Малчески Самоил, Скопје
Малчески Ристо, Скопје

ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ 2

Во статијата Принцип на Дирихле, објавена од истите автори на сајтот matematickitalent.mk се дадени доказите на елементарниот и обопштениот принцип на Дирихле и е разгледана геометриската форма на принципот на Дирихле. Предметнава статија всушност е надополнување на споменатата статија, при што некои задачи се поелементарни од веќе разгледаните, некои се надополнување на веќе разгледаните задачи и некои се потешки.

Задача 1. Дали меѓу секои 100 природни броеви може да се изберат
а) два броја, б) три броја
чиј збир е делив со 7.

Решение. Не. На пример, во задачата б) изборот не може да се направи во секој од следниве случаи:

- секој од дадените 100 броеви при делење со 7 дава остаток 1,
- секој од дадените 100 броеви при делење со 7 дава остаток 2,
- секој од дадените 100 броеви при делење со 7 дава остаток 3,
- секој од дадените 100 броеви при делење со 7 дава остаток 4,
- секој од дадените 100 броеви при делење со 7 дава остаток 5,
- секој од дадените 100 броеви при делење со 7 дава остаток 6,
- секој од дадените 100 броеви при делење со 7 дава остаток 2 или 4.

Јасно, во горните случаи изборот не може да се направи и во задачата а).

Обиди се да определиш и други случаи кога бараните избори на два, односно три броја не може да се направат.

Задача 2. Дали може 44 топчиња да се распределат во 10 кутии така што нема да има две кутии со еднаков број топчиња? (Две празни кутии содржат еднаков број топчиња.)

Решение. Одговорот на прашањетое НЕ. Навистина, најмалиот број топчиња кој ни е потребен за да во секоја од десетте кутии имаме различен број топчиња е еднаков на $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$, а ние имаме само 44 топчиња.

Задача 3. Дали меѓу произволни 100 цели броеви секогаш може да се изберат 16 броја такви што разликата на било кои два избрани броја ќе биде делива со 7.

Решение. Одговорот на прашањето е НЕ. Навистина, меѓу првите 100 природни броеви има по 14 броја кои при делење со 7 даваат остаток 0, 3, 4, 5 или 6, а има по 15 броја кои при делење со 7 даваат остаток 1 или 2. Според тоа, меѓу првите 100 природни броеви не постојат 16 броеви такви што разликата на било кои два избрани броја ќе биде делива со 7.

Задача 4. На едно тестирање учествувале 22 ученици од осум училишта. Тие точно решиле вкупно 50 задачи. Сите ученици од исто училипте точно решиле еднаков број задачи, а секои два ученика од различни училишта точно решиле разичен број задачи. Колку учениви точно решиле само по една задача?

Решение. Од секое училиште да земеме по еден ученик. Секој од избраните осум ученици точно решил најмалку по една задача и секои два избрани ученика точно решиле различен број задачи. Тоа значи дека овие осум ученици точно решиле најмалку $1+2+3+4+5+6+7+8=36$ задачи. Но, тие точно решиле точно 36 задачи, бидејќи во спротивно преостанатите $22-8=14$ ученици точно треба да решат помалку од $50-36=14$ задачи, што не е можно, бидејќи секој ученик точно решил најмалку една задача. Според тоа, преостанатите 14 ученици точно решиле 14 задачи, т.е. секој од нив точно решил по една задача. Конечно, по една задача точно решиле $1+14=15$ ученици.

Задача 5. Во шумата растат 1000000 буки, а на секоја има најмногу 900000 листови. Докажи дека во шумата постојат две буки кои имаат еднаков број листови.

Решение. Пред нас се 1000000 „предмети“ – буките и само 900001 „кутии“ – бројот на листовите кој може да биде од 0 до 900000. Секој „предмет“ – буката се сместува во кутијата која е еднаква на бројот на листовите на таа бука. Сега, бидејќи $1000000>900001$ од принципот на Дрихле следува дека барем во една кутија има два предмети, што значи дека постојат две буки кои имаат еднаков број листови.

Задача 6. Во кутија се наоѓаат топчиња со две различни бои, црвена и сина. Колку најмалку топчиња треба да земеме од кутијата без да гледаме , за да сме сигурни дека меѓу нив има две топчиња со иста боја?

Решение. Да земеме три топчиња. Бидејќи имаме две бои, од принципот на Дирихле следува дека барем две топчиња ќе бидат со иста боја. Понатаму, ако земеме две топчиња, тогаш може да се случи едното да е црвено, а другото сино, па нема да имаме две топчиња со иста боја. Значи, бараниот најмал број топчиња е три.

Задача 7. Дадени се 12 природни броеви. Докажи дека меѓу дадените броеви постојат два чија разлика е делива со 11.

