IV РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

Задачите и решенијата се скенирани од книгата
Десет години републички натпревари по математика 1976-1985
подготвена од Илија Јанев и Коста Мишовски

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Цифрата со најголема месна вредност кај петцифрениот број е 7. Ако таа цифра се изостави преостанатиот број е 17 пати помал од дадениот број. Кој е тој број?

2. Велосипедист којшто вози со брзина од 10 km/h планира да оди во соседно место и таму да пристигне во 12 часот. Меѓутоа, откако изминал половина од патот, велосипедот му се расипал. Другиот дел од патот го минал одејќи пеш со брзина од 5 km/h и пристигнал на определеното место во 14 h. Определи колку километри изминал и во колку часот тргнал?

3. Даден е паралелограмот ABCD. Симетралите на неговите внатрешни агли се сечат во точките P, Q, R, S.

а) Докажи дека четириаголникот PQRS е правоаголник;

б) Докажи дека дијагоналата на тој правоаголник е еднаква со разликата од соседните страни на паралелограмот.

4. Да се конструира правоаголен триаголник ако се дадени: висината на хипотенузата и бисектрисата на правиот агол. (Анализа, конструкција, доказ и дискусија).

5. Дадено е множеството $A = \{x \mid x \in N$ и $1 \leqslant x \leqslant 30\}$. Определи го множеството $R = \{(a, b) \mid a \in A$ и $b \in A\}$, така што изразот $(\frac{3}{5}a - b)^2 + 1$ да има најмала вредност.

20. (1979.VII.1)

I. Од условот на задачата е

$$7\overline{abcd} = \overline{abcd7}$$

$$70000 + \overline{abcd} = \overline{abcd} 7$$

$$70000 = 16\overline{abcd}$$

$$\overline{abcd} = 4375,$$

значи, бараниот број $x = 74375$.

Одговор: 74375.

21. (1979.VII.2)

I. Велосипедистот оди пеш само половина од патот и доцни 2 часа; но кога би го минал целиот пат пеш, тој би каснел 4 часа.

Значи, ако го минал патот за x часа со велосипед, тогаш за (x + 4) часа ќе го мине патот пеш.

Имаме:

$$5(x + 4) = 10x$$

$$5x + 20 = 10x$$

$$20 = 5x$$

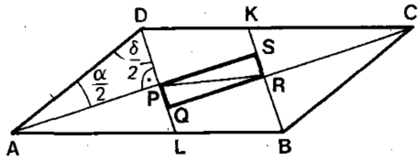
$$x = 4.$$

Значи, велосипедистот би возел 4 часа, а пеш би одел 8 часа, и притоа, во обата случаја би изминал пат од 40 km.

Одговор: 40 km, 8 часот.

22. (1979.VII.3)

I. Нека е даден паралелограмот ABCD и нека симетралите на неговите внатрешни агли се сечат во точките P, Q, R и S (цртеж 13).



Црт. 13

а) Очигледно е дека симетралите на аглите кај темињата A и C се меѓусебно паралелни (зашто?), а исто така и симетралите кај темињата B и D. Значи, четириаголникот PQRS е паралелограм.

Од триаголникот APD е:

$$\frac{\alpha}{2} + \measuredangle P + \frac{\delta}{2} = 180^\circ$$

$$\frac{\alpha+\delta}{2} + \measuredangle P = 180^\circ$$

$$90^\circ + \measuredangle P = 180^\circ$$

$$\measuredangle P = 90^\circ.$$

Покажавме дека $\measuredangle QPS = 90^\circ$, од што ќе следува дека паралелограмот PQRS е правоаголник.

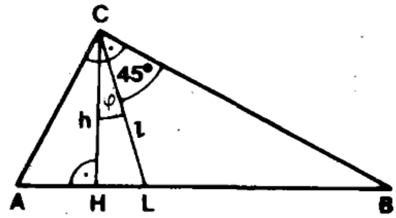
б) Триаголниците APL и APD се складни (види цртеж 13), бидејќи имаат заедничка страна AP и по два агли еднакви, т.е. $\measuredangle APL = \measuredangle APD = 90^\circ$ и $\measuredangle PAL = \measuredangle PAD = \frac{\alpha}{2}$. Следува $\overline{AL} = \overline{AD}$ и $\overline{PL} = \overline{PD}$.

Аналогно се покажува дека е $\overline{RB} = \overline{RK}$ и $\overline{BC} = \overline{KC}$. Тогаш, отсечката $\overline{PR}$ е средна линија за паралелограмот LBKD, од каде што следува $\overline{PR} = \overline{LB} = \overline{AB} - \overline{AL} = \overline{AB} - \overline{AD}$.

Покажавме дека отсечката PR е еднаква на разликата од двете соседни страни на паралелограмот ABCD. Да забележиме и тоа дека оваа отсечка е паралелна со поголемата страна на паралелограмот.

