ЖИВКО МАДЕВСКИ
АЛЕКСАНДАР САМАРЏИСКИ
НАУМ ЦЕЛАКОСКИ

ГЕОМЕТРИЈА

ЗА II КЛАС НА СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

ВТОРО ИЗДАНИЕ

ПРОСВЕТНО ДЕЛО
СКОПЈЕ, 1976

Рецензенти:

д-р *Бранко Трпеноски*, професор на Електротехнички и Машински факултет во Скопје

Магдалена Паску, професор на Педагошката академија во Скопје

Гргур Мароевиќ, професор во средно училиште

Со решение на Републичкиот педагошки совет бр. 03-43/1 од 31. III. 1976 година се одобрува употребата на овој учебник.

ПРЕДГОВОР

Оваа книга, пред сè, е наменета за учениците. Затоа прво ним им се обраќаме.

*

1. Нам ни е добро познато дека учебниците по математика ги отворате, обично, кога треба да се решат домашните задачи или кога „набрзина" треба да се подготвите за писмена работа. Исто така, голем број од вас „не можат да научат математика" или, пак, „осеќаат потреба да им се покажува математика", затоа бараат посебни подготовки за: писмена работа, испит или, просто, за „преодна оценка".

Сето тоа доаѓа оттаму што некои од вас не знаат да „читаат" математичка книга. Еден учебник по математика не може да се чита „како роман" — кога при читањето на последните страници, содржината на првите веќе сте ја заборавиле. Секогаш кога ќе седнете да ја учите новата лекција — не отворајте го учебникот токму на таа страница! Почнете да го прелистувате од почетокот, при што ќе се потсетувате на содржината на страниците, сè додека не дојдете до „новото". Веднаш ќе забележите дека „новото", некако, природно се надоврзува на старото и дека не е нешто „сосем ново". Ако ви се чини дека не сте сигурни во некој поим, некое својство и слично, што се користи во лекцијата — веднаш завртете ги претходните страници и барајте објаснение.

Затоа, ние би сакале да го прелистувате учебников повеќе пати во текот на учебната година.

2. Во математиката е суштинско воведувањето на поимите, нивните својства, заемните врски на тие поими; посебно е важен начинот и патот како се воведуваат тие поими, како се откриваат нивните својства, како се согледуваат и изучуваат врските меѓу нив.

Задачите во математиката треба да дојдат на крајот и притоа да помогнат во реализацијата и илустрацијата, конкретизацијата и практичната примена на изученото. Во никој случај, „решавање на задачи" не смее да биде единствена цел на изучувањето на математиката; задачите треба да ви помогнат да ја „совладате" математиката.

За сето тоа е потребно да научите да „читате математички книги" и внимателно да го слушате вашиот наставник.

3. Ние знаеме дека голем број од вас нема да станат математичари, уште помалку ќе има такви што би избрале геометријата да им биде „занает“. Голем дел од знаењето што ќе го стекнете од оваа книга, по некое време ќе го заборавите. Но, ако активно и внимателно ја следите наставата, ако редовно ги исполнувате своите обврски, тогаш математиката многу ќе ви помогне во вашиот понатамошен живот.

Покрај тоа што може да ви помогне да го запознаете светот, математиката, а посебно геометријата, може да ве научи логички да мислите, да го согледувате развитокот на настаните околу вас, да заклучувате и да се искажувате.

Ние ве повикуваме да ја читате книгава и сами да согледате, тргнувајќи од едно, лесно замисливо, бесконечно множество точки, по пат на воведување на погодни реализации од тие точки, и една строго дедуктивна логичка низа од заклучоци, како може да се дојде до мошне сложени форми што се одраз на реалниот свет. Можете да видите дека постојат точно пет правилни полиедри, што се основа на кристалите. Можете да ги согледате својствата на симетријата, којшто толку многу е присутна во природата, па дури и да пресметате колку ќе платите за скршениот прозорец од училницата.

* *

4. Учебников, главно, ја содржи вообичаената материја по геометрија (без мерења) што се изучува по школите. Во него, во преден план (како што тоа го бара и програмата) се истакнати следниве моменти:

— краток систематски преглед на содржината на предметот, со што се согледува дедуктивното изградување на геометријата,

— запознавање со методите на векторската алгебра и нивното користење при доказот,

— запознавање со геометриските трансформации и со нивната богата примена во изучувањето на геометриските фигури.

Исто така, во него се внесени некои теми кои повеќе служат за дополнување на содржината и за информација на читателот, за проширување на знаењата. Тие делови, обично, се означени со * и не би биле задолжителни за настава, но можат да послужат за вончасовни активности.

Инаку, гл. III претставува еден краток преглед и повторување на она што порано е изучено од геометријата. Затоа, ако се земе дека ученикот има веќе некои познавања од геометријата, може да се помине на гл. IV, откако ќе се проучи гл. II (што, секако, не би било за препорачување).

5. Сакаме да напоменеме дека свесно ги одбегнавме поимите за *складност* и *движењето* како основни поими. Земајќи го за основен поим *растојанието*, сметаме дека побрзо и понепосредно (без голем број аксиоми) може да се дојде до изучување на посложените форми и односи.

***

6. На крајот, им се заблагодаруваме на рецензентите за укажувањата кои придонесоа за подобрување на ракописот, а и на другите што директно или индиректно помогнаа во обликувањето на учебников.

Посебно му благодариме на проф. д-р Ѓорѓи Чупона за неговите критички забелешки кои придонесоа за подобрување на квалитетот на учебников.

Ќе им бидеме благодарни и на сите, а посебно на колегите што ќе работат по учебников, за евентуалните забелешки било од стручно-методски, јазичен или технички карактер.

Авторите

Глава I

УВОДНИ ПОИМИ

§ 1. Увод

Дали некогаш сте се запрашале како „ботаниката нè запознава со растенијата на земјата"? Тоа не е тешко да се согледа. Земајќи ги основните карактеристични особини, забележани при проучувањето на повеќе примероци од некое растение, ботаничарите замислиле еден негов идеален претставник и го опишале во своите книги. На тој начин тие можат да го опишат растителниот свет (множеството растенија на земјата), претставувајќи ни го множеството на овие идеални примероци.

И геометријата, како посебна математичка дисциплина, произлегува од потребите да го запознаеме светот во кој живееме, во кој материјата го покажува своето постоење преку најразлични форми. Геометријата има за цел да ги опише тие форми, да ги систематизира и да укаже на нивните особини и на нивните меѓусебни односи. Правејќи свои „идеални примероци", таа ги формулира, ги опишува и ни ги претставува своите таканаречени *геометриски* поими кои ги одразуваат особините на материјалните предмети и законите на материјалниот свет. Нивниот идеален карактер просто означува дека не ги земаме предвид оние својства на материјалните објекти што не се суштински при некое нивно конкретно проучување.

Така, често пати, при научните иследувања, во техничките процеси или во практичниот живот, множеството од некои предмети згодно е да се разгледува како множество *точки*. Тоа се случува, на пример, кога не ќе нè интересираат нивните физички и хемиски својства, нивните форми и димензии, т.е. кога во случајот не се битни никакви нивни индивидуални карактеристики, туку само нивните меѓусебни положби, меѓусебни растојанија, нивното подредување и сл. На тој начин постапуваат, на пример, географите кога сакаат да ја прикажат нашата земја на карта. Тие неа ја замислуваат како дел од *рамнина*, на која границите, реките, патиштата се претставени со делови од *криви* и *прави линии*, населените места, планинските врвови — со *точки*, итн.

За нашата цел, заради посистематско запознавање на геометријата, не е од суштинско значење да ги осмислуваме поимите *точка*, *права* или *рамнина* и да ги бараме материјалните објекти чиј одраз се тие поими. Ние ќе го прифатиме нивното „постоење" во просторот, разгледувајќи ги притоа и правите и рамнините како множества точки. Тоа ќе ни овозможи да ги искористиме нашите познавања на множествата.

Проследувајќи ја својата задача, геометријата ни помага во развивањето на нашето мислење, ни укажува како да бараме логички врски во настаните што се случуваат околу нас, да го предвидуваме нивниот тек, крајот и последиците што ќе дојдат потоа, ако претходно ги знаеме причините што довеле до тие настани.

Геометријата по сè потсетува на една логички строго замислена игра. Вие, веројатно, го познавате шахот: дадени се 16 бели и 16 црни *фигури* и *шаховска табла* од 64 полиња, *правилата* за водење на играта однапред се утврдени и играта може да почне (потребни се уште двајца играчи).

Ако сакаме вистински да ја запознаеме геометријата, покрај нејзината „табла" (просторот), треба да ги запознаеме и „фигурите" (основните елементи) и „правилата" (основните релации), па потоа да се зафатиме со изучување на нејзините „отворања", разните „минијатури" или „варијанти", со нејзините „проблеми".

За искажување на сето тоа, во геометријата, како и во другите области од математиката, се служиме со посебен вид реченици: тоа се реченици со кои се изјавува нешто (или како уште се викаат и декларативни реченици), кои имаат својство или да се точни (т.е. вистинити) или, пак, да се неточни (т.е. невистинити). Таквите реченици се викаат *искази*. Така, на пример, речениците „8 е парен број", „6 е прост број", „Ако триаголникот е рамнокрак, тогаш неговите агли при основата се еднакви" — се искази, од кои првиот и третиот се точни, а вториот неточен. Речениците, пак: „Конструирај триаголник со еднакви страни" и „Февруари има 28 дена" не се искази, зашто првата реченица не е декларативна, а втората е декларативна, но не можеме да кажеме дали е точна или неточна. Од посебна важност се точните искази. Нив ги нарекуваме *тврдења*.

§2. Основни и изведени поими

Вие познавате многу поими од геометријата, како, на пример, точка, растојание, триаголник, кружница, итн. Со некои од нив ќе се сретнете и во оваа книга. Порано, тие ви биле претставени нагледно или објаснети со поголема или помала строгост при искажувањето што го наметнувала вашата возраст. Но, сигурно сте забележале како вашиот наставник се обидува да го *објасни новиот поим*, користејќи притоа други поими кои ви биле познати и кои, во извесна смисла, се попрости од него.

Така, на пример, знаете дека: „*Тетива* што *минува низ центарот* на една *кружница* ја викаме *дијаметар*". Се забележува дека поимот *дијаметар* го објаснивме со една реченица во која логички се поврзани поимите *тетива*, *минува низ*, *центар* и *кружница*. Реченицата со која се осмислува еден поим и се согледува неговата содржина преку други веќе познати поими ја викаме *дефиниција*.

Ако сега се обидеме да дадеме дефиниција на поимот *тетива*, тогаш ќе мораме да употребиме некои други поими, како: *точка*, *отсечка*, *сврзува*; сосем логично се наметнува дефинирањето и на овие поими. Овој процес на изградување на поимите ќе нè доведе до моментот кога ќе треба да одлучиме:

— или еден поим да го објасниме со некој друг поим, којшто е објаснет со првиот, како на пример: „Ако сум свртен со грбот кон југ, тогаш десно од мене е *исток*", а потоа: „Ако сум свртен со грбот кон југ, тогаш на исток е мојата *десна* страна" (значи, прво *исток* е објаснет со десно, а потоа *десно* се објаснува со исток);

— или, пак, некои од поимите мораме да ги земеме без да ги дефинираме и со нивна помош да ги изведеме дефинициите на сите други поими.

Во геометријата, како и во секоја друга научна дисциплина, се определуваме за втората можност. Поимите што не ги дефинираме, ги викаме *основни* поими, а сите други, ги викаме *изведени* (или *дефинирани*) поими.

Овде, како основни поими ќе ги земеме поимите: *точка*, *права*, *рамнина* и *растојание*.

§3. Основни и изведени тврдења

Геометријата има задача да нè запознае со својствата на геометриските поими, да ни укаже на нивните заемни врски и да ги изучи односите што произлегуваат од тие врски. Овие својства и односи најчесто се искажуваат во вид на некакви тврдења (т.е. точни искази), коишто се докажуваат според законите на логиката.

Самите логички закони што се јавуваат како посредник, не можат да ја потврдат точноста на некој изказ ако нема никакви податоци за поимите што учествуват во него. Тоа значи дека секое ново тврдење се добива по пат на логички расудувања, како последица од некои други тврдења чија точност е установена порано.

Тврдењето што го докажуваме, обично, се вика *теза*, а исказите од кои следува тезата се викаат *аргументи*. Низата од логички заклучоци што нѐ водат од аргументите до тезата, се вика *демонстрација*. Аргументите, демонстрацијата и тезата, заедно, се викаат *доказ*.

Еден доказ има за цел да ја установи вистинитоста на тезата. Притоа, посебно е важно аргументите да бидат точни искази. Тоа значи дека секој од аргументите порано бил теза во некој доказ и морал да се докаже. И тука, при добивањето на едни тврдења, како логички последици од други, мора да се дојде до алтернативата:

— или ќе навлеземе во „ѓаволски круг", т.е. тезата од некој доказ да биде аргумент во доказот во кој теза е некој од аргументите од претходниот доказ,

— или некои искази да се земат само како аргументи, т.е. нивната точност да се прифати без доказ.

Такви искази што ги прифаќаме за точни без доказ, се викаат *основни тврдења* или *аксиоми*. Сите други тврдењи се викаат *изведени тврдења* или *теореми* и се докажуваат.

*§4. Методи на логичко заклучување

4.1. Неколку поими од математичката логика

Во претходниот дел ги спомнавме зборовите „логички закони", „логичко заклучување" и сл. Овде ќе се потсетиме што се тоа „логички закони" и ќе наведеме некои методи на логичко заклучување што се користат многу често при докажувањето на теоремите во геометријата.

Знаеме дека со помош на логичките сврзници „и" ($\wedge$), „или" ($\vee$), „ако..., тогаш" ($\Rightarrow$), „ако и само ако" ($\Leftrightarrow$) и „не" ($\neg$), можеме да формираме нови, сложени искази од некои дадени искази. Притоа, вообичаено е секој исказ да се означува со некоја буква, наречена *исказна буква*. Новодобиените реченици се викаат *конјункција*, *дисјункција*, *импликација*, *еквиваленција* и *негација*, соодветно, и нивната вистинитост (или како што уште се вели, нивните вистонитосни вредности) се определува на претходно утврден начин. На пример, ако p и q се дадени искази, тогаш реченицата „Ако p, тогаш q" (симболично: $p \Rightarrow q$) е импликација од исказите p, q. Импликацијата $p \Rightarrow q$ се зема дека е неточен исказ во случајот кога исказот p е неточен, а q точен, додека во сите други случаи, таа е точен исказ. Притоа, p се вика *претпоставка*, а q се вика *заклучок* или *последица*.

Многу теореми во математиката имаат форма на импликација: $p \Rightarrow q$. Ако претпоставката и заклучокот си ги разменат местата, тогаш се добива исказот $q \Rightarrow p$, кој, во случаите кога е точен, се вика *обратна теорема* од првобитната теорема $p \Rightarrow q$. Аналогно, исказот $\neg p \Rightarrow \neg q$, во случаите кога е точен, се вика *спротивна теорема* на теоремата $p \Rightarrow q$, а исказот $\neg q \Rightarrow \neg p$, во случаите кога е точен, се вика *спротивна од обратната* (или *обратна од спротивната*) *теорема*.

Секој израз составен „на дозволен начин" од симболите за логичките сврзници, од знаците за зборовите „точен" ($\top$) и „неточен" ($\perp$), како и ознаките за исказите (т.е. исказните букви), се викаат *исказни формули*. Секоја исказна формула што е точна за сите можни вредности на исказните букви што учествуваат во неа се вика *идентично вистинита формула* или *тавтологија*. Исказните формули, пак, што се неточни за сите можни вредности на исказните букви се викаат *идентично невистинити формули* или *контрадикции*.

Тавтологиите се од посебно значење во математиката, зашто нив ги прифаќаме како закони на нашето мислење и од нив произлегуваат разни методи или правила според кои изведуваме заклучоци. Овде ќе ги наброиме оние што најчесто ќе ги користиме во оваа книга.

4.2. Правило за транзитивност на еквиваленцијата

Ако исказот p е еквивалентен со исказот q, а q е еквивалентен со r, тогаш (се зема дека) исказот p е еквивалентен со исказот r. Напишано со симболи, тоа значи дека исказната формула

$$((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$$

е тавтологија.

Ова правило на заклучување го користиме мошне често. На пример, кога решаваме равенка, неа ја сведуваме на друга поедноставна равенка, но еквивалентна со првата, втората ја сведуваме на трета, еквивалентна со втората, итн. За илустрација, ќе ја решиме равенката:

$$p: 2x - 6 = 4 - 3x.$$

Оваа равенка е еквивалентна со равенката:

$$q: 5x = 10,$$

а последнава е еквивалентна со

$$r: x = 2.$$

Заклучок: $2x - 6 = 4 - 3x \Leftrightarrow x = 2$, т.е. решението на дадената равенка е $x = 2$.

Аналогно правило важи и за импликацијата. И тоа се користи многу често.

4.3. Правило за транзитивност на импликацијата

Ако $p \Rightarrow q$ и $q \Rightarrow r$ се точни искази, тогаш и исказот $p \Rightarrow r$ е точен. Тоа, напишано со симболи, значи дека исказната формула

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

е тавтологија.

На пример, ако x е паран број, тогаш x^2 е парен број; ако x^2 е парен број, тогаш x^2+1 е непарен. Според правилото за транитивност на импликацијата, од „x е парен број", можеме направо да заклучиме дека „x^2+1 е непарен број".

4.4. Правило на раздвојување (или модус поненс)

Ако $p \Rightarrow q$ е точен исказ и ако p е точен исказ, тогаш и q е точен исказ. Тоа, напишано со симболи, значи дека исказната формула

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

е таволгија.

На пример, нека е даден еден четириаголник. Ние знаеме дека исказот: „Ако еден четириаголник е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални" е точен. Нека дадениот четириаголник е ромб. Според ова правило, можеме да заклучиме дека дијагоналите на дадениот четириаголник се заемно нормални.

При примената на ова правило, некои (невнимателни!) прават грешка „заменувајќи" го p со q, т.е. наместо $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$, земаат $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$. Еве како изгледа тоа во горниот пример. Даден е еден четириаголник. Исказот „Ако еден четириаголник е ромб, тогаш дијагоналите на четириаголникот се заемно нормални" $(p \Rightarrow q)$ е точен. Нека „Дијагоналите на разгледуваниот четириаголник се заемно нормални" (исказ q). Заклучок: „Четириаголникот е ромб" (исказ p). Се разбира, заклучокот е погрешен, зашто има четириаголници со заемно нормали дијагонали што не се ромбови (на пример, делтоид).

4.5. Правило на контрадикција

Заклучокот q во импликацијата $p \Rightarrow q$ е точен исказ, ако негагацијата на q доведува до контрадикција.

Со други зборови, за докажување на теореми со форма $p \Rightarrow q$ може да се постапи на следниов начин: тргнуваме од p и $\neg q$ и се обидуваме да изведеме две тврдења, противречни едно на друго. Ако успееме во тоа, сметаме дека точноста на теоремата $p \Rightarrow q$ е докажана.

Овој начин на докажување се вика *доведување до противречност*, а самиот доказ се вика *индиректен доказ*.

Примената на ова правило ќе ја илустрираме со еден пример. Ќе докажеме дека не постои рационален број c чиј квадрат е бројот 2.

Овој исказ можеме да го формулираме во форма на импликација, „Ако p, тогаш q": Ако c е рационален број, тогаш $c^2 \neq 2$.

(Значи, p: „c е рационален број", q: „$c^2 \neq 2$".)

Па, нека c е рационален број, т.е. некоја дропка $\frac{m}{n}$, каде што m е некој цел број а n е некој природен број. Можеме да земеме дека $\frac{m}{n}$ е нескратлива дропка (зашто, во спротивно, можеме да го извршиме скратувањето и да добиеме нескратлива дропка).

Да претпоставиме дека е точен исказот $\neg q$, т.е. дека $c^2 = 2$. Тогаш, поради $c = \frac{m}{n}$, добиваме $\frac{m^2}{n^2} = 2$, т.е.

$$m^2 = 2n^2, \tag{1}$$

Бидејќи десната страна $(2n^2)$ е парен број, следува дека и m^2 е парен, а тоа е можно само ако бројот m е парен, т.е. $m = 2s$. Заменувајќи во (1), добиваме $4s^2 = 2n^2$, т.е.

$$2s^2 = n^2, \tag{2}$$

од каде што следува дека бројот n^2 е парен, па и бројот n е парен. Така, добиваме дека броевите m и n се парни, па дропката $\frac{m}{n}$ можеме да ја скратиме со два.

Значи, од една страна, дропката $\frac{m}{n}$ е нескратлива (според претпоставката), а, од друга страна, е скратлива (според заклучокот), а тоа се две тврдења, противречни едно на друго.

Според правилото на контрадикција, заклучуваме дека е точен исказот: „Ако c е рационален број, тогаш $c^2 \neq 2$"

4.6. Закон за контрапозиција

Ако сакаме да ја докажеме точноста на импликацијата $p \Rightarrow q$, можеме да постапиме на следниов начин: претпоставуваме точност на негацијата од q, $(\neg q)$ и се обидуваме да ја докажеме точноста на исказот $\neg q \Rightarrow \neg p$. Ако сме успеале во тоа, тогаш сметаме дека сме ја докажале точноста на исказот $p \Rightarrow q$. Ова, напишано со симболи, значи дека исказната формула

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

е тавтологија. Ваквиот начин на докажување се вика *тргнување од спротивното*.

На пример, нека е даден исказот: „Ако целиот број a не е делив со 2, тогаш a не е делив со 10".

Наместо да ја докажуваме точноста на овој исказ ($p \Rightarrow q$), можеме да ја земеме неговата „контрапозиција" ($\neg q \Rightarrow \neg p$): „Ако целиот број a е делив со 10, тогаш a е делив со 2".

Ако сме докажале дека овој исказ е точен, сметаме дека со тоа сме ја докажале точноста на првобитниот исказ $p \Rightarrow q$.

Задачи

1. Дадени се исказите:

а) $p: 2 < 5$, q: 12 е делив со 3;

б) p: 7 е прост број, q: 7 е делив со 2;

в) $p: 2 > 5$ q: 7 е делив со 2.

Да се формира: конјункцијата, дисјункцијата, импликацијата и еквиваленцијата на исказите p, q и да се одреди вистинитосната вредност на секој од добиените искази.

2. Дадени се исазите p: Вардар е најдолгата река во Македонија, q: Вардар минува низ Скопје. Прочитај ги со зборови следниве исказни формули:

а) $p \wedge q$; б) $p \vee \neg q$;

в) $\neg p \wedge q$; г) $p \Rightarrow \neg q$;

д) $\neg q \Rightarrow p$; ѓ) $\neg p \Leftrightarrow \neg q$;

е) $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$; ж) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$.

Кои од исказите се точни?

3. Даден е исказот: „Ако бројот a е делив со бројот 6, тогаш a е делив со бројот 3" ($p \Rightarrow q$). Да се формира:

а) обратниот исказ; б) спротивниот исказ;

в) обратниот од спротивниот; г) спротивниот од обратниот

на исказот $p \Rightarrow q$. Кои од тие искази се тврдења (т.е. точни искази)?

4. Формирајќи таблица на вистинитосните вредности, докажи дека исказната формула

а) $p \vee \neg p$;

б) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$;

в) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

е тавтологија.

5. Докажи дека следниве исказни формули се контрадикции:

а) $p \wedge \neg p$; б) $p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$.

Глава II

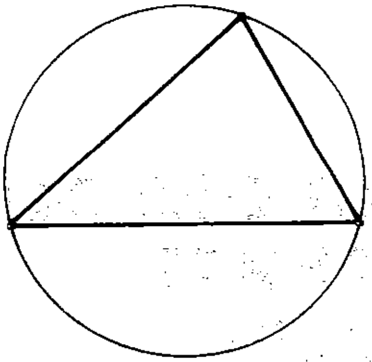
МЕЃУСЕБНИ ОДНОСИ НА ОСНОВНИТЕ ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

Во уводот веќе насетивте дека сакаме да ви презентираме едно систематско изградување на геометријата, една дедуктивна изградба на нејзините форми и на нивните меѓусебни односи, едно строго логичко проследување на доказите. За таа цел се обидовме да направиме едно разграничување помеѓу основните и изведените поими, помеѓу основните и изведените тврдења.

Меѓу основните поими ги спомнавме и точките, правите и рамнините. Секој од нас си создал интуитивна претстава за нив и покрај тоа што во светот во кој живееме не можеме да укажеме на предмети чиишто одрази (во нашето сознание) се тие поими. Така, на пример, сродени сме со мислата дека секој допир со кредата на школската табла или со моливот по листот хартија нагледно ја претставува точката; секоја трага на моливот по листот хартија, кога тој е воден по работ на ленирот, ни формира права; дека една рамнина можеме да ја претставиме со лист хартија.

Да ги прифатиме тие наши интуитивни претстави за точката, правата и рамнината; тоа ќе ни помогне да добиеме погодни сознанија за другите посложени геометриски фигури. Исто така, тоа ќе ни овозможи во нашето изучување на геометријата да го користиме цртежот како многу погодна форма за нагледно согледување на заемната поставеност на геометриските фигури.

Така, на пример, кога сакаме нагледно да си ја претставиме опишаната кружница на некој триаголник, ние тоа го правиме како на цртежов (црт. 1), макар што сме свесни дека ниту страните на триаголникот се делови од прави (зашто имаат одредена дебелина), ниту, пак, неговите темиња се точки (зошто се претставени со мали кружчиња).



Црт. 1

За оваа цел посебно е важно да ја прифатиме и интуитивната претстава дека и точките и правите и рамнините се бесконечно многу; поточно речено множеството точки е бесконечно, а правите и рамнините се негови вистински подмножества. Со тоа ќе ни биде овозможен еден сосем апстрактен приод во изградбата на геометријата.

Множеството точки ќе го означуваме со **P**. Значи, елементите на **P** се точки; нив ќе ги означуваме со големите букви A, B, C,... на латинската азбука.

Различните букви A и B, обично, ќе ни означуваат две различни точки; ако, пак, буквите A и B се ознаки за една иста точка, ќе пишуваме $A \equiv B$, или $A = B$, и ќе велиме дека „точките A и B се совпаѓаат".

Секое подмножество од **P** ќе го викаме *геометриска фигура* или, само, *фигура*. Самото множество **P**, како и секое едноелементно подмножество $\{A\}$ од **P** се фигури. Фигурата **P** ќе ја викаме *простор*.

Од сите можни фигури, т.е. од сите можни подмножества на **P**, ќе издвоиме два вида фигури и ќе ги наречеме *прави* и *рамнини*. Правите ќе ги означуваме со малите букви a, b, c,... од латинската азбука, а рамнините — со големите букви Ω, Π, Σ, Φ,... од грчката азбука.

Правите и рамнините не ги дефинираме; кои подмножества од **P** ќе бидат прави, а кои рамнини, ќе произлезе од тврдењата што ќе ги прифатиме како *основни*, т.е. од *аксиомите*.

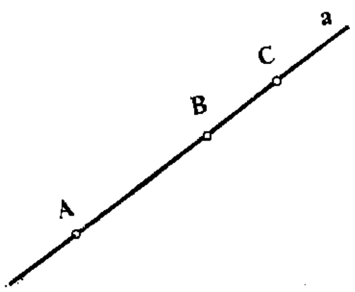
Правите и рамнините уште ги викаме и *основни геометриски фигури*.

§1. Права. Меѓусебен однос на точка и права

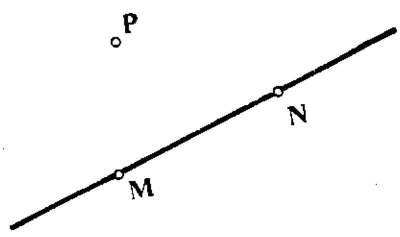
Прифативме дека секоја права е подмножество од **P**. Според тоа, ако A е една точка и a една права, тогаш точката A може да ѝ припаѓа на правата a ($A \in a$) или да не ѝ припаѓа ($A \notin a$). Ако $A \in a$, тогаш ќе велиме дека „точката A *лежи на* правата a" или „правата a *минува низ* точката A"; ако, пак, $A \notin a$, ќе велиме уште дека „точката A е *надвор* од правата a".

Аксиома 1. На секоја права лежат бесконачно многу точки, а за секоја права постојат точки што не ѝ припаѓаат.

На црт. 1 е претставена правата a и три точки што лежат на неа. За точките што лежат на една иста права велиме дека се



Црт. 1



Црт. 2

колинеарни. Така, точките A, B и C на црт. 1 се колинеарни, а точките M, N, P на црт. 2 не се колинеарни.

Аксиома 2. Низ кои било две различни точки минува една и само една права.

Според оваа аксиома, следува дека кои било две точки се колинеарни. Правата што минува низ две различни точки A и B ќе ја означуваме со AB.

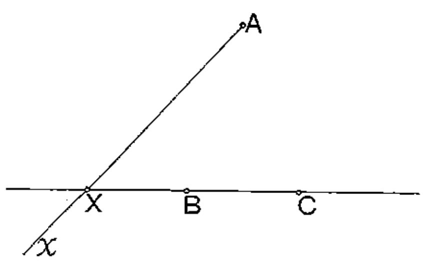
Ќе докажеме две теореми коишто се последици од прифатените две аксиоми.

Теорема 1. *Во просторот* **P** *постојат барем три неколинеарни точки.*

Доказ. Нека A и B се две различни точки и нека a е правата што минува низ нив. Според А. 1, постои точка C што не лежи на правата a. Значи, точките A, B и C не се колинеарни.