Решение. При делење со бројот 11 можни остатоци се: 0, 1, 2, ..., 10, што значи дека имаме 11 можни остатоци. Но, дадени се 12 броеви, па од принципот на Дирихле следува дека постојат два броја a и b кои при делење со 11 даваат еднакви остатоци, т.е. $a=11k+r$ и $b=11m+r$. Значи, $a-b=11(k-m)$, т.е. $11|a-b$.

Задача 8. Сто лица седат околу тркалезна маса, при што повеќе од половината се жени. Докажи дека постојат две жени кои седат:

а) една до друга,

б) една наспроти друга.

Решение. Множеството од 100 лица да го поделиме на 50 парови, така што секој пар е формиран од две лица кои седат едно до друго (едно наспроти друго). Бидејќи имаме 50 парови, а повеќе од 50 жени, од принципот на Дирихле следува дека постои барем еден пар во кој двете лица се жени.

Задача 9. Ако

$$A\subset\{1,2,3,...,100\},\ |A|=50,$$

при што во A не постојат два броја чиј збир е еднаков на 100, тогаш A содржи најмалку еден точен квадрат. Докажи!

Решение. Множеството броеви од 1 до 100 да го разбиеме на множествата $\{50\},\{100\}$ и двоелементните множества $\{1,99\},\{2,98\},...,\{49,51\}$. Од условот на задача следува дека множеството A може да содржи најмногу еден број на двоелементите множества. Бидејќи 100 е точен квадрат, а во парот $\{36,64\}$ двата броја се точни квадрати, ако A не содржи точен квадрат, тоа може да има најмногу 49 елементи, што противречи на условот $|A|=50$. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

Задача 10. Во секое поле на 10×10 квадрат е запишан еден цел број. Соседни се полињата кои имаат заедничка страна. Апсолуната вредност на разликата на секои два броја запишани во соседни полиња не е поголема од 5. Докажи дека меѓу запишаните броеви има два еднакви броја.

Решение. Од секое поле на квадратот до секое друго негово поле може да се стигне со најмногу 18 потези (еден потез е преминување од едно поле во поле кое му е соседно). Нека a е најмалиот број кој е запишан во полињата на квадратот. Тогаш најголемот запишан број е помал или еднаков на $a+18\cdot5=a+90$. Според тоа, во полињата на квадратот се запишани најмногу 91 различни броеви.

Конечно, тврдењето на задачата следува од принципот на Дирихле (полињата се предмети, а броевите се кутии).

Задача 11. Во една продавница пристигнале 25 гајби со три различни сорти круши (во секоја гајба крушите се од иста сорта). Докажи дека постојат 9 гајби во кои крушите се од иста сорта.

Решение. Во случајов трите сорти круши се кутии, а 25-те гајби се предмети. Имаме $25=3\cdot8+1$, па од обопштениот принцип на Дирихле следува постојат 9 гајби во кои крушите се од иста сорта.

Задача 12. Десет ченици вкупно решиле 35 задачи. Познато е дека меѓу нив има ученици кои решиле точно една задача, ученици кои решиле точно две задачи и ученици кои решиле точно три задачи. Докажи дека постои ученик кој решил барем 5 задачи.

Решение. Нека ученикот A решил точно 1 задача, ученикот B решил точно 2 задачи и ученикот C решил точно 3 задачи. Според тоа, преостанатите 7 ученици решиле $35-6=29$ задачи. Бидејќи $29=7\cdot4+1$ од обопштениот принцип на Дирихле следува дека постои најмалку еден ученик кој решил барем 5 задачи.

Задача 13. Во едно училиште има 36 одделенија и 980 ученици. Докажи дека во некое одделение на ова училиште има повеќе од 27 ученици.

Решение. Во оваа задача одделенијата се „кутии“, а учениците се „предмети“. Имаме, $980=36\cdot27+8$, па затоа во училиштето постои одделение кое има повеќе од 27 ученици.

Задача 14. Во одделениео на Горјан учат 26 ученици. Докажи дека постојат 3 ученици кои својот роденден ќе го прославаат во ист месец.

Решение. Годината има 12 месеци и во оваа задача тоа се „кутиите“, а учениците се „предмети“. Имаме, $26 = 12 \cdot 2 + 2$, па од обопштениот принцип на Дирихле следува дека во одделенеието на Горјан постојат 3 ученици кои својот роденден ќе го прослават во ист месец.

Задача 15. Во одделението на Андреј има 30 ученици. На писмената работа по математика некои од учениците направиле 8 грешки, а преостанатите ученици направиле помалку грешки. Докажи дека во одделението постојат четири ученици кооиi направиле еднаков број грешки.