23. (1979.VII.4)

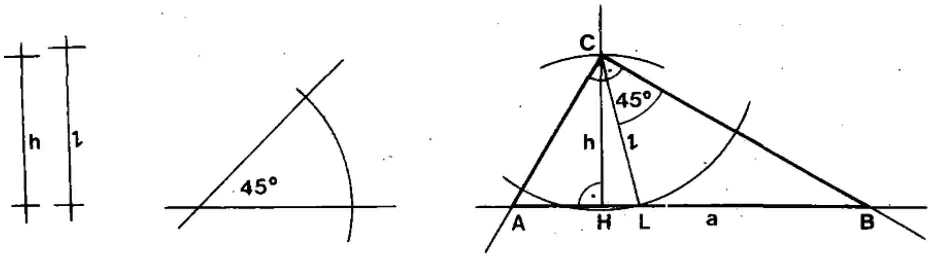
I. **Анализа:** Да претпоставиме дека задачата е решена. Нека се $\overline{CH} = h$ и $\overline{CL} = l$ висината и бисектрисата од темето на правиот агол. Триаголникот CHL можеме да го конструираме, бидејќи е правоаголен и за него се познати хипотенузата l и една катета h.



Црт. 14

Темето B лесно се наоѓа, во пресекот на правата HL и правата CB, која со CL зафаќа агол од 45°. На крајот лесно се наоѓа и темето A, во пресекот на правата HL (на другата страна) и правата CA, која со CL зафаќа агол од 45°.

Конструкција: На една права a од произволно избрана точка H издигаме нормална отсечка $\overline{HC} = h$.



Црт. 15

Потоа, од точката C, со отвор на шестарот еднаков на l ја определуваме точката L на правата a, на една страна од точката H. Сега конструираме два агли од 45° со теме во C и еден крак CL. Другите краци на овие агли ја сечат правата a во точките A и B.

Доказ: Триаголникот ABC е правоаголен со прав агол кај темето C и со висина и бисектриса на правиот агол, соодветно $\overline{CH} = h$ и $\overline{CL} = l$.

Дискусија: Задачата има секогаш едно решение ако $h < l$ и $\measuredangle HCL = \varphi < 45^{\circ}$, т.е. $l < h\sqrt{2}$, т.е. ако е исполнет условот.

$h < l < h\sqrt{2}.$

Забелешка. Со пресекот на $k(C, \overline{CL})$ и AB се добиваат е точк . L и L_1. Во обата случаја триаголниците што се добиваат се складни. ачи решението е еднозначно.

24. (1979.VII.5)

I. Имаме $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, 28, 29, 30\}$

Изразот $\left(\frac{3}{5}a - b\right)^2 + 1$ ќе има најмала вредност, ако е

$\frac{3}{5}a - b = 0$, т.е. $b = \frac{3}{5}a$.

Очигледно, за да биде b елемент на множеството A, т.е. природен број помал или еднаков на 30, треба a да се дели со 5.

Значи: $a \in \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$,

$b \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$.

Тогаш е: $R = \{(5, 3), (10, 6), (15, 9), (20, 12), (25, 15), (30, 18)\}$.

Одговор:
$R = \{(5, 3), (10, 6), (15, 9), (20, 12), (25, 15) (30, 18)\}$.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Цифрата со најголема месна вредност кај петцифрениот број е 7. Ако таа цифра се изостави преостанатиот број е 17 пати помал од дадениот број. Кој е тој број?

2. Од 40%-тен и 65%-тен раствор на оцетна киселина, треба да се приготви 7,5 литри 55%-тен раствор. По колку литри треба да се земе од секој раствор?

3. Правата $y = \frac{3}{4}x + n$, која минува низ точката $M(-3, 6)$, со правата $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$ и x-оската го образува триаголникот ABC. Определи ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC.

4. Правоаголен лист хартија со димензии 16 cm и 12 cm е превиткан така, што две спротивни темиња се совпаѓаат. Определи ја должината на отсечката по која листот е превиткан.

5. Во конус е впишана топка со радиус r, а висината на конусот е четирипати поголема од радиусот на топката.

Определи го:

а) Односот на нивните плоштини;

б) Односот на нивните волумени.

24. (1979.VIII.1)

I. Иста со задачата: (1979.VII.1).

25. (1979.VIII.2)

I. Ќе земеме x литри од првиот и y литри од вториот раствор, при кое $x + y = 7{,}5$. Другата равенка е:

$$\frac{40}{100}x + \frac{65}{100}y = 7{,}5 \cdot \frac{55}{100},$$

или по средувањето имаме:

$$8x + 13y = 82{,}5.$$

Сега треба само да го решиме системот равенки

$$\begin{cases} x + y = 7{,}5 \\ 8x + 13y = 82{,}5. \end{cases}$$

Тој е еквивалентен со системите:

$$\begin{cases} -8x - 8y = -60 \\ 8x + 13y = 82{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 8y = 60 \\ 5y = 22{,}5. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 7{,}5 \\ y = 4{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4{,}5 = 7{,}5 \\ y = 7{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4{,}5 \end{cases}$$

Одговор: 3 литра и 4,5 литра.