Теорема 2. *Низ секоја точка минуваат бесконечно многу прави.*

Доказ. Нека A е произволна точка, а B и C нека се точки што не се колинеарни со A (црт. 3). Секоја точка $X \in a$ и точката A определуваат права x што минува низ A. Бидејќи на правата BC лежат бесконечно многу точки (А. 1), следува дека низ A минуваат бесконечно многу (различни) прави.



Црт. 3

Задачи

1. Избери две точки A и B. Колку прави минуваат низ точките A и B? Од каде следува заклучокот?

2. Нека A е произволна точка. Покажи дека постојат точки B и C, такви што точките A, B и C не се колинеарни.

3. Нека A е произволна точка. Покажи дека постои права a што не минува низ точката A.

4. Покажи дека постојат барем три прави што не минуваат низ иста точка.

5. Избери три неколинеарни точки A, B и C. Колку прави определуваат овие три точки?

6. Покажи дека со четири различни точки се определени една, четири или шест прави.

7. Покажи дека со пет различни точки може да се определат: 1, 5, 6, 8 или 10 прави.

8. Покажи дека две различни прави имаат најмногу една заедничка точка.

§ 2. Рамнина. Меѓусебен однос на точка и рамнина

За рамнините ќе направиме аналогна дискусија како за правите. Прифативме дека секоја рамнина е подмножество од **P**, т.е. некое множество точки. Една точка A може да ѝ припаѓа на рамнината Σ ($A \in \Sigma$) или да не ѝ припаѓа ($A \notin \Sigma$). Ако $A \in \Sigma$, тогаш ќе велиме и дека „точката A *лежи во* рамнината Σ", или „рамнината Σ *минува низ* точката A". Ако, пак, $A \notin \Sigma$, тогаш ќе велиме уште дека „точката A е *надвор* од рамнината Σ".

Аксиома 3. На секоја рамнина лежат барем три неколинеарни точки, а за секоја рамнина постојат точки што не ѝ припаѓаат.

Аксиома 4. Ако точките A, B и C не се колинеарни, тогаш постои една и само една рамнина што минува низ нив.

Од досега прифатените аксиоми следува дека, ако a е права, а Σ рамнина, тогаш тие се различни подмножества од **P**. Уште повеќе, од А. 1 и А. 3 следува дека и правата a и рамнината Σ се вистински подмножества од **P**.

Ќе докажеме две теореми коишто се директни последици од прифатените аксиоми.

Теорема 1. *Во просторот* **P** *постојат барем четири точки што не лежат во иста рамнина.*

Доказ. Според Т. 1 од § 1, во просторот **P** постојат барем три неколинеарни точки; нека се тоа точките A, B и C. Бидејќи точките A, B и C не се колинеарни, според А. 4, следува дека низ нив минува единствена рамнина Σ. Според А. 3, постои точка D што не лежи на рамнината Σ. Значи, точките A, B, C и D не лежат во иста рамнина.

Теорема 2. *Низ секоја точка минува барем една рамнина.*

Доказ. Нека A е произволна точка; постојат точки B и C, такви што A, B и C не се колинеарни (види зад. 2 од § 1). Низ точките A, B и C минува единствена рамнина Σ, па, значи, низ точката A минува барем една рамнина.

Ако A, B и C се три неколинеарни точки, тогаш рамнината што минува низ нив ќе ја означуваме со ABC.

Задачи

1. Нека A е произволна точка. Покажи дека постојат точки B, C и D, такви што точките A, B, C и D не лежат во иста рамнина.

2. Нека A е произволна точка. Покажи дека постои барем една рамнина Σ што не минува низ точката A.

3. Покажи дека низ секоја точка A минуваат барем три различни рамнини.

4. Нека A, B, C и D се четири точки, такви што кои било три од нив не се колинеарни. Колку рамнини определуваат тие точки?

5. Нека A, B, C, D и E се пет точки, такви што кои било три од нив не се колинеарни. Покажи дека тие определуваат една, седум или десет рамнини.

6. Како се заклучува дека една права a и една рамнина Σ се различни множества точки?

7. Како се заклучува дека секоја права (секоја рамнина) е вистинско подмножество од **P**?

§ 3. Меѓусебен однос на права и рамнина

Нека се дадени една права a и една рамнина Σ. Како што видовме во § 2, правата a и рамнината Σ се различни множества точки, а уште повеќе, тие се вистински подмножества од **P**. Една точка A од правата a може да ѝ припаѓа на рамнината Σ или, пак, да не ѝ припаѓа. Ако секоја точка X од правата a ѝ припаѓа на рамнината Σ, тогаш $a \cap \Sigma = a$; во тој случај ќе велиме дека правата a *лежи во* рамнината Σ, односно дека рамнината Σ *минува низ* правата a.

Аксиома 5. Ако две точки A и B од правата a лежат во рамнината Σ, тогаш и правата a лежи во рамнината Σ.

Значи, една права a и една рамнина Σ може:

— или да немаат заедничка точка, т.е. $a \cap \Sigma = \varnothing$;

— или да имаат една заедничка точка, т.е. $a \cap \Sigma = \{A\}$;

— или секоја точка од правата a да лежи во рамнината Σ, т.е. $a \cap \Sigma = a$.

Во вториот случај, т.е. кога $a \cap \Sigma = \{A\}$, ќе велиме дека правата a и рамнината Σ *се сечат* во точката A (или дека правата a *ја прободува* рамнината Σ во точката A); во овој случај, наместо $a \cap \Sigma = \{A\}$, ќе пишуваме $a \cap \Sigma = A$.

Дефиниција. Ако правата a и рамнината Σ немаат заеднички точки ($a \cap \Sigma = \varnothing$) или, пак, правата a лежи во рамнината Σ ($a \cap \Sigma = a$), тогаш за нив ќе велиме дека се *паралелни* и ќе пишуваме $a \parallel \Sigma$.

Со А. 5 се утврдува односот на една права и една рамнина во просторот. Овде ќе докажеме некои теореми што ќе ни овозможат подобро да го согледаме тој однос.

Теорема 1. *На секоја рамнина Σ лежи барем една права.*

Доказ. Според А. 3, во рамнината Σ лежат барем две точки; да ги означиме со A и B. Низ точките A и B минува единствена права a (А. 2). Бидејќи точките A и B од правата a лежат во рамнината Σ, според А. 5, правата a лежи во рамнината Σ.

Теорема 2. *Во секоја рамнина Σ лежи барем една права a и барем една точка A, така што $A \notin a$.*

Доказ. Според А. 3, во рамнината Σ лежат барем три неколинеарни точки; да ги означиме со A, B и C. Правата $a = BC$ лежи во рамнината Σ (А. 5) и притоа точката A не лежи на правата a.

Теорема 3. *За секоја права a што лежи во рамнината Σ постои барем една точка A, таква што $A \in \Sigma$ и $A \notin a$.*

Доказ. Правата a и рамнината Σ се различни множества точки, па, значи, постои барем една точка A, таква што $A \in \Sigma$ и $A \notin a$.

Теорема 4. *Ако A е точка што не лежи на правата a, тогаш постои една и само една рамнина Σ што минува низ точката A и низ правата a.*

Доказ. На правата a лежат барем две точки; да ги означиме со B и C. Точките A, B и C не се колинеарни, па, значи, постои единствена рамнина Σ што минува низ точките A, B и C. Правата a и рамнината Σ имаат две заеднички точки, па, значи, рамнината Σ минува низ правата a. Според тоа, низ точката A и низ правата a минува барем една рамнина.

Нека, сега, Σ_1 е произволна рамнина што минува низ точката A и низ правата a. Бидејќи Σ_1 минува низ точките A, B и C, кои што не се колинеарни, според А. 4, Σ_1 и Σ се совпаѓаат.

Задачи

1. Покажи дека во секоја рамнина Σ лежат барем три различни прави.

2. Нека точката A лежи во рамнината Σ. Покажи дека низ точката A минуваат бесконечно многу прави што лежат во рамнината Σ.

3. Покажи дека за секоја рамнинаΣ постои барем една права a што ја прободува рамнината Σ.

4. Нека правата a ја прободува рамнината Σ. Покажи дека на правата a лежат бесконечно многу точки што не лежат на рамнината Σ.

5. Нека a е права, а Σ некоја рамнина. Дали може да биде $a \cap \Sigma = \Sigma$?

6. Покажи дека низ секоја права a минува барем една рамнина.

§ 4. Меѓусебен однос на две рамнини

Овде ќе го испитаме меѓусебниот однос на две рамнини.

Теорема 1. *Постојат барем две рамнини,* Σ_1 и Σ_2, *коишто имаат заедничка права.*

Доказ. Според Т. 1 од § 2, постојат четири точки што не лежат во иста рамнина; да ги означиме со A, B, C и D. Рамнините $\Sigma_1 = ABC$ и $\Sigma_2 = ABD$ се различни. Правата $a = AB$ има две заеднички точки и со рамнината Σ_1 и со рамнината Σ_2, па, значи, правата a лежи во двете рамнини. Бидејќи Σ_1 и Σ_2 се различни, според Т.4, §3, тие не може да имаат заедничка точка што не лежи на правата a. Следствено, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = a$.

Значи, ако две рамнини, Σ_1 и Σ_2, имаат две заеднички точки, тогаш тие имаат заедничка права, т.е. две рамнини не може да имаат само две заеднички точки. Сега можеме да се прашаме: дали две рамнини може да имаат само една заедничка точка? Ќе ја прифатиме следнава аксиома:

Аксиома 6. Ако две рамнини имаат заедничка точка, тогаш тие имаат барем уште една заедничка точка.

Со други зборови, ако две рамнини имаат една заедничка точка, тогаш тие имаат заедничка права. Според тоа, две рамнини Σ_1 и Σ_2:

— или се совпаѓаат, т.е. $\Sigma_1 = \Sigma_2$;

— или имаат заедничка права;

— или немаат заедничка точка, т.е. $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$.

Во вториот случај, кога двете рамнини Σ_1 и Σ_2 имаат заедничка права, велиме дека рамнините *се сечат*. Ако рамнините Σ_1 и Σ_2 немаат заедничка точка или, пак, се совпаѓаат, тогаш велиме деки тие се *паралелни* и пишуваме $\Sigma_1 \parallel \Sigma_2$.

Задачи

1. Покажи: $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_1 \Rightarrow \Sigma_1 = \Sigma_2$.

2. Дали две рамнини може да имаат само една заедничка точка?

3. Нека Σ_1 и Σ_2 се две различни рамнини и нека $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \varnothing$. Покажи дека постои барем една права што ги прободува двете рамнини.

4. Нека Σ_1 и Σ_2 се две различни рамнини. Покажи дека постојат бесконечно многу точки што не лежат ни на Σ_1, ни на Σ_2.

§ 5. Меѓусебен однос на две прави

Нека се дадени две прави a и b. Нивниот пресек $a \cap b$ може:

— да содржи барем две точки, т.е. $\{A, B, \ldots\} \subseteq a \cap b$;

— да содржи само една точки, т.е. $a \cap b = \{A\}$;

— да биде празно множество, т.е. $a \cap b = \varnothing$.

Со следниве теореми може да се согледа меѓусебниот однос на две прави чиј пресек е непразно множество, т.е. $a \cap b \neq \varnothing$.

Теорема 1. *Ако две прави имаат барем две заеднички точки, тогаш тие се еднакви како множество точки.*

Доказ. Ако A и B се две различни точки на правите a и b, тогаш, според А. 2, постои една и само една права што минува низ нив; таа права не може да биде различна ни од правата a, ни од правата b, па значи правите a и b, како множества точки, се еднакви.

Во тој случај, за правите a и b велиме дека *се совпаѓаат.*

Теорема 2. *Две различни прави не можат да имаат повеќе од една заедничка точка.*

Доказ. Навистина, ако правите a и b имаат повеќе од една заедничка точка, тогаш, според претходната теорема, тие се совпаѓаат.

Значи, пресекот на две различни прави, ако е непразен, содржи само една точка; во тој случај за правите велиме дека *се сечат* и наместо $a \cap b = \{A\}$ ќе пишуваме $a \cap b = A$.

Теорема 3. *Низ две прави што се сечат минува една и само една рамнина.*

Доказ. Нека правите a и b се сечат во точката C. На правата a лежат бесконечно многу точки, па нека A е една точка од неа и нека е различна од C. Тогаш, бидејќи A лежи надвор од правата b, според Т. 4 од § 3, постои една и само една рамнина Σ што минува низ A и b. Оваа рамнина Σ и правата a имаат две заеднички точки A и C, па, според А. 5, Σ минува и низ правата a.

Секоја друга рамнина Σ' што минува низ некоја друга точка од правата a, различна и од A и од C, и низ правата b, исто така, ја содржи и правата a. Значи, рамнината Σ' ги содржи точката A и правата b, па според Т. 2, рамнините Σ и Σ' се совпаѓаат.

Значи, две прави што се сечат, секогаш лежат на една иста рамнина. Но, каква е положбата во просторот на две прави a и b што не се сечат, т.е. $a \cap b = \varnothing$? Дали постојат прави што не лежат на една иста рамнина?

Теорема 4. *Постојат прави што не лежат на иста рамнина.*

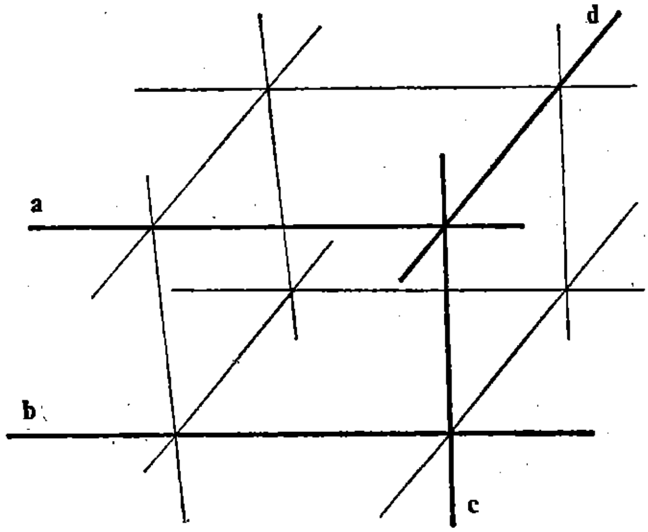
Доказ. Според Т. 1 од §2, постојат барем четири точки A, B, C и D што не лежат на иста рамнина. Правите AB и CD не лежат на иста рамнина, зашто ако би постоела рамнина Ω што минува низ правите AB и CD, тогаш и точките A, B, C и D би лежеле на таа рамнина.

Оваа теорема ни дава можност да согледаме во просторот две различни положби на две прави што не се сечат: да не лежат или да лежат на иста рамнина. Тие можности ќе ги разграничиме со следниве дефиниции.

Дефиниција. Две прави што не лежат на иста рамнина, се викаат *разминувачки прави.*

Дефиниција. Две прави a и b што лежат на иста рамнина и не се сечат или се совпаѓаат, се викаат *паралелни прави,* а се пишува $a \parallel b$.

Според сето тоа, (црт. 1) две прави или се сечат (a и c, a и d, b и c), или се паралелни (a и b), или се разминувачки (b и d).



Црт. 1

Задачи

1. Според кои аксиоми и теореми следува дека една права е определена со: а) две различни точки, б) две различни непаралелни рамнини?

2. Според кои аксиоми и теореми следува дека една рамнина е определена со: а) три неколинеарни точки, б) една права и една точка што не ѝ припаѓа, в) две прави што се сечат, г) две различни паралелни прави?

3. Покажи дека со 3 прави што минуваат низ иста точка може да се определат или една или три рамнини.

4. Покажи дека со една права и две точки што лежат надвор од правата може да се определат или една или две рамнини.

5. Знаеме дека различните точки A, B и C лежат и на рамнината Σ_1 и на рамнината Σ_2. Дали следува дека рамнините Σ_1 и Σ_2 се совпаѓаат? Зошто?

6. Правата a ја прободува рамнината Σ. Дали во рамнината Σ лежи права што е паралелна со правата a?

7. Дадени се рамнината Σ и правите a и b. Ако правите a и b се сечат и ако правата a лежи во рамнината Σ, дали и правата b мора да лежи во таа рамнина?

8. Правите a и b се сечат и лежат во рамнината Σ, правата c ги сече и правата a и правата b. Дали и правата c лежи во рамнината Σ? Зошто?

9. Покажи дека низ секоја права минуваат бесконечно многу рамнини.

§ 6. *Растојание*

Сите разгледувања што ги направивме досега и кои се однесуваат за меѓусебните односи на основните геометриски фигури, се сведуваат на тоа да установиме дали тие имаат заедничка точка или не, дали може да се согледаат такви положби на овие фигури што тие да имаат „контакти", односно дали може да се „преклопуваат" со некои свои делови. Притоа се обидовме да ги согледаме сите можни ситуации во кои може да попаднат тие фигури. На некои посебни можности им дадовме соодветно име; на пример, да се паралелни, да се сечат, да се совпаѓаат, итн.

Може да се забележи дека посебно не ги истакнавме меѓусебните односи на две точки (било да ги сметаме како елементи на просторот **P** или, пак, како едноелементни фигури); се задоволивме само со констатацијата дека „различните букви A и B, обично, ќе ни означуваат две различни точки". Во тој случај кога станува збор за две различни точки, природно се наметнува прашањето за некаква „поблиска" определба на нивниот „меѓусебен однос".

Од друга страна, пак, во секојдневниот живот често се сретнуваме со такви искази како: „од дома до школо", „од глава до петици", „од Скопје до Битола", „уште еден чекор" итн. кои, на извесен начин, нè наведуваат да го „определиме меѓусебниот однос на две различни точки“. Сите тие искази можат да се заменат со еден исказ: „од точката A до точката B“.

Поради тоа, како **основен поим** на просторот **P** ќе го прифатиме сознанието дека секоја негова точка се наоѓа на некое **растојание** од која било друга точка.

Со кои својства може да се окарактеризира овој **основен** поим, може да се види од следниов пример.

Пример. Нека x, y се реални броеви ($x, y \in \mathbf{R}$) и нека бројот

$$d(x, y) = |y - x|$$

го наречеме „растојание“ од бројот x до бројот y. Така, на пример, имаме:

$$d(2, -3) = |-3-2| = |-5| = 5,$$

$$d(5,2) = |2-5| = |-3| = 3,$$

$$d(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) = |2\sqrt{2}+\sqrt{2}| = 3\sqrt{2}.$$

„Растојанието“ $d(x, y)$ ги име следниве својства:

(*i*) $d(x, y) \geqslant 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(*ii*) $d(y, x) = d(x, y)$;

(*iii*) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$.

Првите две својства се очигледни, а третото следува од неравенството

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

Кога малку повеќе би се замислиле врз поимот „растоіание од точката A до точката B“ лесно можеме да согледаме дека својствата (*i*)—(*iii*) од примерот се „прифатливи“ и тука (за точките). Затоа, основниот поим растојание ќе го осмислиме со следнава аксиома:

Аксиома 7 (аксиома за растојание). **На секој пар точки A и B од просторот му е придружен еден реален број $d(AB)$, таков што:**

1°. $d(AB) \geqslant 0$, при што $d(AB) = 0$ ако и само ако $A = B$;

2°. $d(AB) = d(BA)$;

3°. $d(AC) \leqslant d(AB) + d(BC)$.

Дефиниција. Бројот $d(AB)$ ќе го викаме *растојание* од точката A до точката B.

Основните својства на поимот растојание, што се согледуваат од аксиомата, укажуваат дека:

— растојанието е секогаш ненегативен реален број;

— растојанието се определува за еден пар точки и не зависи од подредувањето на точките во парот, т.е. растојанието од A до B е еднакво со растојанието од B до A;

— растојанието го има таканареченото „својство на триаголник“.

Теорема 1. *Ако A, B и C се три произволни точки, тогаш растојанието $d(AB)$ не е помало од разликата на растојанијата $d(AC)$ и $d(BC)$.*

Доказ. Според 3° од А. 7, имаме:

$$d(AC) \leqslant d(AB) + d(BC).$$

Ако двете страни на неравенството ги намалиме за $d(BC)$, тогаш добиваме:

$$d(AC) - d(BC) \leqslant d(AB).$$

Задачи

1. Да се покаже дека за кои било точки A, B и C важи:

$$d(BC) - d(AB) \leqslant d(AC), \quad d(AB) - d(AC) \leqslant d(BC).$$

2. Да се докаже дека за кои било точки A_1, A_2, A_3, A_4 важи:

$$d(A_1A_4) \leqslant d(A_1A_2) + d(A_2A_3) + d(A_3A_4).$$

3. За три различни точки A, B и C се знае дека $d(AB)=10$ и $d(BC)=6$. Дали може $d(AC)$ да биде: а) 12, б) 16, в) 25, г) 2, д) 0?

§7. Подредување на точките од една права

7. 1. Релацијата „меѓу"

Во претходниот параграф, со А. 7, го воведовме поимот растојание како едно основно својство на точките од просторот.

Ако, пак, се дадени две различни точки A и B, тогаш низ нив минува единствена права a (А. 2) и на таа права лежат бесконечно многу точки (А. 1).

Користејќи го поимот растојание, ќе се обидеме да „заведеме некаков ред" меѓу тие бесконечно многу точки на правата, а покасно и на самата рамнина. Впрочем, тој „ред" веќе постои, па нашата задача ќе биде да го согледаме.

Дефиниција. За точката X ќе велиме дека *лежи меѓу* точките A и B ако:

а) Точките A, B и X се различни и колинеарни;

б) $d(AB) = d(AX) + d(XB)$.

Во врска со релацијата *меѓу* се поставуваат следниве прашања: дали од три колинеарни точки барем една лежи меѓу другите две; дали меѓу кои било две точки лежи барем една точка? Одговорот на овие прашања не е очигледен.

Теорема 1. *Ако A, B и C се три различни колинеарни точки, тогаш најмногу една од нив лежи меѓу другите две.*

Доказ. Да претпоставиме дека точката B лежи меѓу точките A и C, а исто така, точката C лежи меѓу точките A и B. Тогаш важат равенствата:

$$d(AC) = d(AB) + d(BC), \quad d(AB) = d(AC) + d(CB),$$

од каде што добиваме $d(AB) = 0$. Но, тоа не е можно, зашто точките B и C се различни.

Да забележиме уште дека, ако точката B лежи меѓу A и C, тогаш точката B лежи и меѓу C и A. Точката B е меѓу точките A и C ако се како на црт. 1 или како на црт. 2.

Црт. 1

Црт. 2

Пред да одговориме на поставените прашања, ќе ја прифатиме следнава аксиома:

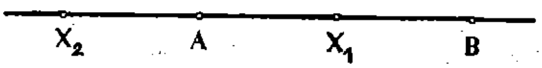
Аксиома 8. Ако O е точка од правата a и ако r е позитивен реален број, тогаш на правата a постојат точно две точки A и B, такви што:

1°. точката O лежи меѓу точките A и B;

2°. $d(OA) = d(OB) = r$.

Теорема 2. *Меѓу кои било две различни точки A и B лежи барем една точка.*

Доказ. Нека $d(AB) = r$, и нека a е правата што минува низ точките A и B. Според А. 8, на правата a лежат точно две точки X_1 и X_2, такви што $d(AX_1) = d(AX_2) = \dfrac{r}{2}$ и, притоа, точката A лежи меѓу точките X_1 и X_2 (црт. 3). Во овој случај, точката X_1 лежи меѓу точките A и B.



Црт. 3

Слично се докажува и следнава теорема:

Теорема 3. *Ако A, B и C се три колинеарни точки, тогаш само една од нив лежи меѓу другите две.*

Тоа значи дека ако точките A, B и C се колинеарни, тогаш важи само едно од равенствата:

$$\begin{aligned} d(AB) &= d(AC) + d(CB), \\ d(AC) &= d(AB) + d(BC), \\ d(BC) &= d(BA) + d(AC). \end{aligned} \tag{1}$$

Да забележиме дека, ако за точките A, B и C важи едно од равенствата (1), тогаш точките A, B и C се колинеарни. На пример:

Ако важи равенството

$$d(AC) = d(AB) + d(BC),$$

тогаш точките A, B и C се колинеарни и, притоа, точката B лежи меѓу точките A и C. (Ова тврдење нема да го докажеме иако натаму ќе го користиме.)

Задачи

1. Нека A и B се две дадени точки. Покажи дека постои барем една точка C, така што B да лежи меѓу A и C. Колку такви точки постојат?

2. Нека A, B, C и D се четири колинеарни точки. Покажи дека тие можат да се обележат со броевите 1, 2, 3 и 4, така што точката 2 да лежи меѓу 1 и 3, а точката 3 да лежи меѓу точките 2 и 4.

3. Нека A, B, C, D се четири точки. Ако B лежи меѓу A и C, а C лежи меѓу A и D, дали точката C лежи меѓу B и D?

4. Покажи дека од четири колинеарни точки само две лежат меѓу другите две.

5. Точката C лежи меѓу A и B, точката M лежи меѓу A и C. Дали точките A, B, C и M се колинеарни?

6. За точките A, B и C важи:

а) $d(AB)=3$, $d(AC)=5$, $d(BC)=2$;

б) $d(AB)=10$, $d(AC)=25$, $d(BC)=10$.

Дали точките A, B и C се колинеарни и која од нив лежи меѓу другите две?

7.2. Полуправа

Нека O е точка од правата a. Ако A и B се две други точки од правата a, тогаш, според Т. 3, или точката O лежи меѓу A и B или O не лежи меѓу A и B. Тоа значи дека точката O го разбива множеството од сите точки од правата a што се различни од O на две непразни множества, така што точките A и B припаѓаат на различни множества ако и само ако O лежи меѓу нив. Со други зборови, ако со $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ ги означиме тие две множества, тогаш:

1°. секоја точка од правата a, различна од O, припаѓа само на едно од множествата $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$;

2°. ако O лежи меѓу точките A и B, тогаш $A \in \mathbf{F}_1$, $B \in \mathbf{F}_2$ или $A \in \mathbf{F}_2$, $B \in \mathbf{F}_1$;

3°. ако O не лежи меѓу A и B, тогаш $A, B \in \mathbf{F}_1$ или $A, B \in \mathbf{F}_2$.

Дефиниција. Секое од множествата на кои точката O ја разбива правата a, заедно со точката O, се вика *полуправа со почетна точка* O.

Ако A е точка од полуправата h, со почеток во O, тогаш полуправата ќе ја означуваме со OA, т.е. првата буква треба да биде почетната точка на полуправата.

Значи, секоја точка O ја разделува правата a на две полуправи со заеднички почеток.

Задачи

1. Дали полуправите AB и BA се исти?

2. Колку полуправи опредлуваат две точки A и B од правата a?

3. Нека A и B се две различни точки. Покажи дека множеството

$$\{X \mid X \text{ е меѓу } A \text{ и } B \text{ или } B \text{ е меѓу } A \text{ и } X\}$$

е полуправата AB.

4. Со колку точки еднозначно е определена една полуправа?

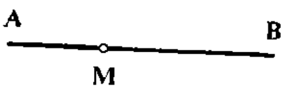
§8. Отсечка. Искршена линија

8.1. Дефиниција на отсечка. Еднакви отсечки

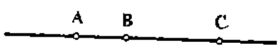
Дефиниција. Фигурата што ја образуваат две различни точки A, B и сите точки што лежат меѓу точките A и B, се вика *отсечка* и се означува со AB.

Точките A и B ги викаме *крајни точки*, а точките што лежат меѓу A и B — *внатрешни точки* на отсечката AB (црт. 1).

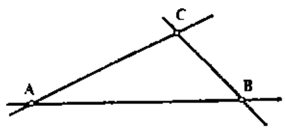
На црт. 2 и 3 точките A, B, C определуваат три отсечки AB, BC и AC.



Црт. 1



Црт. 2



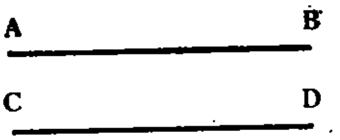
Црт. 3

Дефиниција. Растојанието меѓу крајните точки на една отсечка се вика *должина* на таа отсечка.

Должината на отсечката AB ќе ја означуваме со $\overline{AB}$.

Бидејќи должините на отсечките се искажуваат со позитивни реални броеви, нужно се наметнува воведување на т.н. *единична отсечка*, т.е. отсечка чијашто должина ќе соодветствува на бројот *еден*. За таква отсечка се вели дека е *единична мера за должина*; единична мера за должина може да биде произволна отсечка. Обично, должините на отсечките се искажуваат со сантиметри (cm), дециметри (dm), метри (m), итн.

Дефиниција. Две отсечки што имаат еднакви должини ги викаме *складни отсечки*.



Црт. 4

Отсечката AB и CD на црт. 4 се складни отсечки зашто имаат еднакви должини, но, како множества точки, тие се различни множества.

Заради полесно и поедноставно изложување на материјалот, *за секои две складни отсечки ќе велиме дека се уште и еднакви, и покрај тоа што може да се различни како множества точки.*

2.2. Графички операции со отсечки

Нека е зададена отсечката AB, со должина $\overline{AB}=r$, и полуправата OM (црт. 5). Според А. 8, на полуправата постои точно една точка C, таква што $d(OC)=r$. Отсечката OC е складна (еднаква) со отсечката AB, бидејќи и двете имаат иста должина, т.е. $\overline{AB}=\overline{OC}=r$.

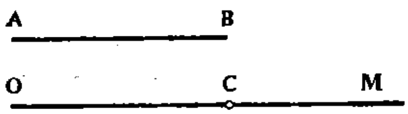
Тоа, практично, значи дека произволна отсечка со должина x може да се „пренесе" на полуправата така што ќе се определи точката од полуправата што е на растојание x од нејзината почетна точка.

Со оваа констатација се овозможуваат познатите конструкции „графичко собирање (одземање) на отсечки" и „графичко множење на отсечка со број".

