cdot\binom{n}{4}x^{n-4}y^4+\ldots$. Последниот член е $2y^n$ при n парно и $2nxy^{n-1}$ при n непарно. $(x-y)^n-(x-y)^2=2\binom{n}{1}x^{n-1}y+2\binom{n}{3}x^{n-3}y^3+2\binom{n}{5}x^{n-5}y^5+\ldots$ Последниот член е $2y^n$ при n непарно и $2nxy^{n-1}$ при n парно. **3.** а) $T_3=T_{2+1}=\binom{13}{2}\left(x^2\right)^{13-2}(y)^2=\frac{13\cdot12}{1\cdot2}x^{22}y^2=78x^{22}y^2$, $T_7=T_{6+1}=\binom{13}{6}\left(x^2\right)^{13-6}y^6=$

$=\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot x^{14}y^6=1716x^{14}y^6$, б) $T_3=T_{2+1}=\binom{10}{2}\left(3x^2\right)^{10-2}(2xy)^2=\frac{10\cdot9}{1\cdot2}3^8x^{16}\cdot4x^2y^2=1180980x^{18}y^2$,

$T_7=T_{6+1}=\binom{10}{6}\left(3x^2\right)^{10-6}(2xy)^6=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot3^4x^8\cdot64x^6y^6=1088640\cdot x^{14}y^6$,

в) $T_3=T_{2+1}=\binom{12}{2}\left(x^2\right)^{12-2}\left(\frac{a}{x}\right)^2=\frac{12\cdot11}{1\cdot2}x^{20}\cdot\frac{a^2}{x^2}=60x^{18}a^2$, $T_7=T_{6+1}=\binom{12}{6}\left(x^2\right)^{12-6}\left(\frac{a}{x}\right)^6=$

$=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot x^{12}\frac{a^6}{x^6}=924x^6a^6$.

4. Доказ. а) Во биномната формула $(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\ldots+\binom{n}{n-1}xy^{n-1}+\binom{n}{n}xy^n$ ставаме $x=y=1$ и добиваме: $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$, штд. б) Со замена $x=y=1$ во формулата $(x-y)^n$, добиваме: $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}=0$, од каде $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$, штд. **5. Доказ.** Дропката $\binom{n}{k}$ да ја прошириме со $(n-k)!$, а дропката $\binom{n}{n-k}$ со $k!$:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}{(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(k+1)}{(n-k)!}\cdot\frac{k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Гледаме дека и во двата случаја го добиваме изразот $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Оттука следува равенството $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, штд.

6. Доказ. Равенството $(x+y)^n+(x-y)^n=2x^n+2\cdot\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+2\cdot\binom{n}{4}x^{n-4}y^4+\ldots$ за $x=1$, $y=i$ преминува во:

$(1+i)^n+(1-i)^n=2+2\cdot\frac{n(n-1)}{2}i^2+2\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}i^4+\ldots$. Бидејќи парните степени на имагинарната единица i се еднакви на 1 или -1, следува дека даденот израз е реален број за секој $n\in\mathbb{N}$.

7. **Доказ.** а) $C_n^1 + 6C_n^2 + 6C_n^3 = n + 6\cdot\frac{n(n-1)}{2} + 6\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = n + 3n(n-1) + n(n^2-3n+2) =$

$= n + 3n^2 - 3n + n^3 - 3n^2 + 2n = n^3$, б) $1 + 7\binom{n}{1} + 12\binom{n}{2} + 6\binom{n}{3} = 1 + 7n + 12\frac{n(n-1)}{2} + 6\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} =$

$= 1 + 7n + 6n^2 - 6n + n^3 - 3n^2 + 2n = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$.

§ 46 – стр. 232

1. а) $(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$,

б) Бидејќи важи $(a-b) + (b-c) + (c-a) = 0$ затоа за докажаното равенство во примерот *2*, ќе важи равенството $[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]^2 = 2[(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4]$ итд.

в) $(a+b+c+d)^2 + (a+b-c-d)^2 + (a+c-b-d)^2 + (a+d-b-c)^2 =$

$= [(a+b)+(c+d)]^2 + [(a+b)-(c+d)]^2 + [(a-b)+(c-d)]^2 + [(a-b)-(c-d)]^2 =$

$= 2(a+b)^2 + 2(c+d)^2 + 2(a-b)^2 + 2(c-d)^2 = 2[(a+b)^2 + (a-b)^2] + 2[(c+d)^2 + (c-d)^2] = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

2. **Доказ.** а) Нека $a + b + c = 0$, тогаш $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) = 0$ или $a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 = a^3 + b^3 + c^3 + ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c) = 0$. Но од $a + b + c = 0$ имаме дека: $a + b = -c$, $a + c = -b$ и $b + c = -a$, па добиваме $a^3 + b^3 + c^3 - abc - abc - abc = 0$ или $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, итд. б) Нека $a + b + c = 0$, покажавме дека тогаш важи $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Оттука $(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2) = 3abc(a^2 + b^2 + c^2)$. Потоа ја трансформираме левата страна:

$a^5 + b^5 + c^5 + a^2b^2(a+b) + a^2c^2(a+c) + b^2c^2(b+c) = 3abc(a^2 + b^2 + c^2)$, или

$a^5 + b^5 + c^5 - a^2b^2c - a^2c^2b - b^2c^2a = 3abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

Оттука $a^5 + b^5 + c^5 - abc(ab + ac + bc) = 3abc(a^2 + b^2 + c^2)$.

Ако земеме предвид дека $-2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2$, тогаш лесно го добиваме идентитетот $2(a^5 + b^5 + c^5) = 5abc(a^2 + b^2 + c^2)$, итд. в) Непосредно следува од претходните две задачи: а) и б).

2. **Доказ.** Равенството го запишуваме во видот:

$(x + y - 2z)^2 - (x - y)^2 + (y + z - 2x)^2 - (y - z)^2 + (z + x - 2y)^2 - (z - x)^2 = 0$.

Но $(x + y - 2z)^2 - (x - y)^2 = 4(x - z)(y - z)$, $(y + z - 2x)^2 - (y + z)^2 = 4(y - z)(z - x)$,

$(z + x - 2y)^2 - (z + x)^2 = 4(z - y)(x - y)$. Според тоа $4(x - z)(y - z) + 4(y - z)(z - x) + 4(z - y)(x - y) = 0$. Се ослободуваме од заградите и добиваме: $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = 0$ или $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 = 0$, а оттука следува дека важи $x = y = z = 0$.

§ 47 – стр. 237

1. $Q(x, y) = 2x^2 + xy - 3y^2$, $R(x, y) = -3xy^3 + 3y^4$. 2. $Q(x, y, z) = x^2yz - xy^3 + y^2z^2$, $R(x, y, z) = xyz^4 + y^3z^3$.

3. а) $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2$, б) $Q(x, y) = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$.

§ 48, § 49 – стр. 241

1. а) $x^3+y^3+x^2-xy+y^2=(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x^2-xy+y^2)=(x^2-xy+y^2)\ (x+y+1)$,

б) $2(x-y)-(y-x)^2=2(x-y)-(x-y)^2=(x-y)(2-x+y)$.

2. а) $x^4-2xy-y^2+2x^3=(x^4-y^2)+(2x^3-2xy)=(x^2-y)(x^2+y)+2x(x^2-y)=(x^2-y)\ (x^2+y+2x)$,

б) **Упатство.** Дадениот израз е квадратен трином по однос на $x-y$, па $(x-y)_{1,2}=\frac{1}{2}$. **Одговор.**

$4(x-y)^2-4(x-y)+1=4\left(x-y-\frac{1}{2}\right)^2=(2x-2y-1)^2$.

3. а) $ac(a+c)-bc(b+c)+ab(a-b)=ac[(b+c)+(a-b)]-bc(b+c)+ab(a-b)=$

$=ac(b+c)+ac(a-b)-bc(b+c)+ab(a-b)=[ac(b+c)+bc(b+c)]+[ac(a-b)+ab(a-b)]=$

$=c(b+c)(a-b)+a(a-b)(b+c)=(a-b)(b+c)(a+c)$,

б) $x^3-x^2y-xy^2+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)=(x-y)(x^2-y^2)=(x-y)^2(x+y)$.

4. а) $x^5-x^4-2x^3+2x^2+x-1=x^4(x-1)-2x^2(x-1)+(x-1)=(x-1)(x^4-2x^2+1)=$

$=(x-1)(x^2-1)^2=(x-1)^3(x+1)^2$,

б) $x^5+x-1=(x^4-x^2)+(x^2+x+1)=x^2(x^3-1)++(x^2+x+1)=(x^2+x+1)[x^2(x-1)+1]=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$.

5. а) $x^2+2xy+y^2-(a^2-2ab+b^2)=(x+y)^2-(a-b)^2=(x+y+a-b)(x+y-a+b)$,

б) $x(x+z)-y(y+z)=x^2+xz-y^2-yz=(x^2-y^2)+z(x-y)=(x-y)(x+y+z)$.

6. а) $x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$, б) $x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

в) $x^{12}-y^{12}=(x^6-y^6)(x^6+y^6)=(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^2+y^2)\ (x^4-x^2y^2+y^4)$.

7. а) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc--a^3-b^3-c^3=$

$3[(a^2b+ab^2)+(ac^2+bc^2)+(a^2c+abc)+(abc+b^2c)]=3[ab(a+b)+c^2(a+b)+ac(a+b)+bc(a+b)]=$

$=3(a+b)[ab+c^2+ac+bc]=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

б) $(x+y)^5-x^5-y^5=x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5-x^5-y^5=5xy(x^3+2x^2y+2xy^2+y^3)=$

$5xy[(x^3+y^3)+2xy(x+y)]=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$.

8. а) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3+b^3-3b^2c+3bc^2-c^3+c^3-3c^2a+3ca^2-a^3=$

$=-3[a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)]=-3[a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2]=$

$=-3[a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)]=-3(b-c)[a^2+bc-a(b+c)]=-3(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]=$

$=-3(b-c)(a-b)(a-c)=3(a-b)(b-c)(c-a)$,

б) $ax^2-bx^2+a-b+x^2+1=x^2(a-b+1)+a-b+1=(a-b+1)(x^2+1)$.

9. $(x+y)^2(x-y)+(y+z)^2(y-z)+(z+x)^2(z-x)=(x^2-y^2)(x+y)+(y^2-z^2)(y+z)+$

$+(z^2-x^2)(z+x)=x^3-xy^2+x^2y-y^3+y^3-yz^2+zy^2-z^3+z^3-x^2z+xz^2-x^3=(x^2y-x^2z)+$

$+(zy^2-xy^2)+(xz^2-yz^2)=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)=\ldots=-(x-y)(y-z)(z-x)$.

10. Доказ. $n^3+3n^2-n-3=n^2(n+3)-(n+3)=(n+3)(n^2-1)=(n-1)(n+1)(n+3)$. Ако n е непарен природен број, тогаш броевите $n-1$, $n+1$ и $n+3$ се три последователни парни броеви, од кои барем еден е делив со 3, еден со 4, а другите се деливи со 2. Оттука следува дека производот $(n-1)(n+1)(n+3)$ е делив со $2\cdot2\cdot3\cdot4=48$.

§ 50 – стр. 246

1. $\frac{1}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}\right)+\frac{3}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{6}{(x+y)^5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{x^3+y^3}{(x+y)^3x^3y^3}+\frac{3}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{6(x+y)}{(x+y)^5xy}=$

$\frac{x^2-xy+y^2}{(x+y)^2x^3y^3}+\frac{3}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}\right)=\frac{x^2-xy+y^2}{(x+y)^2x^3y^3}+\frac{3}{(x+y)^4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2=$

$\frac{x^2-xy+y^2}{(x+y)^2x^3y^3}+\frac{3}{(x+y)^2x^2y^2}+\frac{x^2-xy+y^2+3xy}{(x+y)^2x^3y^3}=\frac{(x+y)^2}{(x+y)^2x^3y^3}=\frac{1}{x^3y^3}$.

2. Упатство. Кон збирот на првите две дропки додај ја третата и продолжи постепено натаму.

Одговор. $\frac{64x^{63}}{x^{64}-y^{64}}$. **3.** 0. **4.** 0. **5.** $\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2x^2y^2}+\frac{2(x+y)}{(x+y)^3xy}=$

$=\frac{x^2+y^2+2xy}{(x+y)^2x^2y^2}=\frac{1}{x^2y^2}$. **6. Доказ.** Да ставиме $\frac{a-b}{c}=x$, $\frac{b-c}{a}=y$, $\frac{c-a}{b}=z$. Тогаш левата страна го добива видот $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}$ (1). Да ја разгледаме дропката $\frac{y+z}{x}$.

Имаме : $\frac{y+z}{x}=\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\cdot\frac{c}{a-b}=\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}=\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-a^2-c(b-a)}{ab}=$

$=\frac{c}{a-b}\cdot\frac{(b-a)(b+a-c)}{ab}=\frac{c}{ab}(-a-b+c)=\frac{c}{ab}(-a-b-c+2c)=\frac{2c^2}{ab}$. (бидејќи $a+b+c=0$). Аналогно имаме и за другите две дропки во (1), па добиваме :

$3+\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}=3+\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=3+\frac{2}{abc}\left(a^3+b^3+c^3\right)$. Но, ако $a+b+c=0$, тогаш важи $a^3+b^3+c^3=3abc$ (види задача 2а во § 46). Потоа продолжуваме:

$3+\frac{2}{abc}\left(a^3+b^3+c^3\right)=3+\frac{2}{abc}\cdot3abc=3+6=9$. Со тоа идентитетот е докажан. **7. Доказ.** Ако x^2 го пренесеме на левата страна, тогаш таму ќе имаме еден квадратен трином по x. За да докажеме дека тој е идентички еднаков на нула, доволно е да покажеме дека тој добива вредност нула за три различни вредности на x. Ставајќи $x=a$, $x=b$, $x=c$, уочуваме дека квадратниот трином добива вредност нула.

8. Овој идентитет се докажува аналогно како и претходниот во задача 7. **9. Доказ.** Првата дропка ја трансформираме во разлика од две дропки: $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}=\frac{(b-a)+(a-c)}{(a-b)(a-c)}=\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}$. Постапувајќи аналогно и со другите две дропки од левата страна, добиваме:

$\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-c}+\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-a}+\frac{1}{c-a}-\frac{1}{c-b}=\frac{2}{a-b}+\quad+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$, штд.

10. Доказ. $\frac{ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-a)(b-c)}=\frac{ab(a-b)+bc(b-c)-ac(a-c)}{(a-c)(b-c)(a-b)}=\frac{ab(a-b)+b^2c-bc^2-a^2c+ac^2}{(a-c)(b-c)(a-b)}$

$=\frac{ab(a-b)-c(a^2-b^2)+c^2(a-b)}{(a-c)(b-c)(a-b)}=\frac{(a-b)\left[ab-c(a+b)+c^2\right]}{(a-c)(b-c)(a-b)}=\frac{(a-b)\left[a(b-c)-c(b-c)\right]}{(a-c)(b-c)(a-b)}=\frac{(a-c)(b-c)(a-b)}{(a-c)(b-c)(a-b)}=1.$

§ 51, § 52 – стр. 253

1. $p_1p_2-3p_3$. **2.** $p_1^3p_2^2-2p_1^4p_3-3p_1p_2^3+6p_1^2p_2p_3+3p_2p_3-7p_1p_3^2$. **3.** а) $p_1p_2-p_3$,

б) $p_1^2p_2^2-4p_1^3p_2-4p_2^3+18p_1p_2p_3-27p_3^2$. **4.** $p_1p_2p_3-p_1^2p_4-p_3^2$. **5.** $p_1^2p_4+p_3^2-4p_2p_4$.

6. а) $p_1p_3-4p_4$, б) $p_1^2p_2-p_1p_3-2p_2^2+4p_4$, в) $p_2p_3-3p_1p_4+5p_5$.

7. а) $p_1^2p_4-2p_2p_4-p_1p_5+6p_6$, б) $p_1^2p_2^2-2p_1^3p_3-2p_2^3+4p_1p_2p_3+2p_1^2p_4-3p_3^2+2p_2p_4-6p_1p_5+6p_6$,

в) $p_1^4p_2-4p_1^2p_2^2-p_1^3p_3+2p_2^3+7p_1p_2p_3+p_1^2p_4-3p_3^2+6p_2p_4-p_1p_5+6p_6$.

§ 53 – стр. 255

1. Ако $k=5$, $n\geq 5$: $S_5=p_1^5-5p_1^3p_2+5p_1p_2^2+5p_1^2p_3-5p_2p_3-5p_1p_4+5p_5$, б) ако $k=5$, $n=4$:

$S_5=p_1^5-5p_1^3p_2+5p_1p_2^2+5p_1^2p_3-5p_2p_3-5p_1p_4$, ако $k=5$, $n=3$: $S_5=p_1^5-5p_1^3p_2+5p_1p_2^2+5p_1^2p_3-5p_2p_3$,

ако $k=5$, $n=2$: $S_5=x^5+y^5=p_1^5-5p_1^3p_2+5p_1p_2^2$. **2.** а) $k=6$,

$n\geq 6$: $S_6=p_1^6-6p_1^4p_2+9p_1^2p_2^2+6p_1^3p_2-2p_2^3-12p_1p_2p_3-6p_1^2p_4+3p_3^2+6p_2p_4+6p_1p_5-6p_6$, б) а) $k=6$,

$n=5$: $S_6=p_1^6-6p_1^4p_2+9p_1^2p_2^2+6p_1^3p_2-2p_2^3-12p_1p_2p_3-6p_1^2p_4+3p_3^2+6p_2p_4+6p_1p_5$; $k=6$,

$n=4$: $S_6=p_1^6-6p_1^4p_2+9p_1^2p_2^2+6p_1^3p_2-2p_2^3-12p_1p_2p_3-6p_1^2p_4+3p_3^2+6p_2p_4$; $k=6$,

$n=3$: $S_6=p_1^6-6p_1p_2+9p_1^2p_2^2+6p_1^3p_2-2p_2^3-12p_1p_2p_3+3p_3^2$; $k=6$,

$n=2$: $S_6=p_1^6-6p_1p_2+9p_1^2p_2^2+6p_1^3p_2-2p_2^3$.

3. Решение. За корените на равенката $x^6-4x^5+0x^4+3x^3-4x^2+x+1=0$ согласно Виетовите правила важат равенствата: $p_1=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=4$, $p_2=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_5x_6=0$, $p_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_4x_5x_6=-3$, $p_4=-4$, $p_5=-1$, $p_6=1$. Тогаш бараната сума $S_5=x_1^5+x_2^5+\ldots+x_5^5+x_6^5$ ќе изнесува

$S_5=p_1^5-5p_1^3p_2+5p_1p_2^2+5p_1^2p_3-5p_2p_3-5p_1p_4+5p_5=4^5-5\cdot4^3\cdot0+5\cdot4^2\cdot(-3)-5\cdot4\cdot(-4)+5\cdot(-1)=$

$1024-240+80-5=859$. **4.** а) $p_4=\frac{1}{24}\left(S_1^2-6S_1^2S_2+8S_1S_2+3S_2^2-6S_4\right)$,

б) $p_4=\frac{1}{120}(S_1^5-10S_1^3S_2+20S_1^2S_2+15S_1S_2^2-20S_2S_3-30S_1S_3+24S_5)$. **5.** $p_1=3$, $p_2=1$,

а) $S_4=x_1^4+x_2^4=p_1^4-4p_1^2p_2+2p_2^2=3^4-4\cdot3^2\cdot1+2\cdot1^2=81-36+2=47$,

б) $S_6=x_1^6+x_2^6=p_1^6-6p_1p_2+9p_1^2p_2^2+6p_1^3p_2-2p_2^3=3^6-6\cdot3\cdot1+9\cdot3^2\cdot1^2+6\cdot3^3\cdot1-2\cdot1^3=$

$=729-18+81+162-2=952$.

§ 54 – стр. 258

1. $\frac{p_2^3 + p_1^3 p_2 - 6p_1p_2p_3 + 9p_2^3}{p_2^3}$. **2.** $\frac{p_2^2 - 2p_1p_3 + 2p_4}{p_4}$. **3.** $\frac{p_1 + 2p_2 + 3p_3}{p_1 + p_2 + p_3 + 1}$.

4. а) $\frac{p_{n-1}^2 - 2p_{n-2}p_n}{p_n^2}$, б) $\frac{p_1p_{n-1} - p_n}{p_n}$, в) $\frac{p_1^2p_{n-1} - 2p_2p_{n-1} - p_1p_n}{p_n}$.

ГЛАВА VII

СИСТЕМИ ПОЛИНОМНИ РАВЕНКИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

§ 55, § 56 – стр. 274

1. а) Во полето на реалните броеви системот $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \end{cases}$ нема решенија, бидејќи втората равенка во полето $\mathbb{R}$ нема решенија, б) Во полето на комплексните броеви системот има две решенија: $(x_1 = i,\ y_1 = 1 + i)$ и $(x_2 = -i,\ y_2 = 1 - i)$.

2. Во полето на реалните броеви системот $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ има единствено решение $(x=0, y=0)$, а исто така и равенката $x^2 + y^2 = 0$ во полето $\mathbb{R}$ има единствено решение $(0, 0)$. Значи, во полето на реалните броеви тие се еквивалентни.

3. а) $(3, 2), (-3, -2)$, б) $(1, 4), (-1, 4), (2, 1), (-2, 1)$, в) $(2, 1), (-1, -2), \left(1+\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}\right), \left(1-\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}\right)$.

4. Бидејќи секое решение на даден систем е решение и на која било равенка во него, следува дека која било равенка на даден систем е негова последица. **7. Упатство.** Ако ги собереме соодветните страни на сите равенки во системот, ја добиваме равенката $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 7$. Разгледај ја неа одделно со секоја равенка на системот.

Одговор. $(0, 1, \sqrt{2}, 2), (0, -1, -\sqrt{2}, -2), (0, -1, -\sqrt{2}, 2), (0, -1, \sqrt{2}, -2), (0, 1, -\sqrt{2}, -2), (0, 1, \sqrt{2}, -2), (0, -1, \sqrt{2}, 2), (0, 1, -\sqrt{2}, 2)$

§ 57 – стр. 290

1. а) $(1, 2, 1)$, б) $(1, -2, 2, 3)$. **2.** Нема решение. **3.** $\left(2,\ 0,\ \frac{5}{3},\ -\frac{4}{3}\right)$. **4.** $\left(-\frac{\alpha}{2},\ -1-\frac{\alpha}{2},\ 0,\ -1-\frac{\alpha}{2},\ \alpha\right)$.

5. $(0, 0, 0, 0)$. **6.** $\left(\frac{3}{5}\alpha,\ \alpha,\ \frac{4}{5}\alpha,\ \alpha\right)$. **7. Упатство.** Собери ги соодветните страни на сите равенки во системот, а потоа добиената равенка разгледај ја со дадениот систем. **Одговор.** $(1, 2, 3, 4, -4, -3, -2, -1)$.

8. Решение. Четирите равенки, што го сочинуваат дадениот систем, покажуваат дека броевите (коефициентите) a, b, c, d мораат да бидат корени на полиномот од четврти степен $X^4 + tX^3 + zX^2 + yX + x - 0$. Според тоа, тој полином може да се претстави во видот:

$$(X-a)(X-b)(X-c)(X-d) = X^4 - (a+b+c+d)X^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)X^2 - (abc+abd+bcd)X + abcd$$

Изедначувајќи ги коефициентите при еднаквите степени на X, ги добиваме формулите, односно решението на дадениот систем: $x = abcd,\ y = -(abc + abd + bcd),\ z = ab + ac + ad + bc + bd + cd,\ t = -(a+b+c+d)$.

9. $c = 5$. **10.** Ако $(k-1)(k+2) \neq 0$, тогаш системот има решение $x = -\dfrac{k+1}{k+2}$, $y = \dfrac{1}{k+2}$, $z = \dfrac{(k+1)^2}{k+2}$. Ако $k = 1$, тогаш системот се сведува на една равенка $x + y + z = 1$, која има општо решение $(x, y, 1-x-y)$ каде x и y се произволни броеви. Ако, пак, $k = -2$, тогаш системот нема решенија, т.е. тој е противречен. **11.** Ако a, b, c сите се различни : $x = \dfrac{(b-k)(c-k)}{(b-a)(c-a)}$, $y = \dfrac{(a-k)(c-k)}{(a-b)(c-b)}$, $z = \dfrac{(a-k)(b-k)}{(a-c)(b-c)}$. Ако некои од коефициентите a, b, c, k се еднакви (но не сите), тогаш системот има решенија што зависат од еден параметар. Ако, пак, $a = b = c = k$ тогаш решенијата зависат од два параметра. Во сите останати случаи системот нема решенија.

§ 58 – стр.297

1. а) $(2, 1, 7)$, $\left(-\dfrac{14}{3}, -\dfrac{17}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, б) $(2, -1)$, $\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{11}{4}\right)$. **2.** а) $(4, 2)$, $(-2, -4)$, б) $(1, 2)$, $(9, 6)$.

3. а) $(11, -14)$, $(14, -11)$, б) $(2, 3)$, $(0, 1)$, $\left(\dfrac{3}{2}, 1\right)$. **4. Упатство.** Разложи го квадратниот трином $x^2 + 3xy + 2y^2$ на множители, а потоа и левата страна на втората равенка на линеарни множители. **Одговор.** $(0, 0)$, $(2, -1)$, $\left(-\dfrac{10}{7}, -\dfrac{4}{7}\right)$, б) $(3, 1)$, $(-3, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 2)$. **5. Упатство.** Левата страна на втората равенка разложи ја на множители. **Одг.** $(2, 4)$, $(2, 3)$, $\left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, б) $(1, 1)$, $\left(\dfrac{1}{7}, -\dfrac{5}{7}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}, 2\right)$, $\left(-\dfrac{11}{14}, \dfrac{10}{7}\right)$. **6.** а) $(0, 2)$, $(3, 2)$, $\left(2+\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$, $\left(2-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$, б) $(2, 1)$, $(2, -1)$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$. **7.** а) $\left(\pm\sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}, \pm\sqrt{\dfrac{ab(a^2-b^2)}{a^2+b^2}}\right)$, б) $(0, k)$, $(k, 0)$. **8.** а) $(2, 1)$, $(-2, -1)$, $\left(\sqrt{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3}, -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

§ 59 – стр. 304

1. а) $(x = -2y, y) - y$ с произволен број, б) $(0, 2)$, $(2, 0)$. **2.** а) $(1, -1)$, $(3, -3)$, б) $\left(\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$, $\left(-\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$, $\left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. **3.** а) $(4, 2)$, $(-4, -2)$, $\left(3\sqrt{\dfrac{5}{3}}, \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$, $\left(-3\sqrt{\dfrac{5}{3}}, -\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)$, б) $(1, -1)$, $(-1, 1)$. **4.** а) $(1, 3)$, $(-1, -3)$, $\left(\sqrt{\dfrac{19}{3}}, \sqrt{\dfrac{19}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\dfrac{19}{3}}, -\sqrt{\dfrac{19}{3}}\right)$, б) $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}, \dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}, -\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)$. **5.** а) $\left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, $(3, 1)$, $(-3, -1)$, б) $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\sqrt{\dfrac{2}{5}}, -2\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)$, $\left(-\sqrt{\dfrac{2}{5}}, 2\sqrt{\dfrac{2}{5}}\right)$. **6.** а) $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{5}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$, $(2, 3)$, $(-2, -3)$,

б) $\left(11\sqrt{\frac{1}{38}}, \sqrt{\frac{1}{38}}\right), \left(-11\sqrt{\frac{1}{38}}, -\sqrt{\frac{1}{38}}\right), (2, 3), (-2, -3)$.