Решение. Бидејќи наголемиот број направени грешки е 8, заклучуваме дека учениците напревиле 8, 7, 6, 7, 3, 2, 1 или 0 грешки. Учениците ги делиме на класи така што во иста класа ги сместуваме учениците кои направиле еднаков број грешки. Имаме 9 класи и 30 ученици и како $30 = 9 \cdot 3 + 3$ заклучуваме дека постои класа во која има најмалку 4 ученици. Тие направиле еднаков број грешки, со што тврдењето е докажано.

Задача 16. Докажи дека меѓу било кои $n+1$ различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ кои се помали или еднакви на $2n$ може да се најдат два броја од кои едниот е делител на другиот.

Решение. Нека 2^{k_i} е најголемот степен на бројот 2 таков што $2^{k_i} | a_i$. Тогаш $a_i = 2^{k_i} q_i$, каде q_i е непарн број помал од $2n$. Бидејќи меѓу природните броеви од 1 до $2n$ има n непарни, од принципот на Дирихле следува мешу броевие $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ постојат два броја a_i и a_k такви што $q_i = q_k$. Јасно, ако $a_i < a_k$, тогаш $a_i | a_k$, што и требаше да се докаже.

Забелешка. Меѓу природните броеви кои се помали или еднакви на $2n$ постојат n броеви такви што ниту еден од нив не е делител на друг број. На пример, такви се броевите $n+1, n+2, ..., 2n$.

Задача 17. Докажи дека за секој природен број n кој не е делив ниту со 2, ниту со 5, постои природен број N кој е запишан само со цифрата 1 и кој е делив со n.

Решение. Да ги разгледаме броевите

$$1, 11, 111, ..., \underbrace{11...1}_{n+1}.$$

Имаме $n+1$ броеви и n можни остатоци при делење со бројот n. Затоа од принципот на Дирихле следува дека меѓу разгледуваните броеви постојат два броја кои при делење со n даваат еднаков остаток. Нека тоа се броевите $\underbrace{11...1}_{r}$ и $\underbrace{11...1}_{i}$, $r > i$. Тогаш разликата

$$\underbrace{11...1}_{r} - \underbrace{11...1}_{i} = \underbrace{11...1}_{r-i}\underbrace{00...0}_{i} = \underbrace{11...1}_{r-i} \cdot 2^i \cdot 5^i,$$

е делива со n и како n не е делив ниту со 2, ниту со 5, заклучуваме дека n е делител на бројот $N = \underbrace{11...1}_{r-i}$, што и требаше да се докаже.

Задача 18. Еден ученик секој ден во текот на три месеци решавал најмалку по една задача. Притоа, за многу да не се заморува, тој во текот на една седмица решавал најмногу по 12 задачи. Докажи дека ученикот во текот на неколку последователни денови решил точно 20 задачи.

Решение. Нека претпоставиме дека првиот ден ученикот решил s_1 задачи, првиот и вториот дек решил вкупно s_2 задачи, заклучно со третиот ден решил s_3 задачи итн. заклучно со 77-миот ден решил s_{77} задачи. Да ги разгледаме броевите

$$s_1, s_2, ..., s_{77}, s_1 + 20, s_2 + 20, ..., s_{77} + 20. \qquad (1)$$

Имаме 154 броеви и ниту еден од нив не е поголем од $132 + 20 = 152$. Навистина, бројот s_{77} не е поголем од $11 \cdot 12 = 132$, бидејќи во 77 последователни денови има точно 11 седмици. Сега од принципот на Дирихле следува дека во низата (1) постојат два еднакви броја. Но, ученикот секој ден решавал најмалку по една задача, па затоа во низата $s_1, s_2, ..., s_{77}$ нема два еднакви броја, што значи дека и во низата

$$s_1 + 20, s_2 + 20, ..., s_{77} + 20$$

нема два еднакви броја. Според тоа, постојат i и k такви што $s_i = s_k + 20$, односно $s_i - s_k = 20$. Последното значи дека во текот на $i - k$ последователни денови ученикот решил точно 20 задачи.

Задача 19. На еден математички натпревар учествувале 82 ученика. Докажи дека меѓу нив може да се изберат 10 ученици такви што или сите се од ист град или сите се од различни градови.

Решение. Ако на натпреварот има ученици од најмалку 10 различни градови, тогаш од 10 различни градови можеме да избереме по еден ученик. Ако бројот на градовите од кои дошле натпреварувачи е помал од 10, т.е. на натпреварот дошле натпреварувачи од $k \le 9$ градови, тогаш бидејќи $82 \geq 9k+1$, од обопштениот принцип на Дирихле следува дека постои град од кој дошле најмалку 10 ученици.