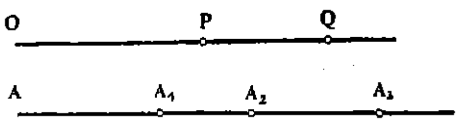
Така, на пример, на црт. 6 се прикажани конструкциите

$$\overline{OQ}=\overline{OP}+\overline{PQ},\quad \overline{OP}=\overline{OQ}-\overline{QP},\quad \overline{PQ}=\overline{OQ}-\overline{OP},$$

$$\overline{AA_3}=3\overline{AA_1},\quad \overline{AA_1}=\frac{1}{3}\overline{AA_3},\quad \overline{AA_2}=\frac{2}{3}\overline{AA_3}.$$



Црт. 5



Црт. 6

2.3. Искршена линија

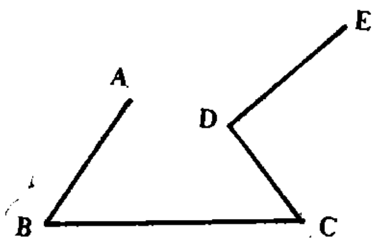
Дефиниција. Фигурата составена од отсечките AB, BC, $CD, \ldots,$ MN, NP на таков начин што кои било две соседни отсечки да не лежат на иста права, се вика *искршена линија.*

Точките A, B, C, $D, \ldots,$ M, N, P ги викаме *темиња*, отсечките AB, $BC, \ldots,$ NP — *страни*, а точките A и P — *крајни точки* на искршената линија $AB \ldots NP$.

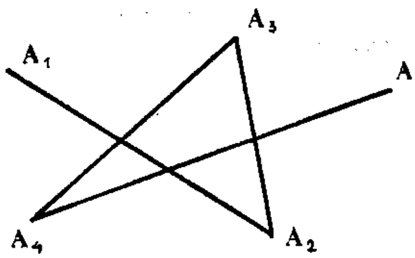
Секоја страна на искршената линија, како отсечка, има своја должина; збирот од должините на сите страни на искршената линија ќе го викаме *периметар* на искршената линија. Така, на пример,

$$L = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}$$

е периметар на искршената лининја на црт. 7.



Црт. 7



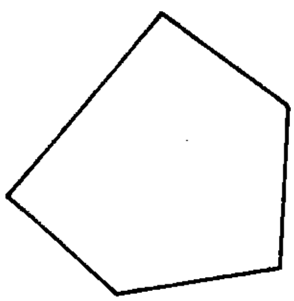
Црт. 8

Една искршена нинија може да биде:

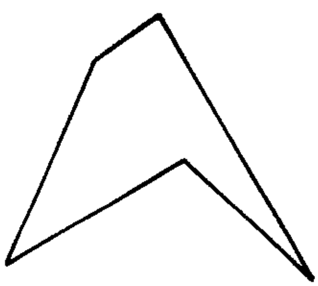
— *затворена*, ако нејзините крајни точки се совпаѓаат (црт. 9 и 10),

— *незатворена*, ако нејзините крајни точки не се совпаѓаат (црт. 7 и 8).

Ако кои било две несоседни страни на една искршена линија немаат заеднички точки, искршената линија ќе ја викаме *проста* (црт. 7, 9, 10).



Црт. 9



Црт. 10

Задачи

1. Колку отсечки определуваат четири различни точки на рамнината?

2. Дадени се три отсечки со должини a, b и c. Конструирај ги отсечките $a+b+c$, $a+b-c$, $2a$, $3a-b$.

3. Дали може неколку темиња, односно неколку страни од една искршена линија да лежат на иста права?

4. Избери права a и на неа две точки A и B. Најди го пресекот на полуправите AB и BA.

5. Избери права a и на неа три точки A, B и C. Најди го пресекот на полуправите: а) AC и AB, б) BA и BC, в) CA и CB.

6. На правата a дадени се три точки A, B и C. Колку отсечки и колку полуправи се определени со овие точки?

7. Наброј ги сите геометриски фигури што може да се определат со две различни точки.

Глава III

ПОВАЖНИ ФИГУРИ ВО РАМНИНАТА

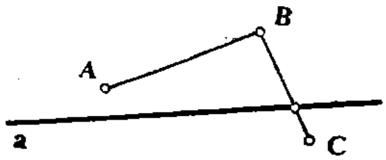
Со аксиомите и со некои теореми искажани во гл. II ги осмисливме поимите за права и рамнина; потоа, видовме дека правата, како геометриска фигура, може да биде формирана и само од точки на една рамнина. Вие знаете, исто така, дека во рамнината можат да „лежат" и други, посложени, геометриски фигури, како, на пример, отсечка, триаголник, кружница, итн.

Во оваа глава, ќе направиме преглед на некои поважни фигури што може да се формираат само од точки на една иста рамнина, и ќе се обидеме да укажеме на некои посуштински односи меѓу тие фигури. Делот од геометријата што ги изучува фигурите кога тие се расположени во една иста рамнина, обично се вика *планиметрија*.

§ 1. Полурамнина. Агол

1. 1. Полурамнина

Нека a е една права во рамнината; според Т. 3 од гл. II. 3, на рамнината постојат точки што не лежат на таа права. На црт. 1 точките A, B, C не лежат на правата a.



Црт. 1

Дефиниција. Ако отсечката BC со правата a има заедничка внатрешна точка, тогаш велиме дека точките B и C *лежаш на различни сшрани* од правата a. Во случајот кога отсечката AB нема заеднички точки од правата a велиме дека точките A и B *лежаш на исша сшрана* од правата a.

Очигледно е дека кои било две точки од рамнината што не лежат на една фиксирана права (од рамнината), или ќе лежат на иста страна, или ќе лежат на различни страни од таа права.

Да го погледаме уште еднаш црт. 1, на кој точките A и B се на иста страна, а точките B и C се на различни страни од правата a. Цртежот ни сугерира дека точките A и C, исто така, се на различни страни од правата a, но тоа не можеме да го установиме од досега изученото. Затоа, ќе ја прифатиме следнава аксиома:

Аксиома 9. Ако точките A, B и C се неколинеарни, при што A и B се на иста страна, а точките B и C се на различни страни од правата a, тогаш и точките A, C се на различни страни од правата a.

Како последица од тоа веднаш добиваме дека секоја права a го разделува множеството точки од рамнината што не лежат на таа права на две непразни множества, така што:

— *кои било две шочки од едно исшо множесшво да лежаш на исша сшрана од йравааша;*

— *кои било две шочки, земени йо една од секое од множесшваша, да се разделуваай со йравааша a.*

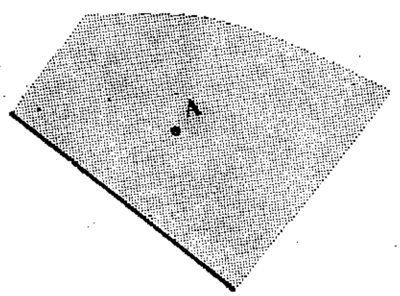
Со тоа го искажавме својството дека правата a ја разбива рамнината на две дисјунктни множества точки што не ги содржат точките од правата a, т.е. ја разделува рамнината на два „составни дела" што немаат заеднички точки.

Дефиниција. Фигурата образувана од една права и сите точки од рамнината што се од иста страна на правата ја викаме *йолурамнина*. Правата ја викаме *граница* или *раб* на таа полурамнина.

Обично, велиме дека секоја права ја разделува рамнината на две полурамнини со *заеднички раб*.

Една полурамнина е определена со својот раб и со една своја точка што не му припаѓа на работ.

Навистина, ако во рамнината е дадена една права a и една точка надвор од правата a, тогаш множеството кое ги содржи сите точки што се на иста страна со A од правата a, и сите точки на правата, ја образуваат полурамнината со раб a и на која ѝ припаѓа точката A (црт. 2).



Црт. 2

Задачи

1. Отсечката AB нема заеднички точки со правата a. Каква е положбата на точките A и B?

2. Нека точките A и B се на различни страни од правата a. Докажи дека секоја искршена линија со крајни точки A и B има заеднички точки со правата a.

3. Нека точките A и B се на иста страна од правата a. Дали секоја искршена линија со крајни точки A и B има заеднички точки со правата a?

4. На колку дела ја разбиваат рамнината: а) две прави, б) три прави? Разгледај ги сите можни случаи.

1.2. Агли

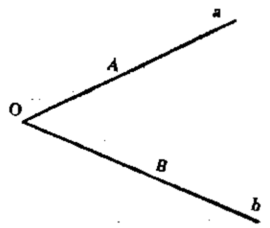
На црт. 3 се нацртани две различни полуправи OA и OB, со заедничка почетна точка O.

Дефиниција. Фигурата што е образувана од две полуправи со заедничка почетна точка се вика *агол*.

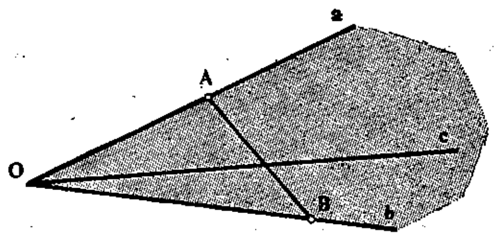
Полуправите ги викаме *краци*, а нивната заедничка почетна точка *теме* на аголот.

На црт. 3 е претставен агол со теме во точката O и со краци a и b; точката A лежи на кракот a, а точката B — на кракот b; тој агол ќе го означуваме со $\sphericalangle O$, $\sphericalangle (a\ b)$ или $\sphericalangle AOB$.

Често пати, аголот може да се означи и со една мала буква од грчката азбука или со некој број. Така, $\sphericalangle AOB$ може да се означи и со $\sphericalangle\alpha$, односно со $\sphericalangle 1$.



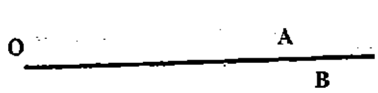
Црт. 3



Црт. 4

Секој агол ја разделува рамнината на два составни дела (црт. 4). Оној дел на кој му припаѓаат сите внатрешни точки на секоја отсечка AB, чии крајни точки лежат на краците на аголот, го викаме *внатрешен дел*, а другиот — *надворешен дел* на тој агол. За секоја полуправа c, со почетна точка во темето на аголот и чија секоја точка припаѓа на внатрешниот дел на аголот, велиме дека *лежи во тој агол*.

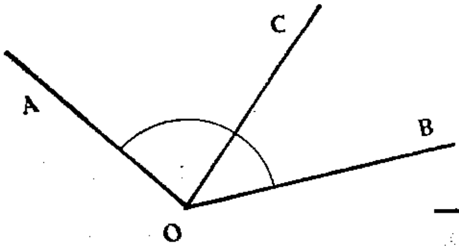
Во случај кога полуправите (краците) се совпаѓаат, аголот ќе го викаме *нулти агол* (или *агол нула*), а кога краците се составни делови на иста права — *рамен агол*. На црт. 5 $\sphericalangle AOB$ е нулти агол, а на црт. 6 $\sphericalangle PQR$ е рамен агол.



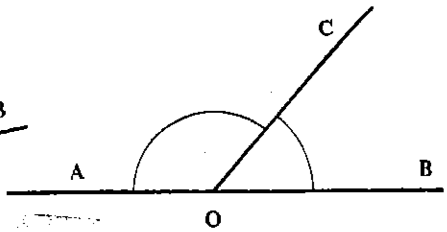
Црт. 5

Црт. 6

Два агла кои имаат еден заеднички крак и немаат заеднички внатрешни точки се викаат *соседни агли* (на црт. 7 $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle BOC$ се соседни агли). Ако, пак, два агла имаат еден заеднички крак, а другите краци им се составни делови (полуправи) од иста права, тогаш тие агли ги викаме *напоредни агли* (црт. 8).



Црт. 7



Црт. 8

Задачи

1. Избери три полуправи со заеднички почеток. Колку агли образуваат овие полуправи?

2. Колку различни агли образуваат две прави што се сечат? Покажи ги на цртеж: а) напоредните агли, б) рамните агли.

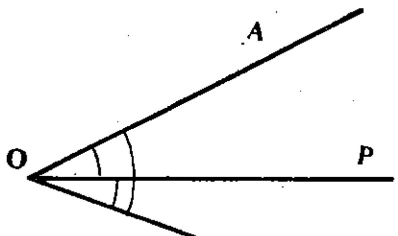
1.3. Мерење на агли. Еднакви агли

Со помош на *агломер* секој агол може да се измери во *степени*.

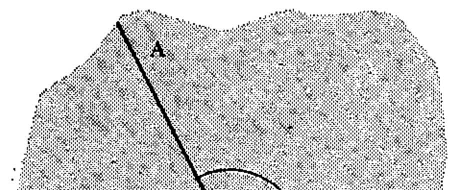
Аксиома 10. На секој агол α му е придружен позитивен реален број α° (искажан во степени), така што:

1°. На рамниот агол му е придружен бројот 180°.

2°. Ако полуправата OP лежи во $\sphericalangle$AOB, тогаш збирот на броевите придружени на $\sphericalangle$ AOP и $\sphericalangle$ POB е еднаков со бројот придружен на $\sphericalangle$AOB (црт. 9).



Црт. 9

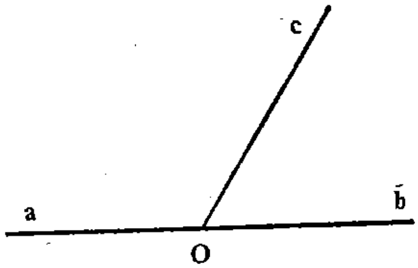


Црт. 10

3°. **За кој било реален број α меѓу 0 и 180, од дадена полуправа што е дел од работ на дадена полурамнина, може да се пренесе во таа полурамнина еден и само еден агол што има α степени** (црт. 10).

Теорема 1. *Збирот на два напоредни агли е еднаков на* 180°.

Доказ. На црт. 11 $\sphericalangle(a\ b)$ е рамен агол, а полуправата c лежи во тој агол. Според својството 2° од А. 10, збирот на напоредните агли $(a\ c)$ и $(c\ b)$ е еднаков на рамниот агол, т.е. на 180°.



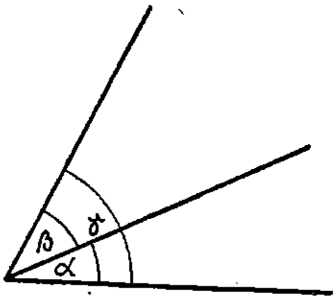
Црт. 11

Дефиниција. За два агла што имаат еднаков број степени велиме дека се *складни.*

И тука, поради поедноставно изнесување на материјалот, за секои два складни агли ќе велиме дека се *еднакви,* и покрај тоа што тие може да се различни како фигури (како множества точки).

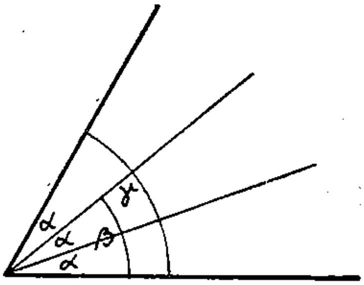
I. 4. Графички операции со агли

Со својствата 2° и 3° од А. 10 се овозможуваат познатите конструкции „графичко собирање (одземање) на агли" и „графичко множење на агли со број" (црт. 12 и 13).



$\alpha+\beta=\gamma$

Црт. 12



$2\alpha=\beta,\ 3\alpha=\gamma,\ \alpha=\frac{1}{3}\gamma,\ \alpha=\frac{1}{2}\beta$

Црт. 13

Задачи

3. Дадени се аглите $\alpha = 38°27'$, $\beta = 43°45'$. Графички и со пресметување, определи ги аглите $\alpha+\beta$, $\beta-\alpha$, $2\alpha-\beta$, 2β.

2. Разликата на два напоредни агла е 20°30′. Определи ги аглите.

3. Правите a и b се сечат во точката P. Еден од аглите, определени со правите a и b, е 28°20′. Определи ги другите агли.

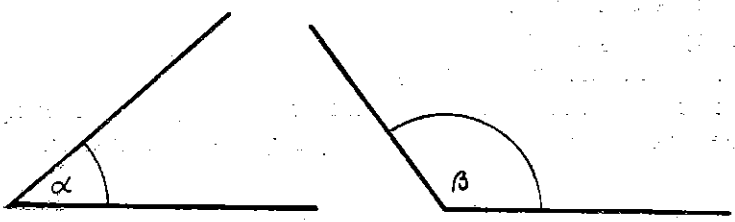
1.5. Прав агол. Остар и тап агол

Дефиниција. Аголот што е еднаков со својот напореден агол, се вика *прав агол.*

Теорема 2. *Сите прави агли се еднакви меѓу себе.*

Доказ. За секои два напоредни агла велиме дека се дополнуваат до рамниот агол. Бидејќи два еднакви напоредни агли се прави агли, следува дека правите агли се дополнуваат еден со друг до рамен агол. Како, пак, сите рамни агли се еднакви меѓу себе („имаат по 180°"), следува дека и сите прави агли се еднакви меѓу себе и имаат по 90°.

За краците на правиот агол велиме дека се *нормални* еден на друг.



Црт. 14

Ако два агла имаат α, односно β степени и ако $\alpha < \beta$, тогаш велиме дека $\sphericalangle\alpha$ *е помал* од $\sphericalangle\beta$, односно дека $\sphericalangle\beta$ *е поголем* од $\sphericalangle\alpha$. Аголот што е помал од правиот се вика *остар агол*, а аголот што е поголем од правиот и е помал од рамниот се вика *тап агол* (црт. 14).

Два агла се викаат *суплементни* ако збирот на нивните степени е 180°, односно *комплементни* ако тој збир е 90°. Напоредните агли се суплементни, но два суплементни агла не мора да бидат напоредни.

Задачи

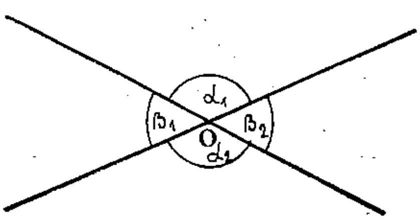
1. Какви можат да бидат аглите α, β и γ ако $\alpha + \beta + \gamma = 94°$?
2. Даден е аголот $\alpha = 63°15'$. Определи го неговиот:
   а) комплементен агол, б) суплементен агол.

1.6. Накрсни агли. Нормални прави

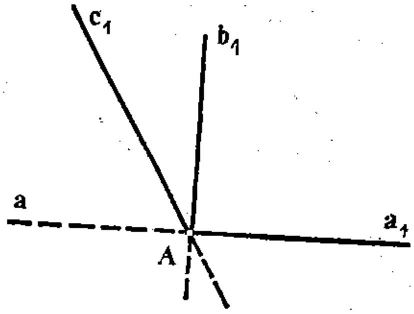
Составните полуправи на две прави што се сечат во точка O, образуваат повеќе агли со заедничко теме O. На црт. 19 се означени четири од тие агли; за аглите α_1 и α_2 велиме дека се *накрсни агли.* Исто така, и аглите β_1 и β_2 се накрсни агли.

Теорема 3. *Накрсните агли се еднакви меѓу себе.*

Доказ. Аглите α_1 и β_2 се напоредни агли (црт. 15), а, исто така и аглите α_2 и β_2 се напоредни агли. Според Т. 1, следува дека и $\sphericalangle \alpha_1$ и $\sphericalangle \alpha_2$ го дополнуваат $\sphericalangle \beta_2$ до рамен агол, па, според тоа, $\sphericalangle \alpha_1$ и $\sphericalangle \alpha_2$ се еднакви.



Црт. 15



Црт. 16

Ако накрсните агли се прави агли, тогаш велиме дека правите што ги образуваат овие агли, се *заемно нормални прави*; за секоја од нив велиме дека е *нормала* на другата.

Теорема 4. *Низ секоја точка на дадена права минува една и само една права што е нормална на дадената права.*

Доказ. Нека a е дадена права и A е една нејзина точка (црт. 16). Нека a_1 е една полуправа од правата a, со почетна точка A. Од точката A ќе нацртаме полуправа b_1, така што $\sphericalangle(a_1\, b_1)$ да е прав агол; тогаш правата што ја содржи полуправата b_1 е нормална на правата a.

Да претпоставиме дека постои уште една права што минува низ точката A и што е нормална на правата a. Нека c_1 е онаа полуправа од таа права што лежи во иста полурамнина со полуправата b_1. Тогаш $\sphericalangle(a_1\, c_1)$ е прав агол. Значи, аглите $\sphericalangle(a_1\, b_1)$ и $\sphericalangle(a_1\, c_1)$ се еднакви на 90° и лежат во иста полурамнина. Но, според својството 3° од А. 10, постои една и само една полуправа во дадена полурамнина која со полуправата a_1 образува агол од 90°. Затоа, не постои друга права што минува низ точката A и што е нормална на правата a.

Задачи

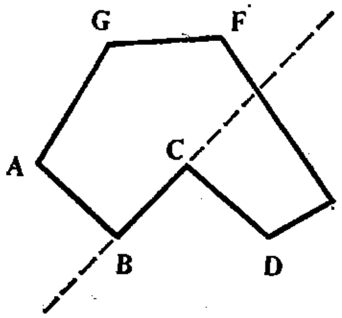
1. Избери права a и една точка A на неа. Конструирај ја правата што минува низ A и е нормална на a.

2. Правите a и b се сечат. Еден од аглите што ги образуваат правите a и b е прав. Какви се другите агли? Дали правите a и b се заемно нормални?

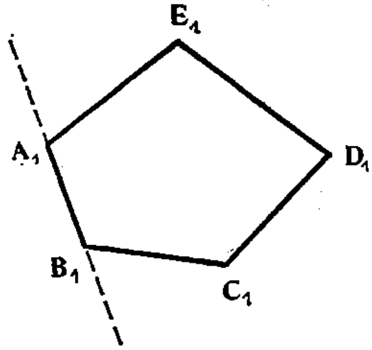
§ 2. Многуаголник

Дефиниција. Секоја проста затворена искршена линија ја викаме *монгуаголник*.

На црт. 1 и 2 се претставени многуаголникот $ABCDEFG$ и многуаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$.



Црт. 1



Црт. 2

Страните и темињата на искршената линија ги викаме *страни* и *темиња на многуаголникот*; во секој многуаголник, бројот на страните е еднаков со бројот на темињата. Отсечка, чии крајни точки се кои било две несоседни темиња на многуаголникот, ја викаме *дијагонала* на многуаголникот.

Секоја страна на многуаголникот, како отсечка, има своја должина; збирот на должините на сите страни на многуаголникот го викаме *периметар* на многуаголникот.

Така, на пример, ако за многуаголникот на црт. 1 имаме $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BD}=c, \ldots, \overline{GA}=g$, тогаш неговиот периметар L изнесува

$$L=a+b+c+\ldots+g.$$

Ако еден многуаголник има n темиња, тогаш од секое теме може да се нацртаат $n-3$ дијагонали, зашто треба да се исклучат самото теме и двете соседни.

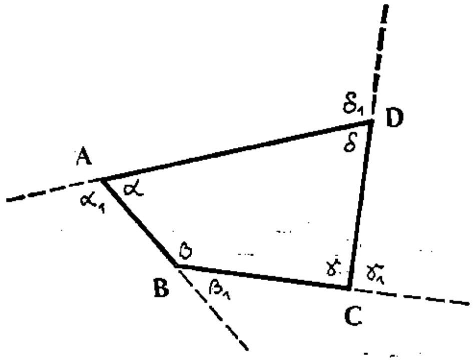
Бројот на сите дијагонали на многуаголникот се определува со формулата $\frac{1}{2}n(n-3)$. (Зошто?)

Секоја страна на многуаголникот лежи на некоја права, а секоја таква права ја разделува рамнината на две полурамнини. Може да се случи точките на многуаголникот да лежат и во двете полурамнини (како на црт. 1), но постојат и многуаголници при кои тоа не може да се случи со ниедна негова страна. За таков многуаголник (како на црт. 2) ќе велиме дека е *конвексен многуаголник*.

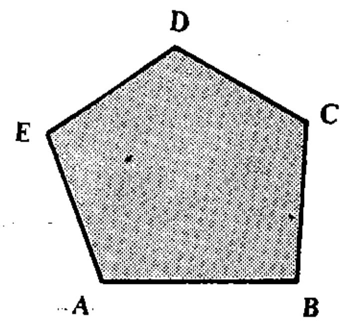
Ние ќе се задржиме само на конвексни многуаголници; затоа, овде, „многуаголник" ќе ни значи „конвексен многуаголник".

Едно теме на многуаголникот може да биде почетна точка на две полуправи што ги содржат соседните страни на многуаголникот и за кои тоа теме им е заедничка точка. Аголот што го образуваат овие полуправи го викаме *агол* или *внатрешен агол* на многуаголникот.

Бројот на аглите на еден многуаголник е еднаков со бројот на неговите страни, односно темиња (црт. 3).



Црт. 3



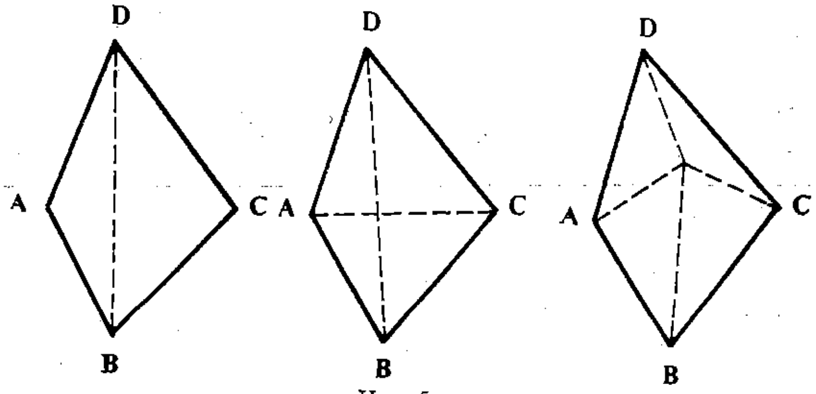
Црт. 4

Секој агол што е напореден со некој внатрешен агол на многуаголникот го викаме *надворешен агол* на многуаголникот. На црт. 3 аглите α_1, β_1, γ_1 и δ_1 на четириаголникот $ABCD$ се надворешни.

Обично, многуаголниците ги разликуваме според бројот на аглите, односно страните или темињата; така, имаме *триаголници*, *четириаголници*, *петаголници* и др.

Еден многуаголник ја разбива рамнината на два дела: *внатрешен дел* (на црт. 4 — претставен шрафирано) и *надворешен дел*. За внатрешниот дел обично, велиме дека претставува *внатрешност* на многуаголникот.

Внатрешноста на многуаголникот може да се разбие на свои „составни делови" на различни начини. На црт. 5, четириаголникот $ABCD$ е разбиен на составни делови на три начини.



Црт. 5

Внатрешноста на многуаголникот може да се карактеризира и со позитивен реален број P, кој, во извесна смисла, може да ни даде претстава за „големината“ на таа внатрешност; тој број го викаме „плоштина[1]) на многуаголникот“.

Задачи

1. Колку дијагонали има еден осумаголник?

2. Еден многуаголник има 35 дијагонали. Колку страни има тој многуаголник?

3. Дали постои многуаголник за којшто бројот на дијагоналите е еднаков со бројот на страните?

4. Покажи дека во секој многуаголник што не е триаголник ни четириаголник, ни петаголник, бројот на дијагоналите е поголем од бројот на неговите страни.

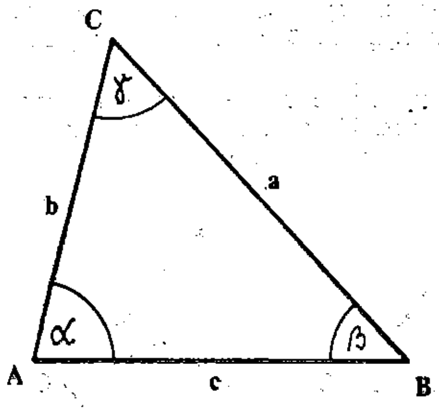
5. Покажи дека во секој конвексен многуаголник внатрешните точки на секоја негова дијагонала се внатрешни точки на многуаголникот.

§ 3. *Триаголник*

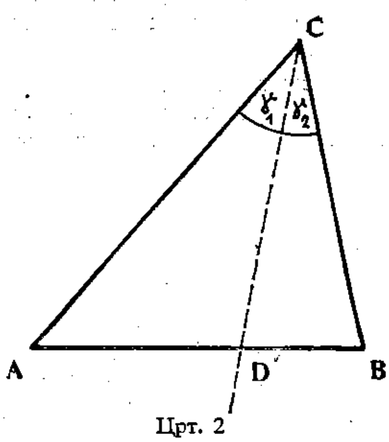
3.1. Поим за триаголник

Дефиниција. Секој многуаголник со три страни се вика *триаголник*.

На црт. 1 е нацртан еден триаголник. Неговите темиња се означени со A, B и C; овој триаголник ќе го означуваме с $\triangle ABC$ и ќе го читаме: „триаголникот ABC“.



Црт. 1



Црт. 2

[1]) Поимот за плоштина во геометријата се воведува аксиоматски (со аксиома), како што направивме со поимот растојание. Во наредниот (третиот) клас ќе се запознаеме со, таканареченото, ‚мерење во геометријата“, кога поблиску ќе биде објаснет и поимот за плоштина.

Аглите на триаголникот ABC ќе ги означуваме со $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$ и $\gamma = \sphericalangle BCA$, а страните со $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$.

За аглите α и β ќе велиме дека *лежат* на страната BC, а за страните b и c ќе велиме дека го *зафаќаат* аголот α.

Страните и аглите ги викаме уште и *основни елементи на триаголникот*.

Триаголникот може да биде:

— *разностран*, ако неговите страни имаат различни должини;

— *рамнокрак*, ако две негови страни имаат еднакви должини; страните што се еднакви ги викаме *краци*, а третата страна — *основа* на триаголникот;

— *рамностран*, ако сите негови страни имаат еднакви должини.