§ 60 – стр. 311

1. а) $(2, -1), (-1, 2), (-2, 1), (1, -2)$, б) $(1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1)$.

2. а) $(8, 5), (-5, -8)$, б) $(4, 1)$. **3.** а) $\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right),$

$\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}, \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right)$, б) $(2, 1), (1, 2), (1, -3), (-3, 1)$.

4. а) $(4, 3), (3, 4)$, б) $(1, 1), \left(2+\sqrt{7}, 2-\sqrt{7}\right), \left(2-\sqrt{7}, 2+\sqrt{7}\right)$. **5.** а) $(2, 3), (3, 2)$, б) $(1, 1)$.

6. а) $(1, 2), (2, 1)$, б) $(3, 2), (2, 3), (-2, -3), (-3, -2)$. **7.** а) $(3, 4), (4, 3)$, б) $(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)$.

8. а) $\left(\frac{3}{2}\left(3+\sqrt{5}\right), \frac{3}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right), \left(\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{5}\right), \frac{3}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)\right), \left(\frac{3}{2}\left(3-\sqrt{5}\right), \frac{3}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right), \left(\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{5}\right), \frac{3}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)\right),$

б) $(4, 1), (1, 4), \left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2}, \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right), \left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}, \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$.

9. **Упатсво.** Земи предвид дека $x^4+x^2y^2+y^4=\left(x^2+xy+y^2\right)\left(x^2-xy+y^2\right)$.

Одговор. $(5, 3), (3, 5), (-5, -3), (-3, -5)$, б) $\left(\frac{a}{2}\left(1+\sqrt{3}\right), \frac{a}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right), \left(\frac{a}{2}\left(1-\sqrt{3}\right), \frac{a}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right),$

$\left(\frac{1}{6}\left(3a+a\sqrt{3}\right) \frac{1}{6}\left(3a-a\sqrt{3}\right)\right), \left(\frac{1}{6}\left(3a-a\sqrt{3}\right) \frac{1}{6}\left(3a+a\sqrt{3}\right)\right)$.

10. а) $(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 2, 1), (3, 1, 2)$, б) **Упатство.** Од равенките на системот имаме дека важи и $(x+y+z)^3=1$, $(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)=1$. Затоа ќе важи :

$(x+y+z)^3+2\left(x^3+y^3+z^3\right)-3(x+y+z)\left(x^2+y^2+z^2\right)=0$, од каде по елементарни трансформации добиваме: $xyz=0$. **Одговор.** $(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$.

§ 61 – стр. 320

1. а) **Упатство.** Реши ја прво биквадратната равенка по однос на $x+y$. **Одговор.** $(14, -11), (11, -14)$, б) $(2, 1), (-2, -1)$. **2.** а) $(0, 0, 0), (2, 4, 3), (4, 2, 3), (2\varepsilon, 4\varepsilon, 3\varepsilon), (4\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon), \left(2\varepsilon^2, 4\varepsilon^2, 3\varepsilon^2\right), \left(4\varepsilon^2, 2\varepsilon^2, 3\varepsilon^2\right)$, б) $(10, 9, 12), (9, 10, 12)$. **3.** а) $(0, 0), \left(\sqrt{7}, \sqrt{7}\right), \left(-\sqrt{7}, -\sqrt{7}\right) \left(\sqrt{19}, -\sqrt{19}\right) \left(-\sqrt{19}, \sqrt{19}\right)$

$(3, 2), (-3, -2), (2, 3), (-2, -3)$, б) $(4, 1), (-4, -1), \left(\sqrt{31}, \sqrt{31}\right), \left(-\sqrt{31}, -\sqrt{31}\right)$. **4.** **Упатство.** Левите страни на равенките разложи ги на множители. **Одговор.** $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}\right),$

б) $(0, 0, 0), \left(\varepsilon t, \varepsilon^2 t, t\right), \left(\varepsilon^2 t, \varepsilon t, t\right)$, каде t е произволен број. **5.** $(0, 0, 0), \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right),$

$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$. **6.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, б) **Упатство.** Користи ја смената $xy = z$, $\frac{x}{y} = t$. Со множење, а потоа и делење на нивните соодветни страни ќе ги добиеш равенствата $x^2 = zt$, $y^2 = \frac{z}{t}$. Така даденият систем ќе го добие видот : $\{z + 24 = t^2 z, \quad zt^2 - 6t^2 = z$. **Одговор.** $(4, 2), \quad (-4, -2)$.

ГЛАВА VIII

НЕРАВЕНКИ, СИСТЕМ НЕРАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА СО ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

§ 62 – стр. 329

1. а) $\left\{-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \frac{3}{2}x + 2\right\}$, б) $\left\{-\infty < x < \infty, \quad \frac{x}{4} - \frac{3}{4} < y < \infty\right\}$. **2.** а) $\{-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < 2x\}$, б) $\{-\infty < x < \infty, \quad x < y < \infty\}$, в) $\{-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < -x\}$ **3.** а) $\left\{\frac{5}{2} < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty\right\}$,

б) $\{-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y \le -1\}$, в) $\left\{-\infty < x < \infty, \quad \frac{5}{3} < y < \infty\right\}$. **4.** а) $y > \begin{cases} -x - 1, \text{ ако } x < -\frac{7}{5} \\ \frac{3}{2}x + \frac{4}{3}, \text{ ако } x > -\frac{7}{5} \end{cases}$,

б) $\left\{-\infty < x < \infty, \quad 2x + \frac{1}{2} < y < 2x + 3\right\}$. **5.** а) $\left\{-1 < x < \infty, \quad -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5} < y < 3x + 4\right\}$, б) $\left\{-\frac{1}{2} < x < \infty, \quad -x + 2 < y < x + 3\right\}$.

6. а) $\left\{-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right\}$, б) **Решение.** Даденият систем неравенки е еквивалентен на равенката $x - 2y + 1 = 0$, која има општо решение $x = 2y - 1$, y – произволен .

7. а) $\left\{-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \frac{x}{2} + \frac{5}{4}\right\}$, б) $\{-\infty < x < \infty, \quad 3x - 3 < y < 3x + 4\}$.

8. а) Триаголникот $\left\{-\frac{x}{2} - \frac{3}{2} < y < 2x + 1, \quad -1 < x \le 0\right\} \cup \left\{-\frac{x}{2} - \frac{3}{2} < y < -3x + 1, \quad 0 \le x < 1\right\}$, б) $\left\{-\infty < x < -\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{3} \cdot x < y < \infty\right\}$.

9. а) $\{x - 1 < y < 2x + 1, \quad -2 < x \le 0\} \cup \{2x - 1 < y < 2x + 1, \quad 0 \le x < \infty\}$,

б) $\left\{\frac{x}{3} + 2 < y < 2x - 1, \quad \frac{9}{5} < x \le 3\right\} \cup \left\{\frac{x}{3} + 2 < y < 2x - 3, \quad 3 \le x < \infty\right\}$.

§ 63 – стр. 338

1. а) $z > \begin{cases} -x-2y+1, \text{ ако } y < x \\ -2x-y+1, \text{ ако } y > x \end{cases}$, или

$\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<x, -x-2y+1<z<\infty\} \cup \{-\infty<x<\infty, x<y<\infty, -2x-y+1<z<\infty\}$,

б) $\left\{-\infty<x<\infty, \frac{1}{2}x-\frac{5}{4}<y<\infty, -x-2y-1<z<-3x+2y+4\right\}$.

2. а) $\left\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<x-\frac{8}{5}, \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y<z<\infty\right\} \cup \left\{-\infty<x<\infty, x-\frac{8}{5}<y<\infty, -x+2y+3<z<\infty\right\}$,

б) **Решение.** Системот го доведуваме во видот $\begin{cases} z > -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3} \\ z < -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+2 \end{cases}$. Множеството решенија е просторната област

D зафатена со двете паралелни рамнини, т.е. $D=\left\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty, -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{4}{3}<z<-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y+2\right\}$.

3. а) **Решение.** Даденият систем е еквивалентен со системот $\begin{cases} z<3x+y+2 \\ z<3x+y-5 \end{cases}$, односно само со неравенката $z < 3x + y - 5$.

Одговор. $\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty, -\infty<z<3x+y-5\}$, б) **Решение.** Прво системот го доведуваме во видот $\begin{cases} z>-x+y-2 \\ z<-x+y+1 \end{cases}$. Област на решенијата е просторната област D меѓу паралелните рамнини $z = -x + y - 2$ и

$z = -x + y + 1$, т.е $D=\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<\infty, -x+y-2<z<-x+y+1\}$.

4. Решение. а) Втората и третата неравенка во системот се противречни, што значи дека и даденият систем е противречен, т.е. дека нема решенија, б) Третата неравенка во системот е линеарна комбинација од првата и втората неравенка. Затоа неа ја изоставаме од системот. **Одговор.** Системот има множества решенија :

$D=\left\{-\infty<x<\infty, -\infty<y<\frac{5}{3}x+1, -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}<y<2x-y+2\right\}$.

§ 64 – стр. 342

1. Упатство. Нека x е бројот на производите од 1 – от вид , а y – од вториот вид. Тие треба да ги задоволуваат условите: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y+\leq 17$, $y \leq 6$, $x \leq 8$ и $3x + 4y$ – максимално. **Одговор.** $x = 8$, $y = 6$.

2. Упатство. Нека x е бројот на произведените парчиња од 1 – ност тип , а y – од II - от тип. Тие треба да ги задоволуваат условите: $3x + y \leq 300$, $x + y \leq 150$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ и $2x + y$ – максимално. **Одговор.** $x = 75$, $y = 75$.

3. Функцијата $f(x, y) = 2x + y$ добива најмала вредност за решението $(0, 2)$. **4.** Од сите решенија на даденият систем, изразот $x^2 + y^2$ добива најмала вредност за решението $\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

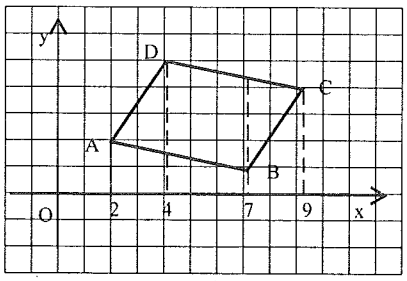
§ 65 – стр. 347

1. а) $\{-\infty<x<0,\ -\infty<y<0\}$, б) $\{0<x<\infty,\ -\infty<y<0\}$. **2.** а) $\{0<x<1,\ x<y<1\}$, б) $\left\{0<x<1,\ -x<y<\sqrt{1-x^2}\right\}$.

3. $D=\left\{0<x<1,\ x<y<\frac{3}{2}x\right\}\cup\{1<x<2,\ x<y<-x+4\}$. **4.** $\{0<x<1,\ \ 0<y<1-x,\ \ 0<z<1-x-y\}$.

6. Упатство. Прво одреди ги равенките на страните на паралелограмот $ABCD$ со користење на равенката на права што минува низ две дадени точки: $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$. Тоа се: $AB: y=-\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}$,

$BC: y=\frac{3}{2}x-\frac{19}{2}$, $CD: y=-\frac{1}{5}x+\frac{29}{5}$, $AD: y=\frac{3}{2}x-1$. **Одговор.** Од црт. 4 имаме:



црт. 4

$$D=\left\{2<x<4,\ \ -\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}<y<\frac{3}{2}x-1\right\}\ \cup\ \left\{4<x<7,\ \ -\frac{1}{5}x+\frac{12}{5}<y<-\frac{1}{5}x-\frac{29}{5}\right\}\cup$$
$$\cup\left\{7<x<9,\ \ \frac{3}{2}x-\frac{19}{2}<-\frac{1}{5}x+\frac{29}{5}\right\}.$$

§ 66 – стр. 355

1. а) **Упатство.** Неравенката е еквивалентна на $(y+ax)(y-2ax)<0$. **Одговор.** При $a>0$ имаме:

$$D=\{-\infty<x<0,\ \ 2ax<y<-ax\}\cup\{0\le x<\infty,\ -ax<y<2ax\}.$$

Ако $a<0$, тогаш $D=\{-\infty<x<0,\ -ax<y<2ax\}\cup\{0<x<\infty,\ 2ax<y<-ax\}$, б) **Упатство.** Неравенката е еквивалентна на $(x-1)(x+y)\le 0$. **Одговор.** $D=\{-\infty<x\le 1,\ -x<y<\infty\}\cup\{1\le x<\infty,\ -\infty<y<-x\}$.

2. а) $D=\{-\infty<y<0,\ y<x<-y\}\cup\{0\le y<\infty,\ -y<x<y\}$, б) I и III квадрант:
$\{0<x<\infty,\ 0<y<\infty\}\cup\{-\infty\le x<0,\ -\infty<y<0\}$.

3. а) **Решение.** Од разложувањето $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$ (види пример 9 в о § 49) за $z=1$ имаме $x^3+y^3+1-3xy=(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)=(x+y+1)\cdot\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\right]$.

Оттука добиваме дека дадената неравенка $x^3+y^3+1-3xy>0$ е еквивалентна на неравенката $x+y+1>0$. Според тоа, $D=\{-\infty<x<\infty,-x-1<y<\infty\}$, б) $D=\{0<x<\infty,0<y<\infty\}\cup\{-\infty<x<\infty,-\infty<y<-x\}$.

4. а) Првата неравенка е задоволена во областа зафатена со границите на параболата $y=-x^2+2x$, а втората неравенка – во внатрешната област на кружницата $x^2+y^2=10$. Заедничкиот дел од тие две области е област на решенија на системот неравенки. б) Системот неравенки нема решенија. **5.** а) Множеството од сите решенија на системот неравенки образува област – внатрешна во однос на кружницата $x^2+y^2=25$, а што е над правата $y=-x-1$. Кружницата и правата се сечат во точките $A(3,\ -4)$ и $B(-4,\ 3)$. Алгебарско решение:

$$D=\left\{-4<x<3,\ -x-1<y<\sqrt{25-x^2}\right\}\cup\left\{3\le x<5,\ -\sqrt{25-x^2}<y<\sqrt{25-x^2}\right\},$$

б) $D=\left\{-2<x<4,\ 2x^2-2x-7\le y\le 2x+9\right\}$.

§ 67 – стр. 358

1. а) Полуправата $D=\{-\infty<x<1,\ y=-3x+4\}$ што лежи во полурамнината $2x+5y-7>0$, б) Бидејќи правата $2x+3y+5=0$ целата лежи во полурамнината $2x+3y+1<0$, затоа системот е еквивалентен на равенката

$2x + 3y + 5 = 0$. **Одговор.** $\left\{-\infty < x < \infty,\ y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}\right\}$. **2.** а) $\{2 < x < \infty,\ y = 2x + 1\}$, б) $\{-\infty < x < -1,\ y = x + 1\}$.

3. а) Правата $x - y + 1 = 0$ и кружницата $x^2 + y^2 = 5$ се сечат во точките $A(-2, -1)$ и $B(1, 2)$. **Одговор.** $D = \{-2 < x < 1,\ y = x + 1\}$, б) **Упатство.** Кружницата $x^2 + y^2 = 25$ и параболата $49x^2 - 9x = 0$ се сечат во точките $A(4, 3)$ и $B(4, -3)$. Множеството решенија на системот е лакот AB од параболата $4y^2 - 9x = 0$: $D = \left\{0 < x < 3,\ y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{x}\right\}$. **4. Решение.** Неравенката $x^2 - x - 2 < 0$ има множество решенија: интервалот $(-1, 2)$.

Задачата се сведува на одредување на вредностите на a, за кои важи системот $\begin{cases} ax^2 - 4x - 1 \geq 0 \\ x < -1 \end{cases}$. Случајот $a > 0$ не е можен, бидејќи бараме неравенката $ax^2 - 4x - 1 \geq 0$ да има ограничено одгоре множество решенија. Ако $a = 0$, тогаш таа ќе има решенија $x \leq -\frac{1}{4}$, кои целосно не го задоволуваат ус-ловот $x < -1$. Ако $a < 0$, тогаш $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + a}$ и $D = 4 + a < 0$, т.е. ако $a < -4$ тогаш $x_{1,2} \notin \mathbb{R}$. Значи, $a < -4$ е решение на задачата. Потоа нека е $a \in [-4, 0)$. Бидејќи поголемиот од броевите $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + a}$ не го задоволува условот $2 + \sqrt{4 + a} < -1$, заклучуваме дека $a \notin [-4, 0)$. Според тоа, $a < -4$ е единствено решение на задачата.

§ 68 – стр. 362

1. а) $(2, 1)$, $(0, -3)$, б) **Упатство.** Ако втората равенка ја запишеме во видот $|x - 1| = y - 5$, заклучуваме дека е $y - 5 \geq 0$. Значи системот е еквивалентен на $\begin{cases} |x - 1| + y - 5 = 1 \\ |x - 1| = y - 5 \end{cases}$. **Одговор.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

2. а) $\{-\infty < x < 1,\ x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$, б) **Упатство.** Дадената неравенка е еквивалентна со вкупноста неравенки $\begin{cases} x + y > 1 \\ x + y < -1 \end{cases}$. **Одговор.** $D = \{-\infty < x < \infty, 1 - x < y < \infty\} \cup \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < -x - 1\}$, в) Дадената неравенка е еквивалентна на вкупноста од системите $\begin{cases} y^2 + x - 2 \leq 0 \\ x < 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y^2 - x - 2 \leq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$.

Одговор. $\{-2 \leq x < 0, |y| \leq \sqrt{x - 2}\} \cup \{0 \leq x \leq 2, |y| \leq \sqrt{-x - 2}\}$. **3.** а) **Упатство.** Дадениот систем неравенки е еквивалентен на вкупноста од системите $\begin{cases} x + y \geq y \\ x + y \geq 0 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$, $\begin{cases} x + y \leq -y \\ x + y \leq 0 \\ x - y \leq 0 \end{cases}$, односно на: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq -x \\ y \geq x \end{cases}$, $\begin{cases} x \leq -\frac{1}{2}x \\ y < -x \\ y \geq x \end{cases}$.

Одговор. $\left\{-\infty < x < 0, x < y \leq -\frac{1}{2}x\right\} \cup \{0 < x < \infty, x < y < \infty\}$, б) Дадениот систем неравенки е еквивалентен на вкупноста од следниве четири системи неравенки без апсолутни вредности:

$$\begin{cases} 2x-y\ge 0 \\ x-2y\ge 0 \\ 2x-y\le 3 \\ x-2y\le 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x-y\ge 0 \\ x-2y<0 \\ 2x-y\le 3 \\ x-2y\ge -3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x-y<0 \\ x-2y<0 \\ 2x-y\ge -3 \\ x-2y\ge -3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x-y<0 \\ x-2y\ge 0 \\ 2x-y\ge -3 \\ x-2y\le 3 \end{cases}$$

Одговор. Множеството на сите решенија на системот го сочинува областа на паралелограмот со темиња $A(1,-1)$, $B(3,-3)$, $C(-1,1)$, $D(-3,3)$ или аналитички запишана со елементарни области:

$$D=\left\{-3<x<-1, \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}<y\le 2x+3\right\}\cup\left\{-1<x<1, \frac{1}{2}x-\frac{3}{2}<y<\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right\}\cup\left\{1<x<3, 2x-3<y<\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right\}.$$

§ 69 – стр. 366

1. а) **Упатство.** Изврши го множењето на левата страна. б) **Доказ.** При $a>0$, $b>0$ неравенството е еквивалентно на $a^2+b^2\ge 2ab$, $a^2-2ab+b^2\ge 0$, $(a-b)^2\ge 0$. Знакот "=" има место само ако $a=b$.

2. а) **Упатство.** Помножи ги двете страни на неравенството со $ab>0$, б) **Доказ.** Дадената неравенка е еквивалентна на $2x<x^2+1$, $0<x^2-2x+1$, $0<(x-1)^2$. **3. Доказ.** $a^4-2a^3+a^2+a^2-2a+1=$

$=a^2(a^2-2a+1)+(a^2-2a+1)=(a^2-2a+1)(a^2+1)=(a-1)^2(a^2+1)\ge 0$.

4. $(c+1)^3=(c+1)^2(c+1)=(c^2+2c+1)(c+1)>(c^2+2c)(c+1)=c(c+2)(c+1)$, т.е. важи $(c+1)^3>c(c+2)(c+1)$, штд.

5. Доказ. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!=(2-1)\cdot 1!+(3-1)\cdot 2!+(4-1)\cdot 3!+\ldots+(n+1-1)\cdot n!=$

$2\cdot 1!+3\cdot 2!-2!+4\cdot 3!-3!+\ldots+(n+1)\cdot n!-n!=2!-1!+\ 3!-2!+4!-3!+\ldots+(n+1)!-n!=-1+(n+1)!<(n+1)!$.

6. Доказ. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=(a+b)\left[(a-b)^2+ab\right]>(a+b)ab$. Знакот "=" важи само ако $a=b$.

7. Доказ. Ќе покажеме дека при $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$ важи неравенството $a^3+b^3+c^3-3abc\ge 0$. Од познатото разложување $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$ (види пример 9 во § 49). Бидејќи по услов важи $a+b+c\ge 0$, зато доказот се сведува на докажување на неравенството $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\ge 0$. Тоа важи, бидејќи $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\right]\ge 0$. Знакот "=" важи само ако $a=b=c$.

8. Доказ. $x^2+y^2+x^2y^2+1>4xy\Leftrightarrow(1+x^2)(1+y^2)>4xy\Leftrightarrow\frac{1+x^2}{2}\cdot\frac{1+y^2}{2}>xy$. Потоа земаме предвид дека $\frac{1+x^2}{2}\ge\sqrt{1\cdot x^2}=|x|$ и $\frac{1+y^2}{2}\ge\sqrt{1\cdot y^2}=|y|$ и продолжуваме $\frac{1+x^2}{2}\cdot\frac{1+y^2}{2}\ge|x|\cdot|y|\ge xy$. Значи, важи неравенството $\frac{1+x^2}{2}\cdot\frac{1+y^2}{2}>xy$, а со него и дасното неравенство, штд. **9. Доказ.** Поаѓаме од очигледното неравенство $(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2>0$, $a\ne 1$, $b\ne 1$, $c\ne 1$. Вршиме квадрирање: $a^2-2a+1+b^2-2b+1+c^2-2c+1>0$ или $a^2+b^2+c^2+3>2(a+b+c)$, штд.

10. Доказ. $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$. Секоја заграда согласно докажаното неравенство во задачата 1б, ако ја замениме со помал од неа број 2, добиваме: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\ \ldots\ >2+2+2=6$.

11. Доказ. Неравенството $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ го множиме со $bd>0$ и добиваме $ad>bc$, а тоа потоа го делиме со $cd>0$, па добиваме дека важи и $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$. Значи, $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$. Потоа $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}+1>\frac{b}{d}+1\Leftrightarrow\frac{a+c}{c}>\frac{b+d}{d}\Leftrightarrow\frac{a+c}{b+d}>\frac{c}{d}$, што.

§ 70 – стр. 371

1. Доказ. Со множење на соодветните страни на познатите неравенства $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, $b+c\geq 2\sqrt{bc}$, $a+c\geq 2\sqrt{ac}$, добиваме: $(a+b)(b+c)(a+c)\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}=8abc$. **2. Доказ.** Даденото неравенство е еквивалентно соодветно на: $ab+1-a-b<0$, $b(a-1)-(a-1)<0$, $(a-1)(b-1)<0$. Бидејќи по услов е $a>1$ и $b<1$, тогаш $a-1>0$ и $b-1>0$. Оттука следува дека $(a-1)(b-1)<0$, т.е. $ab+1<a+b$.

3. Доказ. За дропките $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{c}{a}$ имаме: $\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=1$. Оттука $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$. Занкот "=" важи само ако $a=b=c$.

4. Доказ. Имаме: $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1+1+1+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 3+2+2+2=9$, бидејќи $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geq 2$. Оттука следува неравенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$, што. **5. Доказ.** Согласно неравенството за аритметичка и геометриска средина уочуваме дека важат неравенствата: $\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)\geq\sqrt{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ac}{b}}=c$, $\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geq a$, $\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\right)\geq b$. Со собирање на нивните соодветни страни, го добиваме неравенството што треба да го докажеме.

6. Доказ. Од неравенството $\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\geq\sqrt[3]{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}$ или $a+b+c\geq\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}$ со множење на неговите страни со соодветните страни на очигледното неравенство $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq 3\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)}}$, го добиваме неравенството

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{9}{2}$, што. **7. Доказ.** Ако ги помножиме соодветните страни на неравенствата $\sqrt[n]{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}<\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n}$ и $\sqrt[n]{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}<\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n}$, добиваме

$\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(2n-1)\cdot 2n}<\frac{[1+3+5+\ldots+(2n-1)][2+4+6+\ldots+2n]}{n^2}$. Но бидејќи $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ и $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$ тогаш $\sqrt[n]{(2n)!}<\frac{n^2[n(n+1)]}{n^2}$ или $\sqrt[n]{(2n)!}<n(n+1)$. Оттука $(2n)!<[n(n+1)]^n$, што.

8. Доказ. Согласно неравенството за геометриска и аритметичка средина, имаме:

$\sqrt[n+1]{ab^n}=\sqrt[n+1]{a\cdot\underbrace{b\cdot b\cdots b}_{n\text{ пати}}}\leq\frac{a+b+b+b\ldots+b}{n+1}=\frac{a+nb}{n+1}$, што.

§ 71 – стр. 376

1. Доказ. Нека a, b, c, се страни на триаголник. Тогаш $a,b,c>0$ и $a>|b-c|$, $b>|c-a|$ и $c>|a-c|$. Да ги помножиме соодветните страни на очигледните неравенства:

$a^2 \geq a^2-(b-c)^2$, $b^2 \geq b^2-(c-a)^2$, $c^2 \geq c^2-(a-b)^2$. Во тој случај добиваме:

$a^2b^2c^2 \geq [(a-b+c)(a+b-c)]\cdot[(b-c+a)(b+c-a)]\cdot[(c-a+b)(c+a-b)] = (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$.

Оттука следува неравенството $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$, што. **2.** Доволно е да го докажаме неравенството $(a+c)(b+d) \geq ab+cd+2\sqrt{abcd}$, т.е. дека $cb+ad \geq 2\sqrt{abcd}$. Последното неравенство лесно го трансформираме во очигледно: $cb+ad-\sqrt{abcd} = \left(\sqrt{cb}-\sqrt{ad}\right)^2 \geq 0$. **3. Доказ.** Да ја разгледаме разликата

$$\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \frac{4\left(a^3+b^3\right)-(a+b)^3}{8} = \frac{(a+b)\left[4\left(a^2-ab+b^2\right)-(a+b)^2\right]}{8} =$$

$$= \frac{(a+b)(3a^2+3b^2-6ab)}{8} = \frac{3(a+b)}{8}\cdot(a-b)^2 \geq 0.$$ Значи, важи $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$. Знакот " = " важи само ако $a=b$.