Задача 20. Темињата на правилен петаголник се обоени со две бои – некои со сина, а некои со црвена боја.Докажи дека постојат три темиња обоени со иста боја кои се темиња на рамнокрак триаголник.

Решение. Имаме пет темиња и две бои, па затоа постојат три темиња кои се обоени со иста боја. Тврдењето на задачата следува од фактот што секои три темиња на правилниот петаголник се темиња на рамнокрак триаголник.

Задача 21. Даден е правилен дваесетаголник и некои негови девет темиња се обоени со црвена боја. Докажи дека постои рамнокрак триаголник чии темиња се некои од обоените точки.

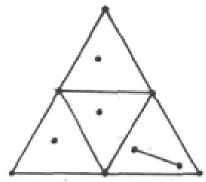
Решение. Множеството од сите темиња на правилниот дваесетаголник може да се подели на четири подмножества со по пет темиња, така што секое подмножество темиња се темиња на ист правилен петаголник. Имаме 9 обоени темиња, а четири петаголници и како $9 = 4 \cdot 2 + 1$, од обопштениот принцип на Дирихле следува дека три обоени темиња припаѓаат на ист петаголник. Сега тврдењето на задачата следува од фактот фактот што секои три темиња на правилниот петаголник се темиња на рамнокрак триаголник.

Задача 22. Пабло обоил дел од лист хартија со димензии $21\,cm \times 30\,cm$, така што вкупната обоена површина е со плоштина е $314\,cm^2$. Докажи дека на листот постојат најмалку две точки кои се симетрични во однос на симетрала на правоаголникот и такви што ниту една од нив не е обоена.

Решение. Да повлечеме една од двете симетрали на правоаголникот и веќе обоените делови на листот да ги пресликаме во однос на симетралата. Тогаш обоената површина ќе се зголеми најмногу двапати, што значи дека таа ќе биде помала или еднаква на $2 \cdot 314 = 628\,cm^2$, а симетралата на правоаголникот ќе биде и симетрала на обоената површина. Плоштината на листот е еднаква на $21 \cdot 30 = 630\,cm^2$, што значи дека имаме $2\,cm^2$ необоена површина. Таа мора да биде распоредена симетрично во однос на симетралата, па затоа постојат две точки кои се симетрични во однос на симетрала на правоаголникот и такви што ниту една од нив не е обоена.

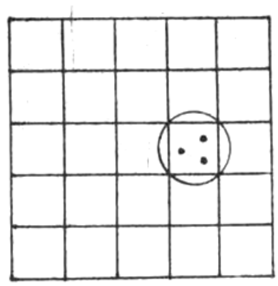
Задача 23. Даден е рамностран триаголник со должина на страна $2\,cm$ и во неговата внатрешност 5 точки. Докажи дека постојат две од дадените пет точки кои се на растојание помало од $1\,cm$.

Решение. Триаголникот ќе го поделиме на четири рамнострани триаголници со должина на страна $1\,cm$. Имаме 5 точки и 4 мали триаголници, па од принципот на Дирихле следува дека во еден малите триаголници се содржат најмалку две точки. Јасно растојанието меѓу овие две точки е помало од $1\,cm$. (Зошто не може да е еднакво на $1\,cm$)



Задача 24. Во квадрат со должина на страна $1\,cm$ на произволен начин се земени 51 точка. Докажи дека постои круг со радиус $\frac{1}{7}\,cm$ кој содржи најмалку три од дадените точки.

Решение. Квадратот да го поделиме $5\cdot 5=25$ квадрати со должина на страна $\frac{1}{5}=0,2\,cm$. Сега имаме 51 точка и 25 квадрати и како $51=25\cdot 2+1$, од обопштениот принцип на Дирихле следува дека најмалку во еден квадрат се содржат најмалку три од дадените точки (цртеж десно). Да опишеме круг k околу тој квадрат. Радиус на овој круг е $r=\frac{0,2\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$. Бидејќи



$$(\frac{\sqrt{2}}{10})^2=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}<\frac{1}{49}=(\frac{1}{7})^2,$$

добиваме $r<\frac{1}{7}$. Според тоа, кругот со радиус $\frac{1}{7}\,cm$ кој е концентричен на кругот k го покрива воочениот квадрат и содржи најмалку три од дадените точки.

.

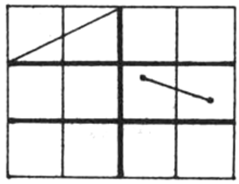
Задача 25. Даден е правоаголник со должини на страни $a=4\,cm$ и $b=3\,cm$ и во неговата внатрешност

а) 7 точки,

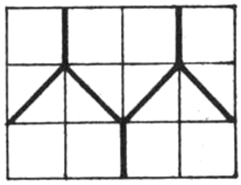
б) 6 точки.