Нека е даден триаголникот ABC и нека D е некоја точка на неговата страна AB (црт. 2). Полуправата CD лежи во $\sphericalangle C$ на триаголникот и го разделува тој агол на $\sphericalangle \gamma_1$ и $\sphericalangle \gamma_2$.

Дефиниција. Отсечката CD ја викаме:

— *тежишна линија* на $\triangle ABC$, повлечена од темето C, ако точката D е средна точка на страната AB;

— *симетрала* на $\sphericalangle C$ од $\triangle ABC$, ако $\sphericalangle \gamma_1 = \sphericalangle \gamma_2$;

— *висина* на $\triangle ABC$, спуштена од темето C, ако $\sphericalangle BDC$ е прав агол, т.е. ако правите AB и CD се заемно нормални.

Според тоа, триаголникот има три тежишни линии, три симетрали на агли и три висини.

Најчесто, со зборовите „тежишни линии" и „висини" на триаголникот ги подразбираме уште и должините на соодветните отсечки; во таа смисла, тежишните линии на триаголникот ABC ги означуваме со t_a, t_b, t_c, а неговите висини со h_a, h_b, h_c.

Обично, периметарот на триаголникот се означува со $2s$, т.е. $L = 2s$; за триаголникот ABC тој се определува според формулава

$$L = 2s = a + b + c.$$

Како што е познато, плоштината на $\triangle ABC$ се определува со формулава

$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Задачи

1. Нека A, B, C, D се точки на една права и нека точката S лежи надвор од правата. Поврзи ја точката S со отсечки со другите точки. Колку триаголници се добиени?

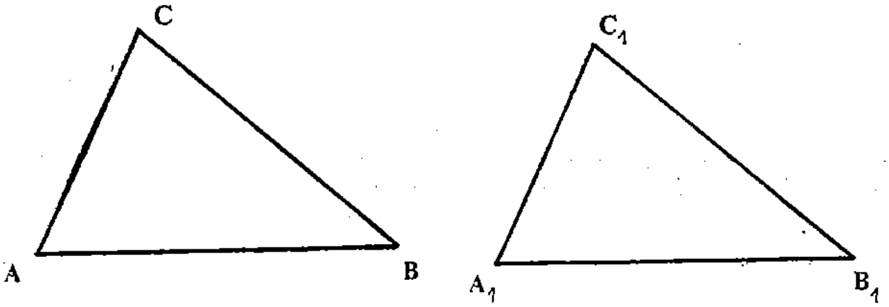
2. Ако правата a што не минува низ ниедно теме на $\triangle ABC$ ја сече страната AB, тогаш таа права ќе сече уште една и само една од другите две страни BC и AC.

3. За полуправата што лежи во некој агол и што го преполовува, велиме дека е *симетрала* на тој агол. Покажи дека симетралата на еден надворешен агол на триаголникот е нормална на симетралата на напоредниот внатрешен агол.

3.2. Складни триаголници

Дефиниција. Два триаголника ABC и $A_1B_1C_1$ *се складни* ако: $\overline{AB}=\overline{A_1B_1}$, $\overline{BC}=\overline{B_1C_1}$, $\overline{CA}=\overline{C_1A_1}$, $\sphericalangle A=\sphericalangle A_1$, $\sphericalangle B=\sphericalangle B_1$, $\sphericalangle C=\sphericalangle C_1$.

Во тој случај ќе пишуваме $\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$.



Црт. 3

На црт. 3 се претставени два складни триаголника.

Најчесто е тешко (дури и невозможно) со директно проверување на барањата во дефиницијата да се установи дали два триаголника се складни.Но, постојат критериуми со кои се намалуваат барањата на дефиницијата, според кои може да се установи складноста на два триаголника. Тие ќе познати под името *признаци за складност* на триаголниците; овде ќе ги наведеме без доказ и ќе ги користиме натаму во изучувањето на својствата на геометриските фигури.

Признак САС. *Ако на два триаголника им се еднакви по две страни и аглите зафатени од нив, тогаш тие триаголници се складни.*

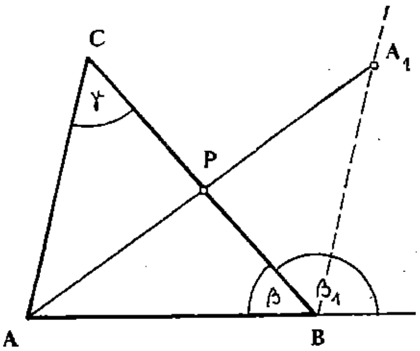
Признак АСА. *Ако на два триаголника им се еднакви по една страна и аглите што лежат на тие страни, тогаш триаголниците се складни.*

Признак ССС. *Ако страните на еден триаголник се еднакви со страните на друг триаголник, тогаш тие триаголници се складни.*

Поимот за складни триаголници често се користи за докажување најразлични својства на геометриските фигури. Еве еден пример.

Теорема 1. *Секој надворешен агол на триаголникот е поголем од кој било несоседен внатрешен агол на тој триаголник.*

Доказ. Нека P е средина на страната BC од триаголникот ABC (црт. 4) и нека на полуправата AP, од точката P, ја пренесеме отсечката AP, т.е. $\overline{AP}=\overline{PA_1}$. Тогаш, јасно е дека полуправата BA_1 ќе лежи во $\measuredangle\beta_1$, т.е. $\measuredangle PBA_1<\beta_1$.



Црт. 4

Триаголниците APC и PBA_1 се складни според CAC: $\overline{AP}=\overline{PA_1}$ и $\overline{CP}=\overline{BP}$ (по конструкција) и $\measuredangle APC=\measuredangle BPA_1$ (како накрсни агли). Според тоа, $\measuredangle PBA_1=\gamma$ од каде што следува дека $\gamma<\beta_1$.

На сличен начин се докажува и $\alpha<\beta_1$.

Како последици од оваа теорема можат да се докажат следниве својства (обиди се да ги докажеш сам):

— збирот на кои било два агла на триаголникот е помал од 180°.

— триаголникот не може да има повеќе од еден тап агол или еден прав агол.

Значи, во еден триаголник или сите три агли се остри или само еден агол е тап, односно прав. Според тоа, еден триаголник може да биде:

— *остроаголен,* ако сите негови агли се остри;

— *тапоаголен,* ако еден негов агол е тап;

— *правоаголен,* ако еден негов агол е прав.

Страната што лежи наспроти правиот агол во еден правоаголен триаголник ја викаме *хипотенуза,* а страните што го зафаќаат правиот агол — *катети.*

Задачи

1. Да се докаже дека во секој триаголник два надворешни агли се тапи.

2. Ако отсечките AB и CD имаат заедничка точка M и ако се преполовуваат со таа точка, т.е. $\overline{AM}=\overline{MB}$ и $\overline{CM}=\overline{MD}$, тогаш и $\overline{AC}=\overline{BD}$ и $\overline{AD}=\overline{BC}$. Да се докаже.

3. Отсечките AB и CD се сечат во точката M така што $\overline{AM}=\overline{CM}$ и $\overline{BM}=\overline{DM}$. Да се докаже дека $\measuredangle DAM=\measuredangle BCM$.

4. Точките A, B, C, D се колинеарни и притоа B е меѓу A и C, а D е меѓу B и C. Точката M лежи надвор од правата AC и притоа $\overline{AM} = \overline{CM}$, $\overline{BM} = \overline{DM}$ и $\overline{AB} = \overline{DC}$. Да се докаже дека $\sphericalangle AMB = \sphericalangle DMC$.

5. Полуправата AB ја сече отсечката CD и ја преполовува со пресечната точка. Да се докаже: Ако $\overline{AC} = \overline{AD}$, тогаш $AB \perp CD$.

6. Ако во триаголникот ABC, $\overline{AB} = \overline{CB}$ и ако M лежи меѓу A и C, така што $\sphericalangle ABM = \sphericalangle CBM$, тогаш M е средина на страната AC. Докажи!

3.3. Основни конструкции на триаголник

Да ја решиме задачата за конструкција на отсечка со дадена должина x.

Оваа задача има бесконечно многу решенија; тоа може лесно да се види. Аксиомата А. 8 ни овозможува да ја нацртаме таа отсечка на некоја полуправа ако, тргнувајќи од почетната точка O, на полуправата ја најдеме точката X за која $\overline{OX} = x$. Значи, нашата задача да нацртаме отсечка со дадена должина ќе има толку решенија (толку отсечки) колку полуправи можеме да определиме на рамнината. А колку се тие полуправи?

Сите овие бесконечно многу отсечки образуваат едно п о д м н о ж е с т в о од множеството на сите отсечки. Основно карактеристично својство што е заедничко за сите отсечки — решенија е тоа што тие имаат иста должина. Порано се договоривме дека тие отсечки ќе ги викаме еднакви. И во овој случај ваквото множество отсечки (со иста должина) при геометриските конструкции, обично, ќе го претставуваме само со една негова отсечка. Тоа значи дека нашата задача за конструкција на отсечка со зададена должина има с а м о е д н о р е ш е н и е.

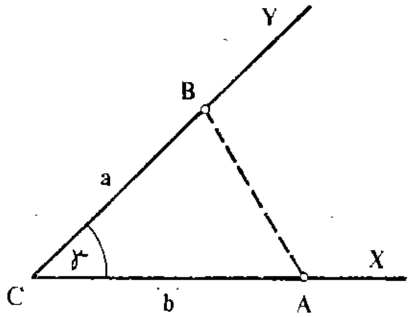
Во таа смисла и задачата за конструкција на агол што има даден број степени има само едно решение.

Исто така, поради еднозначните конструкции на отсечка и агол што се зададени со бројни показатели (параметри), во задачите за конструкција на триаголник ќе сметаме дека $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ н е с е р а з л и ч н и р е ш е н и ј а ако се случи тие триаголници да се складни.

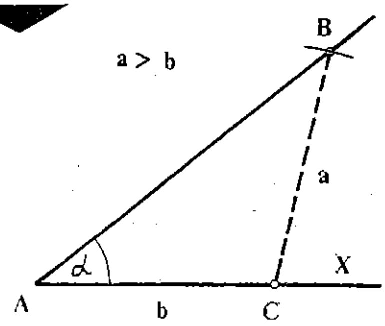
Задача 1. Да се конструира триаголник за кој се дадени страните a и b и аголот γ што го зафаќаат тие страни.

Решение. Да го нацртаме $\sphericalangle XCY = \gamma$ (црт. 5). На краците CX и CY на овој агол ги конструираме отсечките CA и CB со должини $\overline{CA} = b$ и $CB = a$. Триаголникот ABC е решение на задачата бидејќи ги исполнува условите: $\sphericalangle ACB = \gamma$, $\overline{CA} = b$ и $\overline{CB} = a$.

Поради единственоста на конструкциите на отсечките a и b и аголот γ, следува дека овој триаголник е единствено решение на задачата. Тоа значи дека и секој друг триаголник што ќе ги исполнува условите на задачата, ќе биде складен со $\triangle ABC$ (признак САС).



Црт. 5



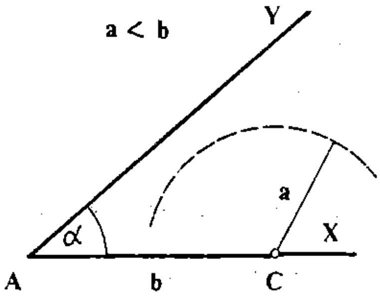
Црт. 6

Задача 2. Да се конструира триаголник за кој се зададени две страни a и b и аголот α што лежи спроти страната a.

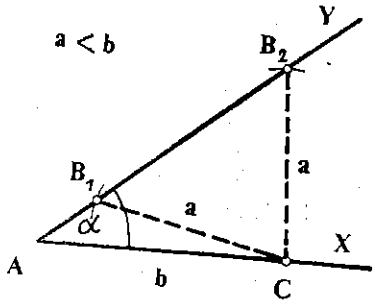
Решение. Да го нацртаме аголот α, т.е. $\sphericalangle XAY = \alpha$ (црт. 6) и на кракот AX да ја констриираме отсечката $AC = b$. Од точката C спуштаме отсечка чија друга крајна точка лежи на полуправата AY, а нејзината должина е a, т.е. $\overline{CB} = a$. Можни се следниве два случаја:

1° Ако $a > b$, тогаш на полуправата AY постои само една точка B, такве што $\overline{CB} = a$; триаголникот ABC е единственото решение.

2° Ако $a < b$, тогаш или не постои таква отсечка, па задачата нема решение (црт. 7), или постојат две такви отсечки (црт. 8), т.е. $\overline{CB_1} = \overline{CB_2} = a$, па задачата има две решенија.



Црт. 7

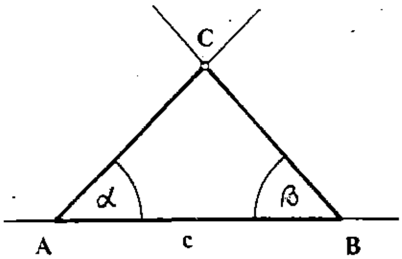


Црт. 8

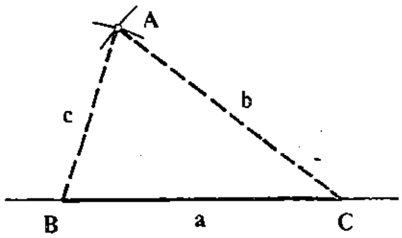
Задача 3. Да се конструира триаголник ако се зададени една страна c и аглите α, β што лежат на таа страна.

Решение. Да ја нацртаме отсечката AB, $\overline{AB} = c$. Кон полуправата AB, односно полуправата BA, ги нанесуваме аглите α, односно β, така што да лежат во иста полурамнина определена со правата AB (црт. 9). Овие агли се со различни темиња и имаат по еден крак што лежи на иста права. Другите два крака нека се сечат во точката C.

Триаголникот ABC ги исполнува условите на задечата и е единствено решение.



Црт. 9



Црт. 10

Задача 4. Да се конструира триаголник ако се зададени сите три страни a, b, c.

Решение. На произволна права се конструира отсечка, на пример, $\overline{BC}=a$, (црт. 10). Потоа се конструира кружница со центар во B и со радиус c и кружница со центар во C и радиус b. Ако овие кружници имаат заедничка точка A, што не лежи на BC, тогаш триаголникот BCA ги исполнува условите и е единствено решение; ако, пак, кружниците не се сечат, задачата нема решение.

Задачи

1. Да се конструира триаголник ако се зададени:

а) страните a и b и тежишната линија t_a;

а) страната b, аголот γ и тежишната линија t_a.

2. Да се конструира правоаголен триаголник ако се зададени:

а) катетите a и b;

б) катетата a и хипотенизата c;

в) катетата a и остриот агол β што лежи на неа.

3. Да се конструира триаголник ако се зададени:

а) страните b и c и висината h_a;

б) b, h_a, t_a;

в) a, h_a, t_a.

4. Да се конструира рамнокрак триаголник ако се зададени: основата a и кракот b.

5. Да се конструира рамностран триаголник ако е зададена страната a.

6. Да се конструира триаголник ако се зададени: а) c, α h_c; б) a, c, h_a; в) a, h_a, β.

3. 4. Рамнокрак триаголник

Нека во рамнокракиот триаголник ABC (црт. 11), страните AC и BC се неговите краци, а страната AB — основа.

Теорема 3. *Во секој рамнокрак триаголник:*

а) *аглите што лежат на основата се еднакви меѓу себе;*

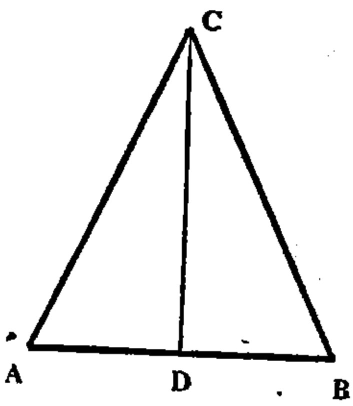
б) *тежишната линија спуштена од темето спроти основата е и симетрала на аголот и висина.*

Доказ. Нека, на црт. 11, точката D е средина на основата AB, т.е. отсечката CD е тежишна линија. За триаголниците CDA и CDB страната CD е заедничка и $\overline{AD}=\overline{DB}$, $\overline{AC}=\overline{BC}$, па, според признакот CCC, тие триаголници се складни. Од тоа следува

а) $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$;

б) $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$,

т.е. тежишната линија CD е и симетрала на $\sphericalangle ACB$. Исто така, $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CDB$, па, бидејќи овие агли се напоредни, следува дека се и прави агли, а според тоа, тежишната линија CD е и висина спуштена од темето C.



Црт. 11

Важи и обратната теорема:

Теорема 3. *Ако во еден триаголник два агла се еднакви, тогаш тој триаголник е рамнокрак.*

Според претходните теореми следува дека во секој рамностран триаголник аглите се остри и меѓусебно еднакви. Исто така, тежишните линии се меѓусебно еднакви и се еднакви и со висините и со симетралите на аглите.

Задачи

1. Да се покаже дека тежишните линии повлечени од крајните точки на основата на еден рамнокрак триаголник се еднакви меѓу себе.

2. Да се докаже дека средните точки на страните на еден рамнокрак триаголник се темиња на еден друг рамнокрак триаголник.

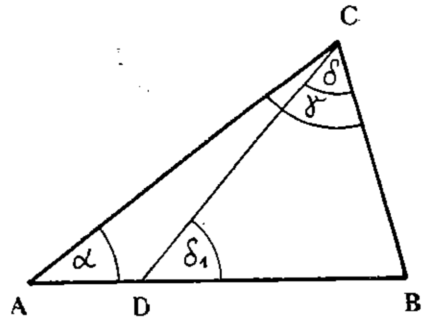
3. Во триаголникот ABC, $\overline{AC}=\overline{BC}$. На страната AC е земена точката D, а на страната BC точката E и, притоа $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CBA$, $\sphericalangle CED = \sphericalangle CAB$. Да се докаже дека $\triangle CDE$ е рамнокрак. Направи цртеж.

4. Да се конструира рамнокрак триаголник ако се зададени: а) основата a и аголот β при основата; б) основата a и висината h на основата; в) висината h на основата и аголот α при врвот.

3.5. Однос меѓу страни и агли

Теорема 4. *Во триаголникот, наспроти поголема страна лежи поголем агол и, обратно, наспроти поголем агол лежи поголема страна.*

Доказ. 1° Нека во триаголникот ABC (црт. 12) $\overline{AB}>\overline{BC}$. На полуправата BA ја пренесуваме страната BC, т.е. $\overline{BD}=\overline{BC}$. Триаголникот BCD е рамнокрак, па $\delta = \delta_1$. Од конструкцијата следува дека полуправата CD лежи во аголот γ, па $\gamma > \delta$ односно $\gamma > \delta_1$.



Црт. 12

Аголот δ_1 е надворешен за $\triangle CAD$, па, според Т. 1, е поголем од аголот α, т.е. $\delta_1 > \alpha$.

Значи, $\gamma > \delta_1$ и $\delta_1 > \alpha$, па и $\gamma > \alpha$.

2° Нека во $\triangle ABC$ имаме $\gamma > \alpha$. За страните AB и BC на $\triangle ABC$, што се наоѓаат спроти овие агли, може да е точно: или $\overline{AB} = \overline{BC}$, или $\overline{AB} < \overline{BC}$, или $\overline{AB} > \overline{BC}$. Ако:

— $\overline{AB} = \overline{BC}$, тогаш $\triangle ABC$ е рамнокрак и $\gamma = \alpha$, што е спротивно на условот дека $\gamma > \alpha$;

— $\overline{AB} < \overline{BC}$, тогаш, според претходно докажаното тврдење во 1°, имаме $\gamma < \alpha$ што е, исто така, спротивно на условот дека $\gamma > \alpha$, и

— $\overline{AB} > \overline{BC}$, тогаш пак според претходното тврдење во 1°, имаме $\gamma > \alpha$.

Гледаме дека само последната претпоставка не противречи на условот дека $\gamma > \alpha$, па следствено само таа е и точна.

Бидејќи темињата A, B и C на $\triangle ABC$ не се колинеарни, според А.7.

$$\overline{AB} < \overline{BC} + \overline{CA}, \quad \overline{BC} < \overline{CA} + \overline{AB}, \quad \overline{CA} < \overline{AB} + \overline{BC},$$

односно

$$\overline{AB} > \overline{BC} - \overline{CA}, \quad \overline{BC} > \overline{BA} - \overline{AC}, \quad \overline{CA} > \overline{AB} - \overline{BC},$$

ако

$$\overline{AB} \geqslant \overline{BC} \geqslant \overline{CA}.$$

Тоа својство може да се земе и како *признак за постоење (егзистенција) на триаголник*, т.е. ако a, b и c се позитивни реални броеви, такви што

$$a + b > c, \quad b + c > a, \quad c + a > b,$$

тогаш со отсечките чиишто должини се еднакви соодветно на броевите a, b, c може да се конструира триаголник.

Задачи

√ **1.** На страната AB на триаголникот ABC е земена точка D. Да се докаже дека отсечката CD е помала барем од една од страните AC и BC.

√ **2.** Отсечките AB и CD се сечат во точката E, така што $\sphericalangle ACE > \sphericalangle CAE$ и $\sphericalangle EDB > \sphericalangle DBE$. Да се докаже дека $\overline{AB} > \overline{CD}$. Направи цртеж!

3. Дадени се точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Да се докаже:

$$\overline{A_1A_5} < \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_4A_5}.$$

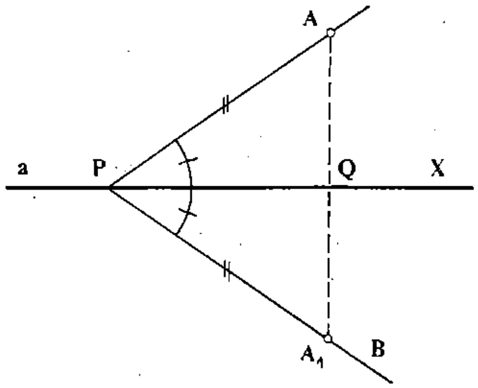
4. Да се докаже дека должината на секоја дијагонала на еден многуаголник не е поголема од полупериметарот на тој многуаголник.

3.6. Нормала на права од дадена точка

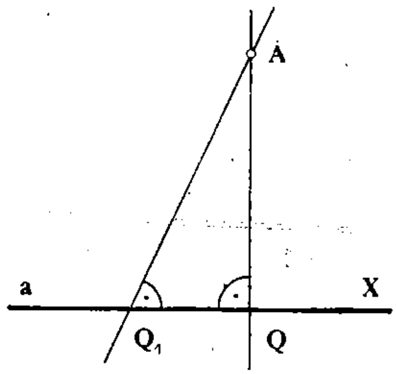
Во **1.6,** со Т.4, покажавме дека низ секоја точка на правата може да минува точно една права a' што е нормална на правата a.

Теорема 5. *Низ дадена точка што лежи надвор од дадена права минува една и само една права, нормална на дадената права.*

Доказ. Нека a е дадена права и нека точката A лежи надвор од неа (црт. 13).



Црт. 13



Црт. 14

1° Ќе покажеме дека постои барем една нормала на правата a спуштена од точката A. Низ произволна точка P од правата a и низ точката A минува една полуправа PA. Според А.10, постои точно една полуправа PB, таква што $\sphericalangle APX = \sphericalangle BPX$, при што точките A и B се од различни страни на правата a и X е која било точка од правата a.

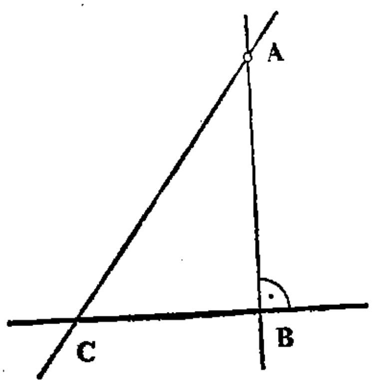
На полуправата PB да ја определиме A_1, така што $\overline{PA} = \overline{PA_1}$. Правата a ќе ја сече отсечката AA_1 во точката Q, бидејќи точките A и A_1 лежат од различни страни на правата a.

Триаголниците APQ и A_1PQ се складни, зашто имаат заедничка страна PQ и $\overline{PA} = \overline{PA_1}$, $\sphericalangle APQ = \sphericalangle A_1PQ$ по конструкција. Според тоа, $\sphericalangle AQP = \sphericalangle A_1QP$. Но, бидејќи тие се и напоредни агли, следува дека се прави агли. Значи, правата AA_1 е нормала на правата a.

2° Ќе покажеме уште дека таа права е и единствена. Да претпоставиме дека низ точката A минуваат две прави AQ и AQ_1 што се нормални на правата a, т.е. $\sphericalangle AQX = \sphericalangle AQ_1X = 90°$ (црт. 14).

Еден триаголник може да има најмногу еден прав агол, а триаголникот AQQ_1 има два прави агла, што претставува противречност. Следствено, низ точката A минува само една права што е нормална на правата a.

3.7. Растојание од точка до права



Црт. 15

Нека, на црт. 15, AB е нормала на правата a спуштена од точката A, а C — произволна точка од правата a. За точката B велиме дека е *подножје* на нормалата, а за правата AC дека е *наведната* кон правата a.

Растојанието $d(AB) = \overline{AB}$ го викаме *растојание* од точката A до правата a.

Триаголникот ABC е правоаголен триаголник во кој отсечката AC е хипотенуза, а отсечката AB е катета. Бидејќи правиот агол е најголем агол во правоаголниот триаголник, според теоремата 4, следува дека $\overline{AC} > \overline{AB}$. Тоа значи дека растојанието од дадена точка до дадена права е помало од должината на која било наведената отсечка од таа точка.

Задачи

1. Што се подразбира под растојание: а) од точка до полуправа, б) од точка до отсечка?

2. Да се покаже дека во секој правоаголен триаголник, висината спуштена на хипотенузата е помала од секоја катета.

3. Да се покаже дека од дадена точка не може на дадена права да се повлечат три наведнати отсечки со дадена должина.

4. Да се докаже дека периметарот на триаголникот е поголем од збирот на неговите три висини.

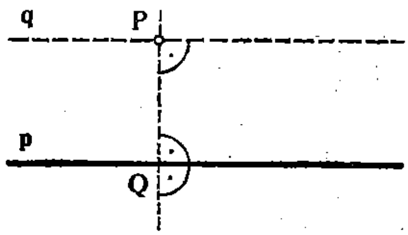
§ 4. Паралелни прави

4.1. Аксиома за паралелност

Да се потсетиме дека две прави a и b се паралелни ако $a = b$ или $a \cap b = \varnothing$.

Нека точката P не лежи на правата p. Колку прави, паралелни со правата p, минуваат низ точката P? Ќе покажеме дека постои барем една права со такво својство.

Да повлечеме нормала на правата p низ точката P и нека тие се сечат во точката Q; во точката P ја повлекуваме и правата q што е нормална на таа нормала (црт. 1). Да претпоставиме дека правите p и q се сечат во некоја точка R. Еден триаголник може да има најмногу еден прав агол, а триаголникот PQR има два прави агли што претставува противречност. Следствено, правите p и q не се сечат, па, значи тие се паралелни прави.



Црт. 1

Во геометријата што ја изучуваме (таканаречената Евклидова геометрија) се прифаќа дека постои точно една права со такво својство.

Аксиома 11 (аксиома за паралелни прави). **Низ дадена точка, која лежи надвор од дадена права не минува повеќе од една права што е паралелна на дадената права.**

Теорема 1. *Ако правата c е паралелна со правите a и b, тогаш правите a и b меѓусебно се паралелни.*

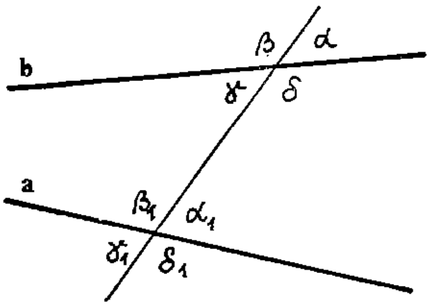
Доказ. Да претпоставиме дека правите a и b не се паралелни, т.е. дека се сечат во некоја точка C. Тогаш низ точката C минуваат две прави што се паралелни со правата c, а тоа противречи на А. 11. Значи, правите a и b се меѓусебно паралелни.

Од теоремава следува дека секоја права што сече некоја дадена права, ја сече и секоја права што е паралелна со дадената права.

4.2. Агли на трасверзалата

Нека a и b се две различни прави и нека правата c ги сече правите a и b; во тој случај за правата c велиме дека е *трансверзала* на правите a и b. Правите a и b и нивната трансверзала c образуваат повеќе агли; аглите на црт. 2 ги викаме *агли на трансверзалата* и притоа α, β, γ_1, δ_1 *се надворешни*, а γ, δ, α_1, β_1 се *внатрешни агли*.

За два агла на трансверзалата што немаат заедничко теме ќе велиме дека се:



Црт. 2

— *согласни*, ако лежат од иста страна на трансверзалата и едниот е внатрешен, а другиот надворешен; такви се α и α_1, β и β_1, γ и γ_1 δ и δ_1;

— *наизменични*, ако лежат од различни страни на трансверзалата и двата се надворешни или двата се внатрешни; такви се α и γ_1, β и δ_1, γ и α_1, δ и β_1;

— *спротивни*, ако лежат од иста страна на трансверзалата и двата се внатрешни или двата се надворешни; такви се α и δ_1, δ и α_1, β и γ_1, γ и β_1.