4. Доказ. Согласно неравенството за квадратна и аритметичка средина за броевите a, b, c имаме :

$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ или $\frac{(a+b+c)^2}{9} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$. Оттука следува дека важи $(a+b+c)^2 \leq 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$, што. **5. Доказ.** $\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b} \Leftrightarrow a\sqrt{a}+b\sqrt{b} \geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{b}(b-a)+\sqrt{a}(a-b) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a}) \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \geq 0$. **6. Доказ.** Ќе појдеме од очигледното неравенство $(a-b)^2 \geq 0$ и последователно ќе го трансформираме во еквивалентни :

$a^2-2ab+b^2 \geq 0$, $a^2+2ab+b^2-4ab \geq 0$, $(a+b)^2-4ab \geq 0$, $(a+b)^2 \geq 4ab$, $\frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b}$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$,

што. **7. Доказ.** Нека $a, b, c, d > 0$. Треба да докажме дека важи неравенството

$$\frac{1}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d}}-\left(\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\right) \geq 0.$$ По упростување на левата страна, тоа ќе премине во еквивалентно

очигледно неравенство $(ad-bc)^2 \geq 0$. **8. Доказ.** Нека $a, b, c \geq 0$. Од $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2 \geq 0$

имаме $2(a+b+c)-2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\right) \geq 0$, односно $a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{ac}+\sqrt{bc}$, што. **9. Доказ.** Нека $a, b \in \mathbb{R}$ и $a+b=2$. Ако означиме: $a = 1+k$, тогаш согласно условот $a+b=2$ добиваме дека $b = 1-k$. Даго пресметаме збирот a^4+b^4: $a^4+b^4 = (1+k)^4+(1-k)^4 = 1^4+4k+6k^2+4k^3+k^4+1^4-4k+6k^2-4k^3+k^4 = 2k^4+12k^2+$

$+2 = 2\left(k^4+6k^2+1\right) \geq 2$, бидејќи $k^4+6k^2 \geq 0$ па според тоа е $k^4+6k^2+1 \geq 1$.

10. Доказ. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$. Тогаш согласно неравенството на Коши имаме:

$$\frac{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_1}} = \sqrt[n]{1} = 1.$$ Оттука следува $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1} \geq n$, што.

§ 72 – стр. 380

1. Решение. $z = \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{2a}{xy}$. Бидејќи $xy > 0$, затоа изразот $\frac{2a}{xy}$ ќе добие најмала вредност во случај кога xy ќе добие најголема вредност. Но бидејќи $x+y = 2a$ следува дека xy ќе добие најголема вредност за $x = y = a$. Според тоа $z_{\min} = \frac{2a}{a\cdot a} = \frac{2}{a}$.

2. Решение. Збирот $S = x^2 + y^2 + z^2$ можеме да го запишеме и во видот $S = \frac{1}{3}\left[(x+y+z)^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2\right] = \frac{1}{3}9a^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2$. Очигледно е дека збирот S ќе добие најмала вредност истовремено кога и збирот $(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2$ добие најмала вредност, а тоа ќе се случи при $x = y = z$. Но бидејќи е $x + y + z = 3a$, затоа $x = y = z = a$. Значи, бараната најмала вредност на S е $S = x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$. **3. Решение.** Нека x и y се два множителa чиј збир е $x + y = 2c$, каде c е константа. Производот xy можеме да го запишеме во видот $xy = \frac{1}{4}\left[(x+y)^2 - (x-y)^2\right]$. Оттука заклучуваме: производот xy (при $x + y = 2c$) ќе добие најголема вредност кога $(x-y)^2$ добие најмала вредност, т.е. за $(x-y)^2 = 0$, односно при $x = y = c$. **4. Решение.** Основата на кутијата е квадрат со страни $6a - 2x$, а висината е x. Волуменот на кутијата ќе биде $V = (6a-2x)^2 \cdot x = 4x(3a-x)(3a-x) = 2(2x)(3a-x)(3a-x)$. Очигледно е дека волуменот на кутијата ќе биде најголем, кога производот $2(2x)(3a-x)(3a-x)$ е најголем. Бидејќи збирот $(2x) + (3a-x) + (3a-x) = 6a$ е константен, следува дека волуменот на кутијата ќе биде најголем при $2x = 3a - x$, од каде $x = a$. **5. Решение.** Должините на другите две страни на триаголникот нека се x и y. Плоштината на триаголникот ќе биде $P = \sqrt{p(p-a)(p-x)(p-y)}$. Таа ќе биде најголема кога променливиот производ $(p-x)(p-y)$ биде најголем. Бидејќи збирот $(p-x) + (p-y) = 2p$ е константен, тогаш производот $(p-x)(p-y)$ ќе биде најголем кога $p - x = p - y$, т.е. при $x = y$. **6. Решение.** Барaниот правоаголник нека има страни x и y, за кои важи релацијата $x^2 + y^2 = c^2$, каде c^2 е константа. Јасно е дека плоштината $P = xy$ ќе добие најголема вредност кога и производот x^2y^2 ќе добие најголема вредност. Бидејќи збирот од множителите на производот x^2y^2 е ($x^2 + y^2 = c^2$) константен , тогаш тој ќе има најголема вредност , ако $x^2 = y^2$, односно при $x = y$. Значи, барaниот правоаголник е квадрат со дијагонала c. **7. Решение.** Радиусот на кругот нека е R, а една од страните на право-аголникот нека е x. Тогаш другата страна на правоаголникот ќе биде еднаква на $\sqrt{4R^2 - x^2}$, а плоштината на правоаголникот е $P = x\sqrt{4R^2 - x^2}$. Јасно е дека P и P^2 добиваат најголема вредност за една иста вредност на x. Значи, ќе ја бараме вредноста на x за која $P^2 = x^2\left(4R^2 - x^2\right)$ добива најголема вредност. Бидејќи збирот $x^2 + \left(4R^2 - x^2\right) = 4R^2$ е константен, затоа P^2, а исто така и P ќе добие најголема вредност ако важи $x^2 = 4R^2 - x^2$, од каде добиваме $x = R\sqrt{2}$. Според тоа, секоја од страните на правоаголникот да биде еднаква на $R\sqrt{2}$, т.е. барaниот правоаголник е квадрат. **8. Решение.** Плоштината на триаголникот е $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, каде a, b, c се негови страни. Очигледно е дека плоштината P ќе добие најголема вредност кога и производот $(p-a)(p-b)(p-c)$ ќе добие најголема вредност. Бидејќи збирот на множителите $(p-a) + (p-b) + (p-c) = 3p - (a+b+c) = 3p - 2p = p$ е константен, затоа производот $(p-a)(p-b)(p-c)$, а со него и плоштината P на триаголникот, ќе добие најголема вредност кога $p - a = p - b = p - c$, т.е. $a = b = c$. Значи, триаголникот е рамностран. **9. Решение.** Со x, y, z да ги означиме растојанијата од точката M во внатрешноста на ΔABC до неговите страни (направи цртеж). Тогаш плоштината на триаголникот ќе биде $P = \frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}$, од каде $ax + by + cz = 2P$, т.е. збирот $ax + by + + cz$ е константен . Производот xyz ќе добие најголема вредност тогаш кога и производот $ax \cdot by \cdot cz$ ќе добие најголема вредност. А тоа ќе се случи кога ќе биде $ax + by + cz = \frac{2P}{3}$. Оттука $x = \frac{2P}{3a} = \frac{ah_a}{3a} = \frac{h_a}{3}$, $y = \frac{h_b}{3}$, $z = \frac{h_c}{3}$, каде h_a, h_b, h_c, се висини на триаголникот ABC. Од последните три равенства заклучуваме дека бараната точка M е пресекот на тежишните линии (медијаните) на триаголникот.

§ 73 – стр. 385

1. Доказ. Од косинусната теорема $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, (1)
каде a, b, c се страни на триаголникот ABC, а C - аголот при темето C, имаме : ако C е тап агол, т.е. ако $C > 90^0$, тогаш $\cos C < 0$, па со отфрлање од равенството (1) на изразот $-2ab\cos C > 0$, тоа преминува во неравенството $c^2 > a^2 + b^2$. Ако, пак $C = 90^0$, (односно $C < 90^0$), тогаш $\cos C = 0$ (односно $\cos C > 0$), па со отфрлање од равенството (1) на изразот $2ab\cos C = 0$ (односно $2ab\cos C>0$), тоа преминува во равенството $c^2 = a^2 + b^2$ (односно во $c^2 < a^2 + b^2$).

2. Доказ. Страните на триаголникот ABC да ги означиме со a, b, c ; а соодветните медијани m_a, m_b, m_c. Согласно двојното неравенство (7) во § 73 имаме :
$\frac{1}{2}(b+c)-\frac{1}{2}a < m_a < \frac{1}{2}(b+c)$, $\frac{1}{2}(c+a)-\frac{1}{2}b < m_b < \frac{1}{2}(c+a)$, $\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}c < m_c < \frac{1}{2}(a+b)$ Собирајќи ги соодветните страни на овие неравенства добиваме $\frac{1}{2}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c$, штд. **3. Доказ.** Врз основа на докажаното неравенство $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$ (види задача 6 во § 71) имаме:

$\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{(p-b)+(p-c)} = \frac{4}{2p-b-c} = \frac{4}{a}$ т.е. $\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}$. Аналогно $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{c}$ и $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{b}$. Собирајќи ги соодветните страни на овие неравенства, добиваме

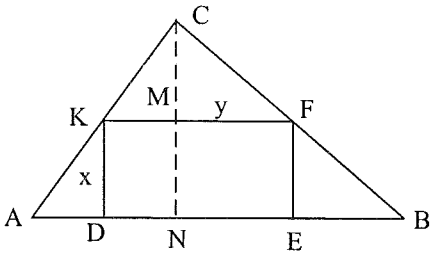
$\frac{2}{p-a}+\frac{2}{p-b}+\frac{2}{p-c} \geq \frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}$ или $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, штд. **4. Доказ.** Во формулата за плоштина на ΔABC, $P = \frac{ab\cdot\sin C}{2}$ множителот $\sin C$ добива најголема вредност $\sin C = 1$, ако аголот C е прав. Значи, важи неравенството $P = \frac{ab\cdot\sin C}{2} \leq \frac{ab}{2} = \frac{2ab}{4}$. А тогаш ќе важи и засиленото неравенство:

$P \leq \frac{2ab}{4} \leq \frac{2ab+(a-b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4}$, т.е $P \leq \frac{a^2+b^2}{4}$, штд. **5. Доказ.** Треба да докажеме дека $P < \frac{1}{6}\left(a^2+b^2+c^2\right)$. Во претходната задача докажавме дека важат неравенствата: $P \leq \frac{a^2+b^2}{4}$, $P \leq \frac{b^2+c^2}{4}$, $P \leq \frac{a^2+c^2}{4}$. Ако ги собереме соодветните страни на овие три неравенства, добиваме:

$3P \leq \frac{a^2+b^2+b^2+c^2+a^2+c^2}{4} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$, од каде $P \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$. **6. Доказ.** Познато е дека плоштината на четириаголник е еднаква на полупроизводот од неговите дијагонали d_1 и d_2 и синусот на аголот φ меѓу нив. Значи, имаме: $P = \frac{1}{2}(d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi) = \frac{1}{4}(2d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi) \leq \frac{1}{4}(2d_1d_2) \leq \frac{1}{4}\left(2d_1d_2+(d_1-d_2)^2\right) = \frac{{d_1}^2+{d_2}^2}{4}$. Знакот " = " важи кога дијагоналите на четириаголникот се еднакви и заемно нормални, т.е. кај квадратот. **7. Доказ.** Да ги собереме соодветните страни на очигледното неравенство $a^2+b^2 \geq 2ab$ и равенството $a^2+b^2 = c^2$. При тоа

добиваме : $2\left(a^2+b^2\right)\geq c^2+2ab=a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$. Оттука $\frac{a^2+b^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, или $\frac{c^2}{2}\geq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, од каде $\frac{c}{\sqrt{2}}\geq\frac{a+b}{2}$ или $c\geq\frac{(a+b)\sqrt{2}}{2}$, штд. **8. Доказ.** Со засилување на неравенството $P=\frac{ab\cdot\sin C}{2}\leq\frac{ab}{2}$ го добиваме и неравенството $P\leq\frac{ab}{2}\leq\frac{ab+(a-b)^2}{2}=\frac{a^2-ab+b^2}{2}$, штд. **9. Упатство.** Доказот на тврдењето во задачата се заснова на теоремата: Која било страна на триаголникот е помала од збирот на другите две негови страни. **10. Упатство.** Тврдењето се одиссува на конвексни многуаголници, а се докажува со повикување на теоремата: Периметарот на кој било конвексен многуаголник е помал од должината на опишаната кружница околу него. **11. Доказ.** Нека правоаголникот $DEFK$ е впишан во ΔABC, така што DE лежи на AB (црт.5). Од сличноста на триаголниците KFC и ABC имаме :

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{CN}}=\frac{\overline{KF}}{\overline{AB}}\quad\text{или}\quad\frac{\overline{CN}-\overline{DK}}{\overline{CN}}=\frac{\overline{KF}}{\overline{AB}}\qquad(1)$$



црт. 5

Да означиме: $\overline{AB}=a$, $\overline{CN}=H$, $\overline{KD}=x$, $\overline{KF}=y$. Тогаш равенството (1) станува

$\frac{H-x}{H}=\frac{y}{a}$, од каде $y=\frac{a}{H}(H-x)$

Плоштината на правоаголникот $DEFK$ е $P = xy$, односно $P=\frac{a}{H}\cdot x(H-x)$. Очигледно е дека плоштината P ќе добие најголема вредност, кога и производот $x(H-x)$ ќе добие најголема вредност. Но бидејќи збирот од множителите $x+(H-x)=H$ е константен , тогаш следува дека производот $x(H-x)$ (а воедно со него и плоштината P) ќе добие најголема вредност кога $x=H-x$. Оттука $x=\frac{H}{2}$, штд.

12. Доказ. Треба да докажеме дека $P>2\sqrt{Rr^3}$ (1)

Познато е дека $R=\frac{abc}{4P}$ и $r=\frac{P}{p}$, каде $p=\frac{a+b+c}{2}$, тогаш релацијата (1) го добива видот

$$P>2\sqrt{\frac{abc}{4}\cdot\left(\frac{2P}{a+b+c}\right)^3}\qquad(2)$$

Имајќи предвид дека двете страни на неравенството (2) се позитивни, можеме да го квадрираме, а да вршиме и други трансформации. Така неравенството (2) е еквивлентно последователно на

$(a+b+c)^3\geq 8abc$, $a+b+c>2\sqrt[3]{abc}$, $\frac{a+b+c}{3}>\frac{2}{3}\sqrt[3]{abc}$. Но бидејќи важи $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$, тогаш ќе важи и $\frac{a+b+c}{3}>\frac{2}{3}\sqrt[3]{abc}$. Од таму што последното неравенство е точно, а тоа е и еквивалентно на неравенството (1) , следува дека е точно појдовното неравенство (1) , штд.

ГЛАВА IX

ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

§ 74 – стр. 392

1. Во полето $\mathbb{R}$ точни се само равенствата: г) и д). **2.** а) $|-3|-(-5)=8$, б) $|-2|-1+1=2$. **3.** При услови $a\geq 0$ и $\sqrt[n]{a}\geq 0$. **4.** а) За $a\geq 0$, б) за $a\leq 0$, в) за секој $a\in\mathbb{R}$. **5.** а) За $a\geq 0$ б) за $a\leq 0$, в) за секој $a\in\mathbb{R}$, г) само за $a=0$, д) за секој $a\leq 0$. **6.** а) $\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1$, б) $\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$, в) $\frac{x}{x}=1$.

§ 75 – стр. 396

1. Ирационални броеви се : а) $\sqrt{0{,}4}$, б) $\sqrt{200}$. **2.** $\sqrt{19}\approx 4$ (односно *5* со вишок), $\sqrt[3]{525}\approx 8$ (односно *9*), $\sqrt[4]{72568}\approx 16$ (односно 17), $\sqrt[5]{1000}\approx 3$ (односно 4), $\sqrt{3824}\approx 61$ (односно *62*). **3.** $\sqrt{2700}\approx 51{,}96$ (односно *51,97*), $\sqrt{20482}\approx 27{,}35$ (односно *27,36*),), $\sqrt[4]{20{,}8}\approx 2{,}13$ (односно *2,14*).

§ 76 – стр. 403

1. а) $\sqrt[4]{5^2}$, б) $\sqrt[6]{2^2}$, в) $\sqrt[6]{a^2}$, г) $\sqrt[8]{x^6}$, д) $\sqrt[2n]{4x^2y^4}$. **2.** а) $\sqrt{3}$, б) $\sqrt[4]{5x^2y^3}$, в) $\sqrt[3]{4x^2}$, г) $\sqrt[2n]{4xy^{2n}}$, д) $\sqrt[n-]{x}$. **3.** а) $\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[6]{25}$, б) $\sqrt[4]{a^3b^2}$, $\sqrt[4]{a^2b^2x^2}$, в) $\sqrt[4n]{x^{2n}y^n}$, $\sqrt[4n]{x^{12}y^8}$, $\sqrt[4n]{x^2y^6}$. **4.** а) $\sqrt[3]{5}<\sqrt{3}$ бидејќи $5^2<3^3$, б) $\sqrt[4]{2}<\sqrt[12]{10}$, бидејќи $2^{12}<10^4$, в) $\sqrt[6]{6}<\sqrt[5]{5}$, г) $\sqrt[9]{64}=\sqrt[6]{16}$, бидејќи $64^6=16^9$ или $2^{36}=2^{36}$. **5.** $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}>\sqrt[7]{7}>1$. **6.** а) $\sqrt[3]{a^2b}$, $\sqrt[3]{(a+b)^2}$, б) $\sqrt{|1-\sqrt{2}|}=\sqrt{\sqrt{2}-1}$, $\sqrt[8]{\left(x^2+y^2\right)^2}=\sqrt[4]{x^2+y^2}$, в) $\sqrt{2x^k y}$, $\sqrt{2x^3y}$. **7.** а) *–30*, б) $2x^2y$, в) $\frac{3x^2y}{2a^3}$. **8.** а) *4*, б) *6*, в) $\sqrt[15]{x^{19}}$, г) $\sqrt[15]{\frac{1}{2^{11}}}$, д) $\sqrt[12]{x^7y^{11}}$, ѓ) $|x+1|$, е) $\sqrt[12]{\frac{a^{11}}{b^5}}$. **9.** а) $\sqrt{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$, б) $\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$, в) $\sqrt{a+1}\left(\sqrt{a-1}-1\right)$, г) $\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)$, д) $\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)$. **10.** а) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+2\right)}{\sqrt{7}\left(\sqrt{5}+2\right)}=\sqrt{\frac{2}{7}}$, б) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, в) $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. **11.** а) *–3*, б) $xy\left(x+y+2\sqrt{xy}\right)$, в) *48*, г) $\sqrt[3]{\left(\sqrt{8}+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt[3]{2}$, д) $2\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)$. **12.** а) $\sqrt[10]{5}$, б) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt[5]{3}}}=\sqrt[3]{3\sqrt[4]{\sqrt[5]{3^6}}}=\sqrt[3]{3\sqrt[20]{3^6}}=\sqrt[60]{3^{26}}$, в) $\sqrt[16]{3^{15}}$. **13.** а) $a^2\sqrt[k]{a^5}$, $\sqrt[k+1]{x^{2(k-1)(k+1)}}=x^{2(k-1)}$, б) $|x+y|\sqrt{xy}$, $\sqrt[3]{2^4(x-y)^2(x+y)^3}=2(x+y)\sqrt[3]{2(x-y)^2}$, в) $xy^2\sqrt[2k]{xy^4}$, $\frac{2x^2}{z}\sqrt[k]{\frac{2x}{y^2z^3}}$. **14.** а) $\sqrt[3]{2a^2x^3}$, $\frac{a}{x}\sqrt{\frac{x^3}{a}}=\sqrt{\frac{a^2}{x^2}\cdot\frac{x^3}{a}}=\sqrt{ax}$, б) $\sqrt[3]{\frac{2a^2(a+b)^2}{a-b}}$, $\sqrt[3]{a^kx}$,

15. а), в) За $x \geq 0$, б), г), д) за секој $x \in \mathbb{R}$. **16.** а) $5\sqrt{2} > 2\sqrt{5}$, б) $3\sqrt{5} < 4\sqrt{3}$, в) $2\sqrt[3]{3} < 3\sqrt[3]{2}$, г) $\sqrt{2}+\sqrt{3} > \sqrt{7}$, бидејќи $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 > 7$, д) $\sqrt{10}-3 < \sqrt{5}-2$. **17.** а) $\sqrt{3xy}$, б) $xy(x-y)$, в) $\frac{1}{|x-y|}$, г) $\frac{2\sqrt{a}}{a-x}$.

§ 77 – стр. 411

1. $\frac{1}{x+y}\sqrt[3]{xy(x+y)^2}$, $\frac{x}{a^2+b^2}\sqrt{(a^2+b^2)x}$, $\frac{1}{xy}\sqrt{xy(x^2+y^2)}$, $\frac{1}{a+b}\sqrt[3]{a(a+b)}$, $\frac{1}{b}\sqrt[5]{ab^4}$. **2.** а) $9\sqrt{2}$, б) $18\sqrt{3}$, в) $3\sqrt{a}-\frac{4}{|a-1|}\sqrt{a^2-1}$, г) $8y\sqrt{x}$, д) $5\sqrt[4]{x}\cdot y\sqrt[3]{x}$. **3.** а) $\frac{8x^5}{3y^2}\sqrt{3xy}$, б) $x^2\sqrt{y}$, в) $\frac{1}{xy}\sqrt[4]{x^3y^2}$.

4. а) $-3\sqrt[3]{a}$, б) $a\sqrt[12]{a}$, в) **Решение.**

$$\sqrt{\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})^2}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}} = \sqrt[4]{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{(2+\sqrt{3})^2} = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right).$$

5. а) $1+\sqrt{10}$ м б) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{11}\right)$, в) $\sqrt{15}-\sqrt{2}$, г) $\sqrt{\frac{a+b}{2}}+\sqrt{\frac{a-b}{2}}$.

6. Решение. За $x+y=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ со примена на формулата (2) во § 77 добиваме :

$x+y=\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{16-10-2\sqrt{5}}}+\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$, а за $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ со помош на формулата (1), добиваме дека $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$, па така конечно за $x+y$ добиваме: $x+y=\sqrt{2}\cdot\sqrt{4+\sqrt{5}-1}=\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{5}}=\ldots=\sqrt{5}+1$. За $xy=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ имаме $xy=\sqrt{16-\left(10+2\sqrt{5}\right)}=\sqrt{16-2\sqrt{5}}=\ldots=\sqrt{5}-1$. На крајот имаме: $x^2+y^2=(x+y)^2-2\left(\sqrt{5}-1\right)=8$. **Одговор.** $x+y=\sqrt{5}+1$, $xy=\sqrt{5}-1$, $x^2+y^2=8$. **7. Решение.** Производот на последните два множителa е $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. Производот на овој број и вториот множител е $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, а производот на овој резултат, пак, со првиот множител е 1. **Одговор.** 1. **8. Доказ.** а) Да означиме $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Тогаш $x^3=\left(2+\sqrt{5}\right)+\left(2-\sqrt{5}\right)+3\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)=4+3(4-3)x$ или

$x^3+3x-4=0$ (1).

Забележуваме дека добиената кубна равенка има еден корен $x = 1$. Разложувајќи ја нејзината лева страна на множители, имаме $(x-1)\left(x^2+x+4\right)=0$. Од равенката $x^2+x+4=0$ добиваме уште два комплексни корена на равенката (1) . Според тоа , равенката (1) има само еден реален корен $x = 1$. **Одговор.** $x = 1$. б) Забележуваме дека и левата и десната страна на равенството се позитивни броеви, затоа и нивните квадрати мора да се еднакви. Квадратот на левата страна е:

$$8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{64-4\left(10+2\sqrt{5}\right)}=16+2\sqrt{24-8\sqrt{5}}=16+4\sqrt{6-2\sqrt{5}}=16+4\left(\sqrt{5}-1\right)=4\left(3+\sqrt{5}\right).$$

Но и квадратот на десната страна е: $\left(\sqrt{2}\left(\sqrt{5}+1\right)\right)^2=2\left(5+1+2\sqrt{5}\right)=4\left(3+\sqrt{5}\right)$ Оттука следува точноста на равенството.

9. а) *17* , б) **Решение.** Бидејќи е $1+2x=1+\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2$, затоа $\sqrt{1+2x}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Потоа $1-2x=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2$, од каде $\sqrt{1-2x}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Така добиваме:

$$B=\frac{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}}{1+\frac{1+\sqrt{3}}{2}}+\frac{\frac{4-2\sqrt{3}}{4}}{1+\frac{1-\sqrt{3}}{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)+\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{6}=\frac{6+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3+6+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}-3}{6}=1.$$

Одговор. $B = 1$. **10. Решение.** а) $\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\left|x-1\right|=$ (при $x > 1$) $=\sqrt{x}-1$, б) $\sqrt{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}+$ $+\sqrt{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\left|1+\sqrt{x}\right|+\left|1-\sqrt{x}\right|=$ (при $0\le x\le 1$) $=1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}=2$.

11. Решение. Во првиот множител извлекуваме пред заграда ($a-b$) , па добиваме:

$$(a-b)\left[\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}+1\right]\cdot(a-b)\left[\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-1\right]=(a-b)^2\left[\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2-1\right]=(a-b)^2\left(\frac{a+b}{a-b}-1\right)=(a-b)^2\frac{2b}{a-b}=2b(a-b).$$

12. а) $\sqrt{x^2-4x}$. б) **Упатство.** Прво пропшири ја дропката со изразот $x\sqrt{x}+y\sqrt{x}$ при што дадената дропка ќе го добие видот $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$, а потоа пропшири ја со $\sqrt{x}+\sqrt{x}$. **Одговор.** $\sqrt{x}-\sqrt{x}$. **13. Решение.** Имајќи предвид дека важи $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)$ и $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)$, од каде $2+\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)^2$ и $2-\sqrt{3}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2$;

Дадениот израз го трансформираме како што следува :

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}+1\right)}+\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2\left(3+\sqrt{3}\right)}+\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2\left(3-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}+\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}=\sqrt{2}\,.$$

14. а) **Решение.** $\left(\sqrt{ab}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}=\frac{a\sqrt{ab}}{a+\sqrt{ab}}:\frac{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{a-b}=\frac{a\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{a\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}:\frac{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)}=$

$$=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)}=a\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right),$$ б) $2x$.