Докажи дека меѓу дадените точки постојат две точки кои се на растојание помало од $\sqrt{5}\,cm$.

Решение. а) Правоаголникот да го поделиме на шест помали правоаголници со должини на страни $2\,cm$ и $1\,cm$ (цртеж десно). Дијагоналата на секој од овие правоаголници е еднаква на $\sqrt{5}\,cm$. Бидејќи 7 точки се наоѓаат во 6 правоаголници, постои правоаголник о кој се наоѓаат најмалку две од дадените точки. Барем една од овие две точки не е крајна точна на дијагонала на 2×1 правоаголник, бидејќи според условот дадените точки се наоѓаат во внатрешноста на правоаголникот 4×3. Затоа растојанието меѓу овие две точки е помало од $\sqrt{5}\,cm$.



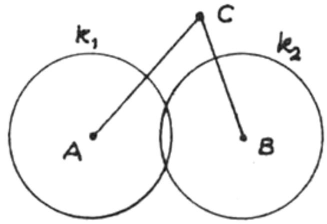
б) Дадениот правоаголник да го поделиме на пет делови како што е прикажано на цртежот десно. Од принципот на Дирихле следува дека во еден од овие делови има најмалку две од дадените 6 точки. Јасно, растојанието меѓу овие две точки не може да биде поголемо од $\sqrt{5}\,cm$, т.е. од дијагоналата на 2×1 правоаголник. Тоа не може да биде еднакво и на $\sqrt{5}\,cm$, бидејќи во тој случај една од тие две точки треба да се наоѓа на страната на почетниот правоаголник, што според условот на задачата не е можно. Затоа растојанието меѓу овие две точки е помало од $\sqrt{5}\,cm$.



Задача 26. Во рамнината се дадени 2021 точка, такви што меѓу било кои три од нив постојат две кои се на растојание помало од 1. Докажи дека постои круг со дирадиус 1 кој содржи 1011 од дадените точки.

Решение. Нека A е произволна од дадените точки и k_1 е круг со центар во A и радиус 1. Ако кругот k_1 ги содржи сите точки, тогаш тврдењето е докажано. Во спротивно меѓу дадените точки постои точка B која е надвор од кругот k_1, т.е. таква што $\overline{AB}>1$. Нека ива сите k_2 е круг со центар во точката B и радиус 1.

Ќе докажеме дека унијата на круговие k_1 и k_2 ги покрива дадените точки. Нека претпоставиме дека постои точка C која е надвор од k_1 и надвор од k_2. Тогаш $\overline{AB}>1$, $\overline{AC}>1$ и $\overline{BC}>1$, што значи дека постојат три точки



такви што растојанието меѓу било кои две од нив е поголемо д 1. Последното противречи на условот на задачата, па затоа точката C припаѓа на унијата на круговие k_1 и k_2.

Конечно, бидејќи секој од дадените 2021 точки е во унијата на круговие k_1 и k_2, а $2021=2\cdot 1010+1$ заклучуваме дека барем еден од двата круга содржи 1011 точки.

Задача 27. Во коцка со должина на раб $13cm$ се дадени 2021 точки. Докажи дека во дадената коцка може да се смести коцка со должина на раб $1cm$ таква што во нејзината внатрешност не се наоѓа ниту една од дадените точки.

Решение. Дадената коцка со должина на раб $13cm$ со рамнини паралелни на ѕидовите да ја поделиме на мали коцки со должина на раб $1cm$. Бројот на делбените коцки е еднаков на $13^3=2197$. Ако во внатрешноста на секоја од малите коцки има по една дадените точки, тогаш бројот на точките треба да биде еднаков на 2197, а според условот на задачата тој број е еднаков на 2021. Оттука, според принципот на Дирихле, следува дека постои коцка со со должина на раб $1cm$ таква што во нејзината внатрешност не се наоѓа ниту една од дадените точки.

Забелешка. Ако точките може да бидат не само во внатрешноста, туку и на границата намалите коцки, тогаш тврдењето на задачата не важи, бидејќи една точка може истовремено да се најде на границата на 8 мали коцки.

Задача 28. На кружницата се означени 20 точки кои се темиња на правилен дваесетаголник. Точките се обоени и тоа 11 со црвена и 9 со зелена боја. Докажи дека постојат две црвени точки кои се дијаметрално спротивни.

Решение. Да ги разгледаме десетте дијаметри на кружницата со краеви во дадените точки. Со тоа дадените 20 точки се поделени во 10 парови по 2 точки (во секој пар се по две дијаметрално спротивни точки). Бидејќи имаме 10 парови и 11 црвени точки, од принципот на Дирихле следува дека две црвени точки припаѓаат на ист пар. Јасно, тоа се бараните две дијаметрално спротивни црвени точки.