26. (1979.VIII.3)

I. Прво ќе го определиме параметарот n од првата права, од услов таа да минува низ точката M $(-3, 6)$.

$$6 = -\frac{3}{4}\cdot(-3) + n \Leftrightarrow n = \frac{15}{4}.$$

Тогаш равенката на правата е

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4}.$$

Сега ќе ги најдеме нулите на функциите:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A\,(5, 0)$$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4} \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B\,(-3, 0).$$

Третото теме C го наоѓаме кога ќе го решиме системот

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} \\ y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Овој систем најлесно се решава со методот на споредување. Бидејќи левите страни се еднакви, ќе следува дека се еднакви и десните страни, т.е.

$$-\frac{3}{4}x + \frac{15}{4} = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}.$$

Од каде што $6x = 6$ или $x = 1$.

Тогаш е

$$y_{(1)} = \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{9}{4} = \frac{12}{4} = 3.$$

Значи C (1, 3) (цртеж 16)

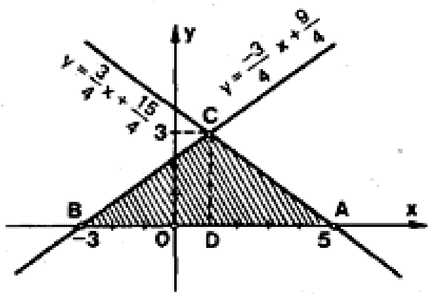
За периметарот на $\triangle$ ABC ќе имаме:

$\overline{AB} = 8$

$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\overline{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$L = 8 + 5 + 5 = 18.$



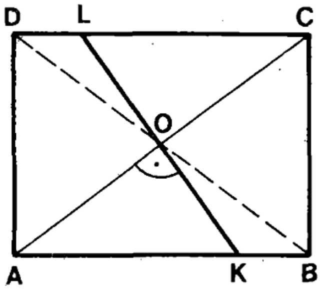
Црт. 16

Плоштината на триаголникот е

$$P = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{CD} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 3 = 12.$$

Одговор: L = 18 единици и
P = 12 квадратни единици.

27. (1979.VIII.4)



Црт. 17

I. Да го претставиме правоаголниот лист хартија со правоаголникот ABCD при што $\overline{AB} = 16$ cm, $\overline{AD} = 12$ cm. Темето A ќе се преслика во темето C со осна симетрија, каде што оската на симетрија ќе биде отсечката KL која е нормална на AC и минува низ средината O на AC. Всушност, се бара должината на отсечката KL.

Имаме:

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{256 + 144} = 20$$

$$\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 10.$$

$\triangle AKO \sim \triangle ACB$, како триаголници со еднакви соодветни агли.

Тогаш е:

$\overline{AO} : \overline{OK} = \overline{AB} : \overline{BC}$

$10 : \overline{OK} = 16 : 12$

$$\overline{OK} = \frac{12\cdot 10}{16} = 7{,}5$$

$\overline{OK} = \overline{OL}$, бидејќи O е центар на правоаголникот.

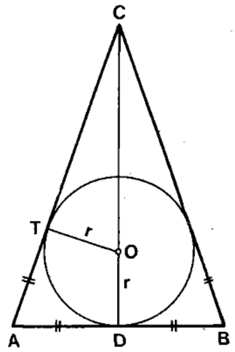
Тогаш е:

$$\overline{KL} = 2\cdot\overline{OK} = 2\cdot 7{,}5 = 15.$$

Одговор: $\overline{KL} = 15$ cm.

28. (1979.VIII.5)

I. Топката е наполно определена со својот радиус r, затоа ќе треба да се определат само уште радиусот и изводницата на конусот. Ќе имаме (цртеж 18)



Црт. 18

$\overline{CT} = \sqrt{CO^2 - OT^2} = \sqrt{9\ r^2 - r^2} = \sqrt{8\,r^2} = 2r\sqrt{2}.$

$\triangle CTO \sim \triangle CBA \Rightarrow \overline{CT} : \overline{TO} = \overline{CB} : \overline{AB} \Rightarrow 2\,r\sqrt{2} : r = 4\,r : R \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \dfrac{4\,r}{2\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$

$\overline{CA} = \overline{CT} + \overline{TA} = \overline{CT} + R = 2\,r\sqrt{2} + r\sqrt{2} = 3\,r\sqrt{2}.$

Плоштината на конусот е:

$P_K = B + M = R^2\pi + R\pi s = R\pi(R + s) = r\sqrt{2}\pi\ (r\sqrt{2} + 3\,r\sqrt{2}) = 8\,r^2\pi.$

Плоштината на топката е:

$P_T = 4r^2\pi.$

Односот на плоштините е

$$\frac{P_K}{P_T} = \frac{8\,r^2\pi}{4\,r^2\pi} = 2:1$$

Волуменот на конусот е

$$V_K = \frac{1}{3} B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot R^2\pi \cdot H = \frac{\pi}{3}(r\sqrt{2})^2 \cdot 4\,r$$

$$V_K = \frac{8\pi}{3} r^3.$$

Волуменот на топката е

$$V_T = \frac{4}{3} r^3\pi.$$

Односот на волумените е

$$\frac{V_K}{V_T} = \frac{\frac{8\pi}{3} r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 2:1.$$

Одговор: а) 2 : 1; б) 2 : 1.