15. а) **Решение.** $\left[\frac{a^2\sqrt[4]{x}+x\sqrt{a}}{a\sqrt[4]{x}+\sqrt{ax}}-\sqrt{a^2+x+2a\sqrt{x}}\right]^4=\left[\frac{\sqrt{a}\sqrt[4]{x}\left[\left(\sqrt{a}\right)^3+\left(\sqrt[4]{x}\right)^3\right]}{\sqrt{a}\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{x}\right)}-\sqrt{\left(a+\sqrt{x}\right)^2}\right]^4=$

$=\left[a-\sqrt{a}\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}-\left|a+\sqrt{x}\right|\right]^4=$ (Бидејќи a влегува во подкорен, тој е позитивен, па затоа е и $a+\sqrt{x}>0$. Потоа продолжуваме :) $=\left[a-\sqrt{a}\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}-a-\sqrt{x}\right]^4=\left[-\sqrt{a}\sqrt[4]{x}\right]^4=a^2x$.

16. Упатство. Примени ја формулата $(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)=a^3\pm b^3$. **Одговор.** а) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3+\left(\sqrt[3]{y}\right)^3=x+y$,

б) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=5-2=3$. **17.** $\dfrac{4}{\sqrt{x-y}}$. **18. Решение.** Да означиме $y=\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}$ и да ги кавадратираме двете страни . Така добиваме :

$y^2=x+6\sqrt{x-9}+x-6\sqrt{x-9}+2\sqrt{x^2-\left(6\sqrt{x-9}\right)^2}=2x+2\sqrt{(x-18)^2}=2(x+|x-18|)$. Ако $x\geq 18$, тогаш $y^2=4(x-9)$, односно $y=2\sqrt{x-9}$. Ако пак $9<x<18$, тогаш $y^2=36$, односно $y=6$. **19. Упатство.** Со примена на формулата за $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ врз изразот $\sqrt{13+\sqrt{48}}$ добиваме:

$\sqrt{13+\sqrt{48}}=\sqrt{\dfrac{13+\sqrt{169-48}}{2}}+\sqrt{\dfrac{13-\sqrt{121}}{2}}=\sqrt{12}+1$. Така даденият израз станува

$A=2\sqrt{3+\sqrt{5-1-\sqrt{12}}}=2\sqrt{3+\sqrt{4-\sqrt{12}}}$. Аналогно трансформирај го изразот $\sqrt{4-\sqrt{12}}$, итн. **Одговор.** $\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

§ 78 – стр. 419

1. Да го помножиме даденият израз со $S_1=\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}$;

добиваме $\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)=\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)^2-C=A+B-C+2\sqrt{AB}$. Сега добиениот израз S_1 да го помножиме со $S_2=A+B-C-2\sqrt{AB}$ го добиваме рационалниот израз $S_1S_2=(A+B-C)^2-4AB$. Според тоа , бараниот конјугиран множител на изразот $M=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}$ е $S=S_1S_2=\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}-\sqrt{C}\right)\left(A+B-C-2\sqrt{AB}\right)$. **2.** а) $1+\sqrt{x}$,б) $\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+\sqrt{2})$, в) $a^2\sqrt[n]{a^2}$, г) $\left(\sqrt{2}-1\right)^2=3-2\sqrt{2}$

3. а) $\dfrac{\sqrt{a-\sqrt{a}}\left(a+\sqrt{a}\right)}{a-1}$, б) $\dfrac{2\sqrt{2}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-3}=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, в) $\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}$. **4.** а) $\dfrac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2y^2}+\sqrt[3]{y^2}}{x^2-y^2}$,

б) $\dfrac{9}{\sqrt{7\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}+\sqrt{5\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}}=\dfrac{9}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}=\dfrac{9\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)}{(3-2)(7-5)}=\dfrac{9}{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$,

в) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1$. **5. Решение.** а) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}=\dfrac{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$, б) $\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{a-b}$,

в) $\dfrac{5x+1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x+1}}=\dfrac{5x+1}{\sqrt[6]{x^3}-\sqrt[6]{(x+1)^2}}=\dfrac{(5x+1)\left(\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[6]{(x+1)^2}\right)}{x-\sqrt[3]{(x+1)^2}}=\dfrac{(5x+1)\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x+1}\right)\left(\sqrt[6]{x^3}+\sqrt[3]{x^3(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)^4}\right)}{x^3-(x+1)^2}$.

6. а) $2\left(\sqrt[3]{121}+\sqrt[3]{55}+\sqrt[3]{25}\right)$, б) $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right)\left(4+2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}\right)$, в) Забележуваме дека, именителот на дропката е збир од првите четири члена на геометриска прогресија, чиј количник е $\sqrt[4]{2}$. Согласно формулата за збир на членовите на геометриска прогресија $S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}$ имаме $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2^2}+\sqrt[4]{2^3}+\sqrt[4]{2^4}}=\frac{1}{\frac{2\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}-1}}=$

$=\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}}=\frac{\left(\sqrt[4]{2}-1\right)\sqrt[4]{2^3}}{2}=\frac{2-\sqrt[4]{8}}{2}$. **7.** а) $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[3]{3}\right)^3}=\frac{\left(\sqrt[3]{3^6}-\sqrt[3]{3^3\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2}\right)^3}{\left(3^3+3\right)^3}=\frac{\left(9-3\sqrt{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{30^3}$,

б) $\frac{2}{\sqrt[3]{2\sqrt{3}-2}}=\frac{2\sqrt[3]{2\sqrt{3}+2}}{\sqrt[3]{12-4}}=\sqrt[3]{2\sqrt{3}+2}$, в) $(x+y)\sqrt{x-\sqrt{xy}}\cdot\left(x+\sqrt{xy}\right)$.

8. Решение. При $a\geq 0,\ a-b\geq 0,\ a+b\geq 0$. Деленикот е еднаков на $\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{2}$, а делителот на: $\frac{\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$. Количникот е еднаков на $\frac{\sqrt{a-b}}{b}$. **9.** $\ldots=\frac{\left(a+2+\sqrt{a^2-4}\right)^2+\left(a+2-a^2-4\right)^2}{(a+2)^2\left(a^2-4\right)}=\ldots=a$.

10. а) **Решение.** Броителот на намаленикот може да се доведе во видот $\frac{\left(\sqrt{1+a}\right)^2+\left(\sqrt{1-a}\right)^2}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{|1-a|+|1+a|}{\sqrt{1-a^2}}$. Ако изразите $1+a$ и $1-a$ се и двата позитивни (негативни не смеат да бидат), тогаш броителот е еднаков на $\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}$. При тие услови , именителот ќе биде $\frac{|1-a|-|1+a|}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}$. Значи, дропката – намаленик ќе биде еднаква на $\frac{1}{a}$, а даденот израз ќе биде еднаков на нула. б) $\ldots=\frac{(x-y)^2-(x-y)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)(x-y)}=\frac{(x-y)(x+y-1)}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)(x-y)}=\frac{x+y-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$.

11. а) **Решение.** Да ја прошириме дропката со $\sqrt{a}+3\sqrt{b}+2\sqrt[4]{ab}$, при што добиваме

$\frac{\left(a+2\sqrt{ab}+9b\right)\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}+2\sqrt[4]{ab}\right)}{\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}\right)^2-\left(2\sqrt[4]{ab}\right)^2}-2\sqrt{b}=\frac{\left(a+2\sqrt{ab}+9b\right)\left(\sqrt{a}+3\sqrt{b}+2\sqrt[4]{ab}\right)}{a+9b+6\sqrt{ab}-4\sqrt{ab}}-2\sqrt{b}=\sqrt{a}+3\sqrt{b}+2\sqrt[4]{ab}+2\sqrt{b}=$

$=\sqrt{a}+2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}=\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2$, б) $\frac{2(x+1)}{x-1}$ при $x>0,\ x\neq 1$.

§ 79 – стр. 425

1. Решение. Да одредиме прво: $\sqrt{x^2+x}=\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ и $\sqrt{x^2-x}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$.

Потоа добиваме : $\frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}+1}{-\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}+\frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}-1}{-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}=\frac{-2+\sqrt{3}}{-3-\sqrt{3}}+\frac{-2-\sqrt{3}}{-3-\sqrt{3}}=\ldots=1$. **2. Доказ.** Бидејќи двете страни на равенството се ненегативни, смееме да квадрираме , па добиваме : $\left(\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right)^2+\left(\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right)^2+$

$+2\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy\right)=x^2+2|xy|+y^2$ или после извршување на означените операции и средување добиваме очигледно равенството $x^2+2xy+y^2=x^2+2xy+y^2$, што значи дека и даденото равенство е точно.

3. Упатство. Левата страна на равенството означи ја со x. Треба да докажеме дека равенството

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=x \qquad (1)$$

има единствено реално решение $x=2$. За таа цел двете страни на равенството (1) ги степенуваме на трет степен и добиваме кубна равенка со рационални коефициенти. Покажи дека таа има еден реален корен $x=2$ и два комплексни корена.

4. Доказ. $\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{n^2(n+1)-(n+1)^2n}=\frac{n\sqrt{n+1}-(n+1)\sqrt{n}}{-n(n+1)}=-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}+\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

5. Доказ. Согласно со формулата *(2)* во *§77* левата страна на равенството ја трансформираме како што следува: $=2\sqrt{\frac{n+1+\sqrt{(n+1)^2-(1+2n)}}{2}}=2\sqrt{\frac{1+2n}{2}}=\sqrt{2+4n}$.

6. Доказ. $\left(\frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-1}-\frac{a}{2\sqrt{a}+1}-\frac{a}{4a-1}\right)\cdot\frac{2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a^5}}=\frac{a\sqrt{a}\left(2\sqrt{a}+1\right)-a\left(2\sqrt{a}-1\right)-a}{\left(2\sqrt{a}-1\right)\left(2\sqrt{a}+1\right)}\cdot\frac{2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a^5}}=\frac{2a^2-a\sqrt{a}}{2\sqrt{a}-1}\cdot\frac{1}{a^2\sqrt{a}}=$

$=\frac{a\sqrt{a}\left(2\sqrt{a}-1\right)}{2\sqrt{a}-1}\cdot\frac{1}{a^2\sqrt{a}}=\frac{1}{a}$. **7. Доказ.** Левата страна на равенството со последователна примена на формулата за $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ ја трансформираме како што следува: Бидејќи $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+1$ тогаш имаме $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$. Останува да се трансформира уште $\sqrt{13+30\left(\sqrt{2}+1\right)}=\sqrt{43+30\sqrt{2}}=\sqrt{43+\sqrt{902}}=\ldots=5+3\sqrt{2}$. **8. Решение.** Деленикот на намаленикот е еднаков на: $\frac{a+x}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\sqrt[3]{ax^2}-\sqrt[3]{a^2x}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{x^2}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\right)}+\frac{\sqrt[3]{ax}+\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)^2}=$

$\frac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x}\right)-\sqrt[3]{ax}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\right)}{\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}\right)}=\frac{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}$. Потоа имаме:

$\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}\right):\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}\right)-\sqrt[6]{x}=\left(\sqrt[6]{a^2}-\sqrt[6]{x^2}\right):\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{x}\right)-\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{x}=\sqrt[6]{a}$. **9.** а) $\sqrt[n]{x^2-y^2}$,

б) **Решение.** $\sqrt{\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}}:\sqrt{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}=\sqrt{1}=1$.

10. а) $\sqrt{2}\left(x+y+\sqrt{2xy}+\sqrt{x^2+y^2}\right)$, б) $a\sqrt[8]{a^3}$. **11. Решение.** а) Бидејќи $\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{20}-3$, затоа решението се сведува за упростување на изразот $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\left(\sqrt{20}-3\right)}}=\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{6-\sqrt{20}}}=\sqrt{\sqrt{5}-\left(\sqrt{5}-1\right)}=1$,

б) $\sqrt{17-4\sqrt{9+\sqrt{80}}}=\sqrt{17-4\left(\sqrt{5}+2\right)}=\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$. **12. Решение.** За изразот $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ во нашиот случај е $A=a+b+c$ и $B=4ac+4bc$, $A^2-B=\left(a+b+c\right)-4ac-4bc=a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc=\left(a+b-c\right)^2$. Ако $a+b-c>0$, тогаш $\sqrt{A^2-B}=a+b-c$, ако пак $a+b-c<0$, тогаш $\sqrt{A^2-B}=a+b-c$. Оттука согласно со формулата *(2)* во *§77* уочуваме дека дадениот израз е еднаков на $2\sqrt{a+b}$, ако $a+b>c$; и еднаков на $2\sqrt{c}$, ако $a+b<c$. При $a+b=c$ двете вредности се совпаѓаат. **13. Решение.** Нека $\sqrt{8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$. Со квадратирање на двете страни, добиваме: $8+\sqrt{40}+\sqrt{20}+\sqrt{8}=a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}$. Оттука:

$a+b+c=8,\quad 2\sqrt{ab}=40,\quad 2\sqrt{ac}=\sqrt{20},\quad 2\sqrt{bc}=\sqrt{8}$. (1)

Од (1) имаме: $ab=10,\quad ac=5,\quad bc=2,\quad abc=\frac{\sqrt{40\cdot 20\cdot 8}}{8}=10$ (2)

Од (2) добиваме: $c=1,\quad b=2,\quad a=5$. Според тоа: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{5}+\sqrt{2}+1$. **14.** 0.

§ 80 – стр. 432

1. а) $8-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8-2^3=0$, б) -32, в) $-\frac{1}{2}$. **2.** а) $3^{-5}>3^{-7}$, б) $3^{-5}>4^{-5}$. **3.** $\frac{3x}{5a^2c^3}$, $\frac{3a^3y^4}{4x^2}$, $\frac{4c^3x^3}{5a^5}$

4. $a^{-1}xy^{-2}$, $5ax^2(a-b)^3$, $3\cdot 2^{-1}xy^2$. **5.** $\sqrt[4]{x^3}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\frac{1}{\sqrt{y}}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[3]{(x+y)^2}$.

6. $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{2}{n-1}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, $x^{-\frac{2}{m}}$, $(a-b)^{-\frac{n}{4}}$. **7.** а) $8a^{-6}c^0x^{-2}$, б) $1+ax^3-x^2$, **8.** а) $x^{-3}-1$, б) $x^{-1}y^7$.

9. а) $x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=x^{\frac{1}{6}}$, б) $(x^{\frac{1}{2}})^2-(y^{\frac{1}{2}})^2=x-y$, в) $\frac{1}{3}+2$. **10.** а) $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$, б) $x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{6}}$.

11. а) $x-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$, б) $\frac{1}{x+2x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}}$, в) $a^2+3a^{\frac{4}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}+1$. **12. Упатство.** Дадениот израз го претставуваме во видот $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$. Потоа треба да замениме $a=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$ и $b=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$.

Одговор. 1. **13.** x^3+4x^{-3}, б) $\frac{125}{8}x^9y^{24}$. **14.** а) **Решение.** $=\frac{\sqrt{xy}\left[1-xy\left(x^3+y^6\right)\right]}{1+\sqrt{xy}\sqrt{x^3+y^6}}=$

$=\frac{\sqrt{xy}\left[1+\sqrt{xy\left(x^3+y^6\right)}\right]\left[1-\sqrt{xy\left(x^3+y^6\right)}\right]}{1+\sqrt{xy\left(x^3+y^6\right)}}=\sqrt{xy}\left[1-\sqrt{xy\left(x^3-y^6\right)}\right]=\sqrt{xy}-xy\sqrt{x^3+y^6}$, б) $6^{-\frac{1}{4}}x^{-\frac{21}{32}}y^{\frac{11}{36}}$.

15. а) **Решение.** $\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}:\frac{1}{\frac{3}{x^2}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\cdot\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3-1}{1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)=x-1$.

б) $\frac{3x\sqrt[4]{y}}{0{,}4\sqrt[8]{x^3}}$. **16. Решение.** Вториот член го трансформираме како што следува :

$\frac{a-\frac{1}{a^2}}{\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{\frac{a^3-1}{a^2}}{\frac{a\sqrt{a}-\sqrt{a}}{a}}=\frac{a(a-1)\left(a^2+a+1\right)}{a^2\sqrt{a}(a-1)}=\frac{a^2+a+1}{a\sqrt{a}}$. Аналогно третиот член ќе биде $\frac{a-1}{a\sqrt{a}}$. Потоа имаме $\sqrt{a}-\frac{a^2+a+1}{a\sqrt{a}}+\frac{a-1}{a\sqrt{a}}+\frac{2}{a\sqrt{a}}=\frac{a^2-\left(a^2+a+1\right)+a-1+2}{a\sqrt{a}}=0$.

§ 81 – стр. 438

1. а) $5^{\frac{3}{4}}>5^{-\frac{3}{4}}$, б) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1}$, в) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$, г) $3^{\frac{1}{2}}=9^{\frac{1}{4}}$, д) $0{,}2^2<5^{-1{,}5}$, бидејќи

$0{,}2^2=5^{-2}<5^{-1{,}5}$, ѓ) $2^{1{,}5}=2^{\frac{3}{2}}$, е) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{5}}>1$, бидејќи $\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{4}{5}}>\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}>\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$,

бидејќи $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}>\left(\frac{2}{3}\right)^1$. **2.** Разликата е: а) негативна, б) негативна. **3.** а) $5^{0{,}5}>3^{\frac{1}{2}}$, б) $\left(\frac{1}{2}\right)^4<\left(\frac{1}{2}\right)^3$,

в) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$, г) $\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{1}{4}}<\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{1}{3}}$, бидејќи $\left(\frac{\pi}{5}\right)^{\frac{1}{4}}<\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{4}}<\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

§ 82 – стр. 448

1. а) 1, 1, 1,..., б) $0, 1, 0, 1, \ldots, \frac{1+(-1)^n}{2},\ldots$ в) $1, 5, 9, 17, 33, \ldots, n^n+1,\ldots$

2. а) $-2, -4, -8, -16, \ldots, -2^n,\ldots$ б) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots, \left(-\frac{1}{2}\right)^n,\ldots$

в) $\frac{2}{3\cdot4}, \frac{3}{4\cdot5}, \frac{4}{5\cdot6}, \frac{5}{6\cdot7}, \ldots, \frac{n+1}{(n+2)(n+4)}, \ldots,$ **3.** а) $a_n=-(-2)^n$

б) $a_n = \frac{1}{2^n}$, в) $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}-1} & \text{за } n=1 \\ \frac{1}{\sqrt{n+1}+(-1)^n} & \text{за } n>1 \end{cases}$. **4.** Низата е: а) растечка и ограничена, б) немонотона, ограничена, в) опаѓачка и ограничена, г) растечка и ограничена одделу. **5. Доказ.** Ќе покажеме дека за произволен мал број $\varepsilon > 0$ може да се одреди природен број N, таков што за $n > N$ да важи неравенството $\left|\frac{2n-1}{n+1}\right| < \varepsilon$ (1) Бидејќи е $\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| = \left|\frac{-3}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1} < \varepsilon$ од каде $n+1 > \frac{3}{\varepsilon}$ или $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$. Значи, $N = \frac{3}{\varepsilon} - 1$ и членовите на низата a_n почнувајќи од членот a_N ќе се разликуваат од границата $a = 2$ за помалку од ε, според тоа, $\lim\frac{2n-1}{n+1} = 2$. **6. Доказ.** Низите $a_n = 0$ и $b_n = \frac{1}{n}$ формираат низа на стегачки сегменти: $[0,1]$, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, ..., $\left[0,\frac{1}{n}\right]$, бидејќи за неа важи: 1) $0 \le 0 \le 0 \le \ldots \le 0 \le \ldots$

2) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$ При што $\lim(b_n - a_n) = \lim\left[\frac{1}{n} - 0\right] = \lim\frac{1}{n} = 0$.

7. $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$. Низата е монотоно растечка и ограничена. **8.** *1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 75.* **9. Доказ.** Треба да важи неравенството $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Бидејќи $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{(-1)}{n}\right| = \frac{1}{n}$, затоа горново неравенство ќе го добие видот $\frac{1}{n} < \varepsilon$, од каде $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Значи, постои природен број $N = \frac{1}{\varepsilon}$ за секој $\varepsilon > 0$. А тоа значи дека $\lim\frac{(-1)^n}{n} = 0$.

§ 83 – стр. 456

1. а) *1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320;* и *2; 1,8; 1,74; 1,733; 1,7321*, б) 10^1; $10^{1,7}$; $10^{1,73}$; $10^{1,732}$ и 10^2; $10^{1,8}$; $10^{1,74}$. в) $0{,}1^1$; $0{,}1^{1,7}$; $0{,}1^{1,73}$; $0{,}1^{1,732}$ и $0{,}1^2$; $0{,}1^{1,8}$; $0{,}1^{1,74}$; $0{,}1^{1,733}$, ..., г) 5^1; $5^{1,7}$; $5^{1,73}$; $5^{1,732}$ и 5^2; $5^{1,74}$; $5^{1,733}$. д) $\left(\frac{1}{5}\right)^1$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,7}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,73}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,732}$ и $\left(\frac{1}{5}\right)^2$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,8}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,74}$; ...

2. Решение. $\left[\left(\sqrt[4]{2}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{-3\sqrt{2}} = \left(\sqrt[4]{2}\right)^{-6} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3} = \frac{1}{\sqrt{8}}$, б) $5^{\sqrt{6}} : 10^{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{6}}$, в) $\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{4}}$. **3.** $12^{\sqrt{2}}$, б) $2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 3^{-9\frac{2}{3}}$. **4. Доказ.** а) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}}\right]^{-\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{16}} = 3^4 = 81$, б) $\frac{3^{\sqrt{12}}}{4^{\sqrt{27}}} \cdot \frac{2^{\sqrt{108}}}{6^{3\sqrt{3}}} = \frac{3^{2\sqrt{3}} \cdot 2^{6\sqrt{3}}}{2^{6\sqrt{3}} \cdot 2^{3\sqrt{3}} \cdot 3^{3\sqrt{3}}} =$

$= 3^{-\sqrt{3}} \cdot 2^{-3\sqrt{3}} = 3^{-\sqrt{3}} \cdot 8^{-\sqrt{3}} = 24^{-\sqrt{3}}$. **5.** а) $\pi^{\frac{1}{2}} > \pi^{\frac{3}{5}}$, б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$, в) $\left(\frac{3}{5}\right)^{1+\sqrt{2}} < \left(\frac{3}{5}\right)^2$,

г) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}-\sqrt{5}} < \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{5}-3}$, бидејќи $\sqrt{2} - \sqrt{5} < \sqrt{5} - 3$.

ГЛАВА X

ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

§ 84 – стр. 462

1. а) $x_1 = 5$, $x_2 = 165$, б) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. **2.** а) $x = \frac{5}{3}$, б) $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. **3.** а) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, б) $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{3}{4}$.

4. а) $x_1 = 1$, $x_2 = 5$ б) $x_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **5. Решение.** При $x \neq \frac{2}{3}$ дадената равенка е еквивалентна на равенката $2(3x-2)\sqrt{x} = x+1$. Во полето на комплексните броеви таа е еквивалентна на $4\left(9x^2-12x+4\right)x = x^2+2x+1$ или на $36x^3-49x^2+14x-1=0$. Забележуваме дека оваа кубна равенка има едно решение $x_1 = 1$, а другите две решенија ги добиваме од $(x-1)\left(36x^2-13x+1\right)=0$, односно $36x^2-13x+1=0$, од каде $x_2 = \frac{1}{4}$ и $x_3 = \frac{1}{9}$.

Одговор. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{9}$. б) **Решение.** Да означиме $\sqrt[3]{13-x} = u$, $\sqrt[3]{x+22} = v$. Дадената равенка е еквивалентна на системот равенки: $\begin{cases} u+v=5 \\ u^3 = 13-x, \quad v^3 = x+22 \end{cases}$. Од втората и третата равенка добиваме $u^3+v^3 = 35$ или $u^3+v^3 = (u+v)\left(u^2-uv+v^2\right) = 35$, односно $5\left(u^2-uv+v^2\right) = 35$ или $u^2-uv+v^2 = 7$. Оттука, поточно од $(u+v)^2-3uv = 7$, добиваме дека $uv = 6$. Така го добиваме дека системот равенки $\begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \end{cases}$, кој има две решенија: ($u_1 = 2$, $v_1 = 3$) и ($u_2 = 3$, $v_2 = 2$). На крајот од системите $\begin{cases} \sqrt[3]{13-x} = 2 \\ \sqrt[3]{x+22} = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} \sqrt[3]{13-x} = 3 \\ \sqrt[3]{x+22} = 2 \end{cases}$ имаме : **Одговор.** $x_1 = 5$, $x_2 = -14$.

6. Решение. а) Дадената равенка во полето $\mathbb{C}$ е еквивалентна на секоја од следниве равенки: $\sqrt{1-x^2} = 1+x-2\sqrt{x}$, $\left(\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{x}\right)^2 = (1+x)^2$, $2\sqrt{x(1-x^2)} = x(x-1)$, $4x\left(1-x^2\right) = x^2(1-x)^2$, $x(1-x)[4(x+1)-x(1-x)]=0$ или на $x(1-x)\left(x^2+3x+4\right)=0$. Оттука добиваме : $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_{3,4} = \frac{-3\pm i\sqrt{7}}{2}$, б) Да означиме $\sqrt[6]{x} = y$, тогаш $\sqrt[3]{x} = y^2$ и $\sqrt{x} = y^3$, па равенката го добива видот $y^3+y^2-12 = 0$. Забележуваме дека оваа равенка има едно решение $y = 2$. Другите две решенија ги добиваме од разложувањето $y^3+y^2-12 = (y-2)\left(y^2+3y+6\right)=0$, односно од квадратната равенка $y^2+3y+6=0$: $y_{2,3} = \frac{-3\pm i\sqrt{15}}{2}$. Според тоа, дадената равенка има три решенија: $x_1 = 2^6 = 64$, $y_{2,3} = \left(\frac{-3\pm i\sqrt{15}}{2}\right)^6$.

7. а) **Решение.** Дадената равенка е еквивалентна на секоја од равенките :

$$\sqrt[5]{3+x}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{x}\right) = \frac{64}{3}\sqrt[5]{x}, \quad \sqrt[5]{3+x}\cdot\frac{x+3}{3x} = \frac{64}{3}\sqrt[5]{x}, \quad \frac{(3+x)^{\frac{6}{5}}}{x^{\frac{6}{5}}} = 64, \quad \left(\frac{3+x}{x}\right)^6 = 64^5,$$

$\left(\frac{3+x}{x}\right)^6 = 32^6$, $\frac{3+x}{x} = \pm 32$. Па оттука имаме вкупност од две равенки: $\frac{3+x}{x} = 32$ и $\frac{3+x}{x} = -32$.

Одговор. $x_1 = \frac{3}{31}$, $x_2 = -\frac{1}{11}$. б) **Упатство.** Замени $\sqrt[4]{x} = y$. Тогаш $\sqrt{x} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^2 = y^2$, па равенката го добива видот $y^2 + y - 12 = 0$. **Одговор.** $x_1 = 81$, $x_2 = (-4)^4 = 256$.

§ 85 – стр. 470

1. а) $D = [2, \infty)$, б) $D = [2, \infty)$. **2.** $D = \{3\}$, но и $x = 3$ не е решение на равенката, б) Бидејќи $D = \varnothing$, г) Бидејќи системот равенки $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 2 = 0 \end{cases}$ нема решенија, г) Бидејќи $D = \varnothing$. **3.** а) $x = 1$; б) $x = -2$.