Задача 29. Неколку лаци на кружницата се обоени со црвена боја. Збирот на должините на обоените лаци е помал од полупериметарот на кружницата. Докажи дека на кружницата постои дијаметар чии крајни точки не се обоени.

Решение. Со сина боја да ги обоиме лаците кои во однос на центарот на кружницата се симетрични на црвените лаци. Бидејќи збирот на должните на сините лаци е еднаков на збирот на должините на црвените лаци, заклучуваме дека збирот на должините на сите обоени лаци (црвени или сини) е помал од периметарот на кружницата. Значи, на кружницата постои необоена точка. Исто така необоена ќе биде и нејзината симетрична точка во однос на центарот на кружницаа. Јасно, тетивата која ги поврзува овие две точки е бараниот дијаметар.

Задача 30. Нека A е дел од единичната сфера и нека плоштината на A е поголема од 2π. Докажи, дека A содржи две дијаметрално спротивни точки.

Решение. Нека претпоставиме дека A не содржи пар дијаметрално спротивни точки. Со A' да го означиме множеството дијаметрално спротивни точки на точките од A. Тогаш A и A' имаат еднакви плоштини, т.е. $P_A = P_{A'}$. Меѓутоа, $A \cap A' = \varnothing$, па затоа $P_{A\cup A'} = P_A + P_{A'}$. Понатаму, ако со S ја означиме единичната сфера, тогаш $A \cup A' \subseteq S$, па затоа

$$\begin{aligned} 4\pi = P_S &\geq P_{A\cup A'} = P_A + P_{A'} \\ &= 2P_A > 2\cdot 2\pi = 4\pi \end{aligned}$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека A содржи две дијаметрално спротивни точки.

Задача 31. Во кружница со центар O е впишан правилен петнаесетаголник и шест негови темиња се обоени со црвена боја. Докажи дека постојат две црвени темиња A и B такви што $\measuredangle AOB = 120^\circ$.

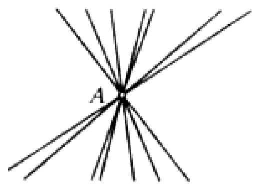
Решение. Темињата на петнаесетаголникот ќе ги поделиме во пет тројки така што секоја тројка се три темиња на еден рамностран триаголник. Бидејќи имаме 5 тројки и 6 црвени точки, постојат две црвени точки, да ги означиме со A и B кои припаѓаат на иста тројка, т.е. тие се темиња на еден од петте рамнострани триаголници. Но, триаголниците се впишани во кружницата чиј центар е точката O, па затоа $\measuredangle AOB = 120^\circ$.

Задача 32. Во кружница со центар O е впишан правилен дваесетаголник и шест негови темиња се обоени со црвена боја. Докажи дека постојат две црвени темиња A и B такви што или AB е дијаметар на кружницата или $\measuredangle AOB = 90^\circ$.

Решение. Темињата на дваесетаголникот ќе ги поделиме на 5 четворки така што секоја четворка се четири темиња на еден квадрат. Бидејќи имаме 5 четворки и 6 црвени точки, постојат две црвени точки, да ги означиме со A и B кои припаѓаат на иста четворка, т.е. тие се темиња на еден од петте квадрати. За точките A и B важи или AB е дијаметар на кружницата или $\measuredangle AOB = 90^\circ$.

Задача 33. Во рамнината се дадени седум прави такви што никои две од нив не се паралелни (цртеж десно). Докажи дека меѓу овие прави постојат две кои формираат агол помал од 26°. Дали тврдењето е точно ако наместо 26° се земе 25°?

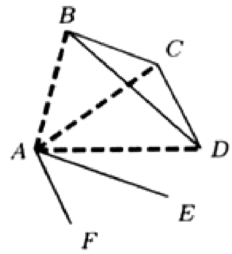
Решение. Во рамнината да земеме точка A и низ неа да повлечеме прави паралелни на секоја од дадените седум прави (цртеж десно). Аглите меѓу нацртаните прави ќе бидат еднакви на аглите меѓу дадените прави. Ако сите агли е еднакви меѓу себе, тогаш секој од нив е еднаков на $180^\circ : 7 < 26^\circ$. Ако аглите меѓу себе не се еднакви, тогаш не е можно сите да се поголеми или еднакви на 26°, бидејќи во тој случај нивниот збир ќе биде поголем или еднаков на $7 \cdot 26^\circ = 182^\circ > 180^\circ$, што не е можно. Конечно, меѓу две од дадените прави аголот ќе биде помал од 26°.