Теорема 2. *Нека c е трансверзала на правите a и b. Ако е исполнет кој било од следниве три услови:*

1° *наизменичните агли се еднакви;*

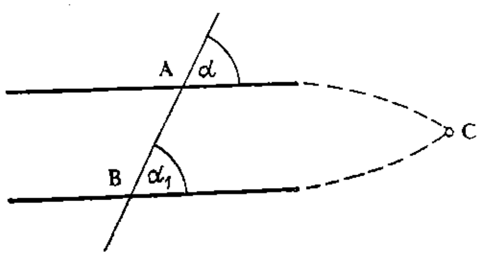
2° *согласните агли се еднакви;*

3° *спротивните агли се суплементни,*

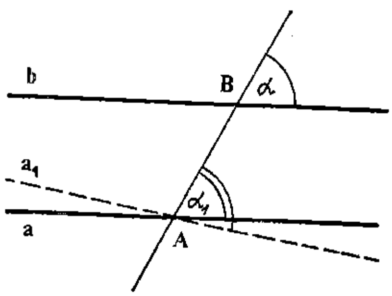
тогаш правите a и b се меѓусебно паралелни.

Доказ. Нека, на пример, согласните агли α и α_1 се еднакви (црт. 3). Ако претпоставиме дека правите не се паралелни, т.е. се сечат во точката *C*, како на црт. 3, тогаш α е надворешен агол на $\triangle ABC$, па $\alpha > \alpha_1$, што противречи на претпоставката α и α_1 да се еднакви. Значи, правите немаат заедничка точка, т.е. се паралелни.

Обиди се да ја докажеш теоремата ако се претпостави 1° или 3°



Црт. 3



Црт. 4

Важи и обратната теорема.

Теорема 3. *Ако две прави a и b се паралелни, а c е нивна трансверзала, тогаш неизменичните агли се еднакви, согласните агли се еднакви, а спротивните агли се суплементни.*

Доказ. Нека паралелните прави a и b се пресечени со трансверзалата t во точките A и B (црт. 4). Да претпоставиме дека согласните агли α и α_1 не се еднакви. Низ точката A да повлечеме права a_1 така што согласните агли на трансверзалата t и правите a_1 и b да бидат еднави; тогаш, според претходната теорема Т.2, правата a_1 ќе биде паралелна со правата b. Но, според А.11, низ точката A минува точно една права што е паралелна со b, па, значи, правите a и a_1 се совпаѓаат.

Од оваа теорема следува дека:

— две прави што се нормални на трета права се паралелни меѓу себе, и

— ако една права е нормална на дадена права, тогаш таа е нормална и на секоја права што е паралелна со дадената права.

Задачи

1. Отсечките AB и CD се преполовуваат со заедничката точка E. Да се докаже дека $AD \parallel BC$.

2. Докажи го тврдењето: ако две прави се паралелни, тогаш сите точки на која било од нив се на еднакво растојание од другата права.

3. Ако a и b се две паралелни прави, тогаш докажи дека сите точки од правата b се од иста страна на правата a.

4. Дали се точни исказите: а) $a \parallel a$, б) ако $a \parallel b$, тогаш $b \parallel a$; в) ако $a \parallel b$ и $b \parallel c$, тогаш $a \parallel c$?

4.3. Збир на аглите на триаголник

Аксиомата за паралелни прави (А. 11) и теоремите што се наведени по неа ни дозволуваат да согледаме едно мошне важно својство на триаголникот.

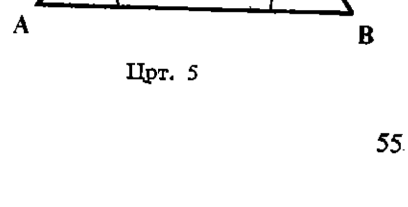
Теорема 4. *Збирот на аглите на секој триаголник изнесува* 180°.

Доказ. Низ темето C на $\triangle ABC$ повлекуваме права c што е паралелна со спротивната страна AB (црт. 5). Оваа права, со страните на триаголникот зафаќа агли α_1 и β_1, такви што $\alpha_1+\beta_1+\gamma=180°$. Ако страната AC ја земеме за трансверзала на паралелните прави AB и c, тогаш $\alpha=\alpha_1$. (Зошто?) На сличен начин се установува дека и $\beta=\beta_1$.

Значи, $\alpha+\beta+\gamma=180°$.

Непосредно од теоремава следува дека:

— Секој надворешен агол на триаголникот е еднаков со збирот на двата внатрешни агли, несоседни со него;



Црт. 5

— збирот на надворешните агли на триаголникот изнесува 360°;

— збирот на острите агли на правоаголниот триаголник изнесува 90°;

— аглите на рамностраниот триаголник се по 60°.

Задачи

1. Докажи дека два рамнострани триаголници се складни, ако им се еднакви по една од страните.

2. Докажи дека два правоаголни триаголници се складни, ако им се еднакви: а) хипотенузите и по еден остар агол, б) двете катети.

3. Да се пресмета збирот на аглите на произволен многуаголник.

4. Покажи дека збирот на надворешните агли на секој многуаголник изнесува 360°.

5. Колкави се аглите на триаголникот ABC, ако стојат во размер $1:2:3$?

6. Аголот меѓу краците на еден рамнокрак триаголник има 57°. Што е поголемо: основата или кракот на тој триаголник?

7. Колкав е третиот агол на $\triangle ABC$ ако се зададени другите два: а) $\alpha = 90°$, $\beta = k°$; б) $60 + \alpha°$, $60° - \alpha$; в) u, v.

8. Ако симетралата на еден надворешен агол на некој триаголник е паралелна со страната на тој триаголник, тогаш тој триаголник е рамнокрак.

9. Во $\triangle ABC$ аголот ACB е прав агол, а точката M од хипотенузата AB е таква што $\overline{AM} = \overline{MC}$. Да се докаже дека точката M е средина на хипотенузата.

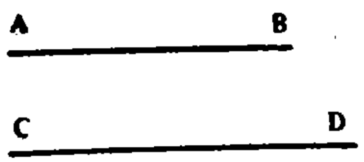
10. Точките K, M, P лежат соодветно на страните AB, BC и AC на правоаголниот триаголник ABC и притоа $\measuredangle C = 90°$, $\overline{BK} = \overline{BM}$ и $\overline{AK} = \overline{AP}$. Да се докаже дека $\measuredangle PKM = 45°$. (Направи цртеж, земи дека, на пример, $\measuredangle A = \alpha$, па определувај ги другите агли.)

11. Дали триаголникот е остроаголен, правоаголен или тапоаголен, ако еден од неговите агли е: а) еднаков на збирот на другите два агла, б) поголем од тој збир, в) помал од тој збир.

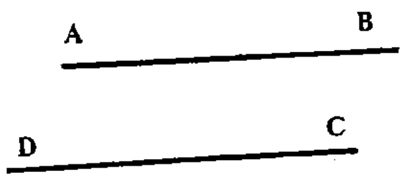
12. Да се докаже дека ако еден од надворешните агли на еден триаголник е два пати поголем од некој внатрешен агол што не е напореден со него, тагаш тој триаголник е рамнокрак.

4.4. Агли со паралелни краци

Ако две прави се паралелни, тогаш и за секои две полуправи што се составни делови на овие прави, исто така, ќе велиме дека се паралелни. На црт. 6 две полуправи се паралелни во *иста насока*, а на црт. 7 — паралелни во *спротивна насока*.



Црт. 6



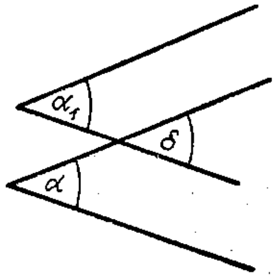
Црт. 7

Во таа смисла, ако соодветните краци на два агла се паралелни тогаш за нив велиме дека се агли со паралелни краци.

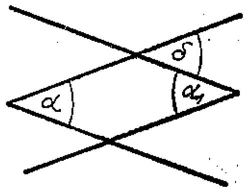
Теорема 5. *Два агла што имаат паралелни краци се еднакви или се суплементни.*

Доказ. На црт. 8 аглите α и α_1 се со паралелни краци во иста насока. Да го одбереме помошниот агол δ. На цртежот аглите α и δ се согласни, а и α_1 и δ се согласни, па според Т.3, $\alpha = \delta$ и $\delta = \alpha_1$, од каде што и $\alpha = \alpha_1$.

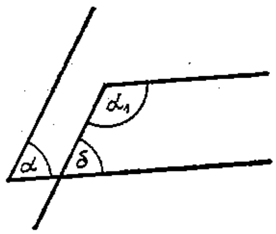
Разгледај ги сам другите случаи (види ги цртежите 9 и 10).



Црт. 8



Црт. 9



Црт. 10

Задачи

1. Докажи: два агла со нормални краци се еднакви или се суплементни.

2. Дадени се два еднакви агли со нормални краци. Докажи дека симетралите на овие агли меѓусебно се нормални.

3. Дадени се два суплементни агли со нормални краци. Докажи дека симетралите на овие агли меѓусебно се паралелни.

4. Да нацртаме два остри агла, така што едниот пар краци да им се паралелни, а другиот пар краци да им се нормални. Докажи дека овие агли се комплементни.

§5. Слични триаголници

5.1. Пропорционални отсечки

Ако должините на четири отсечки $\overline{AA_1} = a$, $\overline{BB_1} = b$, $\overline{CC_1} = c$, $\overline{DD_1} = d$ се такви, што да образуваат некоја пропорција, на пример, $a : b = c : d$, тогаш за нив велиме дека се *пропорционални отсечки*, односно за секоја од нив — дека е *четврта пропорционална* на останатите три отсечки. Ако, притоа, $b = c$, т.е. $a : b = b : d$, тогаш за отсечката b велиме дека е *геометриска средина* на отсечките a и d или *средна геометриска пропорционала* на отсечките a и d.

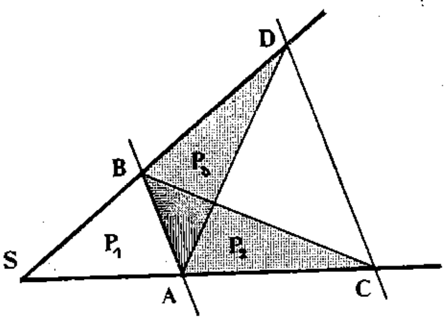
Наредната теорема ја решава задачата за конструкција на четвртата пропорционала.

Теорема 1. *Ако крациите на еден агол се пресечат со две различни паралелни прави, тогаш отсечките што ги отсечуваат овие прави од крациите на аголот, се пропорционални меѓу себе.*

Доказ. Најпрвин да согледаме едно својство на некои триаголници. Имено, плоштините на два триаголника што имаат иста висина (или еднакви висини) се однесуваат како соодветните страни, т.е.

$$P_1 : P_2 = \frac{a_1 h}{2} : \frac{a_2 h}{2} = a_1 : a_2.$$

Да поминеме на доказот на теоремата. На црт. 1, паралелните прави AB и CD отсечуваат на крацитe на $\sphericalangle S$ повеќе отсечки: SA, SB, SC, SD, AC и BD.



Црт. 1

Од цртежот можеме да изведеме некои заклучоци:

1° триаголниците ACB и ADB имаат заедничка страна AB, а висините спуштени на таа страна им се еднакви (бидејќи $AB \parallel CD$), па, според тоа, ќе имаме еднакви плоштини, т.е. $P_2 = P_3$,

2° триаголниците SAB и ACB имаат иста висина (растојанието од B до правата што минува низ S, A и C), па нивните плоштини и соодветните страни ќе образуваат пропорција

$$P_1 : P_2 = \overline{SA} : \overline{AC}; \tag{1}$$

3° триаголниците SAB и ADB имаат иста висина (растојанието од A до правата што минува низ S, B и D), па, исто така,

$$P_1 : P_3 = \overline{SB} : \overline{BD}. \tag{2}$$

Бидејќи $P_1 = P_2$, од (1) и (2) следува

$$\overline{SA} : \overline{AC} = \overline{SB} : \overline{BD}, \tag{3}$$

т.е. отсечките SA, AC, SB и BD се пропорционални.

Со проширување на оваа пропорција се добива

$$\overline{SA} : (\overline{SA} + \overline{AC}) = \overline{SB} : (\overline{SB} + \overline{BD}),$$

односно

$$\overline{SA} : \overline{SC} = \overline{SB} : \overline{SD}. \tag{4}$$

Со тоа теоремата е докажана.

Може да се докаже дека и должините на отсечките AB и CD имаат исти однос како и отсечките од краците на $\sphericalangle S$, т.е.

$$\overline{SA}:\overline{SC}=\overline{SB}:\overline{SD}=\overline{AB}:\overline{CD}. \tag{5}$$

Важи и обратната теорема:

Теорема 2. *Ако две различни прави, од краците на еден агол отсечуваат пропорционални отсечки, тогаш тие прави се паралелни меѓу себе.*

Доказ. На црт. 2 краците на $\sphericalangle S$ се пресечени со правите AB и CD и, притоа, $\overline{SC}:\overline{SB}=\overline{SD}:\overline{SA}$.

Низ точката C повлекуваме права што е паралелна со правата AB и која го сече другиот крак во точката D', т.е. $AB \parallel CD'$.

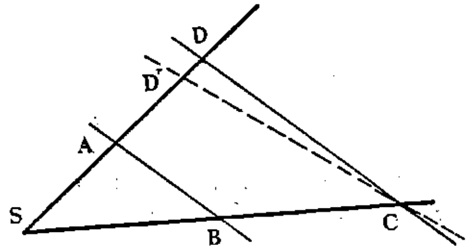
Според претходната теорема, имаме

$$\overline{SC}:\overline{SB}=\overline{SD'}:\overline{SA},$$

од каде што, согласно со претпоставката, следува

$$\overline{SD'}:\overline{SA}=\overline{SD}:\overline{SA}.$$

Според тоа, $\overline{SD'}=\overline{SD}$, т.е. $D'=D$; значи, $AB \parallel CD$.

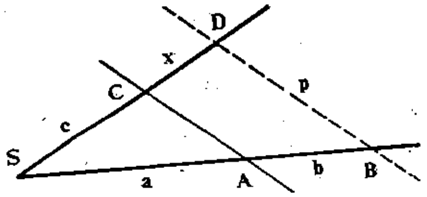


Црт. 2

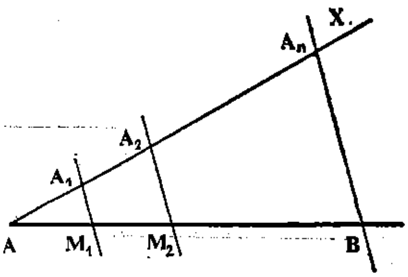
5.2. Некои конструкции на пропорционални отсечки

Задача 1. Да се конструира отсечката x, таква што $a:b=c:x$, каде што a, b и c се дадени отсечки.

Избираме произволен агол (црт. 3) и на еден негов крак ги нанесуваме отсечките a и b, а на вториот — отсечката c, т.е. $\overline{SA}=a$, $\overline{AB}=b$, $\overline{SC}=c$. Нека p е правата низ B, што е паралелна со правата AC и нека $D=p\cap SC$. Според Т. 1, CD е бараната отсечка, т.е. $x=\overline{CD}$.



Црт. 3



Црт. 4

Задача 2. Да се конструира отсечка со должина $x = ab$.

Од $x = ab$ можеме да ја составиме пропорцијата $e : a = b : x$, каде што e е единична отсечка. Со тоа, задачата се сведува на првата.

Задача 3. Да се подели отсечката AB на n еднакви делови (отсечки).

На полуправата AX (црт. 4) избираме n точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, такви што $\overline{AA_1} = \overline{A_1A_2} = \ldots = \overline{A_{n-1}A_n}$ и ја повлекуваме правата BA_n. Низ точките A_1 $A_3, \ldots,$ A_{n-1} цртаме прави што се паралелни со правата BA_n, овие прави ја сечат отсечката AB во точките $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ соодветно и притоа $\overline{AM_1} = \overline{M_1M_2} = \ldots = \overline{MB}_{n-1}$ (зошто?).

Задачи

1. Да се конструира отсечка со должина: а) $x = a^2$; б) $x = \frac{ab}{c}$; в) $x = \frac{a^2}{b}$; г) $x = \frac{abc}{df}$; д) $x = a^3$.

2. Отсечката AB да се раздели на два дела што се однесуваат како $m : n$.

3. Отсечката $\overline{AB} = 10cm$ да се раздели на три дела што се однесуваат како $3 : 5 : 7$.

4. Периметарот на еден рамнокрак триаголник е $9cm$, а основата се однесува спрема кракот како $3 : 4$. Да се конструира тој триаголник.

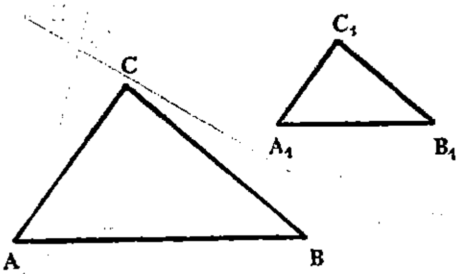
5.3. Слични триаголници

Дефиниција. Два триаголника ABC и $A_1B_1C_1$ *се слични*, ако имаат еднакви агли, а соодветните страни им се пропорционални, т.е.

$$\measuredangle A = \measuredangle A_1, \quad \measuredangle B = \measuredangle B_1, \quad \measuredangle C = \measuredangle C_1,$$
$$\overline{AB} : \overline{A_1B_1} = \overline{BC} : \overline{B_1C_1} = \overline{AC} : \overline{A_1C_1}.$$

Во тој случај пишуваме: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Ако вредноста на размерите од соодветните страни е бројот k, тогаш тој број го викаме *коефициент на сличноста*.



Црт. 5

На црт. 5 се нацртани два слични триаголника.

Користејќи ја теоремата за пропрционални отсечки, наведена во **5.1**, обиди се да ја докажеш следнава теорема, која содржи три признаци за утврдување дали два триаголника се слични.

Теорема 3. *Два триаголника се слични:*

— *ако им се еднакви по два агла;*

— *ако две страни на едниот се пропорционални со две страни на другиот триаголник, а аглите што се зафатени со тие страни им се еднакви;*

— *ако трите страни на едниот се пропорционални со трите страни на другиот триаголник.*

Задачи

1. Обиди се да покажеш дека ако два триаголника се слични, тогаш: нивните периметри, соодветните висини, соодветните тежишни линии и соодветните симетрали на агли, се во ист размер како и нивните страни.

2. Како гласат признаците за слични правоаголни триаголници, за слични рамнокраки триаголници?

3. Симетралата AD на аголот BAC во триаголникот ABC ја дели страната BC на делови што се пропорционални на другите две страни, т.е. $\overline{AB}:\overline{BD}=\overline{AC}:\overline{CD}$. Да се докаже!

4. Да се конструира триаголникот ABC ако се дадени:

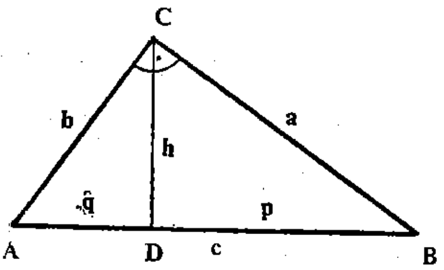
а) $c=6$ cm, $a:b=2:5$, $\gamma=35°$;

б) α, β, h_c; в) α, β, h_a.

5.4. Пропорционални отсечки во правоаголниот триаголник

Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол кај темето C, со катети $AC=b$, $BC=a$, и хипотенуза $AB=c$ (црт. 6). Отсечката CD е висина на триаголникот спуштена од темето на правиот агол, а отсечките $AD=q$ и $BD=p$ претставуваат проекции од катетите врз хипотенузата.

Лесно се утврдува дека правоаголните триаголници ABC, ADC, и BCD се слични меѓу себе (докажи!). Тогаш:



Црт. 6

— од $\triangle ABC \sim \triangle ADC$ добиваме $q:b=b:c$, т.е. $b^2=cq$;

— од $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ добиваме $p:a=a:c$, т.е. $a^2=cp$, т.е. *секоја катета е геометриска средина на нејзината проекција врз хипотенузата и самата хипотенуза;*

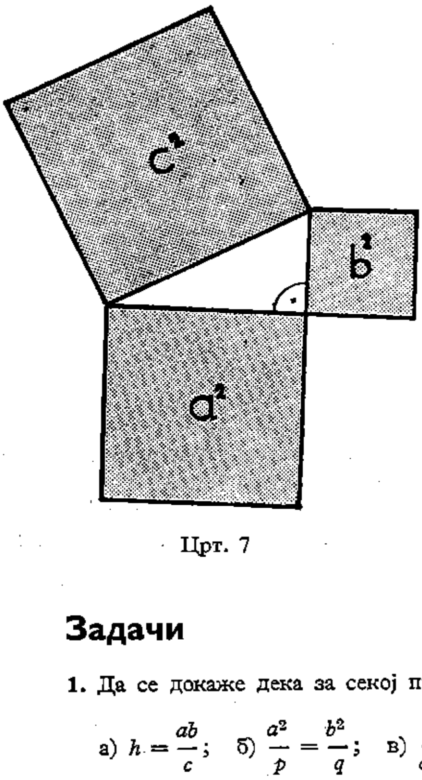
— од $\triangle ADC \sim \triangle BDC$ добиваме $q:h=h:p$, т.е. $h^2=pq$, односно *висината h спуштена кон хипотенузата е геометриска средина на проекциите p и q од катетите врз хипотенузата.*

Теорема 3 (Питагорова теорема). *Во секој правоаголен триаголник збирот на квадратите на катетите е еднаков со квадратот на хипотенузата.*

Доказ. Според заклучокот дека $a^2 = cp$ и $b^2 = cq$, каде $p + q = c$, следува

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Питагоровата теорема може да се земе уште и како признак за правоаголен триаголник, т.е. секој триаголник за кој важи $a^2 + b^2 = c^2$, каде што a, b, c се негови страни, е правоаголен триаголник (црт. 7).



Црт. 7

Со помош на оваа теорема можеме да искажеме уште еден признак за складни правоаголни триаголници.

Теорема 4. *Два правоаголни триаголника се складни ако им се еднакви хипотенузите и по една катета.*

Доказ. Нека правоаголните триаголници ABC и $A_1B_1C_1$ имаат еднакви хипотенузи $c = c_1$ и по една катета $a = a_1$. Од Питагоровата теорема добиваме $b^2 = c^2 - a^2$ и $b_1^2 = c_1^2 - a_1^2$, т.е. $b = b_1$. Значи, триаголниците имаат по три страни еднакви, па, според признакот CCC, тие се складни триаголници

Задачи

1. Да се докаже дека за секој правоаголен триаголник важи:

а) $h = \frac{ab}{c}$; б) $\frac{a^2}{p} = \frac{b^2}{q}$; в) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$.

2. Колкава е хипотенузата на правоаголниот триаголник со катети 1 cm?

3. Дали можат должините на сите страни на правоаголниот триаголник да се искажат со: а) парни броеви, б) непарни броеви?

4. Со кои три последователни природни броеви може да се искажат страните на правоаголниот триаголник?

5. Ако a, b, c се страни на еден правоаголен триаголник, тогаш и ka, kb, kc може да бидат должини на страни од друг правоаголен триаголник. Докажи.

6. Катетите на еден правоаголен триаголник се 24 и 32. Да се определи висината спуштена на хипотенузата.

7. Во правоаголниот триаголник ABC е зададена катетата $\overline{BC}=1$. На катетата AC е земена точка P, така што $\overline{BC}=\overline{CP}=1$, како и $\overline{BP}=\overline{PA}$. Да се најде AB. Направи цртеж!

8. Во правоаголниот триаголник BAC имаме $\alpha=30°$, $\overline{AC}=4$, $\overline{AB}=3\sqrt{3}$. Од каде знаете дека $\sphericalangle C$ ќе биде прав агол? Да се најде $\overline{BC}$.

§ 6. Четириаголник

6. 1. Поим за четириаголник

Дефиниција. Секој многуаголник со четири страни се вика *четириаголник*.

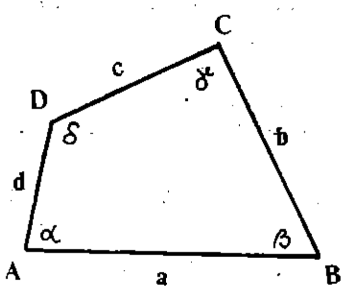
На црт. 1 е нацртан еден четириаголник. Неговите темиња се означени со A, B, C и D, а соодветните агли со α, β, γ и δ; овие агли може да се означуваат и со $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ и $\sphericalangle D$. Страните се означуваат така, што $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$ и $\overline{DA}=d$.

Два агла на четириаголникот се или *спротивни* (α и β, γ и δ) или *соседни* (α и β, β и γ, γ и δ, δ и α); исто така, две страни во четириаголникот може да бидат или *спротивни* (a и c, b и d) или *соседни* (a и b, b и c, c и d, d и a).

Четириаголникот има две дијагонали AC и BD кои, обично, се означуваат со d_1 и d_2 или e и f.

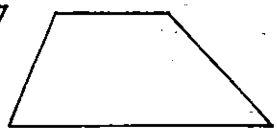
Според тоа, дали четириаголникот има *два пара* или само *еден пар* или нема ниту еден пар паралелни страни, тој се вика *паралелограм* (црт. 2), *трапез* (црт. 3) или *трапезоид* (црт. 4).

Тоа, практично, значи дека може да се направи едно разбивање на множеството четириаголници на: подмножеството паралелограми, подмножеството трапези и подмножеството трапезоиди.



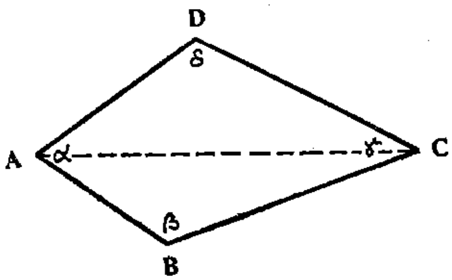
Црт. 1


Црт. 2


Црт. 3


Црт, 4

Четириаголникот $ABCD$ на црт. 5 е разделен со својата дијагонала AC на два *составни* триаголника: ABC и ACD. Збирот на сите агли на овие триаголници е еднаков со збирот на аглите на четириаголникот, па следствено, важи следнава теорема:



Црт. 5

Теорема 1. *Збирот на аглите на четириаголникот изнесува* 360°.

Задачи

1. Да се покаже дека збирот на надворешните агли на четириаголникот изнесува 360°.

2. Покажи дека секој четириаголник, на којшто сите агли не му се прави агли, има барем еден остар агол и барем еден тап агол.

3. Четириаголникот $ABCD$ е трапез. Да се докаже дека: ако краците на трапезот се еднакви, т.е. $\overline{AD}=\overline{BC}$, тогаш $\sphericalangle A=\sphericalangle B$.

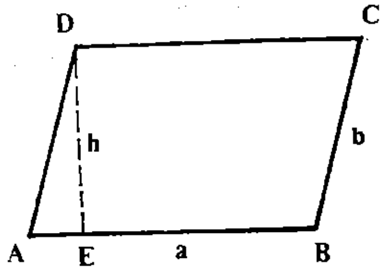
4. Ако еден трапез има еднакви дијагонали, тогаш тој е рамнокрак.

6.2. Паралелограм

Основниот признак, според кој еден четириаголник го нарековме *паралелограм*, е неговите *спротивни страни да се паралелни*. Четириаголникот $ABCD$ на црт. 6 е паралелограм. Растојанието меѓу паралелните страни го викаме *висина*; паралелограмот има две висини. На црт. 6 е означена едната висина $\overline{DE}=h$.

Покасно, во учебников, ќе биде докажано дека спротивните страни на паралелограмот се еднакви и дека дијагоналите се преполовуваат со пресечната точка.

За аглите, пак, може веднаш да се согледа дека секои два соседни агла се суплементни, а дека секои два спротивни се еднакви.



Црт. 6

Навистина, ако правата AD ја земеме за трансверзала на паралелните прави AB и DC (црт. 6), тогаш $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle D$ се суплементни, бидејќи се спротивни агли. Слично се покажува дека и другите соседни агла се суплементни. Потоа, од $\sphericalangle A+\sphericalangle D=180°$ и $\sphericalangle D+\sphericalangle C=180°$ добиваме дека $\sphericalangle A=\sphericalangle C$, а од $\sphericalangle A+\sphericalangle D=180°$ и $\sphericalangle A+\sphericalangle B=180°$ дека и $\sphericalangle B=\sphericalangle D$, т.е. дека спротивните агли се еднакви.

Од овие својства непосредно следуваат тврдењата:

— ако во еден паралелограм две соседни страни се еднакви, тогаш сите негови страни се еднакви; и

— ако во еден паралелограм два соседни агла се еднакви, тогаш сите негови агли се прави агли.

Така, од множеството паралелограми според страните, можат да се формираат:

1° подмножество *разнострани паралелограми* и

2° подмножество *рамнострани паралелограми* (ромбови),

а според аглите:

3° подмножество *косоаголни паралелограми* и

4° подмножество *правоаголни паралелограми* (правоаголници).

Паралелограмот што е и рамностран и правоаголен го викаме *квадрат*, т.е. секој правоаголен ромб или рамностран правоаголник е квадрат.

Косоаголниот разностран паралелограм, обично, го викаме *ромбоид*.

Задачи

1. Два соседни агли на еден паралелограм се $x+30°$ и $2x-60°$. Да се определат другите агли.

2. Ако дијагоналите на еден четириаголник се преполовуваат со пресечната точка, тогаш тој четириаголник е паралелограм. Да се докаже!

3. Колкави се аглите на ромбот во кој едната дијагонала е еднаква со страната на ромбот?

4. Да се покаже дека паралелограмот што има а) заемно нормални дијагонали е ромб, б) еднакви дијагонали е правоаголник.

5. Да се докаже дека: а) средините на страните на еден ромб во исто време се темиња на некој правоаголник, б) средините на страните на еден правоаголник во исто време се темиња на некој ромб.