4. Доказ. Дискримининантата на квадратниот трином $x^2 - 5x + 13$ е ($D = -27$) негативна, затоа тој за секој $x \in \mathbb{R}$ добива позитивни вредности. А збирот од позитивен број и некој ненегативен број не може да биде нула.

5. Решение. а) Дадената равенка е еквивалентна на $\sqrt{1+3x} + 1 = \sqrt{(x+2)^2}$, односно на равенката $\sqrt{1+3x} + 1 = |x+2|$. Во дефиниционата област $x \geq -\frac{1}{3}$ е $|x+2| = x+2$. Ги квадрираме двете страни на равенката $\sqrt{1+3x} + 1 = x + 1$ и ја добиваме равенката $x^2 - x = 0$, од каде $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. И двете решенија ја задоволуваат равенката. б) Ја квадрираме едно подруго два пати и ја добиваме равенката $x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x = 0$, односно $x(x-1)(x^2 + 3x + 4) = 0$. Таа има два реални корена $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Тие се корени и на дадената равенка.

6. Решение. а) Означуваме $\sqrt[4]{x+15} = u$, $\sqrt{x-1} = v$. Равенката се сведува на системот $\begin{cases} u - v = 2 \\ u^4 - v^2 = 16 \end{cases}$. Овој систем има решение: $u = 2$, $v = 0$. Од $\sqrt[4]{x+15} = 2$ имаме $x + 15 = 16$ или $x = 1$. **Одговор.** $x = 1$.

б) Означуваме $\sqrt[4]{x+41} = u$, $\sqrt[4]{41-x} = v$. Тогаш $u + v = 4$ и $x + 41 = u^4$, $41 - x = v^4$. Така дадената равенка се сведува на системот $\begin{cases} u + v = 4 \\ u^4 + v^4 = 82 \end{cases}$. Ова е систем симетрични равенки.

Од $u^4 + v^4 = \left(u^2 + v^2\right)^2 - 2u^2v^2 = \left[(u+v)^2 - 2uv\right] - 2u^2v^2 = 82$ и $u + v = 4$ добиваме $uv = 3$. Потоа го решаваме системот $\begin{cases} u + v = 4 \\ uv = 3 \end{cases}$. Тој има две решенија: $u_1 = 3$, $v_1 = 1$ и $u_2 = 1$, $v_2 = 3$. Тогаш $x = u^4 - 41 = 3^4 - 41 = 40$.

Одговор. $x = 40$. **7. Упатство.** а) Означи $\sqrt[4]{x+2} = u$, $\sqrt{x+1} = v$. Дадената равенка е еквивалентна на системот $\begin{cases} u + v = 3 \\ v^2 - u^3 = 3, \quad v \geq 0 \end{cases}$. **Одговор.** $x = 3$. б) Воведи нови променливи $\sqrt{x} = u \geq 0$, $\sqrt{1-x} = v \geq 0$, $\sqrt{x - \sqrt{1-x}} = w \geq 0$. Тогаш дадената равенка е еквивалентна на системот равенки $\begin{cases} u + v = 1 \\ v^2 = 1 - u^2, \quad w^2 = u^2 - v \end{cases}$.

Одговор. $x = \frac{16}{25}$. **8.** а) **Решение.** Дадената равенка ја трансформираме во видот:

$\sqrt[2m]{x^{m+n}}\left(2-\sqrt[2m]{x^{n-m}}-\sqrt[2m]{x^{m-n}}\right)=0$. Оваа равенка е еквивалентна на вкупност од две равенки

$$\begin{cases}\sqrt[2m]{x^{m+n}}=0, \text{ од каде } x_1=0\\ 2-\sqrt[2m]{x^{n-m}}-\sqrt[2m]{x^{m-n}}=0\end{cases} \qquad (1)$$

Да означиме $\sqrt[2m]{x^{n-m}}=y$, тогаш равенката (1) станува $2-y-\frac{1}{y}=0$, од каде $y=1$. На таков начин е $\sqrt[2m]{x^{m-n}}=1$, од каде $x=1$. **Одговор.** $x_1=0$, $x_2=1$. б) **Решение.** Воведуваме нова променлива $\sqrt[4]{x-15}=y$. Тогаш $x-15=y^4$, $97-x=82-y^4$, па равенката го добива видот $\sqrt[4]{82-y^4}=4-y$. Ги степенуваме двете страни на четврти степен и добиваме $y^4-8y^3+48y^2-128y+87=0$ (2)
Оваа равенка има два рационални корена: $y_1=1$, $y_2=3$, па нејзината лева страна ја разложуваме на множители $(y-1)(y-3)\left(y^2-4y+29\right)=0$. Бидејќи равенката $y^2-4y+29=0$ нема реални корени, затоа равенката (2) има само два реални корена: $y_1=1$ и $y_2=3$. потоа од $\sqrt[4]{x-15}=1$ и $\sqrt[4]{x-15}=3$ добиваме: $x_1=16$, $x_2=96$. Тие се корени и на дадената равенка. **9. Решение.** а) Двете страни на равенката ги множиме со $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ и добиваме: $x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$ или $2x-2\sqrt{x}\sqrt{x-1}=\sqrt{x}$. Сега двете страни ги делиме со $\sqrt{x}\neq 0$ ($x=0$ не припаѓа на дефиниционата област на равенката), па добиваме $2\sqrt{x}+1=2\sqrt{x-1}$. **Одговор.** $x=\frac{25}{16}$.

б) Заменуваме $\sqrt{x}=y>0$, па равенката го добива видот $\frac{y^2-4}{y+2}=y^2-8$. Скратуваме со $y+2$ и добиваме $y-2=y^2-8$ или $y^2-y-6=0$, од каде $y_1=3$, $y_2=-2$. Од $\sqrt{x}=3$ имаме $x=9$. **Одговор.** $x=9$.

10. а) $x=81$, б) $x_{1,2}=\pm 5$.

§ 86 – стр. 478

1. Не се еквивалентни во полето на реалните броеви а) првата равенка има решение $x=-7$, но тоа не е решение не втората равенка, б) Првата равенка има решенија $x_1=4$ и $x_2=-4$, а втората равенка – само $x=4$. **2.** а) **Решенија.** Равенката ја трансформираме во видот: $x^2-4x\sqrt{x+1}+4(x+1)+4x-8\sqrt{x-1}+4=0$. Потоа: $\left(x-2\sqrt{x+1}\right)^2+4\left(x-2\sqrt{x-1}\right)+4=0$, $\left(x-2\sqrt{x+1}+2\right)^2=0$, $\left(x+1-2\sqrt{x+1}+1\right)^2=0$ и на крај во видот $\left(\sqrt{x+1}-1\right)^4=0$, од каде $\sqrt{x+1}=1$. **Одговор.** $x=0$. б) Множеството од сите решенија е $M=[4,\ \infty)$.
3. а) **Упатство.** Степенувај ги двете страни на равенката на трет степен, ќе ја добиеш равенката $\sqrt[3]{62+2\sqrt{x+1}-x}=4$. Потоа повторно степенувај ја на трет степен. **Одговор.** $x=0$. б) **Упатство.** Двете страни на равенката степенувај ги на трет степен. **Одговор.** $x_1=-1$, $x_2=7$. **4.** а) **Решение.** Се ослободуваме од дропките: $\sqrt{x^2+8x}+\sqrt{x^2+8x+7}=7$. Потоа ставаме $x^2+8x=t$ и ја добиваме равенката $\sqrt{t}+\sqrt{t+7}=7$. Оваа равенка има единствено решение $t=9$. Потоа од $x^2+8x-9=0$ добиваме: $x_1=1$ и $x_2=-9$. Проверката покажува дека само $x=1$ е решение на дадената равенка. б) **Решение.** Прво го рационализираме именителот на дропката: $\frac{\left(\sqrt{27+x}+\sqrt{27-x}\right)^2}{2x}=\frac{27}{x}$ или $\frac{27+\sqrt{27^2-x^2}}{x}=\frac{27}{x}$. Оттука добиваме $x_{1,2}=\pm 27$. И двете решенија

ја задоволуваат дадената равенка. **5.** а) **Решение.** Воведуваме $\sqrt[3]{x} = y$. Тогаш $\sqrt[3]{x^2} = y^2$ и $x = y^3$, а равенката го добива видот: $2y^4 - 4y^3 + y^2 + y - 6 = 0$, или $2y^4 - 4y^3 + y^2 - 2y + 3y - 6 = 0$ или $2y^3(y-2) + y(y-2) + 3(y-2) = 0$ или $(y-2)(2y^3 + y + 3) = 0$. Забележуваме дека полиномот $2y^3 + y + 3$ има еден корен -1 (бидејќи збирот од коефициентите при парните степени е еднаков на збирот при непарните степени). Според тоа, последнава равенка го добива видот $(y-2)(y+1)(2y^2 - 2y + 3) = 0$. Оттука $y_1 = 2$, $y_2 = -1$, додека $2y^2 - 2y + 3$ нема реални корени. Бидејќи е $x = y^3$, затоа $x_1 = 8$, $x_2 = -1$. б) Заменуваме $\sqrt[3]{x} = y$ и ја добиваме равенката $\sqrt{5+y} + \sqrt{5-y} = y$. Таа има единствено решение $y = 4$. Од $x = y^3$ добиваме $x = 4^3 = 64$. **Одговор.** $x = 64$.

6. Решение. Двете страни на равенката ги множиме со $\sqrt{(x+2)(x+3)}$ при што добиваме $\sqrt{(x-5)(x+3)} + \sqrt{(x-4)(x+2)} = 7$. Ги квадрираме двете страни на равенката $\sqrt{(x-5)(x+3)} = 7 - \sqrt{(x-4)(x+2)}$ и по мало средување ја добиваме равенката $\sqrt{(x-4)(x+2)} = 4$. Од неа добиваме: $x_1 = 6$, $x_2 = -4$. Проверката покажува дека само $x_1 = 6$ е решение на дадената равенка. **7. Упатство.** Квадрирај и после неколку трансформации ќе ја добиеш равенката $\sqrt{28-x} = \sqrt{7}$ од каде $x = 21$. **Одговор.** $x = 21$. **8. Упатство.** Степенувај на трет степен, ќе ја добиеш равенката $\sqrt{10+2x} + \sqrt{15-2x} = 7$. **Одговор.** $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 3$. **9. Решение.** Двете страни на равенката ги делиме со $\sqrt[4]{(x-1)^2}$, $(x \neq 1)$ и добиваме $\left(\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^2 + 1 = 4\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$. Ја решаваме оваа квадратна равенка по однос на $\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}}$ и притоа ја добиваме равенката $\sqrt[4]{\frac{x+1}{x-1}} = 2 \pm \sqrt{3}$. Таа при услов $|x| > 1$ е еквивалентна на дадената равенка. Бидејќи е $2 \pm \sqrt{3} > 0$, затоа со степенување на двете страни на последната равенка на четврти степен ја добиваме равенката $\frac{x+1}{x-1} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)^4$, која е исто така еквивалентна на дадената. Од неа добиваме $x_{1,2} = \frac{\left(2 \pm \sqrt{3}\right)^4 + 1}{\left(2 \pm \sqrt{3}\right)^4 - 1}$, каде во бројителот и именителот пред $\sqrt{3}$ земаме исти знак. Тоа се решенија и на дадената равенка, бидејќи го задоволуваат условот: $|x_1| > 1$ и $|x_2| > 1$. **10. Решение.** Да означиме $\sqrt{x+2} = t$, $(t \geq 0)$. Тогаш $x = t^2 - 2$, а равенката го добива видот $\sqrt{t^2 - 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 10t + 25} = 4$ или $|t-1| + |t-5| = 4$. а) Ако $t < 1$, тогаш $-t + 1 - t + 5 = 4$ или $t = 1$, но $1 \notin (-\infty, 1)$. б) Ако $1 \leq t \leq 5$, тогаш $t - 1 - t + 5 = 4$ или $0t + 4 = 4$. Тоа значи дека сите вредности на t од сегментот $1 \leq t \leq 5$, се решенија на равенката. в) Ако $t > 5$, тогаш $t - 1 + t - 5 = 4$, од каде $t = 5$. Но $5 \notin (5, \infty)$. Од решенијата $1 \leq t \leq 5$ согласно смената имаме дека $-1 \leq \sqrt{x+2} \leq 5$ или $1 \leq x + 2 \leq 25$, од каде $-1 \leq x \leq 23$. **Одговор.** $M = [-1; 23]$.

§ 87 – стр. 483

1. а) $x = a$ (при $a \geq 0$), $x = -a$ (при $a < 0$), б) $x = \frac{(a-1)^2}{4}$ (при $a \geq 1$) $x = 0$, ако $a = 0$. При $a < 1$, и $a \neq 0$ равенката нема решенија. **2.** а) **Решение.** Воведуваме $\sqrt{x^2 - 1} = u$, $\sqrt{x^2 - 2} = v$ со што го добиваме системот

$\begin{cases} u+v=a \\ u^2-v^2=a \\ u\ge 0, v\ge 0 \end{cases}$ (1) Забележуваме, при $a=0$ дадената равенка нема решенија. Затоа ќе сметаме дека е $a\neq 0$.

Тогаш од системот (1) добиваме $\begin{cases} u-v=\dfrac{1}{a} \\ u=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right) \\ v=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right) \end{cases}$ а од $a+\dfrac{1}{a}\ge 0$ и $a-\dfrac{1}{a}\ge 0$ добиваме дека $a\ge 1$. При тие вредности на a согласно смената имаме: $x^2-1=u^2=\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2$, $x^2=1+\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2$ односно $x=\pm\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2}$. б) Ги квадратираме двете страни на равенката $\sqrt{a+x}=a-x^2$ и ја добиваме равенката $a+x=a^2-2ax^2+x^4$, која е квадратна по однос на параметрот a: $a^2-\left(1+2x^2\right)a+x^4-x=0$. Од неа добиваме $a=\dfrac{2x^2+1\pm\sqrt{\left(2x^2+1\right)^2-4\left(x^4-x\right)}}{2}=\dfrac{2x^2+1\pm(2x+1)}{2}$ односно $a=x^2-x$, или $a=x^2+x+1$. Оттука $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$ и $x_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$ при $a>0$. $x=0$, ako $a=0$; а при $a<0$ равенката нема решенија. **3. Решение.** а) Од условот $\dfrac{a-x}{b+x}>0$, односно $(a-x)(b+x)>0$ следува дека променливата x може да зема вредности што лежат меѓу a и $-b$. Да означиме $\sqrt[n]{\dfrac{a-x}{b+x}}=y$. Тогаш равенката го добива видот $y+\dfrac{1}{y}=2$, или y^2-2y+1 од каде $y=1$, т.е. $\sqrt[n]{\dfrac{a-x}{b+x}}=1$, од каде, $a-x=b+x$, $x=\dfrac{a-b}{2}$. б) Дадената равенка може да се претстави во видот $\sqrt{a+x}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{x}$, $\dfrac{\left(\sqrt{a+x}\right)^3}{ax}=\sqrt{x}$ или $(a+x)^{\frac{3}{2}}=ax^{\frac{3}{2}}$. Ги степенуваме двете страни на степен $\dfrac{2}{3}$ и добиваме $a+x=a^{\frac{2}{3}}x$. Оттука $x=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-1}}$ при $|x|>1$. При $|x|<1$ равенката нема решенија. **4.** а) $x=\dfrac{a^2+1}{2a}$ или $x=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$ ако $-1\le a<0$ и $a\ge 1$. При сите други вредности на a равенката нема решенија. б) **Решение.** Двете страни на равенката се ненегативни, затоа со квадрирање ја добиваме еквивалентната равенка $\sqrt{(a-x)(b+x)}=0$ од каде $(a-x)(b+x)=0$, односно $x_1=a$, $x_2=-b$. **5.** а) **Упатство.** Равенката ја запишуваме во видот $\sqrt[5]{a+x}\left(\sqrt[5]{b}+\sqrt[5]{a}\right)=\sqrt[5]{x}$, или $(a+b)\left(\sqrt[5]{b}+\sqrt[5]{a}\right)^5=x$. **Одговор.** $x=\dfrac{a\left(\sqrt[5]{b}+\sqrt[5]{b}\right)^5}{1-\left(\sqrt[5]{b}+\sqrt[5]{b}\right)}$. б) **Решение.** Двете страни на равенката ги множиме со

конјугираниот множител на левата страна: $\left(\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2-x}\right)\left(\sqrt{a^2-x}-\sqrt{b^2-x}\right)=(a+b)\left(\sqrt{a^2-x}-\sqrt{b^2-x}\right)$,

$a^2-x-\left(b^2-x\right)=(a+b)\left(\sqrt{a^2-x}-\sqrt{b^2-x}\right)$, $a-b=\sqrt{a^2-x}-\sqrt{b^2-x}$. Ги квадрираме двете страни и

добиваме $a^2-2ab+b^2=a^2-x+b^2-x-2\sqrt{a^2-x}\cdot\sqrt{b^2-x}$ или $\sqrt{\left(a^2-x\right)\left(b^2-x\right)}=x-ab$. Повторно квадрираме

и добиваме $(a+b)^2\cdot x=0$, од каде $x=0$.

§ 88 – стр. 488

1. Упатство. Првата равенка со смена $\sqrt{\frac{x}{y}}=t,(t\geq 0)$ го добива видот $2t^2-3t-2=0$. Оттука $t=2$ (вториот

корен $t=-\frac{1}{2}$ го отфрламе бидејќи е негативен). Со тоа решавањето го сведуваме на системот $\begin{cases}\sqrt{\frac{x}{y}}=2\\ x+xy+y=9\end{cases}$.

Одговор. $x_1=4,\ y_1=1;\ x_2=-9,\ y_2=-\frac{9}{4}$. б) **Решение.** Двете страни на првата равенка ги множиме со $\sqrt{xy}$

па системот го добива видот: $\begin{cases}|x|+|y|=7+\sqrt{xy}\\ (x+y)+\sqrt{xy}=78\end{cases}$ или $\begin{cases}x+y=7+\sqrt{xy}\\ (x+y)\cdot\sqrt{xy}=78\end{cases}$ (бидејќи $x>0,\ y>0$). Со замена на

$x+y=7+\sqrt{xy}$ од првата во втората равенка, добиваме $xy+7\sqrt{xy}-78=0$. Оттука $\sqrt{xy}=6$ или $xy=36$. Така

доаѓаме до системот $\begin{cases}x+y=13\\ xy=36\end{cases}$, од каде $\begin{cases}x_1=4\\ y_1=9\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=9\\ y_2=4\end{cases}$. **2.** а) **Решение.** Двете страни на првата равенка

ги степенуваме на трет степен и добиваме: $x+y+3\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)=\frac{125}{8}\sqrt{xy}$. Оваа равенка, имајќи ги предвид

двете равенки од системот, го добива видот: $65+3\sqrt[3]{xy}\cdot\frac{5}{2}\sqrt[6]{x}=\frac{125}{8}\sqrt{xy}$, или по упростување $\sqrt{xy}=8$, или

$xy=64$. Така решавањето на даденот систем го сведуваме на системот $\begin{cases}x+y=65\\ xy=64\end{cases}$. Оттука

$\begin{cases}x_1=1\\ y_1=64\end{cases}$, $\begin{cases}x_2=64\\ y_2=1\end{cases}$. б) **Упатство.** Од односот $\frac{x^2+y\sqrt{xy}}{y^2+x\sqrt{xy}}=\frac{420}{280}=\frac{3}{2}$, или $\frac{\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\right)}{\sqrt{y}\left(y\sqrt{y}+x\sqrt{x}\right)}=\frac{3}{2}$, или

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\frac{3}{2}$, добиваме $x=\frac{9y}{4}$. Потоа од системот $\begin{cases}x=\frac{9y}{4}\\ y^2+x\sqrt{xy}=280\end{cases}$ добиваме $x=18,\ y=8$. **3.** а) **Решение.**

Да означиме $\sqrt[3]{x}=u,\ \sqrt[3]{y}-v$. Тогаш даденот систем го добива видот $\begin{cases}u^3-v^3=\frac{7}{2}\left(u^2v-uv^2\right)\\ u-v=3\end{cases}$. Првата

равенка ја трансформираме во видот $(u-v)\left[(u-v)^2+3uv\right]=\frac{7}{2}uv$, од каде $uv=18$. Од системот $\begin{cases}vu=18\\ u-v=3\end{cases}$

добиваме $\begin{cases} u_1 = 6 \\ v_1 = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} u_2 = -3 \\ v_2 = -6 \end{cases}$. Враќајќи се на старите променливи, од системите $\begin{cases} \sqrt[3]{x} = 6 \\ \sqrt[3]{y} = 3 \end{cases}$ и $\begin{cases} \sqrt[3]{x} = -3 \\ \sqrt[3]{y} = -6 \end{cases}$ добиваме две решенија на даденот систем: $(x_1 = 216,\ y_1 = 27)(x_2 = -27,\ y_2 = -216)$. б) **Решение.** Имајќи ја предвид втората равенка, првата равенка може да се запише: $10 - 2\sqrt{xy} = 4$, од каде $xy = 9$. Така го добиваме системот $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 9 \end{cases}$. Од него добиваме: $x_1 = 9,\ y_1 = 1$ и $x_2 = 1,\ y_2 = 9$. **4.** а) **Упатство.** Првата равенка на системот ја трансформираме во видот $x^2 + y^2 = 136$, а втората равенка по квадрирањето на двете страни, го добива видот $\sqrt{x^2 + y^2} = 18 - x$ од каде $y^2 = 36x - 324$. Така даденот систем го сведуваме на систем рационални равенки: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 136 \\ y^2 = 36x - 324 \end{cases}$. **Одговор.** $x_1 = 10,\ y_1 = 6;\ x_2 = 10,\ y_2 = -6$. б) **Упатство.** Со исклучување на променливата y, ја добиваме равенката $1 + \sqrt{x} - \sqrt{x + 23} = 0$ која има единствено решение $x = 121$. **Одговор.** $x = 121,\ y = -12$. **5.** а) **Упатство.** Првата равенка ја степенуваме на трет степен и добиваме $x + y + 3\sqrt{xy}\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right) = 4^3$, а земајќи ги предвид двете равенки на системот, таа го добива видот $x + y + 3\sqrt[3]{27} \cdot 4 = 4^3$ или $x + y = 28$. На крај го решаваме системот $\begin{cases} x + y = 28 \\ xy = 27 \end{cases}$. **Одговор.** $(x_1 = 27,\ y_1 = 1)$, $(x_2 = 1,\ y_2 = 27)$. б) **Решение.** Воведуваме $\sqrt[6]{xy} = t$. Тогаш првата равенка се трансформира во: $7t^2 - 3t^3 = 4$ или $3t^3 - 7t^2 + 4 = 0$, или $(t - 1)(3t^2 - 4t - 4) = 0$. Оттука: $t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_2 = -\frac{2}{3}$. Потоа се враќаме на старите променливи, при што добиваме вкупност од три системи: $\begin{cases} \sqrt[6]{xy} = 1 \\ x + y = 20 \end{cases}$, $\begin{cases} \sqrt[6]{xy} = 2 \\ x + y = 20 \end{cases}$ и $\begin{cases} \sqrt[6]{xy} = -\frac{2}{3} \\ x + y = 20 \end{cases}$, или (без третиот систем): $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = 20 \end{cases}$, $\begin{cases} xy = 64 \\ x + y = 20 \end{cases}$. Од нив: $x_{1,2} = 10 \pm 3\sqrt{11},\ y_{1,2} = 10 \mp 3\sqrt{11};\ x_3 = 16,\ y_3 = 4;\ x_4 = 4,\ y_4 = 16.$

6. а) Очигледно е дека $x \geq 1$, $|x| \geq |y|$, $\sqrt{x^2 - y^2} \leq 1$. Ги квадрираме двете страни на првата равенка од системот и добиваме $\sqrt{x^2 - y^2} = 2 - x$. Повторно квадрираме и ја добиваме равенката $4x - y^2 - 4 = 0$, која со втората равенка од даденот систем образува нов систем рационални равенки: $\begin{cases} 4x - y^2 - 4 = 0 \\ 4x + y^2 = 4 \end{cases}$, од каде $x = 1,\ y = 0$.

б) **Упатство.** Означи: $\sqrt{y} - \sqrt{x} = u$ и $\sqrt{xy} = v$, $(v \geq 0)$. **Одговор.** $x = 4,\ y = 1$.

§ 89 – стр. 497

1. а) **Упатство.** Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $|x + 2| < x - 6$. **Одговор.** $M = (-4,\ \infty)$, б) **Решение.** Неравенката ја запишуваме во видот $\sqrt{2x + 1} > 2 + \sqrt{x + 6}$, чии две страни се позитивни. Со нивно квадрирање, добиваме $2x + 1 > 4 + x + 6 + 4\sqrt{x + 6}$ или $4\sqrt{x + 6} < x - 9$. Оваа неравенка е еквивалентна на

системот неравенки $\begin{cases} x+6\geq 0, \quad x-9>0 \\ 16(x+6)\leq (x-9)^2 \end{cases}$. **Одговор.** $x>17+4\sqrt{19}$. **2.** а) **Решение.** При $-1 < x < 1$ левата страна на неравенката е позитивна, а десната – негативна. Значи, секој реален број $x\in(-1,\ 1)$ е решение на неравенката. За $x > 1$ двете страни на неравенката се позитивни, па можеме да ги квадрираме, при што добиваме: $(x+1)^2(x^2+1)>(x^2+1)^2$ или $(x+1)^2\left|x^2+1-(x-1)^2\right|>0$, или $(x+1)^2\cdot 2x>0$, или $x > 0$. **Одговор.** Дадената неравенка има множество решенија $x > -1$ или $M=(-1,\ \infty)$. б) **Решение.** Дадената неравенка е еквивалентна на дробно рационалната неравенката $\frac{3x-1}{2-x}>1$ или $\frac{3x-1-2+x}{2-x}>0$, или $\frac{4x-3}{x-2}>0$, или на $4\left(x-\frac{3}{4}\right)(x-2)<0$.

Одговор. $M=\left(\frac{3}{4},\ 2\right)\cdot 3$ а) Неравенката нема решенија, бидејќи нејзината дефиниционо област е празно множество. б) **Решение.** Ги квадрираме двете страни на неравенката и добиваме: $1-x+\frac{1}{1-x}+2\geq 4$, или $\frac{x^2}{1-x}\geq 0$, односно $x^2(x-1)\leq 0$, или $x < 1$. **Одговор.** $M=(-\infty,\ 1)$. **4.** а) Нема решенија. б) **Решение.** Дадената неравенка е еквивалентна на системот неравенки : $\begin{cases} 1-x\geq 0 \\ 5+x\geq 0 \\ (1-x)^2\leq 5+x \end{cases}$ или на системот : $\begin{cases} x<1 \\ x\geq -5 \\ -1\leq x\leq 4 \end{cases}$

Одговор. $-1\leq x\leq 4$, односно $m=[-1,\ 4]$. **5. Упатство.** Неравенката е еквивалентна на системот неравенки $\begin{cases} a-x\geq 0, \quad b-x\geq 0 \\ a+b-2x\geq 0 \\ (a-x)(b-x)\leq 0 \end{cases}$. **Одговор.** $x = a$, ако $a\leq b$; $x = b$, ако $b\leq a$. б) **Упатство.** Неравенката погодно е да ја запишеме $\sqrt{a^2-x^2}>-2x$. Таа е еквивалентна на вкупност од два системи: $\begin{cases} x>0 \\ a^2-x^2\geq 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x\leq 0 \\ a^2-x^2>4x^2 \\ a^2-x^2\geq 0 \end{cases}$. Првиот систем има решенија $0<x\leq|a|$, $a\neq 0$. Вториот систем има решенија $-\frac{|a|}{\sqrt{5}}<x\leq 0$, $a\neq 0$. **Одговор.** При $a\neq 0$ има решенија $-\frac{|a|}{\sqrt{5}}<x\leq|a|$. При $a = 0$ неравенката нема решенија.