Ако наместо 26° се земе 25°, тогаш тврдењето нема да важи. Навистина, во случај кога аглите меѓу правите се еднакви, тогаш секој агол е еднаков на $180^\circ : 7 > 25^\circ$, па затоа не постојат две прави кои формираат агол кој е помал од 25°.

Задача 34. Во просторот се дадени шест точки такви што никои четири не лежат на иста рамнина. Отсечките чии крајни точки се дадените шест точки се обоени со црвена и сина боја (крајните точки не ги боиме). Докажи дека постои триаголник таков што неговите страни се истобојни.

Решение. Од условот за задачата следува дека меѓу даените точки нема три колинеарни точки (Зошто?). Дадените точки да ги означиме со буквите



A, B, C, D, E, F (цртеж десно). Точката A ја поврзуваме со преостанатите пет точки. Меѓу добиените пет отсечки сигурно има три обоени со иста боја. Без ограничивање на општоста можеме да земеме дека тоа се отсечките AB, AC и AD. Сега да ги поврземе точките B, C и D. Ако бојата на секоја страна на триаголникот BCD е различна од бојата на отсечките AB, AC и AD, тогаш постои триаголник чии страни се истоојни – тоа е триаголникот BCD. Ако, пак, меѓу страните на триаголникот BCD има барем една страна со иста боја како и отсечките AB, AC и AD, на пример BD, тогаш бараниот триаголник е ABD. Со тоа тврдењето на задачата е докажано.

Задача 35. Филип на таблата напишал низа од 50 природни броеви чиј збир е еднаков на 98. Дали оваа низа содржи еден или повеќе последователни членови чиј збир е еднаков на 49:

Решение. Цртаме кружница и со 98 точки ја делиме на 98 еднакви лаци. Потоа 50 од овие точки ги боиме црвено, така што должината на 50 лаци со црвени крајни точки соодветствува на запишаните броеви. Од принципот на Дирихле следува дека на кружницата постојат две црвени дијаметрално спротивни точки. Тие определуваат поделба на два дела, секој со збир еднаков на 49. Барем еден од овие делови е формиран од последователни членови на низата (можно е и само еден член).

Задача 36. На кружницата е запишана низа која се состои од сто и еден природен број чиј збир е 300. Докажи дека во оваа низа постои еден или повеќе последователни членови чиј збир е еднаков на 200.

Решение. Да нацртаме кружницата и со 300 точки да ја поделиме на 300 еднакви делови. На секој број m од дадената низа му придружуваме лак кој се состои од m такви последователни делови, во оној редослед во кој се запишани броевите на низата. Крајните точки на овие лаци да ги обоиме со црвена, а преостанатите точки со сина боја. Да ги разгледаме сите рамнострани триагоници со темиња во точките на поделба. Постојат 100 такви триаголници. Според принципот на Дирихле меѓу овие триаголници има барем еден со две црвени темиња. Да воочиме рамностран триаголник со две црвени темиња. Поголемиот лак на кружницата со крајни точки во овие темиња соодветствува на низачиј збир е еднаков на 200, а помалиот дел го формираат преостанатите броеви чиј збир е 100.

Задача 37. Горјан на таблата напишал низа која се сосои од сто и еден природен број чиј збир е еднаков на 300. Докажи дека оваа низа содржи еден или повеќе последователни членови чиј збир е 100 или 200.

Решение. Цртаме кружница и со 300 точки ја делиме на 300 еднакви делови. На секој број од дадената низа му придружиуваме лак од m такви делови во истиот редослед во кој броевите се запишани на таблата. Крајните точки на овие лаци ги боиме црвено, а преостанатите точки сино. Ги разгледуваме сите рамнострани триаголници со темиња во точките на поделбата. Има 100 такви триаголници. Според принципот на Дирихле, меѓу нив има барем еден чии две темиња се црвени. Да воочиме еден рамностран триаголник со две црвени темиња. Поголемиот лак со темиња во црвените темиња соодветствува на дел од низата чиј збир е 200, а помалиот на дел од низата чиј збир е 100. Во барем еден од овие два дела членовите на низата се последователни, од што следува тврдењето на задачата.

Задача 38. На кружница е запишана низа од сто и еден природен број чиј збир е 400. Докажи дека во оваа низа постојат еден или повеќе последователни членови чиј збир е еднаков на 100 или на 200.