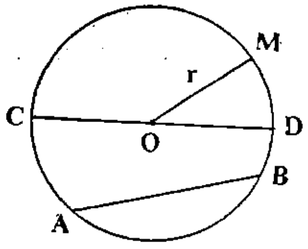
§7. Кружница и круг

7.1. Поим за кружница и круг

Дефиниција. Геометриската фигура, образувана од точките што се на дадено растојание од дадена точка, се вика *кружница*.

Дадената точка ја викаме *центар*, а даденото растојание *радиус* на кружницата; обично, и отсечката што го сврзува центарот со произволна точка на кружницата, ја викаме *радиус*.

На црт. 1 е претставена кружница со центар во точката O и радиус $\overline{OM} = r$; таа кружница ја означуваме со $k(O, r)$.



Црт. 1

Отсечката што сврзува кои било две точки на кружницата, ја викаме *тетива*, а секоја тетива што минува низ центарот, ја викаме *дијаметар*. На црт. 1. отсечката AB е тетива, а отсечката CD е дијаметар; секој дијаметар е двапати поголем од радиусот ($\overline{CD} = 2r$).

Нека $k(O, r)$ е една кружница. Множеството точки, чие растојание до центарот O на кружницата k не е поголемо од r, го викаме *круг* определен со кружницата k. Значи, точката M припаѓа на кругот определен со кружницата $k(O, r)$ ако и само ако $\overline{OM} \leqslant r$.

Задачи

1. Ако AB и CD се два дијаметра на една кружница, тогаш $\overline{AC} = \overline{BD}$ и $AC \parallel BD$. Докажи!

2. Да се докаже дека дијаметарот што е нормален на една тетива, ја располовува таа тетива.

3. Да се докаже дека дијаметрите на една кружница се најголеми тетиви.

4. Да се докаже дека правата што минува низ средината на една тетива и што е нормална на таа тетива (симетрала на тетивата), минува низ центарот.

5. Да се нацрта кружница што минува низ точките A и B и со радиус AB.

6. Да се нацрта кружница со најмал радиус што минува низ две различни точки.

7. Да се нацрта кружница со даден радиус и што минува низ дадена точка, а центарот да ѝ лежи на дадена права.

7.2. Точка и кружница

Лесно може да се установи дека кружницата, како геометриска форма, има (содржи) бесконечно многу точки. Навистина, ако нацртаме полуправа со почетна точка во центарот O, тогаш, според А. 9, на таа полуправа можеме да обележиме точно една точка A, чие растојание од O е еднакво со радиусот r на кружницата, т.е. $\overline{OA} = r$. Таа точка ѝ припаѓа на кружницата (црт. 2). Бидејќи постојат бесконечно многу полуправи со почеток во O, следува дека кружницата има бесконечно многу точки.

Растојанието d од која било точка M до центарот O на кружницата, го викаме *централно растојание* на таа точка.

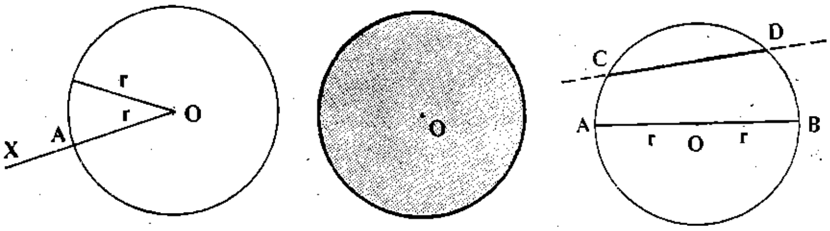
Нека $k(O, r)$ е една кружница и M некоја точка со централно растојание d. За точката M ќе велимт дека е

— *внатрешна точка* ако $d<r$;

— *надворешна точка* ако $d>r$.

Ако, пак, $d=r$, тогаш ќе велиме дека точката M *лежи на* кружницата.

Ако овој признак се примени на точките од рамнината, тогаш јасно е дека секоја кружница може да ја подели рамнината на два составни дела: *внатрешен* (на црт. 3 е претставен шрафирано) и *надворешен*.



Црт. 2 Црт. 3 Црт. 4

7. 3. Права и кружница

Секоја права што минува низ центарот O на кружницата $k(O, r)$ име две заеднички точки со кружницата, зашто на та права, почнувајќи од центарот O, може да се нанесе растојанието r во двете спротивни насоки.

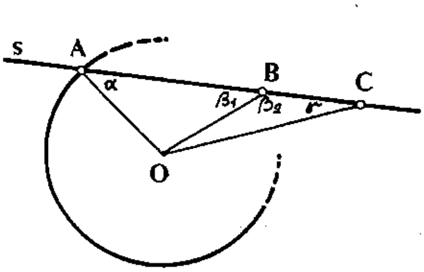
Исто така, секоја права, која содржи некоја тетива, има две заеднички точки со кружницата; тоа се крајните точки на тетивата (црт. 4).

Секоја права што има две заеднички точки со кружницата ја викаме *секанта*, односно велиме дека ја *сече кружницата*.

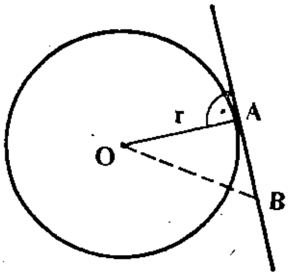
Теорма 1. *Една секанта не може да има повеќе од две заеднички точки со кружницата.*

Доказ. Да претпоставиме дека секантата a има три заеднички точки A, B, C со кружницата k (црт 5).

Отсечките OA, OB, OC имаат иста должина, т.е. $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=r$, па триаголниците OAB, OAC, OBC се рамнокраки триаголници. Поради тоа, за нивните агли ќе важи $\alpha=\beta_1$, $\alpha=\gamma$, $\beta_2=\gamma$, од каде следува дека $\beta_1=\beta_2$, а бидејќи овие се напоредни агли, следува дека се и прави агли, т.е. $\beta_1=\beta_2=90°$ и $\alpha=\gamma=90°$. Но, бидејќи еден триаголник не може да има два прави агла, следува дека секантата не може да има три заеднички точки со кружницата.



Црт. 5



Црт. 6

Правата што минува низ една точка A на кружницата $k\,(O,\ r)$ и е нормална на радиусот OA, ја викаме *тангента* на таа кружница.

Теорма 2. *Секоја тангента има точно една заедничка точка со кружницата.*

Доказ. На црт. 6 е нацртана кружницата k и нејзината тангента во точката A. Нека B е која било друга точка на тангентата. Должината на отсечката $\overline{OA}=r$ е растојание од O до тангентата, а $\overline{OB}$ е должина на некоја наведната отсечка на таа права. Според својството за наведените отсечки, $\overline{OB}>\overline{OA}$, т.е. $\overline{OB}>r$, следува дека секоја точка на тангентата, што е различна од A, е надворешна за кружницата. Следствено, A е единствена заедничка точка на тангентата и кружницата

За тангентата велиме уште и дека *ја допира* кружницата, а за точката A — дека е *допирна точка*.

Нека $k\,(O,\ r)$ е една кружница и p некоја права. Растојанието d од центарот O на кружницата до правата p, се вика *централно растојание* на таа права во однос на кружницата. Со следнава теорема се утврдува заемната положба на права и кружница.

Теорема 3. *Ако централното растојание d на една права во однос на некоја кружница $k\,(O,\ r)$ е такво, што,*

1° $d>r$, *тогаш правата нема заеднички точки со кружницата*;

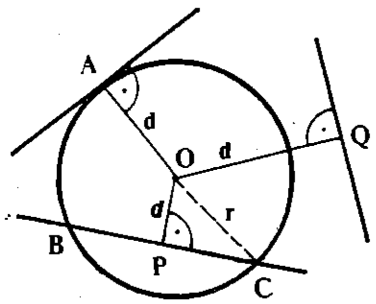
2° $d=r$, *тогаш правата е тангента*;

3° $d<r$, *тогаш правата е секанта.*

Доказ. 1° Поради $\overline{OQ}>r$ (црт. 7), очигледно е дека секоја точка на правата е надворешна за кружницата.

2° Ако $d=r$, тогаш подножјето на нормалната на правата, спуштена од центарот O лежи на кружницата, па, според дефиницијата на тангента, правата ја допира кружницата.

3° Нека $d<r$ и нека P е подножјето на нормалата на правата спуштена од центарот O; јасно е дека, поради $\overline{OP}<r$, точката P е внатрешна. На правата ги нанесуваме отсечките PB и PC, такви што $\overline{PB}=\overline{PC}=\sqrt{r^2-d^2}$. Растојанието од центарот O до точката B, односно C, може да се определи од правоаголниот триаголник OPB, односно OPC, со помош на Питагоровата теорема. Имено, $\overline{OB}^2=\overline{OP}^2+\overline{PB}^2=d^2+r^2-d^2$, т.е. $\overline{OB}=r$; на ист начин добиваме $\overline{OC}=r$. Значи, точките B и C од правата лежат и на кружницата, зашто $\overline{OB}=\overline{OC}=r$, од каде што следува дека правата е секанта. Од Т. 1 следува дека овие две точки се и единствени заеднички точки на кружницата и правата.



Црт. 7

Задачи

1. Конструирај тангента на кружницата k во една нејзина точка.

2. Покажи дека тангентите што ја допираат една кружница во крајните точки на еден нејзин дијаметар, меѓусебно се паралелни.

3. Покажи дека никои три точки на кружницата не се колинеарни.

4. Една тетива со должина 16 cm е оддалечена од центарот на кружницата за 15 cm. Да се определи радиусот на кружницата.

5. На некој цртеж е претставена некоја кружница, но не е обележен нејзиниот центар. Како може да се конструира центарот?

6. Да се конструира кружница со даден радиус што ги допира краците на еден агол.

7. Растојанието од точката A до центарот O на кружницата k е 20 cm а радиусот изнесува 5 cm. Правата што минува низ A ја допира кружницата во точката B. Да се најде $\overline{AB}$.

8. Да се конструира тангента на кружницата што е: а) паралелна со дадена тетива, б) нормална на дадена права, в) паралелна со дадена права што не ја сече кружницата.

7. 4. Две кружници

Нека $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ се две кружници; должината на отсечката O_1O_2, т.е. $\overline{O_1O_2}=d$, ја викаме *централно растојание* на кружниците k_1 и k_2.

Заемната положба на две кружници може да се согледа од следнава теорема.

Теорема 4. *Ако централното растојание d на две кружници $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$, $r_1 < r_2$, е такво што:*

1° $d > r_1 + r_2$ *или* $d < r_2 - r_1$, *тогаш кружниците не се сечат, т.е. немаат заеднички точки:*

2° $d = r_1 + r_2$ *или* $d = r_2 - r_1$, *тогаш имаат само една заедничка точка во која имаат заедничка тангента (во тој случај велиме дека кружниците се допираат);*

3° $r_2 - r_1 < d < r_1 + r_2$, *тогаш кружниците се сечат точно во две точки.*

Доказ. 1° Да претпоставиме дека k_1 и k_2 имаат заедничка точка T. Ако T не е колинеарна со центрите O_1 и O_2, тогаш според својството на триаголникот од разделот **3.5** имаме $\overline{O_1O_2} < \overline{O_1T} + \overline{O_2T}$, т.е. $d < r_1 + r_2$, што противречи на условот $d > r_1 + r_2$.

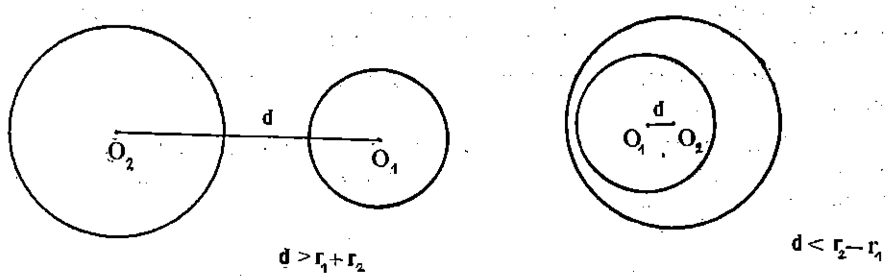
Нека заедничката точка T е колинеарна со O_1 и O_2. Тогаш

— или точката T ќе биде меѓу O_1 и O_2, кога $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1T} + \overline{TO_2}$, т.е. $d = r_1 + r_2$;

— или O_2 ќе биде меѓу O_1 и T, па $\overline{O_1T} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2T}$, т.е. $r_1 = d + r_2$, што противречи, на условот $r_1 < r_2$;

— или O_1 ќе биде меѓу O_2 и T, па $\overline{O_2T} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1T}$, односно $r_2 = d + r_1$, од каде $d = r_2 - r_1$, што противречи, пак, на условот $d < r_2 - r_1$.

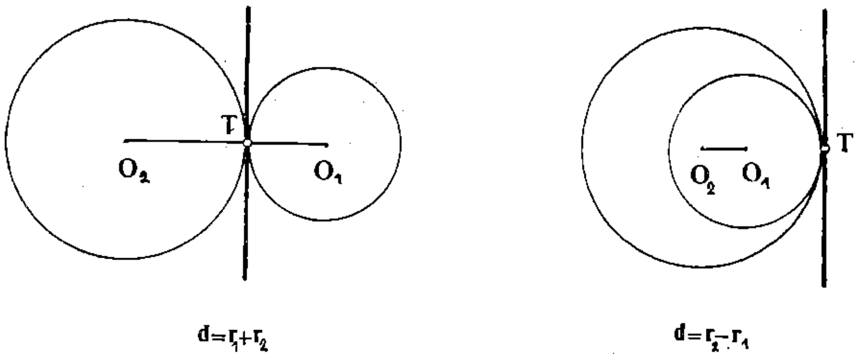
Значи, во овој случај, кружниците немаат заеднички точки; нивната заемна положба е прикажана на црт. 8.



Црт. 8

2° Ако ја погледаме дискусијата за можната положба на заедничка точка на k_1 и k_2 што ја изведовме во 1°, ќе забележиме дека условите $d = r_1 + r_2$, односно $d = r_2 - r_1$ се исполнети единствено кога заедничката точка T е меѓу O_1 и O_2, односно кога O_1 е меѓу O_2 и T (црт. 9). Во овој случај тангентата на k_1 во точката T ќе биде тангента и на k_2 во истата точка T; навистина, од тоа што тангентата е нормална на O_1T, таа ќе биде нормална и на O_2T (зошто?), па, значи, е тангента и на k_2.

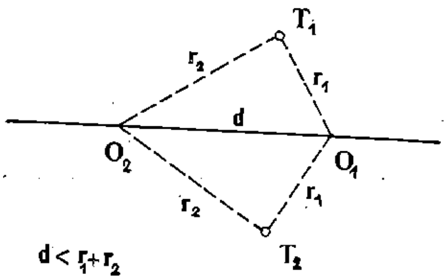
3° Од условот $r_2 - r_1 < d < r_1 + r_2$, $r_1 < r_2$ следуваат неравенствата $d < r_1 + r_2$, $r_2 < d + r_1$, $r_1 < r_2 + d$, што значи дека може да се конструира триаголник со страни d, r_1, r_2 (види раздел **3.5**). Две темиња на овој триаголник веќе се познати — центрите O_1 и O_2, додека тре-



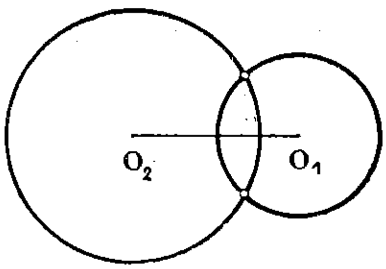
Црт. 9

тото теме може да се определи и во едната и во другата полурамнина, чиј раб е правата O_1O_2, (црт. 10). Значи, постојат две точки T_1 и T_2, такви што $\overline{O_2T_1} = r_2$ и $\overline{O_1T_1} = r_1$, односно $\overline{O_2T_2} = r_2$ и $\overline{O_1T_2} = r_1$.

Од тоа следува дека и T_1 и T_2 се заеднички точки на кружниците k_1 и k_2 (црт. 11).



Црт. 10



Црт. 11

Да покажеме дека k_1 и k_2 немаат други заеднички точки. Да претпоставиме дека и точката M е заедничка точка на тие кружници и нека лежи со T_1 во иста полурамнина, чиј раб е правата O_1O_2. Поради $\overline{O_1M} = \overline{O_1T_1} = r_1$ и $\overline{O_2M} = \overline{O_2T_1} = r_2$, триаголниците O_1O_2M и $O_1O_2T_1$ ќе бидат складни (според признакот CCC), па, значи, аглите O_2O_1M и $O_2O_1T_1$ се еднакви. Од тоа заклучуваме дека полуправите O_1M и O_1T_1 се совпаѓаат. Поради колинарноста на точките O_1, M, T_1 и $\overline{O_1M} = \overline{O_1T_1}$, имаме $M \equiv T_1$, т.е. точките M и T_1, се совпаѓаат. На сличен начин се покажува дека и во другата полурамнина не постои заедничка точка на k_1 и k_2 различна од точката T_2.

Задачи

1. Нека A и B се две различни точки. Да се определи таква точка M што $\overline{AM}=a$ и $\overline{BM}=b$. Дали секогаш постои барем една точка M?

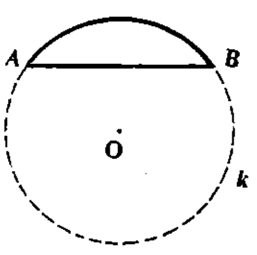
2. Да се докаже: ако две кружници се допираат, тогаш нивните центри се колинеарни со нивната допирна точка.

3. Три кружници со центри во точките A, B, C се допираат две по две, т.е. секоја кружница ги допира другите две, и притоа $\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=18$, $\overline{AC}=14$. Да се определат радиусите на овие кружници.

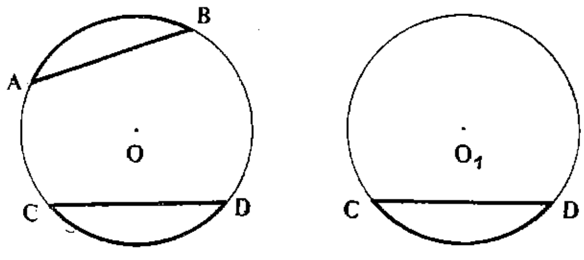
7.5. Лак. Полукружница

Две разнични точки A и B од кружницата k, ја разбиваат k на два дела (црт. 12), кои се викаат *лаци на кружницата* k (или кружни лаци) што одговараат на тетивата AB. Точките A и B ги викаме *крајни точки* на тие лаци.

Ако тетивата AB минува низ центарот O, т.е. ако A, B се крајни точки од еден дијаметар, тогаш добиените лаци ги сметаме за меѓусебно еднакви и ги викаме *полукружници*.



Црт. 12



Црт. 13

Да ја нацртаме правата на која лежи тетивата AB. Едната од полурамнините, што се определени со таа права, го содржи центарот O на кружницата (црт. 12). За лакот што лежи во таа полурамнина велиме дека е *поголем* од полукружницата и го означуваме со $\widehat{A\pi B}$. Другиот лак го означуваме со $\widehat{AB}$ и сметаме дека е помал од полукружницата.

На еден лак $\widehat{AB}$ или $\widehat{A\pi B}$ може да му се придружи тетивата AB. Ако на два лака $\widehat{AB}$ и $\widehat{CD}$ од истата кружница или од две кружници со еднакви радиуси им припаѓаат еднакви тетиви, т.е. $\overline{AB}=\overline{CD}$, тогаш за лаците ќе речеме дека се еднакви и ќе пишуваме $\widehat{AB}=\widehat{CD}$ (црт. 13).

7.6. Централни и периферискi агли.

Еден агол, чиешто теме се наоѓа во центарот на некоја кружница, го викаме *централен агол* за таа кружница. На секој централен агол се придружува соодветен лак од кружницата.

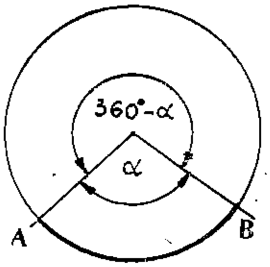
Централните агли се мерат во степени и тоа така, што (црт. 14)

— ако на централниот агол му одговара лакот $\widehat{AB}$ (помалиот од полукружницата), тогаш како мера за централниот агол се зема мерата α во степени на аголот AOB (што го образуваат полуправите OA и OB);

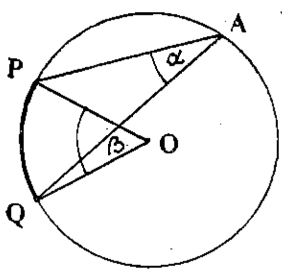
— ако на централниот агол му одговара лак, еднаков на полукружница, т.е. тетивата AB е дијаметар, тогаш сметаме дека мерата на тој агол е $180°$; и

— ако на централниот агол му одговара лакот $\widehat{A\pi B}$ (поголемиот од полукружница), тогаш за мерата на овој агол во степени земаме $360°-\alpha$, каде што α е мерата на централниот агол што му одговара на лакот $\widehat{AB}$.

Според тоа, не е тешко да се согледа дека: на два еднакви лаци им одговараат еднакви централи агли и, обратно, на секои еднакви агли во иста кружница (или во кружница се еднакви радиуси) одговараат еднакви лаци.



Црт. 14



Црт. 15

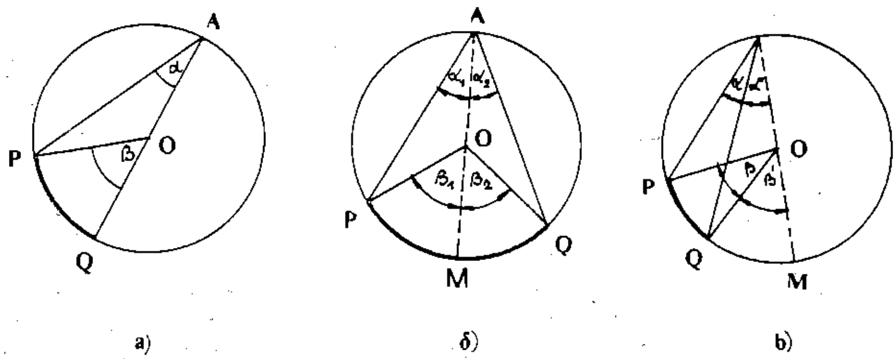
Исто така, поимот за централен агол ни овозможува да согледаме едн својство на лаците од кружницата. Имено, ако точкта C му припаѓа на лакот $\widehat{AB}$, тогаш е точно равенството $\widehat{AB}=\widehat{AC}+\widehat{CB}$.

Еден агол α чиешто теме е некоја точка A од кружницата k, а краците ја сечат кружницата во точките P и Q (различни од A), го викаме *периферски агол* во кружницата k *над лакот* $\widehat{PQ}$ (црт 15).

На кој било периферисни агол може да му се придружи еден централен агол што е над истиот лак (црт. 15).

Теорема 5. *Секој периферисни агол во една кружница е еднаков со половината од соодветниот централен агол.*

Доказ. На црт. 16 се претставени сите три можни положби на овие агли, т.е. а) центарот O на кружницата е точка од кракот на перифериските агол, б) центарот е внатрешна точка, односно в) надворешна точка за перифериските агол.



Црт. 16

а) Аголот POQ е надворешен агол за рамнокракиот триаголник OAP ($\overline{OA} = \overline{OP}$ — радиуси на кружницата), па $\beta = 2\alpha$.

б) Според случајот а) имаме $\beta_1 = 2\alpha_1$ и $\beta_2 = 2\alpha_2$, а според $\widehat{PQ} = \widehat{PM} + \widehat{MQ}$, имаме $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$.

в) Според случајот а) имаме $\beta + \beta' = 2(\alpha + \alpha')$, $\beta' = 2\alpha'$ од каде што поради $\widehat{PM} = \widehat{PQ} + \widehat{QM}$, односно $\widehat{PQ} = \widehat{PM} - \widehat{QM}$, добиваме $\beta = 2\alpha$.

Од оваа теорема непосредно следува дека:

— *сите периферисни агли во една кружница што се над ист лак, меѓусебно се еднакви;*

— *секој периферисни агол над полукружница е прав агол (Талесова теорема).*

Задачи

1. Да се нацрта кружница со даден радиус што допира две дадени кружници.

2. Ако AB и CD се два дијаметра на една кружница, тогаш:

а) $\widehat{AD} = \widehat{BC}$;

б) четириаголникот $ABCD$ е правоагалник.

3. Дадени се две тетиви AB и CD и притоа $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. Да се докаже дека $AB \parallel CD$.

4. Да се докаже дека аголот меѓу некоја тетива и тангента во една крајна точка од тетивата е еднакоз на половината од централниот агол што одговара на тетивата.

5. Нека A е надворешна точка за кржжницата $k(O, r)$. Покажи дека постојат две тангенти на кружницата што минуваат низ A. Ако P и T се допирните точки на овие тангенти, да се докаже дека $\overline{AP}=\overline{AT}$ и дека правата OA е симетрала на аголот PAT.

6. Нека B е внатрешна точка за кружницата. Да се докаже дека не постои тангента на кружницата што минува низ точката B.

7. Да се конструира кружница што минува низ дадена точка и што допира дадена права во дадена точка.

8. Да се најде местото на темето C на триаголникот ABC ако се знае страната AB и $\sphericalangle C$.

9. Да се конструира триаголник ако се дадени a, h_a, α.

10. Еден четириаголник го наречуваме *тетивен*, ако неговите темиња лежат на некоја кружница. Покажи дека спротивните агли во секој тетивен четириаголник се суплементни!

11. Еден четириаголник го наречуваме *тангентен*, ако постои кружница што ги допира сите негови страни. Покажи дека збировите од должините на спротивните страни на секој тангентен четириаголник се еднакви!

*§ 8. Геометриски конструкции

8.1. Што е тоа „конструктивна задача"

Конструктивна задача, всушност, претставува барање да се нацрта некоја геометриска фигура со помош на дадени инструменти за цртање. Старогрчките геометри сметале дека „вистински геометриски конструкции" се оние, што можат да се изведат *само со ленир и шестар*.

Во школите отсекогаш се посветувало посебно внимание на такви конструкции, што се изводливи само со ленир и шестар; во оваа книга ќе срекаваме само такви конструкции.

Решавањето на една конструктивна задача се состои не само во цртежот, во конструкцијата на фигурата, туку, најчесто, во одговорот на прашањето к а к о да се изведе таа консрукција и во доказот дека таа е м о ж н а.

Инаку, под *решение* на една конструктивна задача ќе подразбираме секоја фигура што ги задоволува условите на задачата.

8.2. Како се решава една конструктивна задача

Посебно важен момент во теоријата на геометриските конструкции се можностите на инструментите со кои тие се изведуваат.

Обично, за ленирот и шестарот, следниве конструкции се земаат како *основни* и тие ни укажуваат на можностите на овие инструменти:

1° конструкција на отсечка ако се зададени нејзините крајни точки,

2° конструкција на права што минува низ две зададени точки,

3° конструкција на кружница, ако се зададени центарот и радиусот,

4° конструкција на пресечна точка: на две прави, на права и кружница, на две кружници (ако таква точка постои).

Сега можеме да речеме дека самиот процес на решавање на конструктивна задача се состои во тоа, задачата да се сведе на една конечна низа основни конструкции, по чие извршување ќе можеме да сметаме дека бараната фигура е конструирана.

Пример 1. Да се конструира средината на отсечката што е зададена со своите крајни точки A и B.

Решение. Бараната точка ќе ја добиеме по овие основни конструкции (изведувај ги сам):

— цртаме права низ точките A и B;

— цртаме кружница $k_1(A, \overline{AB})$;

— цртаме кружница $k_2(B, \overline{BA})$;

— со M и N ги означуваме пресечните точки на кружницата k_1 и k_2;

— цртаме права низ точките M и N.

Бараната точка е $O = AB \cap MN$.

8.3. Колку решенија има една конструктивна задача

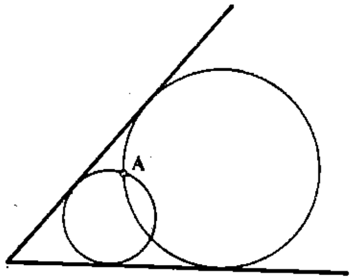
Во § 3.3, кога ги разгледувавме основните конструкции на триаголникот, рековме дека: две еднакви отсечки, два еднакви агли или два складни триаголници не ќе ги сметаме за различни решенија на задачата. Во таа смисла постапуваме и при која било геометриска конструкција.

Обично во конструктивните задачи се бара конструкција на:

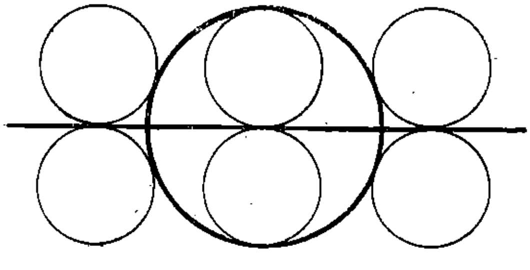
— *точка*; на пример, конструкција на точка што е еднакво оддалечена од три заеднички точки (едно решение),

— *права или кружница*; на пример, конструкција на тангенти, паралелни со дадена права (2 решенија), конструкција на кружница што минува низ зададена точка и ги допира краците на зададен агол (црт. 1, две решенија).

Но, може да се бара да се најдат различни положби на некоја фигура; така, на пример, ако треба да се нацрта кружница со зададен радиус r што ја допира зададената кружница со радиус $R=2r$ и права a што минува низ нејзиниот центар (црт. 2, шест решенија).



Црт. 1



Црт. 2

Една конструктивна задача, во некои случаи, може и да нема решенија. На пример, ако не постои фигура која ги има својствата што се бараат со задачата (не може да се конструира кружница што ќе ги допира сите страни на правоаголникот, ако тој не е квадрат).