Дополнителни задачи – стр. 499

1. $\mathrm{Re}(z)=3$ или $\mathrm{Re}(z)=-3$. **2. Доказ.** а) Нека $z=a+bi$ тогаш $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $z=0\Leftrightarrow a=b=0$ $|z|=0\Leftrightarrow a=b=0$. Оттука следува $z=0\Leftrightarrow|z|=0$, штд. б) Нека $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ Тогаш $z_1\cdot z_2=(ac-bd)+(ad+bc)i$, $z_1\cdot z_2=0\Leftrightarrow(ac-bd=ad+bc=0)\Leftrightarrow(a=b=0\vee c=d=0)\Leftrightarrow(z_1=0\vee z_2=0)$, штд. **3.** Ако разликата од аргументите на z и w е еднаква на: а) $(2k+1)\pi$, б) $2k\pi$, каде $k\in\mathbb{Z}$. **4.** Прав агол. **5. Упатство.** Одреди го прво

количникот на комплексните броеви и неговиот реален и имагинарен дел. **Одговор.** а) $r=1,\ \varphi=\frac{\pi}{6}$,

б) $r=\frac{2\sqrt{3}}{3},\quad tg\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6. Доказ.** Нека точките z_1,z_2,z_3 во комплексната рамнина лежат на една права. Тогаш тие имаат ист аргумент φ, а само различни модули т.е. тие во тригонометриска форма ќе бидат: $z_1=r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad z_2=r_2(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и $z_3=r_3(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Оттука добиваме дека

$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_2}=\frac{r_2(\cos\varphi+i\sin\varphi)-r_1(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{r_3(\cos\varphi+i\sin\varphi)-r_2(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\frac{r_2-r_1}{r_3-r_2}$ е реален број. **7.** а) $\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}=$

$=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n(1+i)^2=\left[\frac{(1+i)^2}{1+1}\right]^n\cdot(1+i)^2=\left(\frac{2i}{2}\right)^n\cdot 2i=2i^{n+1}$, б) $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$,

в) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^8=\left[\frac{2\left(\cos 60^0+i\sin 60^0\right)}{\sqrt{2}\left[\cos\left(-45^0\right)+i\sin\left(-45^0\right)\right]}\right]^8=\sqrt{2}\left[\cos\left(60^0+45^0\right)+i\sin\left(60^0+45^0\right)\right]=\ldots=\ldots=8\left(-1+i\sqrt{3}\right)$.

8. $\cos 5\varphi=\cos^5\varphi-10\cos^2\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\cdot\sin^4\varphi$; $\sin 5\varphi=5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi$. **9. Упатство.** Комплексните броеви претходно претстави ги во нивната тригонометриска форма.

Одговор. а) $\left(1+\sin\varphi+i\sin\varphi\right)^8=(1+\sin\varphi)^4\left[\cos 4\varphi+\sin 4\varphi+i\left(\cos 4\varphi-\sin 4\varphi\right)\right]$,

б) $\frac{(1-i)^7\left[2\left(\cos 210^0+i\sin 210^0\right)\right]^{12}}{(1+i)^{15}}=\frac{(1-i)^7(1-i)^{15}\left[2\left(\cos 210^0+i\sin 210^0\right)\right]^{12}}{2^{15}}=$

$\frac{\left[\sqrt{2}\left(\cos 45^0-i\sin 45^0\right)\right]^{22}\left[2\left(\cos 210^0+i\sin 210^0\right)\right]^{12}}{2^{15}}=\ldots=2^8\left(\cos 270^0-i\sin 270^0\right)\left(\cos 360^0\cdot 7+i\sin 360^0\cdot 7\right)=$

$=2^8(0+i)(1+0)=2^8 i$. **10.** а) $\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{6\left(\cos 45^0+i\sin 45^0\right)}{2\left(\cos\left(-60^0\right)+i\sin\left(-60^0\right)\right)}=\frac{\sqrt{6}}{2}\left(\cos 105^0+i\sin 105^0\right)=$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}\left[-2+\sqrt{3}+i\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$, б) $\frac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}=\frac{(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)^2-i\sin^2\alpha}=\frac{\left[2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+i\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2}{2(1+\cos\alpha)}=$

$=\frac{4\cos^2\frac{\alpha}{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{2(1+\cos\alpha)}=\cos\alpha+i\sin\alpha$. **11. Решение.** $\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}=\frac{1-\cos\varphi+i\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)^2-i\sin^2\varphi}$

$=\frac{1-\cos\varphi+i\sin\varphi}{(1-\cos\varphi)^2+\sin^2\varphi}=\frac{1-\cos\varphi+i\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}=\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sin\varphi}{2(1-\cos\varphi)}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\cdot ctg\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}\left(1+i\cdot ctg\frac{\varphi}{2}\right)$.

12. Од формулата $\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ забележуме: ако $\frac{\varphi+2k\pi}{n}=k\pi$ тогаш $\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}=0$ па $\sqrt[n]{z}$ ќе има реални вредности, ако пак $\frac{\varphi+2k\pi}{n}\neq\pi k$ тогаш $\sqrt[n]{z}$ нема ниту една реална вреност. $\sqrt[n]{a+bi}$, ако $b\neq 0$ исто така нема ниту една реална вредност. **13. Упатство.** користи ја Хорнеровата шема два пати. **Одговор.** $a=7,\ b=-6$. **14.** $a=3,\ b=-4$. Равенката $3x^4-4x^3+1=0$ има корени

$x_{1,2}=1$, $x_{3,4}=-1\pm i\sqrt{2}$. **15. Доказ.** Треба да докажеме дека: а) $P(1)=0$, б) $P(-1)=0$. Навистина $P(1)=1^{2n}-n\cdot 1^{n+1}+n\cdot 1^{n-1}-1=1-n+n-1=0$ и $P(-1)=(-1)^{2n}-n\cdot(-1)^{n+1}+n\cdot(-1)^{n-1}-1=1-n(-1)^{n+1}+n(-1)^{n-1}-1=0$ бидејќи $n+1$ и $n-1$ се и двата парни или и двата непарни броеви. **16. Доказ.** $P(1)=1^{2n+1}-(2n+1)\cdot 1^{n+1}+(2n+1)\cdot 1^{n}-1=1-(2n+1)+(2n+1)-1=0$.

17. Доказ. $P(x)=x^n-na^{n+1}x+na^n-a^n=x^n-a^n-na^{n-1}(x-a)=(x-a)\left(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\ldots a^{n-1}-na^{n-1}\right)$. Оттука гледаме дека, едниот множител е делив со $x-a$. Во тоа се уверуваме, бидејќи за $x=a$ тој добива вредност нула: $a^{n-1}+a^{n-2}a+a^{n-3}a^2+\ldots a^{n-1}-na^{n-1}=na^{n-1}-na^{n-1}=0$. **18.** $r(x)=13x^2+31x-43$.

19. Решение. Од идентитетот $x^{50}+x^{40}+x^{30}+x^{20}+x^{10}+1=\left(x^2+1\right)Q(x)+ax+b$ за $x=i$ имаме $i^{50}+i^{40}+i^{30}+i^{20}+i^{10}+1=0\cdot Q(x)+ai+b$ или $i^{12\cdot 4+2}+i^{10\cdot 4}+i^{5\cdot 4}+i^{2\cdot 4+2}+1=i^2+1+1+i^2+1=1$. Од еднаквоста на комплексните броеви $1=ai+b$ имаме $a=0$, $b=1$. Значи, барањот остаток е $r(x)=0i+1=1$.

20. Доказ. $Q(x)=2x^3+3x+x=x(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Треба да докажеме дека полиномот $P(x)$ е делив со x, $x+1$, $x+\frac{1}{2}$ поодделно. Навистина $P(0)=1^{2n}-0^{2n}+2\cdot 0-1=1-1=0$, $P(-1)=(-1+1)^{2n}-(-1)^{2n}-2\cdot(-1)-1=(0)^{2n}-1+2-1=0$, $P\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{2n}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+1-1=0$. Оттука следува дека полиномот $P(x)$ е делив со $Q(x)$. **21. Решение.** Треба да важи идентитетот $\left(x^4+px^2+k\right)\equiv\left(x^2+px+k\right)\left(ax^2+bx+c\right)$ или $x^4+px^2+k=ax^4+(b+ap)x^3+(c+bp+ak)x^2+(cp+bk)x+ck$. Од него, израмнувајќи ги коефициентите на двата полинома пред еднаквите степени на x, добиваме: $\{a=1,\ b+ap=0,\ c+bp+ak=p,\ cp+bk=0,\ ck=k\}$. Од $ck=k$ при $k\neq 0$ имаме $c=1$. Од $b+ap=0$ имаме $b=-p$ или $p=-b$. Од $cp+bk=0$, односно $p-pk=0$ добиваме $k=1$. А од $c+bp+ak=0$ имаме $1-p^2+1=p$ или $p^2+p-2=0$. Оттука $p_1=1$, $p_2=-2$. Според тоа, имаме две решенија: $p_1=1$, $k=1$ и $p_2=-2$, $k=1$. Полиномот количник ax^2+bx+c во првиот случај ќе гласи ($a=1$, $b=-p=-1$, $c=1$) x^2-x+1, а во вториот случај ($a=1$, $b=-p=2$, $c=1$) x^2+2x+1. Значи $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ и $x^4-2x^2+1=(x^2-2x+1)(x^2+2x+1)$.

22. Решение. $\frac{x^3+y^3}{(x+y)^3x^3y^3}+\frac{3\left(x^2+y^2\right)}{(x+y)^4x^2y^2}+\frac{6(x+y)}{(x+y)^5xy}=\frac{x^3+y^3}{(x+y)^3x^3y^3}+\frac{3\left(x^2+y^2\right)}{(x+y)^4x^2y^2}+$

$+\frac{6(x+y)}{(x+y)^5xy}=\frac{(x+y)\left(x^3+y^3\right)+3\left(x^2+y^2\right)xy+6x^2y^2}{(x+y)^4x^3y^3}=\frac{x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4}{(x+y)^4x^3y^3}=\frac{(x+y)^4}{(x+y)^4x^3y^3}=\frac{1}{x^3y^3}$.

23. а) $\frac{1}{x^3-1}=\frac{1}{3(x-1)}-\frac{x+2}{3\left(x^2+x+1\right)}$, б) $\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{1}{8(x-2)}-\frac{1}{8(x+2)}+\frac{1}{2\left(x^2+4\right)}$,

в) $\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{8}\cdot\frac{x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x-2}{x^2-2x+2}$. **24.** а) $\frac{x^2}{x^6+27}=\frac{1}{18}\left(\frac{1}{x^2+3x+3}+\frac{1}{x^2-3x+3}-\frac{2}{x^2+3}\right)$,

б) $\frac{2x-1}{x(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{-1}{x}+\frac{7}{(x+1)}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{6x+2}{x^2+x+1}-\frac{3x+2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$.

в) $\frac{1}{\left(x^4-1\right)^2}=\frac{1}{16(x-1)^2}-\frac{3}{16(x-1)}+\frac{1}{16(x+1)^2}+\frac{3}{16(x+1)}+\frac{1}{4(x^2+1)^2}+\frac{1}{4(x^2+1)}$.

25. Решение. Да замениме: $a+b-x=x$, $b+c-a=y$, $c+a-b=z$. Очигледно е дека $x+y+z=a+b+c$. Според тоа, треба да го упростиме изразот $(a+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$. Врз основа на решението на задачата 7а во § 49

имаме: $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(x+z)(y+z)$. Ако земеме предвид дека: $x+y=2b$, $x+z=2a$, $y+z=2c$, тогаш $(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (b+c-a)^3 - (c+a-b)^3 = 24abc$. **26.** $a-b$. **27.** 2.

28. Решение. $\frac{1}{2(1+x^n)} + \frac{1}{2(1-x^n)} - \frac{1}{\frac{1}{x^{2n}}-1} = \frac{1-x^n+1+x^n}{2(1+x^n)(1-x^n)} - \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}} = \frac{1}{1-x^{2n}} - \frac{x^2}{1-x^{2n}} = \frac{1-x^2}{1-x^2} = 1$.

29. $A = \frac{(x-y)^2}{8x^2}$. **30.** $B = \frac{1}{x(x-y)}$. **31.** а) $x_1 = 2$, $x_{2,3} = \pm i$, б) $x_1 = 3$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **32.** а) $x_1 = 4$, $x_{2,3} = -2 \pm 3i$, б) $x_1 = 5$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$. **33.** а) $x_1 = 2$, $x_{2,3} = \pm 5i$, б) $x_1 = -(a+b)$, $x_{2,3} = \frac{a+b}{2} \pm i\sqrt{3} \cdot \frac{a-b}{2}$. **34. Упатство.** Користи ги Виетовите правила за равенката $x^3 + px + q = 0$. При $x_2 = x_3$, тие гласат: $x_1 + 2x_2 = 0$, $2x_1x_2 + x_2^2 = p$, $x_1 \cdot x_2^2 = -q$. **Одговор.** $\left(\frac{p}{3}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$. **35.** а) **Решение.** Согласно Виетовите правила имаме:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -p \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q \\ x_1x_2x_3 = r \end{cases}$$

Од второто равенство а согласно условот $x_1^2 = x_2x_3$ добиваме: $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1^2 = x_1(x_1 + x_2 + x_3) = q$, од каде $x_1 = -\frac{q}{p}$. Од првото равенство добиваме $x_2 + x_3 = -p + \frac{q}{p} = \frac{q-p^2}{p}$, а од третото равенство имаме $x_2x_3 = \frac{rp}{q}$. Потоа ја составуваме квадратната равенка $z^2 - \frac{q-p^2}{p} \cdot z + \frac{rp}{q} = 0$. Така ги добиваме баранite решенија на дадената равенка $x_2 = z_1$, $x_3 = z_2$, $x_1 = \sqrt{x_2x_3}$. а) Аналогно ја решаваме равенката и при условот $x_1 = x_2 + x_3$. **36.** а) $x_k = \sqrt[8]{-1} = \sqrt[8]{\cos\pi - i\sin\pi} = \left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{8} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{8}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 7$,

б) $x_k = \sqrt[9]{-1} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{9} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{9}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 8$. в) $x_k = \sqrt[12]{1} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{12} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{12}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 11$.

37. а) Со смената $x^4 = y$ таа се сведува на квадратната равенка $y^2 - 4y + 13 = 0$, која има корени $x_{1,2} = 2 \pm 3i$. Значи, дадената равенка е еквивалентна на вкупноста равенки $\begin{bmatrix} x^4 = 2+3i \\ x^4 = 2-3i \end{bmatrix}$. Нив ги решаваме:

$x_k = \sqrt[4]{2+3i} = \sqrt[4]{\sqrt{13}\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)} = \sqrt[8]{13}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$, каде $\varphi = arctg\frac{3}{2}$,

и $x_k = \sqrt[4]{2+3i} = \sqrt[8]{13}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{4} - i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{4}\right)$, $k = 0, 1, 2, 3$, каде $\varphi = arctg\frac{3}{2}$. б) Со смената $x^3 = y$ таа се сведува на квадратна равенка $y^2 - 4y - 4 = 0$, која има корени $y_1 = 4$, $y_2 = -1$ и решавањето се сведува на биномните равенки $x^3 = 4$ и $x^3 = -1$. **Одговор.** $\left\{\sqrt[3]{4}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{4}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{4}, -1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$.

38. а) **Упатство.** Решавањето се сведува на вкупност од биномни равенки [$x^3 = 27$, $x^3 = -12$.

Одг. $\left\{3, 3\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right), 3\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), -\sqrt[3]{12}, -\sqrt[3]{12}\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, -\sqrt[3]{12}\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$. б) **Упатство.** Дадената равенка е еквивалентна на вкупноста биноми равенки : $\left[x^3=\frac{5}{3},\ x^3=\frac{3}{2}\right.$.

Одговор. $\left\{\sqrt[3]{\frac{5}{3}}, \sqrt[3]{\frac{5}{3}}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{\frac{5}{3}}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{\frac{3}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right), \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$. **39.** а) **Упатство.** Со воведување на смената $x^2+x=y$ ја добиваме равенката $y(y+1)=42$ по однос на новата променлива y. **Одговор.** $x_1=2,\ x_2=-3,\ x_{3,4}=\frac{-1\pm 3i\sqrt{3}}{2}$. б) **Упатство.** Левата страна ја трансформираме:

$x(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)=[x(x+3)]\ [(x+1)(x+2)]=\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)$ и со воведување на смената $x^2+3x=y$, ја добиваме равенката $y(y+2)=8$, која има корени $y_1=2,\quad y_2=-4$. **Одговор.** $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2},\quad x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$.

40. а) **Упатство.** Равенката е симетрична од четврти степен . **Одговор.** $x_{1,2}=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{2}\pm i\sqrt{1+2\sqrt{2}}\right)$,

$x_{3,4}=\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{2}\pm\sqrt{-1+2\sqrt{2}}\right)$ б) $x_1=5,\ x_{2,3}=2\pm i\sqrt{2}$. **41. Решение.** Дадената равенка е еквивалентна соодветно на $2\left(1-x^2\right)^3-\left(1-x^2\right)^2=0,\ \left(1-x^2\right)^2\left(2-2x^2-1\right)=0,\left(x^2-1\right)^2\left(1-2x^2\right)=0$.

Одговор. $x_{1,2}=1,\ x_{3,4}=-1,\ x_{5,6}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. **42. Упатство.** Равенката е симетрична од четврти степен. **Одговор.** $x_1=k,\ x_2=\frac{1}{k},\ x_{3,4}=-k\pm\sqrt{k^2-1}$. **43.** $x_1=2+\sqrt{3},\ x_2=-2\left(2+\sqrt{3}\right)$. **44. Решение.** $\left(\frac{x-ab}{a+b}-c\right)+\left(\frac{x-ac}{a+c}-b\right)+\left(\frac{x-bc}{b+c}-a\right)=0$.

Оттука $\frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-ac-ab-bc}{a+c}+\frac{x-bc-ab-ac}{b+c}=0$, или $(x-ab-ac-bc)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=0$.

Ако $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\neq 0$, тогаш $x=ab+ac+bc$. Ако пак $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=0$, тогаш равенката преминува во идентитет. **45. Решение .** $\left(\frac{x-a}{bc}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-b}{ac}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-c}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)=0$,

$\frac{}{bc}+\frac{}{ac}+\frac{}{ab}=0$. Оттука $(x-a-b-c)\left(\frac{}{bc}+\frac{}{ac}+\frac{}{ab}\right)=0$. Ако $a,b,c\neq 0$ тогаш и $\frac{}{bc}+\frac{}{ac}+\frac{}{ab}\neq 0$ па ќе имаме $x=a+b+c$. **46. Решение.** Дадената равенка има рационални кофициенти. Таа притом има корен $1+\sqrt{3}$, ќе има и корен $1-\sqrt{3}$. Затоа полиномот $x^4+ax^3+bx^2+6x+2$ ќе биде делив со $\left(x-1-\sqrt{3}\right)\left(x-1+\sqrt{3}\right)=x^2-2x-2$, односно остатокот од делењето треба да биде нула полином. Користејќи го тој услов ќе ги одредиме коефициентите a и b. Тие ќе изнесуваат $a=-4$, $b=1$, а полиномот количник ќе биде x^2-2x-1. Равенката $x^2-2x-1=0$ ќе ни ги даде другите два корена на дадената равенка. Тие се: $x_{3,4}=1\pm\sqrt{2}$. **47.** $x_1=6,\ x_2=5,\ x_3=10$. **48.** $x^2+(p-q)x-pq=0$. **49. Решение.** Врз основа на Виетовите правила бројевите p и q треба да ги задоволуваат условите $p+q=-p$ и $pq=q$. Од вториот услов добиваме $q=0$ или $p=1$. Ако $q=0$, тогаш од првиот услов $p+q=-p$ или $2p+q=0$ имаме дека и $p=0$. Според

тоа, $p = 0$, $q = 0$ е едно решение на равенката. Ако е $p = 1$, тогаш од $2p + q = 0$ добиваме $q = -2$. Според тоа, $p = 1$, $q = -2$ е второто решение на задачата. **50. Упатство.** Коефициентите на квадратниот трином $f(x) = x^2 - (2k + 1)x + k^2 + k - 2$ треба да ги исполнуваат условите: $D \geq 0$, $f(-1) > 0$, $f(5) > 0$, $-1 < -\frac{b}{2a} < 5$, т.е. треба да се реши системот неравенки: $\begin{cases} (2k+1)^2 - 4(k^2+k-2) \geq 0, \quad 1+(2k+1)+k^2+k-2 > 0, \\ 25-5(2k+1)+k^2+k-2 > 0, \quad -1 < \frac{2k+1}{2} < 5 \end{cases}$

Одговор. $k \in (-1, \ 3)$.

51. а) $M = (1, \ \infty)$, б) $M = (1-\sqrt{7}; \ 0) \cup (2; \ 1+\sqrt{7})$. **52.** а) $M = (-\infty, \ -7) \cup (-2, \ 0) \cup (0, \ \infty)$, б) $M = (-\infty, \ -2) \cup (2, \ \infty)$. **53.** $M = \left(-\frac{4}{5}, \ -\frac{3}{4}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}, \ -\frac{1}{2}\right) \cup (0, \ \infty)$.

54. а) $M = \left(-\frac{17}{5}, \ \infty\right) \cap \left(\frac{13}{4}, \ \infty\right) = \left(\frac{13}{4}, \ \infty\right)$, б) $M = \left(\frac{11}{3}, \ \infty\right) \cap \left(-\infty, \ \frac{10}{98}\right) = \varnothing$.

55. Упатство. Треба да бидат задоволени условите: $k - 2 \neq 0$, $D = 1 - k(k-2) < 0$. **Одговор.** $k \in (-\infty, \ 1-\sqrt{2}) \cup (1+\sqrt{2}, \ \infty)$. **56. Упатство.** Треба да бидат задоволени условите: $p + 2 < 0$ и $D = 25 - 4(p+2) < 0$. **Одговор.** Не постои реален број p за кој даденият израз да добива негативни вредности за секој $x \in \mathbb{R}$. **57. Упатство.** Коефициентите на квадратниот трином треба да ги задоволуваат условите: $f(1) = 1 - p - (k-1) = 0$, $f(2) = 4 - 2p - (k-1) = 0$ и $D = p^2 + 4(k-1) > 0$. **Одговор.** $p = 3$, $k = 1$.

58. Упатство. Врз основа на Виетовите формули за корените на дадената равенка имаме: $x_1 + x_2 = -(k+2)$, $x_1 x_2 = k$. Од нив имаме: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (k+2)^2 - 2k = k^2 + 4k + 4 - 2k = k^2 + 2k + 4$. **Одговор.** За $k = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$.

59. а) **Упатство.** Дадената неравенка е еквивалентна на $-2 < x^2 + kx + 1 < 2$, односно на системот неравенки: $\begin{cases} x^2 + kx + 1 - 1 < 0 \\ x^2 + kx + 3 > 0 \end{cases}$. Првата неравенка во системот, ниту за една вредност на параметарот k, не може да биде задоволена за секоја вредност на x. **Одговор.** Не постои реален број k за кој дадената неравенка да е задоволена за секоја вредност на x. б) Коефициентите треба да ги исполнуваат условите: $k > 0$, $D = 1 - k < 0$. **Одговор.** За $k \in (1, \ \infty)$. **60. Упатство.** Краевите на дадениот интервал мораат да бидат нули на квадратниот трином $x^2 + kx + k^2 - 1$. Според тоа, параметарот k треба да го задоволува системот равенки $\begin{cases} k^2 - 1 = 0, \\ k + k^2 = 0. \end{cases}$ **Одговор.** $k = -1$. **61.** $[(x+y)+z]^3 = (x+y)^3 + 3(x+y)^2 z + 3(x+y)z^2 + z^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 3x^2z + 6xyz + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + y^3 + z^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2(y+z) + 3y^2(x+z) + 3z^2(x+y) + 6xyz$.

62. Доказ. Со замена $p = \frac{a+b+c}{2}$ равенството го добива видот:

$\frac{a}{4}(-a+b+c)^2 + \frac{b}{4}(a-b+c)^2 + \frac{c}{4}(a+b-c)^2 + \frac{1}{4}(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = abc$. Да замениме $a + b - c = x$, $a - b + c = y$, $-a + b + c = z$. Тогаш ќе биде $x + y = 2a$, $x + z = 2b$, $y + z = 2c$, па равенството го доведуваме во видот $\frac{2a}{8} \cdot z^2 + \frac{2b}{8} \cdot y^2 + \frac{2c}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{4} \cdot xyz = abc$, односно $\frac{1}{8}\left[(x+y)z^2 + (x+z)y^2 + (y+z)x^2 + 2xyz\right] = abc$. Изразот во заградата го разложуваме на множители: $(x+y)z^2 + xy^2 + zy^2 + yx^2 + zx^2 + xyz + xyz =$

$=(x+y)z^2+(yx^2+xy^2)+(zx^2+xyz)+(xyz+y^2z)=(x+y)z^2+xy(x+y)+xz(x+y)+yz(x+y)=$
$=(x+y)\left[z^2+xy+xz+yz\right]=(x+y)\left[y(x+z)+z(x+z)\right]=(x+y)(x+z)(y+z)$. Потоа заменуваме и добиваме:
$\frac{1}{8}(x+y)(x+z)(y+z)=\frac{1}{8}\cdot 2a\cdot 2b\cdot 2c=abc$, што. **63. Доказ.** Со помош на Хорнеровата шема може да се покаже дека важи идентитетот : $(x+y)^5+z^5=(x+y+z)\cdot\left[(x+y)^4-(x+y)^3z+(x+y)^2z^2-(x+y)z^3+z^4\right]$.

64. а) $A=c^3(a-b)+a^3b-a^3c+b^3c-ab^3=c^3(a-b)+ab(a^2-b^2)-c(a^3-b^3)=$
$=c^3(a-b)+ab(a-b)(a+b)-c(a-b)(a^2+ab+b^2)=(a-b)(c^3+a^2b+ab^2-a^2c-abc-b^2c)=$
$=(a-b)\cdot\left[-c(b^2-c^2)+a^2(b-c)+ab(b-c)\right]=(a-b)(b-c)\left[-bc-c^2+a^2+ab\right]=$
$=(a-b)(b-c)\cdot\left[b(a-c)+(a-c)(a+c)\right]=(a-b)(b-c)(a-c)(b+a+c)$ б) **Упатство.** Кренрај ги биномите, помножи, а потоа групирај. **Одговор.** $(a+b)(a+c)(b+c)$.