Решение. Цртаме кржница и со 400 точки ја делиме на 400 еднакви делови. На секој број m од дадената низа му придружуваме лак кој се состои од m такви делови во оној редослед во кој се запишани броевуте на низата. Крајните точки на овие лаци ги боиме со црвена боја, а преостанатите точки со сина боја. Ги разгледуваме квадратите со темиња во точките на поделбата. Такви квадрати има 100. Според принципот на Дирихле барем во еден од овие квадрати има две црвени точки. Да воочиме квадрат со две црвени точки темиња. Црвените темиња се или се дијаметрално спротивни или соседни. Во првиот случај тие две темиња определуваат поделба на низата на два дела таква што збирот на броевите во секој од деловите е 200, а во вториот случај црвените темиња на квадратот определуваат поделба на низата на два дела, еден со збир 300 и еден со збир 100.

Задача 39. На таблата се запишани неколку ирационални броеви. Познато е дека за секои два броја a и b запишани на таблата, барем еден од броевите $\frac{a}{b+1}$ и $\frac{b}{a+1}$ е рационален. Определи колку њамногу броеви може да се запишани на таблата.

Решение. На таблата да нацртаме стрелки според следново правило: ако $\frac{a}{b+1}$ е рационален, тогаш цртаме стрелка од a кон b, а ако $\frac{b}{a+1}$ е рационален, тогаш цртаме стрелка од b кон a (се разбира, ако $\frac{a}{b+1}$ и $\frac{b}{a+1}$ се рационални, цртаме стрелки и во двете насоки).

Нека претпоставиме дека на таблата има 4 броеви и нека a е најмалиот меѓу нив. Тогаш од a излегуваат барем две стрелки или во a влегуваат барем две стрелки (принцип на Дирихле). Да го разгледаме првиот случај (вториот е аналоген), т.е. имаме стрелки од a кон b и c. Меѓу b и c има стрелка и без ограничување на општоста можеме да сметаме дека таа е од b кон c. Тогаш бројот

$$1+\frac{1}{b}=\frac{b+1}{b}=\frac{a}{c+1}\cdot\frac{c+1}{b}\cdot\frac{b+1}{a}$$

е рационален, бидејќи трите дропки во последниот производ се рационални броеви. Но, тоа значи дека бројот b е рационален, што е противречност.

Еден пример на три броја, кои ги имаат саканите својства, е следниов: $b=-2a-2, c=-2a-1$, каде a е произволен ирационален број.

Задача 40. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се цели броеви. Докажи, дека постојат $p,q\in\{0,1,2,...,n\}$, $p<q$ такви што $n\,|\,(a_{p+1}+a_{p+2}+...+a_q)$.

Решение. Ги формираме збировите

$$\begin{aligned}&b_1=a_1\\&b_2=a_1+a_2\\&.........................\\&b_n=a_1+a_2+...+a_n.\end{aligned}$$

Ако еден од овие збирови е делив со n, да кажеме b_k, тогаш земаме $p=0, q=k$ и задачата е решена. Нека ниту еден од овие збирови не е делив со n. Од теоремата за делење со остаток имаме $b_i=ns_i+r_i$, $0<r_i<n$ за секој $i=1,2,...,n$. Бидејќи имаме n остатоци $r_1,r_2,...,r_n$ и тие примаат $n-1$ вредности $1,2,...,n-1$, според принципот на Дирихле заклучуваме дека барем два од овие остатоци се еднакви, т.е. постојат p и q такви што $r_p=r_q$ и тоа е бараното решение, бидејќи

$$a_{p+1}+a_{p+2}+...+a_q=b_q-b_p=n(s_q-s_p)\,.$$

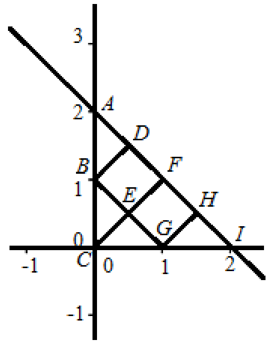
Задача 41. Нека a_i, b_i, $i=1,2,...,7$ се ненегативни реални броеви такви што $a_i+b_i \le 2$. Докажи дека постојат $i, j,\ i \ne j$ такви што важи

$$|a_i - a_j| + |b_i - b_j| \le 1.$$

Решение. Точките (a_i, b_i) ќе ги претставиме во координатен систем. Јасно, секоја од нив припаѓа на триаголникот ACI (види цртеж) или во неговата внатрешност. Нека

$$A(0,2), B(0,1), C(0,0), D(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}), E(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), F(1,1), G(1,0), H(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2}), I(2,0).$$

Триаголникот ACI го делиме на шест области определени со триаголниците ABD, BCE, CEG, GHI и квадратите $BDFE$ и $EFHG$. Бидејќи имаме шест области во кои се наоѓат седум точки, од принцип на Дирихле, постојат две точки (a_i, b_i) и (a_j, b_j) кои припаѓат во иста област. Бидејќи важи



$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \le 1$$

за било кои две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) од иста област следува дека важи и

$$|a_i - a_j| + |b_i - b_j| \le 1.$$