8.4. Елементарни конструктивни задачи

Овде ќе дадеме еден список од попрости конструкции кои се срекаваат и се користат во решавањето на повеќе конструктивни задачи. Сметаме дека секој ученик треба да знае да ги направи тие конструкции. Некои од нив само ќе ги спомнеме, некои ќе ги скицираме, а некои ќе ги изведеме.

1° Преполовување на зададена отсечка, т.е. конструкција на средна точка.

2° Преполовување на зададен агол, т.е. конструкција на симетрала на тој агол.

3° Нанесување дадена отсека на полуправа.

4° Конструкција на агол еднаков со зададен агол, т.е. нанесување агол од дадена полуправа.

5° Конструкција на права низ зададена точка P што е паралелна со зададена права (црт. 3). Цртаме по ред:

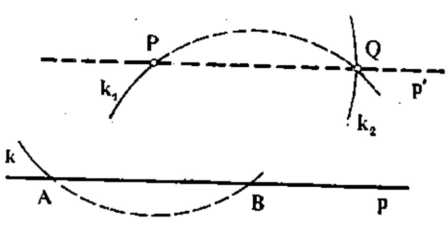
$k(P, r)$, r погодно избран;

$A=k\cap p$, $B=k\cap p$;

$k_1(B, \overline{BP})$, $k_2(P, \overline{AB})$;

$Q=k_1\cap k_2$;

$PQ\,||\,p$.

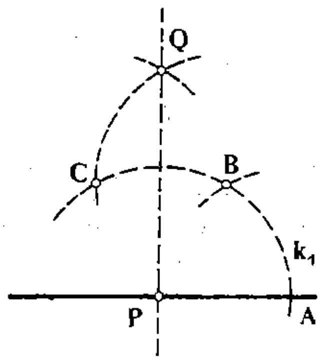


Црт. 3

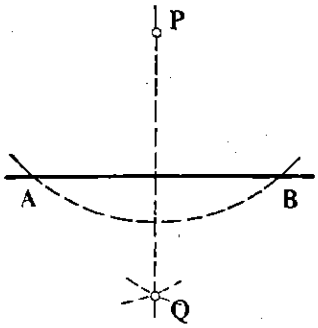
6° Конструкција на права низ зададена точка P што е нормална на зададена права (црт. 4 и 5). Цртаме, по ред:

а) $k_1(P, r)$, $k_1 \cap p = A$;
$k_2(A, r)$, $k_2 \cap k_1 = B$;
$k_3(B, r)$, $k_3 \cap k_2 = C$;
$k_4(C, r)$, $k_4 \cap k_3 = Q$;
$PQ \perp p$;

б) $k(P, r)$, $k \cap p = A$ и B;
$k_1(A, r)$, $k_2(B, r)$;
$k_1 \cap k_2 = Q$;
$PQ \perp p$;



Црт. 4



Црт. 5

7° Конструкција на збирот и разликата на две отсечки.

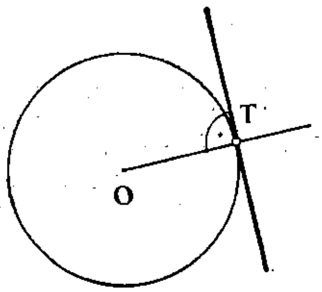
8° Делење на отсечка во даден однос.

9° Конструкција на триаголник ако се зададени а) три страни, б) страна и два агла, в) две страни и зафатен агол.

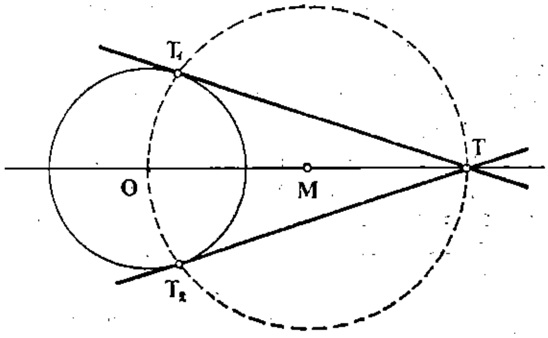
10° Конструкција на тангента на зададена кружница k што минува низ зададена точка T (црт. 6 и 7):

а) Ако T е точка од кружницата, тогаш се конструира нормала во T на правата OT (види 6°);

б) Ако T е надворешна точка за кружницата k, тогаш на кружницата k треба да се определи таква точка T_1, што $\sphericalangle TT_1O$ да е прав агол; според Талесовата теорема, точката T_1 ќе лежи на кружницата k_1 за која отсечката OT е дијаметар. Сега конструкцијата ќе оди по овој редослед: се конструира средината M на отсечката OT; кружницата $k_1(M, \overline{OM})$; пресечните точки T_1 и T_2 на k_1 и k; правите TT_1 и TT_2 се бараните тангенти.



Црт. 6



Црт. 7

11° Конструкција на правоаголен триаголник ако се зададени хипотенузата и едната катета.

12° Конструкција на тангента на зададена кружница што е паралелна со зададена права.

13° Конструкција на четврта геометриска пропорционала $\left(x = \frac{ab}{c}\right)$.

14° Конструкција на средна геометриска пропорционала $(x = \sqrt{ab})$.

15° Конструкција на отсечката $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

8.5. Решавање на конструктивна задача

При решавањето на една конструктивна задача најпрво треба да се согледаат случаите со кои се исцрпуваат сите можни избори на зададените елементи од задачата, т.е. да се согледаат сите можни фигури (ситуации) што ги овозможуваат тие елементи. Потоа, за секој од овие случаи, по можност, да се согледа дали задачата има решение.

На пример, елементите на задачата: „да се конструира тангента на зададена кружница што минува низ зададена тнчка", дозволуваат три случаи (ситуации):

— точката лежи на кружницата; задачата има едно решение;

— точката е надворешна за кружницата; задачата има две решенија; и

— точката е внатрешна за кружницата; задачата нема решение.

Инаку, се препорачува процесот на решавањето на една конструктивна задача да ги има овие етапи: *анализа, конструкција, доказ* и *дискусија*.

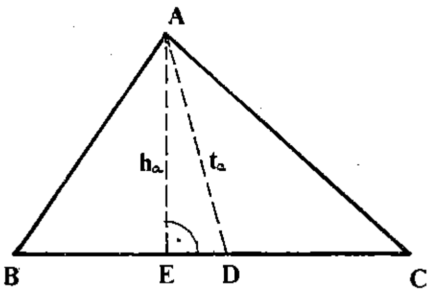
Анализа. Анализата на задачата е подготвителна етапа, но, исто така, и најважна, бидејќи ја подготвува конструкцијата, односно, го дава клучот на решението.

Анализата има за цел да се согледаат можните зависности (врски) меѓу бараната фигура и дадените елементи. Тоа се постигнува со помош на скициран цртеж (со слободна рака), на кој се претставени и зададената фигура и бараната фигура во таква положба, како што ја дозволуваат условите на задачата.

Обично, анализата почнува со правење на цртежот и тоа, речиси секогаш со зборовите: „Да претпоставиме дека задачата е решена". Потоа, внимателно го посматраме цртежот на бараната фигура, стремејќи се да ги изнајдеме зависностите меѓу дадените елементи и фигурата, што би овозможиле задачата да се сведе на попроста, веќе позната задача.

Пример 2. Да се конструира триаголник со зададени a, t_a, h_a.

Нека задачата е решена и нека $\triangle ABC$ (црт. 8) е бараниот триаголник. Да го разгледаме цртежот, на кој се нацртани t_a и h_a. Лесно се уочува дека правоаголниот триаголник AED може да се конструира, зашто се познати хипотенузата t_a и катетата h_a. Значи, од зададените t_a и h_a може да се конструира *помошна слика*, т.е. $\triangle AED$,а потоа и триаголникот ABC (треба само на правата ED, од точката D, да се нанесе во двете насоки растојанието $\frac{a}{2}$ и ќе се добијат темињата B и C).



Црт. 8

Конструкција. По извршената анализа се согледуваат кои основни конструкции (или некои веќе познати) треба да се направат и се пристапува кон нивното реализирање.

Доказ. Со доказот сакаме да потврдиме дека конструираната фигура навистина ги задоволува сите услови на задачата.

Дискусија. Обично, уште во анализата се определуваме кој метод ќе го употребиме при конструкцијата на бараната фигура. При таа конструкција најчесто се ограничуваме да бараме едно решение. За целосно решавање на задачата секогаш треба да се продискутираат следниве прашања:

— дали при различен избор на дадените елементи, т.е. дали секогаш, може да се изведе конструкцијата,

— колку решенија има задачата при секој можен избор на зададените елементи?

Дискусијата има за цел да ги изнајде условите при кои задачата е решлива, како и да го одреди бројот на решенијата. Обично, дискусијата се спроведува така, што конструкцијата се проследува чекор по чекор и секој чекор посебно се разгледува: дали е можен, на колку начини може да се изведе, итн.

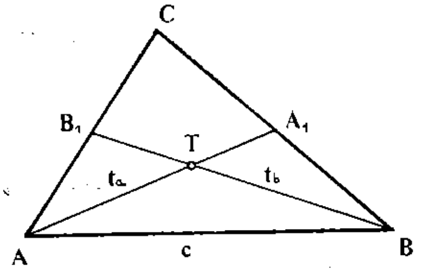
Со наредниов пример ќе ги илустрираме спомнатите етапи на решавање на конструктивна задача. При тоа ќе ги наведеме сите нужни подробности на процесот на решавањето.

Пример 3. Да се конструира триаголник од зададените елементи: една страна и тежишните линии на другите две страни, т.е. c, t_a, t_b.

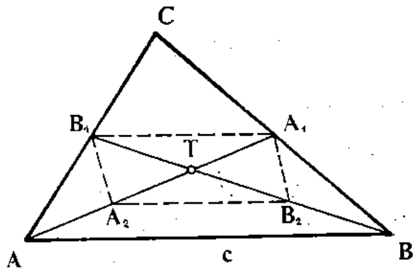
Решение. Анализа. Нека задачата е решена (црт. 9) и притоа $\overline{AB}=c$, $\overline{AA_1}=t_a$, $\overline{BB_1}=t_b$, т.е. A_1 и B_1 се средини на страните BC, односно на AC. Тежишните линии AA_1 и BB_1 се сечат во тежиштето T; понатаму, во книгава ќе биде докажано следново својство на тежиштето:

$$\overline{AT}=\frac{2}{3}\overline{AA_1}, \quad \overline{BT}=\frac{2}{3}\overline{BB_1}.$$

Триаголникот ABC ќе биде конструиран ако се определат неговите темиња. Бидејќи е зададена страната c, лесно може да се конструираат двете темиња A и B, ако се конструира отсечката $c=\overline{AB}$. Останува уште темето C.



Црт. 9



Црт. 10

Разгледувајќи го црт. 9, можеме да согледаме дека:

— C е пресек на полуправите AB_1 и BA_1;

— A_1 и B_1 лежат на полуправите AT и BT и притоа $\overline{AA_1}=t_a$, $\overline{BB_1}=t_b$. Значи, треба да се конструира точката T;

— точката T може да се определи како теме на триаголникот ABT со страни $\overline{AB}=c$, $\overline{AT}=\frac{2}{3}t_a$, $\overline{BT}=\frac{2}{3}t_b$.

Конструкција. Значи,

— конструираме $\triangle ABT$ со страни $\overline{AB}=c$, $\overline{AT}=\frac{2}{3}t_a$, $\overline{BT}=\frac{2}{3}t_b$;

— ги цртаме полуправите AT и BT и ги определуваме точките A_1 и B_1, со $\overline{AA_1}=t_a$, $\overline{BB_1}=t_b$;

— ги цртаме полуправите AB_1 и BA_1,

— полуправите AB_1 и BA_1 се сечат во C и го определуваат третото теме на бараниот триаголник.

Доказ. Да го разгледаме црт. 10, каде што точките A_2 и B_2 се средини на AT, односно BT, т.е. $\overline{A_2T}=\frac{1}{3}t_a$; $\overline{B_2T}=\frac{1}{3}t_b$.

Четириаголникот $A_1B_1A_2B_2$ е паралелограм, бидејќи неговите дијагонали се преполовуваат со пресечната точка T. Од тоа следува

$$\overline{A_2B_2}=\overline{A_1B_1},\ \overline{A_2B_2} \parallel \overline{A_1B_1}. \tag{1}$$

Отсечкта A_2B_2 ги поврзува средините на две страни на $\triangle ABT$, па. спред едно својство (ќе биде покажано подоцна под име *средна линија* на триаголникот: IV, **4.3.**), имаме

$$\overline{A_2B_2}=\frac{1}{2}\overline{AB},\ A_2B_2 \parallel AB. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува

$$\overline{A_1B_1}=\frac{1}{2}\overline{AB},\ \overline{A_1B_1} \parallel \overline{AB}.$$

од каде што (пак според својството на средна линија) следува дека точките A_1 и B_1 се средини на страните BC и AC на $\triangle ABC$, односно следува дека отсечките $\overline{AA_1}=t_a$ $\overline{BB_1}=t_a$ се навистина зададените тежишни линии.

Дискусија. Триаголникот ABT со страни c, $\frac{2}{3}t_b$, $\frac{2}{3}t_b$ може да се конструира ако и само ако (раздел **3.5**) $c<\frac{2}{3}(t_b+t_b)$ и $c>\frac{2}{3}|t_a-t_b|$, додека другите конструкции секогаш се изводливи.

Значи, задачата ќе има единствено решение, ако зададените отсечки c, t_a, t_b, го задоволуваат условот.

$$\frac{2}{3}|t_a-t_b|<c<\frac{2}{3}(t_a+t_b).$$

8.6. Геометриско место на точки

Една геометриска фигура се дефинира како множество точки; секое множество точки можеме да го наречеме и *геометриско место на точки*. Значи, определување на едно геометриско место на точки (геометриска фигура), всушност, е една задача за образување на множество точки според некој признак.

Пример 4. Да се најде геометриско место на точки од кои една зададена отсечка „се гледа" под даден агол.

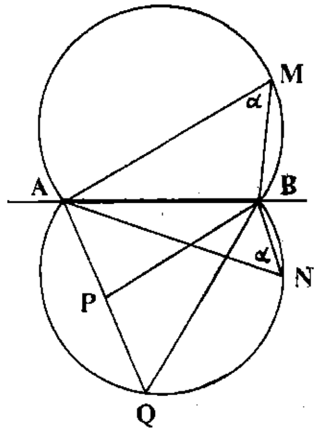
Решение. Анализа. Нацртај една кружница и една нејзина тетива. Потоа, земи еден периферииски агол, чии краци минуваат низ крајните точки на тетивата; нека тој агол има $\alpha°$. Ако темето на таков агол се наоѓа во некоја друга точка од кружницата, тој пак ќе има $\alpha°$ (зошто?).

Нека зададената отсечка AB и аголот α се нацртани така, што $\measuredangle AMB=\alpha$ (црт. 11). Според теоремата за периферииските агли во кружницата, секоја точка, различна од A и од B, на лакот $\overset{\frown}{AMB}$ на кружницата што минува низ точките A, M и B, може да е теме на периферииски агол со $\alpha°$.

Исто така, ако се конструира аголот α и во другата полурамнина определена со правата AB, како на црт. 11, $\alpha = \sphericalangle ANB$, тогаш отсечката AB ќе се гледа под агол α и од секоја точка, различна од A и B, на лакот $\overset{\frown}{ANB}$ на кружницата што минува низ точките A, N, B.

Доказ. Од анализата се гледа дека секоја точка од лаците $\overset{\frown}{AMB}$ и $\overset{\frown}{ANB}$ (различна од A и B) припаѓа на бараното геометриско место. Ќе покажеме дека од секоја друга точка, отсечката AB се гледа под агол различен од α. Нека P е една внатрешна точка (црт. 11); да ја определиме точката Q како пресек на AP и лакот. Аголот APB е надворешен за $\triangle PQB$, па според тоа, $\sphericalangle APB > \sphericalangle AQB = \alpha$. На ист начин се покажува дека $\sphericalangle APB < \alpha$ и во случајот кога P е надворешна точка.

Значи, геометриското место на точки од кои зададената отсечка AB се гледа под даден агол α, е фигурата образувана од два лака на кружниците што минуваат низ точките A и B и се симетрично расположени во двете полурамнини, образувани од правата AB; точките A и B не му припаѓаат на тоа геометриско место.



Црт. 11

Задачи

1. Да се определи геометриското место на центрите на кружниците што минаваат низ две дадени точки.

2. Да се определи геометриското место на центрите на кружниците со даден радиус што ја допираат дадената кружница.

3. Да се покаже дека геометриското место на точките што се еднакво оддалечени од краците на некој агол, е симетрала на тој агол.

8.7. Метод на геометриски места

Суштината на овој метод за решавање на конструктивни задачи е во следново: ако бараното решение е точка и ако е подложено на два или повеќе услови, тогаш ги бараме геометриските места на точки за секој услов посебно. Бидејќи секое од геометриските места ќе бидат претставени со фигура, заедничките точки на овие фигури (ако постојат) ќе бидат решенија на задачата.

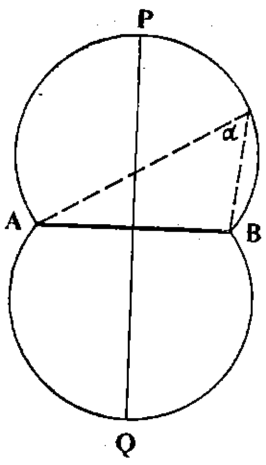
Пример 5. Да се определат точките што се еднакво оддалечени од точките A и B и од кои отсечката AB се гледа под даден агол α.

Решение. Ќе формираме две геометриски места:

1° Точките што се еднакво оддалечени од A и B лежат на права што е нормална на правата AB и што минува низ средината на отсечката AB. Тоа ќе го земеме (засега) без доказ (впрочем, вие веќе знаете дека станува збор за симетралата на отсечката AB).

2°. Точките од кои отсечката AB се гледа под агол α; таа конструкција ја изведовме во претходниот раздел.

На црт. 12 се нацртани и двете геометриски места; решенија на задачата се точките P и Q.



Црт 12

Задачи

1. Да се конструира триаголник ABC ако е дадено:

а) a, h_a, b;

б) a, h_a, t_b;

в) a, h_a, α.

2. Да се конструира кружницата што минува низ точката P и што ги допира паралелните прави a и b.

3. Да се конструира кружница со даден радиус што ги допира дадената кружница и дадената права.

4. Да се определи внатрешна точка на еден триаголник од која неговите страни се гледаат под еднакви агли.

5. Да се конструира точка што е еднакво оддалечена од две дадени прави и е на дадено растојание од дадена точка.

6. Даден е триаголникот ABC. Да се конструираат сите точки што се еднакво оддалечени од правите AB, BC, AC.

7. Дадена е отсечката AB и правата a. Да се најдат точките од правата a од кои дадената отсечка се гледа под даден агол α.

Глава IV

ВЕКТОРИ

§1. Поим за *вектор*

1.1. Дефиниција на вектор

На црт. 1 е претставена отсечка со крајни точки A и B. Точките A и B, обично, ги сметаме за рамноправни, па и при означувањето на отсечката не водиме сметка која од нив ќе ја ставиме на прво место, т.е. ознаките AB и BA ни претставуваат исто множество — множеството точки на отсечката.

Црт. 1

Црт. 2

Црт. 3

Меѓутоа, се покажало дека е згодно и многу корисно да се разгледуваат и *насочени отсечки*, т.е. такви отсечки при кои едната крајна точка се смета за *почеток*, а другата крајна точка за *крај* на отсечката. Насочените отсечки, поради својата важност, добиле посебно име — *вектори* и ние, натаму, така ќе ги викаме.

На цртежите векторите се означуваат како отсечки со стрелка, којашто ја покажува „насоката" на векторот од почетокот кон крајот, како на црт. 2. Ако почетокот на векторот е точката A, а крајот е точката B, тогаш стрелка се става на крајот, кај точката B (како на црт. 3) и тој вектор се означува со $\overrightarrow{AB}$. Понекогаш векторите се означуваат само со една мала „масна" буква од латиницата, на пример: **a**, **b**, **c**, итн., но, бидејќи во тетратките и на таблата е тешко да се пишуваат такви букви, таму ќе пишуваме $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, итн.

На секој вектор $\overrightarrow{AB}$ можеме да му го припишеме бројот што ја претставува должината на отсечката AB и природно е тој број да го наречеме *должина* на векторот $\overrightarrow{AB}$. Должината на векторот $\overrightarrow{AB}$ ќе ја означуваме со $|\overrightarrow{AB}|$ или со $\overline{AB}$, а ако векторот е означен со една буква, на пример со **a**, тогаш за неговата должина ќе ја употребуваме ознаката $|\mathbf{a}|$ или, просто a.

Задачи

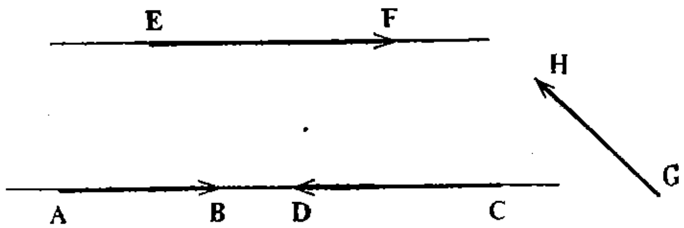
1. Нацртај неколку вектори со еднаква должина.

2. Избери четири различни точки A, B, C, D. Колку вектори можат да се формираат со почеток во една, а крајот во друга од дадените точки? Колку отсечки може да се формираат од дадените точки?

3. Каква врска постои меѓу должините на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$?

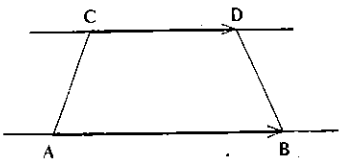
1.2. Колинеарни вектори

Бидејќи со две различни точки е определена една (и само една) права, можеме да сметаме дека секој вектор $\overrightarrow{AB}$ определува една права AB, т.е. дека векторот $\overrightarrow{AB}$ лежи на правата AB. Ако два вектора лежат на иста права или, пак, на две различни паралелни прави, тогаш за нив ќе велиме дека имаат *ист правец* или дека се *колинеарни*. Ако два вектора не се колинеарни, тогаш нив ќе ги викаме и *неколинеарни* вектори. На црт. 4, каде што се претстанени две паралелни прави, векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ се мѓусебно колинеарни, додека векторот $\overrightarrow{GH}$ не е колинеарен со ниеден од нив.

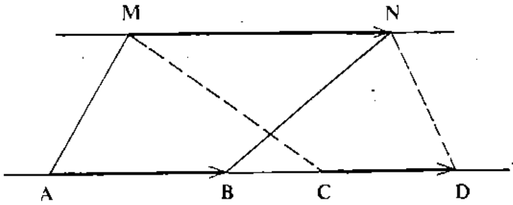


Црт. 4

При колинеарните вектори има смисла да се зборува за „иста“, односно „спротивна“ насока. Имено, за два вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, кои лежат на две различни паралелни прави, ќе велиме дека се *исто насочени* или дека имаат *иста насока* ако отсечката AC нема заедничка точка со отсечката BD (црт. 5). Ако, пак, векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежет на иста права, така што постои вектор $\overrightarrow{MN}$, колинеарен со нив, кој има иста насока како $\overrightarrow{AB}$ и како $\overrightarrow{CD}$, тогаш и за векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ ќе велиме дека се *исто насочени* или дека имаат иста насока (црт. 6).



Црт. 5



Црт. 6

Ако два колинеарни вектори немаат иста насока, тогаш за нив ќе велиме дека се *спротивно насочени* или дека имаат *спротивни насоки.*

На црт. 4, векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се спротивно насочени, а, исто така, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ имаат спротивн насоки. Специјално, векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ (за кои било две различни точки A и B) имаат спротивни насоки, а исти должини.

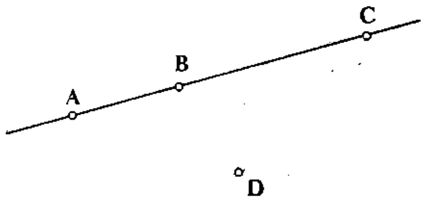
Два вектора што имаат спротивни насоки, а иста должина, се викаат меѓусебно спротивни или., кратко, *спротивни вектори.*

(Во случај на неколинеарни вектори, се разбира, нема смисла да се зборува за „иста“ или за „спротивна“ насока.)

Задачи

1. Дадени се четири точки како на црт. 7. Од сите можни вектори со почеток во една, а со крај во друга од дадените точки, наведи кои вектори се: а) колинеарни, б) со спротивна насока, в) спротивни.

2. На секоја страна од паралелограмот $ABCD$ можат да се положат по два вектора. Кои од така формираните осум вектори се колинеарни со иста насока, а кои се колинеарни со спротивна насока?



Црт. 7

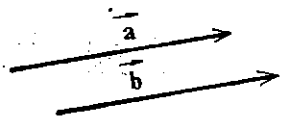
3.Покажи дека точките A, B и C се колинеарни ако и само ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни.

1.3. Еднаквост на вектори

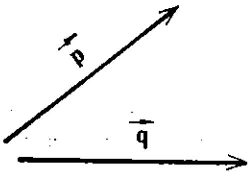
Дефиниција. За два вектора ќе велиме дека се *еднакви*, ако тие имаат:

а) иста должина,
б) ист правец,
в) иста насока.

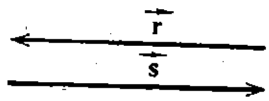
На пример, векторите **a** и **b** на црт. 8 се еднакви, додека векторите **p** и **q** од црт. 9 не се еднакви иако имаат иста должина, а не се еднакви ни векторите **r** и **s** од црт. 10, иако имаат иста должина и ист правец.



Црт. 8



Црт. 9

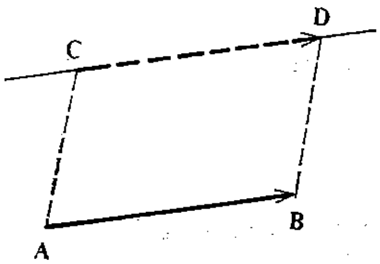


Црт. 10

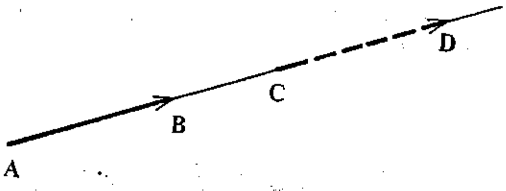
Ако два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (односно **a** и **b**) се еднакви, тогаш ќе пишуваме $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (односно $\mathbf{a}=\mathbf{b}$). Од дефиницијата за еднаквост на вектори направо следува дека, ако два вектора се еднакви со трет вектор, тогаш тие се и меѓусебно еднакви, т.е. ако $\mathbf{a}=\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}=\mathbf{c}$, тогаш и $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

Исто така, од дефиницијата за еднаквост на вектори произлегува дека за даден вектор **a** можеме да конструираме безброј многу вектори, еднакви со него. Имено, *ако на рамнината е даден некој вектор* $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ *и ако C е произволна точка, тогаш постои единствен вектор* $\overrightarrow{CD}$, *со почеток C, којшто е еднаков со векторот* $\overrightarrow{AB}$. Крајот D на тој вектор се добива така, што низ точката C се повлекува права паралелна со правата AB и на неа се нанесува отсечката $\overline{CD}=\overline{AB}$ во насока на векторот $\overrightarrow{AB}$ (црт. 11 и црт. 12). Притоа, конструирањето на векторот $\overrightarrow{CD}=\mathbf{a}$, ќе го викаме *нанесување* на векторот **a** од точката C или *надоврзување* на **a** за точката C.

Ако еден четириаголник $ABDC$ е паралелограм, тогаш векторот $\overrightarrow{AB}$ е еднаков со векторот $\overrightarrow{CD}$, што е јасно директно од дефиницијата за еднаквост на вектори (в. и црт. 11).

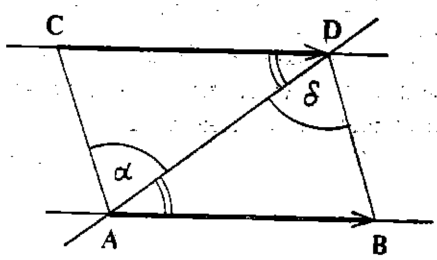


Црт. 11



Црт. 12

Обратно, ако два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не лежат на иста права и ако се еднакви, тогаш четириаголникот $ABDC$ е паралелограм (црт. 13). Навистина, од $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ следува дека правата AB е паралелна со правата CD, а од тоа што ΔACD е складен со ΔBAD (според признакот CAC) следува дека аглите α и δ се еднакви; бидејќи тие се внатрешни наизменични агли на трансверзалата AD на правите AC и BD, следува дека правите AC и BD се паралелни. Значи, $ABDC$ е паралелограм.



Црт. 13.

Со тоа ја докажавме следнава теорема, којашто претставува еден признак за еднаквост на вектори:

Теорема. *Ако два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не лежат на иста права, тогаш тие се еднакви ако и само ако четириаголникот $ABDC$ е паралелограм.*

Задачи

1. Избери четири различни точки O, A, B, C. Од точката O нанеси вектори еднакви со векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CA}$.

2. Нека $ABCD$ е паралелограм и S е пресекот на неговите дијагонали. Да се провери кои од следниве парови вектори се еднакви, а кои се колинеарни, не еднакви: а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$; г) $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{CS}$.

3. Покажи дека

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}.$$

4. Дали исказот од претходната задача е точен ако наместо вектори се земат отсечките, т.е. дали

$$\overline{AB}=\overline{CD} \Rightarrow \overline{AC}=\overline{BD}?$$

5. Нека $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MP}$. Докажи дека $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{NP}$.