65. а) $A=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+(a^2+2ab+b^2)=(a+b)^3+(a+b)^2=(a+b)^2(a+b+1)$,

б) $B=(x+y)^4+x^4+y^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+x^4+y^4=$
$=2(x^4+y^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3)=2(x^4+y^4+x^2y^2+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3)=2(x^2+y^2+xy)^2$.

66. Решение. Според Виетовите формули за дадената равенка имаме: $x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2$, а од идентитетот $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$ имаме $x_1^2+x_2^2+x_3^2=0^2-2\cdot 2=-4$.

67. Системот нема решенија. **68.** а) Ако $b(a-1)\neq 0$, системот има решенија: $x=\frac{2b-1}{b(a-1)}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{2ab-4b+1}{b(a-1)}$. Ако $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, тогаш системот содржи две независни равенки и решенијата ќе зависат од еден параметар. Во сите останати случаи системот нема решенија. б) Ако $b(a-1)(a+2)\neq 0$, тогаш $x=z=\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}$, $y=\frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}$. Ако $a=-2$, $b=-2$, системот се сведува на две независни равенки и решенијата ќе зависат од еден параметар. Ако, пак, $a=b=1$, тогаш системот содржи само една равенка. Во сите останати случаи системот нема решенија. **69.** $(4,\ 6)$, $(2,\ 5)$, $(1,\ 8)$, $(3,\ 7)$. **70. Упатство.** Трансформирај го системот во видот $\begin{cases}x^2+y^2=8,\\ x^2y^2=16.\end{cases}$ **Одговор.** $(2,\ 2)$, $(2,\ -2)$ $(-2,\ 2)$, $(-2,\ -2)$, б) $(0,a)$, $(a,\ 0)$ $\left(\frac{a}{2}(1+i\sqrt{3})\ \ \frac{a}{2}(1-i\sqrt{3})\right)$, $\left(\frac{a}{2}(1-i\sqrt{3})\ \ \frac{a}{2}(1+i\sqrt{3})\right)$. **71.** а) $(2,\ 1)$, $\left(-\frac{19}{8},\ -\frac{13}{8}\right)$, б) **Упатство.** помножи ги и собери ги соодветните страни на равенките. Покажи дека $xy=c+\frac{1}{c}$. **Одговор.** $\left(\frac{1}{c}\sqrt{c^2+1},\ \sqrt{c^2+1}\right)$, $\left(-\frac{1}{c}\sqrt{c^2+1},\ -\sqrt{c^2+1}\right)$. **72. Решение.** Нека $(x,\ y,\ z)$ е реално решение на даденият систем. Согласно познатото неравенство $a^2+b^2\geq 2ab$ за броевите 1 и x имаме $\frac{2x}{1+x^2}\leq 1$. Тогаш од првата неравенка $\frac{2x}{1+x^2}\cdot x=y$ следува $x\geq y$. Аналогно, од втората и третата равенка во системот, добиваме $y\geq z$, $z\geq x$. Системот од овие три неравенки е задоволен само во случај кога е $x=y=z$ (1)

Ако во првата равенка на даденият систем замениме $y=x$, таа го добива видот $\frac{2x^2}{1+x^2}=x$, од која добиваме $x_1=0$, $x_2=1$. Согласно (1) на крај добиваме дека даденият систем има две решенија : $(0,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 1,\ 1)$.

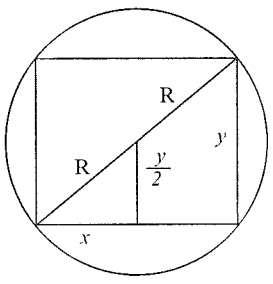
73. (*0, –1, 3*), (*0, 3, – 1*), (*– 1, 0, 3*), (*– 1, 3, 0*), (*3, 0, –1*), (*3, –1, 0*). **74.** а) **Решение.** Согласно познатото разложување: $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$ а имајќи предвид дека важи неравенството $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2\right]\geq 0$ следува дека дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $x+y+z<0$. Според тоа, област на решенијата на ова и на дадената неравенка е полупросторот под рамнината $x+y+z=0$. б) Со неравенката е определена внатрешноста на триаголникот ABC: $A(-2, 1)$, $B(5, -1)$, $C(3, 4)$. в) **Решение.** $\left|\,|x-y|-1\,\right|>2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x-y|-1>2\\|x-y|-1<-2\end{array}\right.\Leftrightarrow|x-y|>3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y>3\\x-y<-3\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y<x-3\\y>x+3\end{array}\right.$. **Одговор.** Областа на сите решенија ја сочинуваат две полурамнини: едната под правата $y=x-3$, и другата над правата $y=x+3$. г) **Упатство.** Дадената неравенка е еквивалентна на вкупноста неравенки : $\left[\begin{array}{l}x^2-2|x|+1>1\\x^2-2|x|+1<-1\end{array}\right.$. **Одговор.** $M=(-\infty,-2)\cup(\infty,2)$ д) $M=\left(-1,\frac{3}{2}\right)$. **75. Упатство.** Скицирај ја претходно областа D. а) $D=\left\{0\leq x\leq 1,\ -\sqrt{x-x^2}\leq y\leq y\sqrt{x-x^2}\right\}$, б) $D=\{1\leq x\leq 4, x\leq y\leq 4\}$,

в) $D=\{0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq x\}\cup\{2\leq x\leq 4,\ 0<y\leq 2\}\cup\{4\leq x\leq 6,\ x<y<2\}$. **76.** Скицирај ја дадената област .

а) $D=\left\{0<x<4, \frac{y}{2}<x<\sqrt{y}\right\}$, б) $D=\left\{0<y<\frac{1}{2},\ 0<x<\sqrt{2y}\right\}\cup\left\{\frac{1}{2}<y<\sqrt{2}, 0<x<1\right\}\cup\left\{\sqrt{2}<y<\sqrt{3}, 0<x<\sqrt{3-y^2}\right\}$.

77. а) Областа определена со неравенката $p^2-4q\geq 0$, односно областа зафатена со границите на параболата $q=\frac{1}{4}\cdot p^2$. б) на параболата $q=\frac{1}{4}\cdot p^2$. в) Множеството точки , што им одговара на решенијата на системот неравенки: 1) $p^2-4q\geq 0$, $p<0$, $q>0$, 2) $p^2-4q\geq 0$, $p>0$, $q>0$, 3) $p^2-4q\geq 0$, $q<0$. г) со точката (*–2* , *1*) , д) полурамнината $q\leq 1$, што е расположена лево од правата $q=1$. **78. Решение.** Со x и y да ги означиме соодветно радиусот на основата и висината на впишаниот цилиндар. Од цртежот 6 на кој е претставен пресекот на цилиндарот, имаме: $\frac{y^2}{4}=R^2-x^2$, од каде $y=2\sqrt{R^2-x^2}$. Волуменот на цилиндарот ќе биде $V=\pi x^2 y=2\pi x^2\sqrt{R^2-x^2}$. Бидејќи 2π е константа, затоа волуменот V ќе добие најголема вредност истовремено кога и изразот $A=x^2\sqrt{R^2-x^2}$ ќе добие најголема вредност. Очигледно е дека A и неговиот квадрат $A^2=x^4\left(R^2-x^2\right)$ ќе достигнат максимум за иста вредност на променливата x . Значи, задачата ја сведуваме на добивање на онаа вредност на x, за која изразот $A^2=4\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\cdot\left(R^2-x^2\right)$ ќе добие



Црт. 6

најголема вредност. Забележуваме дека , збирот на трите променливи множители е константен , затоа A^2 , а според тоа и волуменот V на впишаниот цилиндар ќе добијат најголема вредност при еднаквоста на тие

множители, т.е. при $\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}=R^2-x^2$, од каде $x^2=\frac{2}{3}R^2$ или $x=\sqrt{\frac{2}{3}}R$. **79. Доказ.** Врз основа на односот меѓу аритметичката и геометриската средина имаме: $\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\geq\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}$ или $\frac{3p-(a+b+c)}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$. Но имајќи ги предвид формулите за плоштина на триаголникот $P=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=pr$, добиваме: $\frac{3p-2p}{3}\geq\sqrt[3]{\frac{P^2}{p}}=\sqrt[3]{\frac{p^2r^2}{p}}=\sqrt[3]{pr^2}$ или $\frac{p}{3}\geq\sqrt[3]{pr^2}$, односно $\frac{p^3}{27}\geq pr^2$ од каде $p^2\geq 27r^2$, штд. **80. Доказ.** Нека r е радиус на впишаната кружница во триаголникот ABC. Тогаш страната на рамностраниот триаголник $A_1B_1C_1$ што е вписан во кружницата, ќе биде еднаква на $r\sqrt{3}$, а неговиот периметар – на $3r\sqrt{3}$. Ако периметарот на триаголникот ABC го означиме со $2p$, тогаш задачата се сведува на докажување на неравенството $2p\geq 6r\sqrt{3}$, или $p\geq 3r\sqrt{3}$ или $p^2\geq 27r^2$, а ова неравенство е докажано во претходната задача 79. **81. Решение.** Втората дропка може да се запише:

$$\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}-(1-x)}=\frac{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}-\left(\sqrt{1-x}\right)^2}=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}.$$ Потоа имаме:

$$\left[\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right]\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=$$

$$=\frac{2x}{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}=\frac{2\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)}{\left(1+x+1-x-2\sqrt{1-x^2}\right)}=-1.$$ **82. Доказ.** Да означиме $\sqrt[3]{-\frac{q}{p}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=u$,

$\sqrt[3]{-\frac{q}{p}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=v$. Тогаш $x=u+v$. Оттука $x^3=(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$. Но $u^3+v^3=-q$, $uv=-\frac{p}{3}$. Затоа $x^3=-q-px$, или $x^3+px+q=0$, штд. **83. Доказ.** Да ставиме $\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d}=\lambda$. Тогаш $A=a\lambda$, $B=b\lambda$, $C=c\lambda$, $D=d\lambda$. Оттука следува: $\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{\lambda}(a+b+c+d)$ (1)

Но $A+B+C+D=\sqrt{\lambda}(a+b+c+d)$, односно $\lambda=\frac{A+B+C+D}{a+b+c+d}$, или $\sqrt{\lambda}=\frac{\sqrt{A+B+C+D}}{\sqrt{a+b+c+d}}$. Заменувајќи го $\sqrt{\lambda}$ во (1) го добиваме равенството што треба да го докажеме. **84. Доказ.** Да ставиме $\sqrt[3]{2}=p+\sqrt{q}$. Оттука $2=p^3+3pq+3p^2\sqrt{q}+q\sqrt{q}=p^3+3pq+(3p^2+q)\sqrt{q}$. Бидејќи q не е полн квадрат, тогаш мора да е полн квадрат $3p^2+q=0$, кое нешто е невозможно. **85. Доказ.** Равенството да го запишеме во видот $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=-\sqrt[3]{c}$ и двете негови страни да ги степенуваме на трет степен: $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3=\left(-\sqrt[3]{c}\right)^3$. Добиваме: $a+b+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}=-c$ или $a+b+c=-3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)=3\sqrt[3]{ab}\sqrt[3]{c}=3\sqrt[3]{abc}$. Потоа двете страни ги степенуваме на трет степен и го добиваме равенството $(a+b+c)^3=27abc$, штд. **86.** а) **Решение.** Именителот на

дропката претставува збир од првите четири члена на геометриска прогресија, чиј количник е $\sqrt[4]{3}$. Согласно формулата за збир на членови на геометриска прогресија, имаме: $\frac{1}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{3^2}+\sqrt[4]{3^3}+\sqrt[4]{3^4}}=\frac{1}{\frac{3\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}-1}}=\frac{\sqrt[4]{3}-1}{2\sqrt[4]{3}}=$

$=\frac{\left(\sqrt[4]{3}-1\right)\sqrt[4]{3^3}}{2\cdot 3}=\frac{3-\sqrt[4]{27}}{6}$. б) $\frac{1}{\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2}}=\frac{\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}}{\sqrt[8]{3}-\sqrt[8]{2}}=\frac{\left(\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\left(\sqrt[8]{3}+\sqrt[8]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

87. Решение. Согласно формулата за $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ имаме

$$\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{32-24}}{2}}+\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{32-24}}{2}}=\sqrt{\frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{3\sqrt{2}}+\sqrt{\sqrt{2}}=\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{2}.$$

88. Решение. $A=\frac{x^2-2x\sqrt{3}+3-\sqrt[3]{4}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\left(x-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt[3]{4}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}\right)^2-\sqrt[3]{4}}{1-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{4}}{1-\sqrt{3}}=0$.

89. Решение. Да ставиме $\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$. Ги квадрираме двете страни и добиваме $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$, од каде $x+y+z=a$, $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, $2\sqrt{xz}=\sqrt{c}$, $2\sqrt{yz}=\sqrt{d}$ (1) За да ја одредиме бараната релација меѓу a, b, c, d од равенствата (1) треба да ги исклучиме x, y и z. За таа цел од (1) добиваме: $xy=\frac{b}{4}$, $xz=\frac{c}{4}$, $yz=\frac{d}{4}$ и $xyz=\frac{\sqrt{bcd}}{8}$. Оттука: $x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}$, $z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}$ (2)

Па од (1) и (2) го добиваме барањот услов (релација): $a=x+y+z=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bc}{d}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{bd}{c}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{cd}{b}}=\frac{bc+bd+cd}{2\sqrt{bcd}}$,

односно $a=\frac{bc+bd+cd}{2\sqrt{bcd}}$, каде bcd е точен квадрат. **90. Доказ.** Треба да докажеме дека важи $G=\sqrt{AH}$. Од $\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ добиваме дека $H=\frac{2ab}{a+b}$. Навистина: $\sqrt{AH}=\sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}}=\sqrt{ab}=G$, итд. **91. Решение.** Равенката ја запишуваме во видот $y=\frac{5x^2-10x+1}{x^2+6x+11}=\frac{5(x-2)^2+10(x-2)+1}{\left(x^2-2\right)^2+10(x-2)+5}$. Воведуваме $\sqrt{x-2}=y$. Тогаш имаме: $\sqrt{x-2}=\frac{5y^4-10y^2+5}{y^4+10y^2+5}$ или $y^5-5y^4+10y^3-10y^2+5y-1=0$ односно $(y-1)^5=0$ или $y=1$. А од $\sqrt{x-2}=1$ добиваме $x=3$. **92. Решение.** Равенаката ја трасформираме во видот: $\left[\left(\sqrt{x}-\frac{5}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]^4+\left[\left(\sqrt{x}-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]^4=1$. Да означиме $\sqrt{x}-\frac{5}{2}=y$, тогаш $\left(y+\frac{1}{2}\right)^4+\left(y-\frac{1}{2}\right)^4=1$, или по средувањето $2y^4+3y^2-\frac{7}{8}=0$. Ја решаваме биквадратната равенка и добиваме: $y^2=\frac{-3\pm 4}{4}$, од каде $y^2=\frac{1}{4}$ или $y=\pm\frac{1}{2}$. Потоа од $\sqrt{x}-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$ имаме $\sqrt{x}=3$, $x_1=9$; а од $\sqrt{x}-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$ добиваме $\sqrt{x}=2$, $x_2=4$.

93. Решение. Двете страни на равенката ги степенуваме на трет степен и добиваме:

$\sqrt[3]{x(2x-3)}\cdot\sqrt[3]{12(x-3)}=3(x-1)$. Повторно степенуваме и по средувањето ја добиваме равенката $4x(2x-3)(x-1)=9(x-1)^3$, или $(x-1)\left[4x(2x-3)-9(x-1)^2\right]=0$, или $(x-1)\left(x^2-6x+9\right)=0$, или $(x-1)(x-3)^2=0$. Оттука $x_1=1$, $x_2=3$. Проверката потврдува дека и двата корена ја задоволуваат дадената равенка.

94. Решение. Проверуваме, $x=1$ не е решение на равенката. По делењето на двете страни на равенката со $\sqrt[n]{(1-x)^2}$ ја добиваме еквивалентната равенка $\sqrt[n]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}-1=\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}$. Да означиме $\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}=t$ ја добиваме равенката $t^2-1=t$ или $t^2-t-1=0$. Оттука $t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Бидејќи t_2 е негативен број, затоа ако n е парен број, x_2 го отфрламе. Според тоа, ако $n=2k$, имаме $\sqrt[n]{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, или $\frac{1+x}{1-x}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, или $x=\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-1\right]:\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1\right]$. А во случај кога n е непарен број равенката има две решенија $x_{1,2}=\left[\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^n-1\right]:\left[\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)+1\right]$. **95. Решение.** Равенката ја запишуваме во видот $\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2=0$,

$\sqrt{\frac{x-1}{x}}\left(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)=0$. Оттука $\sqrt{\frac{x-1}{x}}=0$, односно $x_1=1$. Потоа $\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-1=0$ го трансформираме во видот: $\sqrt{x+1}-1=\sqrt{\frac{x-1}{x}}$, $\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2=\frac{x-1}{x}$, $x+1-2\sqrt{x+1}+1=\frac{x-1}{x}$, $x^2-2x\sqrt{x+1}+x+1=0$,

$\left(x-\sqrt{x+1}\right)^2=0$, $x-\sqrt{x+1}=0$, $x^2-x-1=0$, $x_{2,3}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. **Одговор.** $x_1=1$, $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

96. Решение. Равенката ја запишуваме во видот $\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right)}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}=\sqrt{ab}$, или (бидејќи $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\neq 0$), $\sqrt{(x+a)(x+b)}=\sqrt{ab}$, или $x^2+(a+b)x=0$, од каде $x_1=0$, $x_2=-(a+b)$. **Одговор.** $x_1=0$, (при $a>0$, $b>0$) $x_2=-(a+b)$ (при $a<0$, $b<0$). **97. Решение.** Сите членови ги делиме со $\sqrt[3]{(a-x)^2}$ и ја добиваме равенката $\left(\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}\right)^2-5\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}+4=0$, од каде $\left(\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}\right)_{1,2}=\frac{5\pm 3}{2}$.

а) $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}=1$, $a+x=a-x$, $x_1=0$, б) $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}=4$, $\frac{a+x}{a-x}=64$, $a+x=64a-64x$, т.е. $x_2=\frac{63a}{65}$.

98. Упатство. Квадрирај ги двете страни на равенката, пренеси ги сите членови на левата страна и извлечи го множителот $\sqrt{a+x}$ пред заграда, ќе ја добиеш равенкта $\sqrt{a+x}\left(4\sqrt{a+x}+4\sqrt{a-x}-\sqrt{x}\right)=0$. Од $\sqrt{a+x}=0$ имаме $x=-a$. Проверката покажува дека $x_1=-a$, (ако $a\geq 0$) ја задоволува дадената равенка; но $x=-a$ (ако $a<0$) таа нема смисла. Покажи дека втората равенка $4\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)=\sqrt{x}$ во плето на реалните броеви нема решенија. **99. Решение.** Равенката ја доведуваме во видот:

$\left(\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{12\sqrt{x-2}}{3}-24\right)+\left(\frac{4}{\sqrt{y-1}}+\frac{2\sqrt{y-1}}{2}-4\right)=0$, $12\left(\frac{3}{\sqrt{x-2}}+\frac{\sqrt{x-2}}{3}-2\right)+2\left(\frac{2}{\sqrt{y-1}}+\frac{2\sqrt{y-1}}{2}-4\right)=0$,

или $12\frac{\left(3-\sqrt{x-2}\right)^2}{3\sqrt{x-2}}+2\frac{\left(2-\sqrt{y-1}\right)^2}{2\sqrt{y-1}}=0$. Очигледно с дека левата страна на равенката може да има вредност нула само кога е: $3-\sqrt{x-2}=0$ и $2-\sqrt{y-1}=0$. **Одговор.** $x=11,\ y-5$. **100. Упатство.** Првата равенка квадрирај ја , втората – степенувај ја на трет степен, а третата – по пресесувањето на втотиот член на десната страна , квадрирај ја . Така ќе го добиени системот линеарни равенки: $\begin{cases}4x+y-3z=-3\\5x+2y+z=1{,}5\\6x-y-z=0\end{cases}$. **Одговор.** $x=\frac{9}{58},\ y=-\frac{6}{29},\ z=\frac{33}{29}$. б) **Упатство.** Системот има смисла само ако $a\ge 0$. Првата равенка ја квадрираме и добиваме: $\sqrt{x^2-y^2}=8a-x$ (1)

Тој израз го заменуваме во втората равенка и добиваме: $\sqrt{x^2-y^2}=\left(\sqrt{41}+5\right)a-x$ (2) Равенките (1) и (2) ги квадрираме одделно и од нив добиваме: $y^2=-64a^2+16ax$, (3) $y^2=\left(\sqrt{41}+5\right)^2a^2-2\left(\sqrt{41}+5\right)ax$. (4)

Ја исклучуваме променливата y и добиваме: $\left(130+10\sqrt{41}\right)a^2=\left(26+2\sqrt{41}\right)ax$, од каде $x=5a$. Од (3) добиваме $y=\pm 4a$, потоа вршиме проверка . **Одговор.** $x_1=5a,\ y_1=4a$; $x_2=5a,\ y_2=-4a$. **101.** а) **Упатство.** При $x>0$ неравенката е еквивалентна на $1-\sqrt{8x-3}\ge 4x$, или на $\sqrt{8x-3}\le 1-4x$, односно на системот неравенки : $\begin{cases}8x-3\ge 0\\1-4x\ge 0\\8x-3\le(1-4x)^2\end{cases}$. Овој систем нема решенија, бидејќи првите две неравенки се противречни. При $x\le 0$ изразот $\sqrt{8x-3}$ не постои. **Одговор.** Дадената неравенка нема решенија. б) **Упатство.** Дадената неравенка или $x^2-1\ge(x-1)\sqrt{13-x^2}$ (1) а) При $x\ge 1$ е еквивалентна на $x+1\ge\sqrt{13-x^2}$, а ова е еквивалентна на на системот $\begin{cases}13-x^2\ge 0\\13-x^2<(x+1)^2\end{cases}$, од каде $2\le x<\sqrt{13}$. б) При $x<1$ неравенката (1) е еквивалентна на $x+1\le\sqrt{13-x^2}$ а оваа е еквивалентна на вкупноста од системите неравенки: $\begin{cases}13-x^2>0\\x+1<0\end{cases}$, $\begin{cases}x+1>0\\(x+1)^2\le 13-x^2\end{cases}$, која има решенија $-\sqrt{13}<x\le 1$. **Одг.** $-\sqrt{13}<x\le 1,\ 2\le x<\sqrt{13}$,односно $M=\left(-\sqrt{13},1\right]\cup\left[2,\sqrt{13}\right)$.

102. а) **Упатство .** Дсфинициоиата област на неравенката е $x\ge-\frac{1}{2}$. Дадената неравенка да ја запишеме во видот $\frac{2x}{\sqrt{2x+9}}<\frac{2x}{\sqrt{1+2x}+1}$ или $x\left(\sqrt{1+2x}+1-\sqrt{2x+9}\right)<0$. Оваа неравенка е еквивалентна на вкупноста од системите неравенки: $\begin{cases}\sqrt{1+2x}+1<\sqrt{2x+9}\\x>0\end{cases}$, $\begin{cases}\sqrt{1+2x}+1>\sqrt{2x+9}\\-\frac{1}{2}\le x<0\end{cases}$. Првиот систем има решенија $0<x\ge\frac{45}{8}$, а

вториот систем нема решенија . **Одговор.** $M=\left(0,\frac{45}{8}\right)$. б) **Упатство.** Неравенката $\sqrt{x}>1-\sqrt[3]{1-x}$ ја квадратираме и добиваме $x>\left(1-\sqrt[3]{1-x}\right)^2$. Со смената $\sqrt[3]{1-x}=y$ $\left(\text{или } x=1-y^3\right)$ таа го добива видот $1-y^3>(1-y)^2$ или $y^3+y^2-2y<0$, или $y(y+2)(y-1)<0$. Оттука $y<-2$, $0<y<1$ или $\sqrt[3]{1-x}<-2$, $0<\sqrt[3]{1-x}<1$, од каде : $x>9$, $0<x<1$. **Одговор.** $M=(0,1)\cup(9,\infty)$. **103.** а) **Решение.** Да ја запишеме неравенката во видот: $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+x+2\sqrt{x}\sqrt{x+7}+(x+7)<42$, односно $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+7}\right)^2+\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+7}\right)-42<0$. Ако ставиме $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=y$, ја добиваме квадратната неравенка $y^2+y-42<0$, која има решенија $-7<y<6$. Така ја добиваме неравенката $-7<\sqrt{x}+\sqrt{x+7}<6$ или само $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}<6$ (бидејќи збирот $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}$ е секогаш позитивен) . По квадрирањето ја добиваме неравенката $2\sqrt{x}\sqrt{x+7}<29-2x$,која пак е еквивалентна на системот $\begin{cases}4x^2+28x<841-116+4x^2\\29-2x>0 \quad x+7\geq 0,\quad x\geq 0\end{cases}$. **Одговор.** $0\leq x<\frac{841}{144}$.

б) **Решение.** При $1-x<0$, односно $x>1$ дадената неравенка е еквивалентна на $\sqrt{x+5}>1-x$, а оваа е еквивалентна на системот $\begin{cases}x+5\geq 0\\1-x<0\end{cases}$, т.е. има решенија $M_1=(1,\infty)$. При $1-x>0$, односно $x<1$ дадената неравенка е еквивалентна на $\sqrt{x+5}<1-x$, а оваа е еквивалентна на системот: $\begin{cases}x+5\geq 0\\1-x\geq 0\\x+5<(1-x)^2\end{cases}$. Оттука $-5\leq x<-1$. **Одговор.** $M=[-5,-1)\cup(1,\infty)$. **104.** а) **Упатство.** Ги собираме дропките на левата страна и добиваме дека дадената неравенка е еквивалентна на системот неравенки; $\begin{cases}\frac{-x^2+2x+1}{2\left(x^2-1\right)}\geq 0\\2-x^2\geq 0\end{cases}$. **Одговор.** $M=\left(-1,1-\sqrt{2}\right]\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$. б) **Решение.** Дефиниционата област на неравенката ја одредуваме од $2-x^4\geq 0$, од каде добиваме $D=\left[-\sqrt[4]{2},\ \sqrt[4]{2}\right]$. Ќе разгледаме два случаја : а) При $0<x\leq\sqrt[4]{2}$ неравенката е еквивалентна на $\sqrt{2-x^4}<x$ или $2-x^4<x^2$, или $x^4+x^2-1>0$, или $\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)>0$ или $(x-1)(x+1)>0$ и има решение : $M_1=\left(1,\ \sqrt[4]{2}\right]$, б) При $-\sqrt[4]{2}\leq x<0$ неравенката е еквивалентна на неравенката $\sqrt{2-x^4}>x$, која пак е задоволена за секоја вредност на $x\in\left[-\sqrt[4]{2},\ 0\right)$. **Одговор.** $D=\left[-\sqrt[4]{2},\ 0\right)\cup\left(1,\ \sqrt[4]{2}\right]$.

105. а) **Упатство.** Неравенкат има дефиниционо област $D=\left[\frac{4}{5},\infty\right)$. Забележуме дека при: $x<1$ секој собирок на левата страна е поголем од секој собирок на десната страна, а при $x>1$ е обратно, т.е. неравенката е противречна . **Одговор.** $M=\left[\frac{4}{5},1\right)$. б) **Решение.** Неравенката има дефиниционо област $D=[-1,\ 1]$. Ја квадрираме неравенката и добиваме $2\sqrt{1-x^2}\geq -1$, која е задоволена за секоја реална вредност на $x\in D$. **Одговор.** $M=[-1,\ 1]$. **106.** а) **Упатство.** Од условот $x^2+3x-28\geq 0$ добиваме дека неравенката има

дефиниционa областa $D=(-\infty,\ -7]\cup[4,\ \infty)$. Во неа дадената неравенка е еквивалентна на вкупноста од неравенката $x+1<0$ и системот неравенки $\begin{cases} x^2+3x-28>(x+1)^2 \\ x+1\geq 0 \end{cases}$. **Одговор.** $M=(-\infty,-7]\cup(29,\infty)$

б) **Упатство.** Неравенката има дефиниционa областa $D=[0,\ 1]\cup\{-1\}$. Во неа неравенката е еквивалентна на $\left(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2+x}\right)^2<1$. **Одговор.** $x=-1$. **107.** а) **Решение.** Неравенката ја доведуваме во видот $\sqrt{\frac{x-1}{x}}\left(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)>0$, која е еквивалентна на системот $\begin{cases} \sqrt{x+1}>1+\sqrt{\frac{x-1}{x}} \\ x\neq 1 \end{cases}$. При $x+1>0$ правата неравенка ја квадрираме и по мало средување го добиваме системот : $\begin{cases} \frac{x^2-x+1}{x}>2\sqrt{\frac{x-1}{x}} \\ x\neq 1,\quad x\geq -1 \end{cases}$ (1)

Бидејќи $x^2-x+1>0$ важи за секој $x\in\mathbb{R}$, затоа првата неравенка во (1) ќе биде задоволена само за $x>0$, а десната страна секогаш е позитивна. Според тоа системот (1) може да се запише : $\begin{cases} x^2-x+1>2\sqrt{x(x-1)} \\ x\neq 1,\quad x>0 \end{cases}$. Да означиме $\sqrt{x(x-1)}=y$. Тогаш првата неравенка ќе гласи $y^2-2y+1>0$, или $(y-1)^2>0$, од каде $y\neq 1$, односно $\sqrt{x(x-1)}\neq 1$. Според тоа, ќе важи системот: $\begin{cases} x^2-x-1\neq 0 \\ x(x-1)>0,\quad x>0 \end{cases}$ кој пак е еквивалентен на $\begin{cases} x\neq\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ x>1 \end{cases}$. **Одговор.** $M=(1,\ \infty)\setminus\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. б) **Упатство.** Дадената неравенка е еквивалентна на системот неравенки $\begin{cases} (x-3)(2-x)\geq 0 \\ 3+2x>0 \\ (x-3)(2-x)<(3+2x)^2 \end{cases}$. **Одговор.** $M=[2,\ 3]$. **108.** а) **Упатство.** Дадената неравенка е еквивалентна на системот $\begin{cases} 4-\sqrt{1-x}>2-x \\ x\leq 1 \end{cases}$. **Одговор.** $\frac{-5+\sqrt{13}}{2}<x\leq 1$.

б) **Упатство.** Дадената неравенка е еквивалентна на системот $\begin{cases} \sqrt{x-5}\geq 1+\sqrt{9-x} \\ x\leq 9,\quad x\geq 5 \end{cases}$. **Одговор.** $\frac{14+\sqrt{7}}{2}\leq x\leq 9$, или $M=\left[\frac{14+\sqrt{7}}{2},\ 9\right]$. **109.** а) **Решение.** Дефиниционата област на неравенката е $D=[-a,\ a]$. При $x\geq -1$ дадената неравенка е еквивалентна на неравенката $a^2-x^2>(x+1)^2$, или на $2x^2+2x-(a^2-1)<0$. Дискриминантата на квадратниот трином е $D=1+2(a^2-1)=2a^2-1$. Оттука : ако $2a^2-1<0$, односно ако $0\leq a\leq\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, тогаш неравенката нема решенија. Ако $2a^2-1>0$, поточно ако $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1$, тогаш

$\frac{-1-\sqrt{2a^2-1}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$. Ако $a = 1$, тогаш $-1 < x < 0$. Ако пак $a > 1$, тогаш $a \le x < \frac{-1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$.

б) **Решение.** Дефиниционата област на неравенката е $|x| > a$. Очигледно е дека, ако $a \le 0$, тогаш неравенката нема решенија. Ако е $a > 0$, тогаш неравенката е еквивалентна на $\frac{x+a}{x-a} < a^2$, која при $x - a < 0$ е еквивалентна на $x + a < a^2(x-a)$ или $(a^2-1)x < a(a^2+1)$. Оттука ако $0 < a < 1$ имаме $\frac{a(a^2+1)}{a^2-1} < x \le -a$, а ако $a > 1$, тогаш $x \le -a$ и $x < \frac{a(a^2+1)}{a^2-1}$. Ако $a = 1$, тогаш $x \le -1$. **110. Доказ.** Треба да докажеме дека $\frac{\sqrt[n]{n+1}}{n-\sqrt[n]{n}} < 1$, ($n = 2, 3, 4, \ldots$) . Имаме : $\frac{\sqrt[n]{n+1}}{n-\sqrt[n]{n}} = n(n-1)\sqrt{\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}} = n(n-1)\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}} = n(n-1)\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}} = n(n-1)\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{n+1}} <$

(согласно неравенството (6) на Непер во § 71) $< n(n-1)\sqrt{3^n\cdot\frac{1}{n+1}} \le 1$, бидејќи $\frac{3}{n+1} \le 1$, ако $n \ge 2$. **111. Доказ.** Во неравенството на Бернули $(1+h)^n \ge 1+nh$ да замениме $1+h$ со $\sqrt[n]{a}$, па добиваме $1+n\left(\sqrt[n]{a}-1\right) < \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ или $n\sqrt[n]{a} - n < a - 1$, од каде $\sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a-1}{n}$, што. б) **Доказ.** $\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} = \sqrt{\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}} =$

$= \sqrt{\frac{(1\cdot n)[2\cdot(n-1)]\ldots[k\cdot(n-k+1)]\ldots(n\cdot 1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}}$. Но $k(n-k+1) = kn - k(k-1) = kn - n - k(k-1) + n = (k-1)(n-k) + n$. Оттука гледаме дека за секој број k што ги задоволува неравенствата $1 \le k \le n$ важи изразот $k(n-k+1) > n$. Затоа ќе биде $\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n} \ge \sqrt[n]{\frac{n^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}} = \frac{n}{\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}}$. Оттука $\left(\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\right)^2 \ge n$ и $\sqrt[n]{n!} \ge \sqrt[n]{n}$. Ако $n > 2$, тогаш $\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{n}$. **112.** а) **Доказ.** $\frac{(x^2+1)+1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 2 + 2 = \left(\sqrt[4]{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}\right)^2 + 2 \ge 2$.,б)

Доказ. $\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{y^3}}{\sqrt{xy}} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\frac{\sqrt{x^2}-\sqrt{xy}+\sqrt{y^2}}{\sqrt{xy}} = \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} =$

$= \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left[1+\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{xy}}\right] > \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. И. Новоселов: Специалъный курс элементарной алгебры, изд. „Бысшая школа“, Москва - 1965

2. А. Г. Курош Курс высшей алгебры, изд. „Наука“, Москва - 1968.

3. Драгиша А. Стефановић: Елементарна и векторска алгебра за студенте виших школа, Београд - 1968

4. И. С. Соминский: Элементарна алгебра - дополнителъныи́ й курс, издателъство „Наука“, Москва - 1967.

5. Ефтим Божоров: Полиноми, „Народна просвета“, София - 1976.

7. Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер, С. И. Шварцбурд, и др. Алгебра для IX - X классов. изд. „Просвещение“, Москва - 1972.

8. Ѓ. Чупона: Алгебарски структури и реални броеви, изд. „Просветно дело“, Скопје - 1976

9. Ѓ. Чупона, Б. Трпеновски: Предавања по алгебра, кн. II, Скопје - 1973.

10. А. Самарџиски, Н. Целакоски: Решение задачи по алгебра I, изд. Универзитет во Скопје, Скопје - 1968.

11. Б. Трпеновски, Н. Целакоски, Ѓ. Чупона: Виша математика, кн. 1, изд. „Просветно дело“, Скопје - 1995.

12. Иван Бандић: Виша алгебра за студенте виших педагошких школа, изд. „Знање“, Београд - 1951.

13. В. А. Кречмар: Задачник по алгебре, изд. „Наука“, Москва - 1968.

14. Г. Тренчевски: алгебра за I клас на средното образование, изд. „Просветно дело“, Скопје - 1974.

15. Г. Тренчевски: Алгебра за III клас математичко-физичка насока, изд. „Просветно дело“, Скопје - 1977.

16. Д. К. Фадеев, И. С. Соминский: Зборник задач по высшей алгебре, изд. „Наука“, Москва - 1968.

17. В. С. Кущенко: Сбирник конкурсных задач по математике, изд. „Судостроение“, Ленинград - 1967.

18. И. Х. Сивашинский: Задачник по элементарной математике, изд. „Наука“, Москва - 1968.

19. Е. Б. Ваховский; А. А. Рывкин: Задачи по элементарной математике, изд. „Наука“, Москва - 1969.

20. Н. С. Залогин: Конкурсны е задачи по математике, изд. „Техника“, Киев - 1964.

21. Н. П. Антонов, М. Я. Вигодский и др.: Сборник задач по Элементарнои математике, Москва - 1962.

22. К. У. Шахно. Сборник задач по Элементарной математике повишеной трудности, изд. „Высшая школа“, Минск - 1962.

ПОКАЗАТЕЛ НА ПОИМИ И ИМИЊА

Алгебарска дропка, 111
–, нескратлива, 112
–, проста од прв вид, 122
–, проста од втор вид, 122
–, проширување на 112
–, скратување на 112

алгебарска операција 6
–, ирационална 6
–, рационална 6

алгебарски израз
–, ирационален 8
–, рационален 8

аглоритам за делење на полиноми со остаток 57

аналитички израз 6
–, алгебарски 8
–, трансцедентен 8

апсолутна вредност на комплексен број 30

аргумент 12
– на комплексен број 30

Биекција 25

биномни коефициенти 228

Виетови формули 83

вкупност равенки 261

вредност
–, нумеричка 7
– на аналитички израз 9
– на полином 47
– на променлива 7

Гаусов метод на решавање на систем линеарни равенки 276

Делење на полиноми со остаток 57, 235

деливост на полиноми 63, 233

дефиниционa област (домен)
– на променлива 7
– на аналитички израз 10, 463
– на неравенство 174

дробно рационална неравенка 199

Евклидов алгоритам 67

ејзенштенов критериум 91

еквивалентност на
– неравенките 179
– системите неравенки 179

елемент
–, инверзен 21
–, неутрален 20, 118
–, спротивен 20

Заемно прости полиноми 66

збир на полиноми 52, 224

закон (својство) на
– комутативност 20, 116
– асоцијативност 20, 116
– дистрибутивност 22, 116

Идентични изрази 11

идентични неравенства 175

идентични полиноми 51, 219

идентитет
–, апсолутен 11
–, на Лагланж 231, 162
–, неапсолутен 11
–, условен 232

имагинарна единица 15

ирационална равенка
– во полето на комплексните броеви 457
– во полето на реалните броеви 463

ирационални неравенки 489

интервал 175

Квадратна равенка
–, дискриминанта на 136
– со комплексни коефициенти 136
– со реални коефициенти 136

Коефициент на полином 45
–, водечки 45
–, слободен 45

интерполационен полином
– на Лагранж 105
– на Њутн 105

количник на полиноми 111

комплексен број 15
–, алгебарска форма на 15
–, имагинарен дел на 15
–, реален дел на 15
–, спротивен 16
–, конјугиран 16
–, квадратен корен на 22
–, тригонометриска форма на 30

комплексна рамнина 26

конвексен полиедар 333

конјугиран ирационален множител 414

квадратна неравенка 191

константа 7

координатен систем
–, поларен 29
–, правоаголен Декартов 29

координати
–, поларни 29
–, на точка 337

корени на единицата
–, n-ти 41
–, примитивни n-ти 41

коренување на комплексни броеви 37

кубна равенка
–, дискриминанта на 143
– со комплексни коефициенти 140
– со реални коефициенти 143

Лексиконско подредување 217

линеарна комбинација 335

линеарни неравенки
– со една променлива 185
– со две променливи 322
– со три променливи 330
–, систем 187, 324

линеарно прогарамирање 339

логаритам 454

Мешан систем од равенки и неравенки 356

метод на
–, Кронекер 92
–, Ферари 147
– математичка индукција 365
– засилување на неравенството 364
– допуштање на стротивното 364
– контролни точки 323
– области во рамнината 359
– групирање на членовите 240
– посебни вредности 128
– дополнување до полн квадрат 240
– неопределени коефициенти 72

множество на
– комплексни броеви
– n-ти корени на единицата 174
– решенија

моаврова формула 36

модул на комплексен број 30

моном
–, нула 214
– од нулти степен 214

Најголем заеднички делител на два полинома 66
n- димензионален простор 337
–, хипер рамнина во 337

неравенки
–, систем 178
–, вкупност 178
– со апсолутни вредности 359

неравенства
–, бројни 173
–, еднакво насочени 173
–, спротивно насочени 173
–, функционални 174

неравенство на
– Бернули 365
– Коши-Шварц 368, 372
– Непер 373

низа од броеви
–, граница на 440
–, дивергентна 440
–, конвергента 440
–, монотона 439
–, неограничена 440
–, ограничена 439
–, опаѓачка 439
–, општ член на 439
–, растечка 439

низа на стегачки интервали 446

нормален вид на корените 406

нули на полином 75
–, еднократни 75, 77
–, повеќекратни 76

нултно решение 335

Основна теорема
– на алгебрата 80
– за симетрични полиноми 249

основни симетрични полиноми 248

област
– од рамнината 343
– од просторот 337
–, затворена 346
–, отворена 346

операција
–, алгебарска 6
–, трансцедентна 6

оска
–, поларна 29

Параметар 12

паскалов триаголник 228

поле на
– комплексни броеви 22
– рационални дропки 114

полином
– од една променлива 45
– од n-ти степен 45
– од нулти степен 45, 215
–, ненула 46
–, нула 40, 47, 50, 215
–, комплексен 46
–, рационален 46
–, реален 46
–, степен на 215
–, симетричен 247
–, целоброен 46, 91
–, неразложлив 89
–, разложлив 88
–, хомоген 216, 247

полином
– со комплексни коефициенти 46
– со рационални коефициенти 46
– со реални коефициенти 46, 85
– со цели коефициенти 46, 92
–, каноничен вид на 45
–, слободен член на 45

производ на полиноми 53, 224

прстен на полиноми 54, 221

последица на
– неравенка 179

приближна вредност на корен 393

променлива 6
–, вредност на 6
–, домен на 6

Равенка
–, биквадратна 161
–, биномна 156
–, можна 260
–, дробно рационална 167
–, невозможна 260
–, противречна 260
–, полиномна 133
–, реципрочна 151
–, симетрична 151
–, триномна 161
–, хомогена линеарна 283

равенка со
– апсолутни вредности 202
– бројни коефициенти 133
– општи коефициенти 133

радикал 387

разложување на множители 80, 237

равенка од четврти степен 147
–, редуцирана 147

равенки
–, вкупност 261
–, систем 261, 283

решенија на равенка
–, изгубени 263
–, придобиени 168, 263

рационален израз
–, цел 8
–, дробен 8, 111

рационална дропка од
– една променлива 111
– повеќе променливи 242

рационализација на именителот на дропка 414

Сведување на слични членови 215

симетрични дропки 256

систем линеарни равенки
–, невозможен 276
–, неопределен 276
–, определен 276

систем линеарни неравенки
–, со две променливи 324
–, со три и повеќе променливи 333
–, нормален 335

систем симетрични полиномни равенки 305

систем ирационални равенки 483

слични корени 406

слични мономи 214

степен со показател
– нула 427
– ирационален број 453
– рационален број 434
– цел негативен број 428

средина
–, аритметичка 367
–, геометриска 367
–, квадратна 368
–, хармониска 368

степенски суми 254

степенување на комплексни броеви 36

Теорема
– на Безу 60, 236
–, Гаусова 80
– за идентификација 78
– за факторизација 75

трансформации на
– полиномот 98
– именителот на дропка 414
– ирационални изрази 404, 421

тристрано ќоше 333

Форма
–, квадратична 216
–, кубна 216
–, линеарна 216

формула
– на Кардано 141
–, Моаврова 36
–, Њутнова биномна 227

формули
– за скратено множење 226

Хомогени квадратни равенки со две променливи 299

хорнерова шема 47

Целовредностен полином 48

СОДРЖИНА

ВОВЕД

§1. Аналитички изрази 5
1.1. Користење на букви за означување на броеви 5
1.2. Аналитички изрази. Дефиниција и видови 6
1.3. Видови на аналитички изрази 8
1.4. Дефиниционa област на аналитичките изрази 9
1.5. Трансформации на аналитичките изрази 11
1.6. Аналитички изрази со параметри 12

Глава I

КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

§2. Алгебарска форма на комплексните броеви 15
2.1. Дефиниција и основни видови 15
2.2. Операции со комплексни броеви 17
2.3. Поле на комплексни броеви 20
2.4. Квадратен корен од комплексен број 22
§3. Геометриско претставување на комплексните броеви 25
§4. Тригонометриска форма на комплексните броеви 29
§5. Операции со комплексни броеви во тригонометриска форма 33
5.1. Множење и делење на комплексни броеви 33
5.2. Степенување на комплексни броеви. Моарова формула 36
5.3. Коренување на комплексни броеви 37
5.4. n-ти корен на единицата 40

Глава II

ПОЛИНОМИ ОД ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

§6. Основни поими за полиноми 45
§7. Хорнерова шема 47
§8. Идентичност на полиномите 50
8.1. Полином идентички еднаков на нула 50
8.2. Идентични полиноми со една променлива 51
§9. Операции со полиноми 52
9.1. Собирање и множење на полиноми 52
9.2. Делење на полиноми со остаток 57
9.3. Делење на полиноми со биномот x-c. Теорема Безу 59

§10. Деливост на полиноми 63
§11. Најголем заеднички делител на два полинома. Евклидов алгоритам 66
§12. Метод на неопределени коефициенти 72
§13. Нули на полиномите 75
13.1. Еднократни нули 75
13.2. Повеќекратни нули 76
13.3. Теореми за едентичност на полиномите 77
§14. Основна теорема на алгебрата 80
§15. Виетови формули 82
§16. Полиноми со комплексни и реални коефициенти 85
§17. Разложување на полиномите на множители 88
17.1. Разложливи и неразложливи полиноми 88
17.2. Разложливост на полиномите во полето на рационалните броеви 90
§18. Полиноми со цели коефициенти 92
§19. Трансформација на полиномите 98
19.1. Трансформација $P(x) \mapsto P^*(x) = P(kx), k = const$ 98
19.2. Трансформација $P(x) \mapsto P^*(x) = P(x-h),\ h = const$ 100
19.3. Трансформација $P(x) \mapsto P^*(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ 102
§20. Интерполационен полином 105
20.1. Интерполационен полином Лаграж 105
20.2. Интерполационен полином на Њутн 107

Глава III

ДРОБНИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ ОД ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

§21. Рационални дропки 111
§22. Поле на рационални дропки 114
§23. Трансформација на рационални дропки во вид на збир од прости дропки 121

Глава IV

ПОЛИНОМНИ РАВЕНКИ ОД ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

§24. Општи поими за полиномните равенки 133
§25. Решавање на равенки од прв и од втор степан 135
25.1. Линеарни равенки со една променлива 135

25.2. Квадратни равенки со комплексни коефициенти 136
25.3. Квадратни равенки со реални коефициенти 138

§26. Решавање на равенките од трет степен 140
26.1. Кубна равенка со комплексни коефициенти 140
26.2. Кубни равенки со реални коефициенти 143

§27. Решавање на равенки од четврти степен 147

§28. Специјални случаи на полиномни равенки 151
28.1. Симетрични равенки 151
28.2. Симетрични равенки од втор и трет ред 154
28.3. Биномни равенки 156
28.4. Триномни равенки 161
28.4.1. Биквадратрни равенки 161

§29. Полиномни равенки што содржат параметри 164

§30. Дробни рационални равенки 167

Глава V

НЕРАВЕНКИ И СИСТЕМ НЕРАВЕНКИ СО ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

§31. Неравенства и неравенки 173
31.1. Општи поими за неравенствата 173
31.2. Основни својства на неравенствата 176
31.3. Систем и вкупност неравенки 177

§32. Еквивалентност на неравенките и системите неравенки 179

§33. Решавање на линеарни неравенки и системи линеарни неравенки со една променлива 184
33.1. Линеарни неравенки со една променлива 185
33.2. Систем линеарни неравенки со една променлива 187

§34. Решавање на квадратни неравенки со една променлива 191

§35.Решавање на неравенки од повисок степен со една променлива 196

§36. Дробно рационални неравенки со една променлива 199

§37. Равенки и неравенки што содржат апсолутни вредности 202
37.1. Решавање на равенки што содржат апсолутни вредности 202
37.2. Решавање на неравенки што содржат апсолутни вредности 205

§38. Примена на неравенките и системите неравенки со една променлива 210

Глава VI

ПОЛИНОМИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

§39. Општи поими. Претставување на полиномите во каноничен вид 213
§40. Начини на распоредување на членовите на полиномот 216
§41. Теореми за нула-полином и идентични полиноми 219
§42. Прстен на полиноми од n променливи 221
§43. Теореми за производот на полиноми 223
§44. Формули за скратено множење 226
§45. Њутнова биномна формула 227
§46. Идентитет на Лагранж. Условни равенства 231
§47. Деливост и делење на полиноми 233
§48. Разложување на полиномите на неразложливи множители 237
§49. Различни методи за разложување на полиномите на множители 239
§50. Рационални дропки со повеќе променливи 242
§51. Симетрични полиноми 247
§52. Основна теорема за симетрични полиноми 248
§53. Степенски суми 254
§54. Симетрични рационални дропки 256

Глава VII

СИСТЕМИ ПОЛИНОМНИ РАВЕНКИ ОД ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

§55. Равенки, систем и вкупност равенки од повеќе променливи 259
§56. Еквивалентност на равенки и системи равенки 262
§57. Системи линеарни равенки 275
57.1. Општи поими 275
57.2. Гаусов метод на решавање на системите линеарни равенки 277
57.3. Систем хомогени линеарни равенки 283
57.4. Систем линеарни равенки кои содржат параметри 285
§58. Систем равенки од втор и повисок степен 291

58.1. Системи кои содржат линеарни равенки 292
58.2. Систем од две равенки од втор степен со две променливи 293

§59. Хомогени равенки и системи хомогени равенки 298

§60. Систем симетрични полиномни равенки 305

§61. Примери на решавање на системи равенки од повисок степен 312

Глава VIII

НЕРАВЕНКИ, СИСТЕМ НЕРАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА СО ПОВЕЌЕ ПРОМЕНЛИВИ

§62. Линеарни неравенки и системи линеарни неравенки со две променливи 321
62.1. Линеарни неравенки со две променливи 322
62.2. Систем линеарни неравенки со две променливи 324

§63. Линеарни неравенки и систем линеарни неравенки со три и повеќе променливи 330
63.1. Линеарни неравенки со три променливи 330
63.2. Систем линеарни неравенки со три променливи 333
63.3. Линеарни неравенки и системи линеарни неравенки со повеќе од три променливи 337

§64. Поим за линеарно програмирање 339

§65. Аналитичко задавање на области од рамнината и просторот со неравенки 343

§66. Неравенки и системи неравенки од повисок степен и повеќе променливи 348

§67. Мешани системи 356

§68. Равенки и неравенки со две променливи кои содржат апсолутни вредности ... 359

§69. Методи на докажување на неравенствата 363

§70. Средни величини 367

§71. Некои поважни неравенства 372

§72. Примена на неравенствата во елементарното наоѓање на екстремите 377

§73. Поважни неравенства во геометријата 381

Глава IX

ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

§74. Коренување на реалните броеви 387

§75. Извлекување на n-ти корен од позитивни броеви 392

§76. Основни својства и операции со корените 396

§77. Трансформација на ирационални изрази 404
77.1. Нормален вид на корените. Слични корени 406
77.2. Собирање и одземање на корени 408
77.3. Трансформација на коренот од видот $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ 409

§78. Рационализација на именителот на дропка 414
78.1. Конјугиран ирационален множител 414

§79. Примери на трансформација на ирационални изрази 421

§80. Обопштување на поимот за степен 426

§81. Својства на степените со рационален показател 434

§82. Низи од рационални броеви 439
82.1. Основни поими за бројна низа 439
82.2. Низи од приближни вредности на реални броеви 443
82.3. Низи од стегачки интервали (или сегменти) 445

§83. Степени со ирационален показател 449

Глава X

ИРАЦИОНАЛНИ РАВЕНКИ И НЕРАВЕНКИ

§84. Ирационални равенки во полето на комплексните броеви 457

§85. Ирационални равенки во полето на реалните броеви 463
85.1. Општи поими 463
85.2. Исклучување на радикалите со сведување на систем рационални равенки 465
85.3. Исклучување на радикалите со степенување на двете страни на равенката 467

§86. Еквивалентност на некои трансформации 471

§87. Ирационални равенки со параметри 479

§88. Системи ирационални равенки 483
§89. Ирационални неравенки и неравенства 489
ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ 499
РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ 509
Литература 577
ПОКАЗАТЕЛ НА ПОИМИ И ИМИЊА 579

Акционерско друштво за издавање учебници и наставни средства „Просветно дело“ АД - Скопје, ул. „Димитрие Чуповски“, број 15.

*

За издавачот

м-р Павле ПЕТРОВ, генерален директор

*

Глигор ТРЕНЧЕВСКИ

ЕЛЕМЕНТАРНА АЛГЕБРА

*

Технички уредник

Блаже ТАНЧЕВСКИ

*

Лектор

Елена ТОШЕВА

*

Коректор

Авторот

*

Корица

Блаже ТАНЧЕВСКИ

Ракописот е предаден во печат мај 2001 година. Печатењето е завршено во јануари 2002 година. Обем: 592 страници. Формат: 20 x 25,5 cm, Тираж: 1000 примероци. Книгата е отпечатена во печатницата „НАПРЕДОК“ Тетово.

CIP - Каталогизација во публикација
Народна и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски“, Скопје

512.12/.14(075.8)

ТРЕНЧЕВСКИ, Глигор
Елементарна алгебра / Глигор Тренчевски. - Скопје : Просветно дело, 2001. - 592 стр. : 24 см

ISBN 9989-0-0191-X

а) Елементарна алгебра - Високошколски учебници