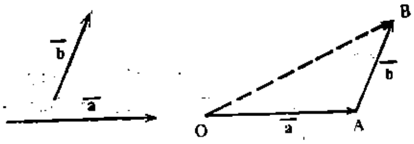
6. Докажи дека $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ако и само ако средините на отсечкте AD и BC се совпаѓаат.

§2. *Собирање и одземање на вектори*

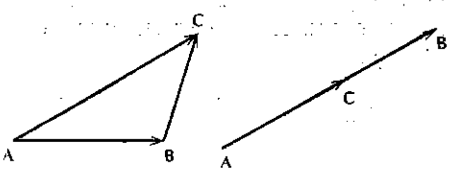
2.1. Собирање на вектори

Нека се дадени два вектора **a** и **b** во рамнината (црт. 1). Да избереме точка O од рамнината и да ги конструираме векторите $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$. Тогаш векторот $\overrightarrow{OB}$, чиј почеток е почетокот на векторот **a** и чиј крај е крајот на векторот **b** ќе го викаме *збир* на векторите **a**, **b** и ќе пишуваме

$$\overrightarrow{OB}=\mathbf{a}+\mathbf{b}.$$



Црт. 1



Црт. 2

Да забележиме дека од дефиницијата за еднаквост на век ори следува дека збирот $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ на векторите **a** и **b** не зависи од изборот на точката O. Уште повеќе, за кои било три дадени точки A, B, C во рамнината (црт. 2) важи равенството

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}.$$

Ова равенство често се вика *правило на три точки.*

Задачи

1. Нека **a** и **b** се колинеарни вектори со спротивни насоки. Да се одреди правецот, насоката и должината на векторот **a**+**b**.

2. Нека **a** и **b** се колинеарни вектори со спротивни насоки. Да се најде правецот, насоката и должината на векторот **a**+**b**.

3. Векторите **a** и **b** се колинеарни и притоа $|\mathbf{a}|=3$, $|\mathbf{b}|=5$. Да се најде должината на векторот **a**+**b** ако **a** и **b** се: а) исто насочни, б) спротивно насочени.

4. Дали може должината на векторот **a**+**b** да биде помала од должината на **a** или должината на **b**?

5. Да се разложи еден вектор **a** на два собирока значи да се најдат два вектора **p** и **q**, такви што **p**+**q**=**a**.

Разложи го, графички, дадениот вектор **a** на два собирока ако се познати:

а) должината и правецот на еден собирок;

б) правецот на двата собирока;

в) должината на двата собирока.

6. Даден е правилен шестаголник $ABCDEF$. Со помош на векторите $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AF}=\mathbf{b}$, да се изразат векторите $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{FE}$.

7. Да се реши задачата **6** од разделот **1.3.**

2.2. Нулти вектор

Од правилото на три точки следува дека збирот на векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ е „векторот" $\overrightarrow{AA}$, при кој почетокот и крајот се совпаѓаат, т.е. „векторот" $\overrightarrow{AA}$ претставува една точка. Според дефиницијата за вектор, $\overrightarrow{AA}$ не е вектор. Но се покажало згодно и тој да се смета како вектор (ориентирана „отсечка" со должина нула), рамноправно со другите, зашто во спротивно, векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ не би имале свој збир. Затоа, за секоја точка A ќе сметаме дека $\overrightarrow{AA}$ е вектор чиј почеток и крај се совпаѓаат, т.е. вектор со должина нула, но без правец и без насока. Него ќе го сметаме за колинеарен со секој друг вектор. Тој вектор ќе го викаме *нулти вектор* (или *вектор нула*) и ќе го означуваме со $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, итн. или со **о**.

Значи, имаме:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{o}.$$

Од правилото на три точки следува дека за кои било две точки A, B важи равенството

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB},$$

т.е.

$$\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{a}$$

за кој било вектор **a**.

Оваа ситуација формално е иста како и при собирањето на произволен реален број и бројот нула, со што се оправдува името нулти вектор.

Задачи

1. Даден е паралелограмот $ABCD$. Да се најде должината на векторот $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$, а потоа и самиот вектор.

2. Во кој случај збирот на два ненулти вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ е вектор нула?

2.3. Својства на собирањето на вектори

Собирањето на вектори има слични својс ва како собирањето на броеви. На пример, за кои било три броја a, b, c, важи равенството $(a+b)+c=a+(b+c)$, т.е. собирањето на броеви е асоцијативно.

И собирањето на вектори е асоцијативно, т.е. за кои било три вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, *важи*:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c}).$$

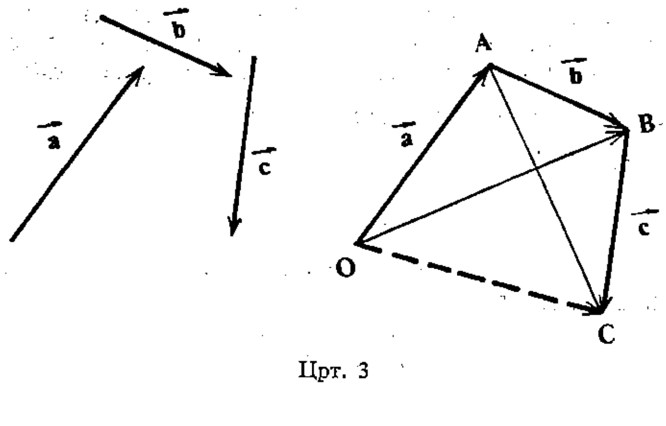
За да го докажем тоа, ќеземеме три произволни вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, ќе избереме произволна точки O и ќе ги нанесеме векторите $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$ и $\overrightarrow{BC}=\mathbf{c}$ (црт. 3). Имаме:

$$\overrightarrow{OB}=\mathbf{a}+\mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{AC}=\mathbf{b}+\mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC},$$

т.е.

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{a}).$$



Црт. 3

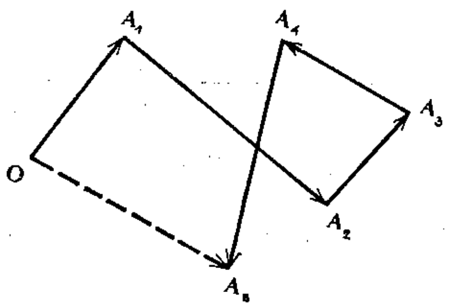
Поради асоцијативниот закон за собирање на вектори, секој од векторите $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ може да се напише без загради, во вид $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$. Според тоа, збир на три вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ се определува со равенство

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}.$$

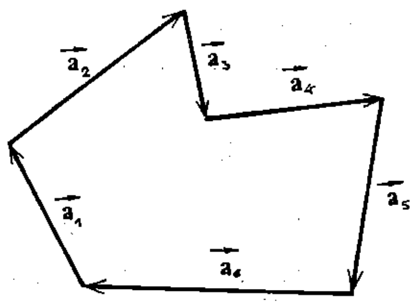
Како последица од асоцијативниот закон, збирот на произволен (конечен) број вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,..., \mathbf{a}_k$ може да се определи со равенството

$$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+...+\mathbf{a}_k=(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+...\mathbf{a}_{k-1})+\mathbf{a}_k.$$

Според тоа, ако векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,..., \mathbf{a}_k$ се надоврзани еден на друг, т.е. почетокот на $\mathbf{a}_2$ се совпаѓа со крајот на $\mathbf{a}_1$, почетокот на $\mathbf{a}_3$ се совпаѓа со крајот на $\mathbf{a}_2$, итн., тогаш векторот што ја затвора така добиената искршена линија, т.е. векторот чиј почеток се совпаѓа со почетокот на $\mathbf{a}_1$, а крајот му се совпаѓа со крајот на $\mathbf{a}_k$, го претставува збирот на векторите $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,..., \mathbf{a}_k$ (на црт. 4 е земено $k=5$). Тоа правило е наречено *правило на полигон* за собирање на вектори.



Црт. 4



Црт. 5

Од тоа правило непосредно се добива следниот услов за затвореност на векторски многуаголник: За една искршена линија (која може и да се пресечува себе си), составена од надоврзани еден на друг вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2,..., \mathbf{a}_k$, да биде затворена, потребно и доволно е збирот на тие вектори да е еднаков со нултиот вектор:

$$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_k=\mathbf{o}.$$

На црт. 5 е земено $k=6$.

За собирање на вектори како и за собирањето на броеви, важи комутативниот закон, т.е.

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

за кои било два вектора $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$.

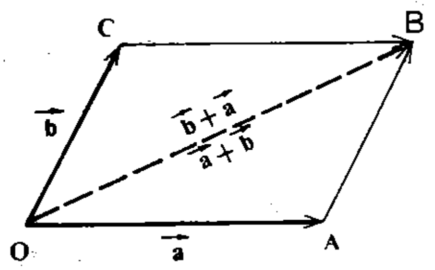
За да го докажеме тоа, ќе разгледаме два случаја: 1° кога $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се неколинеарни и 2° кага $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни.

1° Нека во рамнината се дадени два неколинеарни вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Да избереме точка O и да ги нанесеме векторите $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$, а потоа векторот $\overrightarrow{OC}=\mathbf{b}$ (црт. 6). Бидејќи векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OC}$ се еднакви, од теоремата во разделот **1.3** следува дека четириаголникот $OABC$ е паралелограм, па значи, векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{CB}$ се еднакви, т.е. $\overrightarrow{CB}=\mathbf{a}$. Од тоа, според дефиницијата за собирање на вектори, следува дека

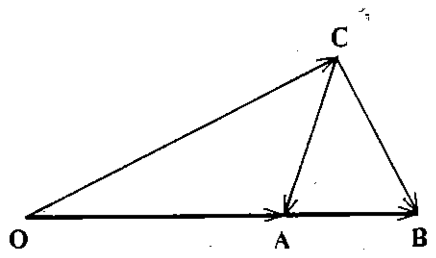
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB},$$

т.е.

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}.$$



Црт. 6



Црт. 7

2° Нека сега векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни. Да избереме точка O и да ги нанесеме векторите $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$. Точките O, A и B, јасно, лежат на иста права. Да избереме точка C што не лежи на таа права (црт. 7). Тогаш, користејќи ја комутативноста при случајот 1°, како и асоцијативноста на собирањето на вектори, имаме:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}+\mathbf{b}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{OC}=\\&=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{OC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{OC}=\\&=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA})=\\&=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\\&=\mathbf{b}+\mathbf{a}.\end{aligned}$$

Од равенството $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ следува дека не е битен редоследот на нанесувањето на векторите при конструкцијата на нивниот збир.

Да спомнеме дека во случајот 1°, патем, добивме и едно правило за собирање на вектори, наречено *правило на паралелограм*: ако $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ и $\mathbf{b}=\overrightarrow{OC}$ се два неколинеарни вектора, тогаш нивниот збир $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ претставува векторот $\overrightarrow{OB}$, кој е поставен на дијагоналата OB од паралелограмот $OABC$, конструиран над векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (црт. 6).

Ова правило се користи во физиката при собирање на две сили. Таму тоа се вика *паралелограм на сили*, а збирот на тие сили се вика *резултанта*.

Задачи

1. Дадени се три точки A, B, C. Да се најде векторот $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

2. Нека $ABCD$ е паралелограм и S е пресекот на неговите дијагонали. Да се упростат изразите:

а) $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{SA})+\overrightarrow{SC}$;

б) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DS})+\overrightarrow{SA}$;

в) $\overrightarrow{DS}+(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{BC})$;

г) $\overrightarrow{DS}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AB}$.

3. Даден е петаголник $ABCDE$. Да се најдат барем пет можности за изразување на векторот $\overrightarrow{AB}$ како збир на ненулти вектори, со почеток и крај во темињата на петаголникот.

4. Дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката S. Да се докаже дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако постои четириаголник, чии страни се еднакви и паралелни со отсечките SA, SB, SC, SD.

5. Нека S е центарот на правилниот шестаголник $ABCDEF$. Да се најде збирот на векторит $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SE}, \overrightarrow{SF}$.

2.4. Одземање на вектори

Разликата на вектори се дефинира исто како кај броевите. Имено, *разлика* на два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се вика таков вектор $\mathbf{x}$, чиј збир со векторот $\mathbf{b}$ е еднаков со векторот $\mathbf{a}$ т.е.

$$\mathbf{b}+\mathbf{x}=\mathbf{a}.$$

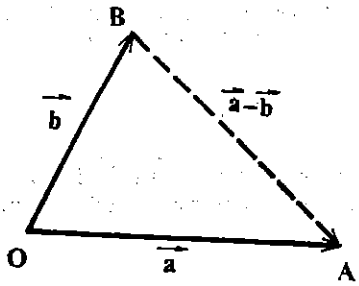
Таков вектор $\mathbf{x}$ при дадени вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, секогаш постои. Навистина, ако избереме точка O и ги нанесеме векторите $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ (црт. 8), можеме да го формираме векторот $\overrightarrow{BA}$ и тогаш, според правилата за собирање вектори, добиваме

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA},$$

т.е. ставајќи $\overrightarrow{BA}=\mathbf{x}$:

$$\mathbf{b}+\mathbf{x}=\mathbf{a}.$$

Според тоа, разликата за кои било два вектора постои. Со други зборови, операцијата одземање на вектори секогаш е изведлива.



Црт. 8

Разликата $\mathbf{x}$ на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се означува со $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Од горното разгледување следува дека $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ може да се добие ако векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се нанесат на иста точка и потоа се зема векторот кој „иде" од крајот на векторот $\mathbf{b}$ кон крајот на векторот $\mathbf{a}$ (црт. 8)

Да забележиме посебно дека разликата на два еднакви вектори е нултнот вектор, т.е.

$$\mathbf{a}-\mathbf{a}=\mathbf{o}$$

за секој вектор $\mathbf{a}$.

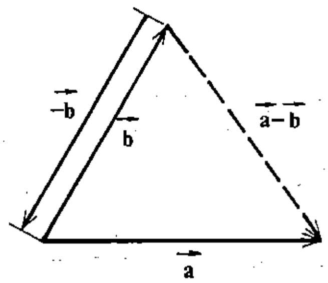
За да ја добиеме разликата на два вектора, можеме да постапиме и поинаку, користејќи го поимот за спротивен вектор (раздел 1.2). Ако $\mathbf{a}$ е даден вектор, тогаш спротивниот со него вектор ќе го означуваме со $-\mathbf{a}$. Знаеме дека за кои било две точки A и B, векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ се спротивни и дека $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$, т.е.

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{o}.$$

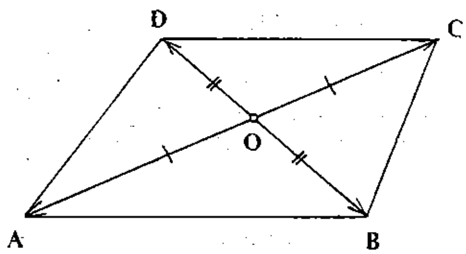
Ќе покажеме дека за кои било два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ важи:

$$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}),$$

т.е. за да се одземе вектор $\mathbf{b}$ од некој вектор $\mathbf{a}$ доволно е да се додаде кон $\mathbf{a}$ векторот $-\mathbf{b}$ кој е спротивен на $\mathbf{b}$.



Црт. 9



Црт. 10

За таа цел ќе избереме точка O и ќе ги нанесеме векторите $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$ (црт. 9). Да го разгледаме збирот $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$. Бидејќи $\overrightarrow{BO}=-\mathbf{b}$, следува $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=(-\mathbf{b})+\mathbf{a}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$,

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}-\mathbf{b}.$$

Како едноставна примена на одземањето на вектори ќе ја докажеме следнава

Теорема. *Ако дијагоналите во некој четириаголник се преполовуваат, тогаш тој четириаголник е паралелограм.*

Доказ. Нека точката O е средина на дијагоналите AC и BD на четириаголникот $ABCD$ (црт. 10). Бидејќи, од една страна,

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB},$$

а, од друга страна,

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DC},$$

зашто $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}$ и $-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$, следува дека $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, па според теоремата од разделот **1.3**, заклучуваме дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.

Задачи

1. Да се изразат векторите положени на страните од паралелограмот $ABCD$ со помош на векторите $\overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{SB}$, каде што S е пресекот на дијагоналите.

2. Со помош на паралелограмот конструиран над векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ да се провери равенството $(\mathbf{a}-\mathbf{b})+\mathbf{b}=\mathbf{a}$.

3. Во кој случај важи следново равенство:

а) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=a+b$; б) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=a-b$;

в) $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|=a+b$; г) $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|=|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$?

4. Над страните од триаголникот ABC се конструирани произволни паралелограми ABB_1A_2, BCC_1B_2 и ACC_2A_1. Да се докаже дека постои триаголник чии страни се паралелни и еднакви со отсечките A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2.

5. Да се докаже дека четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако за произволна точка O важи равенството $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

*2.5 Групови својства на собирањето на вектори

Да го означиме со V множеството на сите вектори (од рамнината). Ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се произволни елементи од V (т.е. произволни вектори), тогаш за нив, како што видовме во разделите **2.1** и **2.2**, постои вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, наречен збир на векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Со други зборови:

1) На множеството V е дефинирана операција $+$, наречена *собирање* на вектори.

Потоа, во разделот **2.2** воведовме вектор нула, за кој важи:

$$\mathbf{a}+\mathbf{o}=\mathbf{o}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$$

за секој вектор $\mathbf{a}$, т.е. векторот нула, при оваа операција, не дејствува на другиот собирок или, би рекле, се однесува „неутрално", па затоа и се вика *неутрален елемент* за операцијата $+$. Значи да заклучиме:

2) Во множеството V постои неутрален елемент на операцијата $+$, наречен нулти вектор.

Во разделот **2.3** установивме дека собирањето на вектори е асоцијативно, т.е.

3) За операцијата $+$ во V важи *асоцијативниот закон*

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$$

за секоја тројка елементи $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ од V.

На крајот, во разделот **2.4** споменавме дека за секој вектор постои нему спротивен вектор, којшто се означува со $-\mathbf{a}$. Значи:

4) За секој ememeнт $\mathbf{a}$ од V, постои елемент $-\mathbf{a}$, наречен *спротивен* елемент на $\mathbf{a}$, таков што

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=(-\mathbf{a})+\mathbf{a}=\mathbf{o}.$$

Ние установивме уште и дека собирањето е комутативно, т.е.

5) За операцијата $+$ во V важи *комутативниот закон*:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$$

за секој пар елементи $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ од V.

Секое множество на кое е дефинирана некоја операција што ги има својствата 2), 3) и 4) се вика *група*. Ако, покрај тоа е исполнето и својството 5), тогаш групата се вика *комутативна*.

Од сето тоа следува дека:

Множеството V од сите вектори (од рамнината) со операцијата собирање $(+)$ на вектори е комутативна група.

§3. Множење на вектор со број

3.1. Дефиниција

Во §**2** разгледавме две операции со вектори: собирање и одземање на вектори. Овде ќе разгледаме уште едно дејствие над векторите: множење на вектор со број.

Нека $\mathbf{a}$ е вектор и k реален број. Под *производ* на векторот $\mathbf{a}$ со бројот k ќе го подразбираме векторот $k\mathbf{a}$[1], определен на следниов начин:

[1]) Понекогаш се пишува $\mathbf{a}k$ наместо $k\mathbf{a}$, но ние во оваа книга ќе пишуваме само $k\mathbf{a}$.

(i) должината на векторот $k\mathbf{a}$ е еднаква со бројат $|k|\,|\mathbf{a}|$, т.е. $|k\mathbf{a}|=|k|\,|\mathbf{a}|$ (притоа, со $|k|$ е означена апсолутната вредност на бројот k);

(ii) векторот $k\mathbf{a}$ има ист правец со векторот $\mathbf{a}$;

(iii) векторот $k\mathbf{a}$ е насочен како векторот $\mathbf{a}$ ако $k>0$, а е насочен спротивно од векторот $\mathbf{a}$ ако $k<0$.

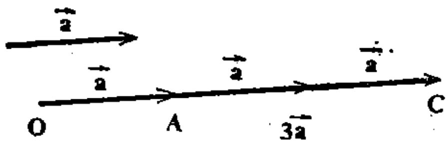
На пример, ако $\mathbf{a}$ е даден вектор, а $k=3$, тогаш $3\mathbf{a}$ можеме да го замислиме како $\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{a}=\overrightarrow{OC}$ (црт. 1), и, општо, ако k е цел позитивен број, тогаш

$$\underbrace{\mathbf{a}+\mathbf{a}+\ldots+\mathbf{a}}_{k}=k\mathbf{a}$$

што е аналогно со дефиницијата за множење на природни броеви во аритметиката.

Од дефиницијата за производ на вектор со број следува дека векторот $k\mathbf{a}$ е колинеарен со $\mathbf{a}$. Но, и обратно:

Ако $\mathbf{b}$ *е произволен вектор колинеарен со ненултиот вектор* $\mathbf{a}$, *тогаш постои реален број* k *таков што* $\mathbf{b}=k\mathbf{a}$.



Црт. 1

Навистина, ако $\mathbf{b}=\mathbf{o}$, тогаш за $k=0$ добиваме $\mathbf{b}=k\mathbf{a}$. Ако, пак, $\mathbf{b}\neq\mathbf{o}$, тогаш ставајќи $k=\dfrac{b}{a}$ кога $\mathbf{b}$ е исто насочен како $\mathbf{a}$, а $k=-\dfrac{b}{a}$ кога $\mathbf{b}$ има спротивна насока од $\mathbf{a}$, добиваме дека векторот $\mathbf{b}$ е еднаков со векторот $k\mathbf{a}$, што се утврдува со директна примена на (i) и (iii) од дефиницијата.

Задачи

1. Избери произволен вектор $\mathbf{a}$ и конструирај ги векторите: $-2\mathbf{a}$, $\dfrac{2}{3}\mathbf{a}$, $\sqrt{2}\,\mathbf{a}$, $\sqrt{3}\,\mathbf{a}$.

2. Избери два неколинеарни вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и конструирај ги векторите: $3\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $2\mathbf{a}+\dfrac{1}{3}\mathbf{b}$, $-\dfrac{1}{2}\mathbf{a}-\sqrt{2}\,\mathbf{b}$.

3. Користејќи се со паралелограмот конструиран над векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, да се проверат следниве равенства:

а) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+(\mathbf{a}-\mathbf{b})=2\mathbf{a}$; б) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})-(\mathbf{a}-\mathbf{b})=2\mathbf{b}$;

в) $\dfrac{1}{2}\mathbf{a}+\dfrac{1}{2}\mathbf{b}=\dfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$; г) $\left(\mathbf{a}+\dfrac{1}{2}\mathbf{b}\right)-\left(\dfrac{1}{2}\mathbf{a}+\mathbf{b}\right)=\dfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$.

4. Нека точките A, B, C и D се колинеарни, а M и N се средините на отсечките AB и CD соодветно. Да се покаже дека $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

5. Тетивите A_1A_2 и B_1B_2 од кружницата (O, r) се заемно нормални. Ако $S=A_1A_2\cap B_1B_2$, да се покаже дека $\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{SA_2}+\overrightarrow{SB_1}+\overrightarrow{SB_2}=2\overrightarrow{SO}$.

6. Нека $ABCD$ е паралелограм, S пресекот на неговите дијагонали, а O произволна точка. Да се покаже дека $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OS}$.

3.2. Својства на множењето на вектор со број

Множењето на вектор со број има слични својства како множењето на број со број. Имено, за кои било вектори **a**, **b** и број k, точни се равенствата:

(а) $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$; (б) $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$;

(в) $0\cdot\mathbf{a}=\mathbf{o}$; (г) $k\cdot\mathbf{o}=\mathbf{o}$.

Точноста на сите тие равенства се проверува лесно, користејќи ја само дефиницијата за множење на вектор со број. Ние ќе го докажеме само равенството (б). За таа цел, нека **a** е произволно избран вектор. Според (i) од дефиницијата, должината на векторот $(-1)\mathbf{a}$ е еднаква со бројот $|-1||a|=1\cdot a=a$, т.е. неговата должина е еднаква со должината на векторот **a**; според (ii) и (iii), векторот $(-1)\mathbf{a}$ е колинеарен со **a** и спротивно насочен од **a**, па значи, тој е спротивен на **a** (в. раздел **1.2** и **2.4**); така добиваме дека $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$.

Се покажува дека за кои било вектори **a**, **b** и кои било реални броеви k, m, точни се следниве равенства:

I. $(km)\mathbf{a}=k(m\mathbf{a})$,

II. $(k+m)\mathbf{a}=k\mathbf{a}+m\mathbf{a}$,

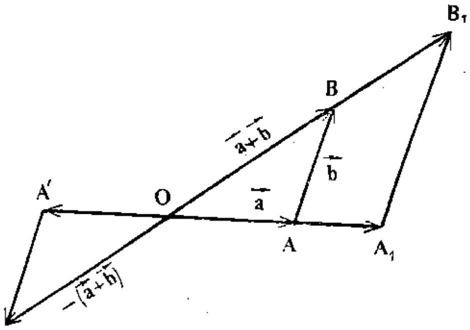
III. $k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}$.

Овие равенства, како и равенствата (а) — (г), се аналогни на соодветните равенства за собирањето и множењето на реални броеви. Меѓутоа, не смееме да ги прифатиме за „очигледно точни", туку нивната точност треба да се докаже. Равенствата I и II се докажуваат, исто така, со директна примена на дефиницијата за множење на вектор со број, вршејќи притоа соодветна дискусија што ќе ги опфати сите случаи (кога k и m имаат ист знак, кога имаат спротивни знаци и кога некој од нив е нула). Малку пообемен е доказот на последното равенство и ние, овде, ќе го изведеме во подробности.

Доказ на својството III. Ако $k=0$ или ако некој од векторите **a**, **b** е нулти, тогаш равенството е, очигледно, исполнето. Затоа ќе претпоставиме дека $k\neq 0$, $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$ и $\mathbf{b}\neq\mathbf{o}$. За **a** и **b** се можни два случаја: 1° **a** и **b** се колинеарни, и 2° **a** и **b** не се колинеари.

1° Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни. Тогаш постои реален број s, таков што $\mathbf{b}=s\mathbf{a}$ (в. во разделот **3.1**), па имајќи ги предвид својствата II, I и дистрибутивноста на множењето спрема собирањето на реални броеви добиваме:

$$k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k(\mathbf{a}+s\mathbf{a})=k((1+s)\,\mathbf{a})=$$
$$=(k(1+s))\,\mathbf{a}=(k+ks)\,\mathbf{a}=$$
$$=k\mathbf{a}+(ks)\,\mathbf{a}=k\mathbf{a}+k(s\mathbf{a})=$$
$$=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}.$$



Црт .2

2° Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се неколинеарни и нека $k>0$. Да ги нанесеме векторите $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OA_1}=k\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB_1}=k(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ (црт. 2). Тогаш $\triangle\, OA_1B_1 \sim \triangle\, OAB$ со коефициент на сличноста k (зашто $\overline{OA_1}:\overline{OA}=k$, $\overline{OB_1}:\overline{OB}=k$, а аголот при темето O е заеднички), па според тоа, $\overline{A_1B_1}:\overline{AB}=k$, од што следува дека $\overrightarrow{A_1B_1}=k\overrightarrow{AB}=k\mathbf{b}$. Бидејќи $\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}$, добиваме

$$k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}.$$

Ако, пак $k<0$, тогаш нанесувајќи ги векторите $\overrightarrow{OA'}=-\mathbf{a}=(-1)\,\mathbf{a}$, $\overrightarrow{A'B'}=-\mathbf{b}=(-1)\,\mathbf{b}$, добиваме $\overrightarrow{OA'}=-(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(-1)\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, па од $\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B'}$, следува дека

$$(-1)(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(-1)\,\mathbf{a}+(-1)\,\mathbf{b}.$$

Ставајќи $k=-p$ (значи $p>0$) и имајќи предвид дека равенството III важи кога $k>0$, добиваме:

$$k(\mathbf{a}+\mathbf{b})=((-1)p)\,(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(-1)\,(p(\mathbf{a}+\mathbf{b}))=(-1)\,(p\mathbf{a}+p\mathbf{b})=$$
$$=(-1)\,(p\mathbf{a})+(-1)\,(p\mathbf{b})=(-p)\,\mathbf{a}+(-p)\,\mathbf{b}=$$
$$=k\mathbf{a}+k\mathbf{b}.$$

Со тоа е докажано дека равенството III е исполнето за кој било број k и кои било вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Задачи

1. Докажи дека: а) $(k-m)\,\mathbf{a}=k\mathbf{a}-m\mathbf{a}$; б) $k(\mathbf{a}-\mathbf{b})=k\mathbf{a}-k\mathbf{b}$.

2. Да се упростат изразите:

а) $2\,(\mathbf{a}-\mathbf{b})-3\,(2\,\mathbf{a}+\mathbf{b})+4\,\mathbf{a}+6\,\mathbf{b}$;

б) $3\,(\mathbf{a}-\mathbf{b}+2\,\mathbf{c})+2\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}-\mathbf{b}+6\,\mathbf{c})$.

3. Да се најде непознатиот вектор $\mathbf{x}$ од равенката:

а) $2\,\mathbf{x}-\mathbf{a}-\mathbf{b}=2\,\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{x}$;

б) $2\,\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\,\mathbf{x}=\mathbf{c}-\mathbf{a}-2\,\mathbf{b}$.

4. Да се конструираат векторите $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ ако $\mathbf{p}+2\mathbf{q}=\mathbf{a}$, $-2\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{b}$, каде што $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се два дадени вектори.

5. Векторите $4\mathbf{a}-3\mathbf{b}$ и $-\mathbf{a}+2\mathbf{b}$ да се изразат со помош на векторите $\mathbf{p}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и $\mathbf{q}=2\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

3.3. Равенството $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}=\mathbf{o}$

Ќе го разгледаме равенството

$$x\mathbf{a}+y\mathbf{b}=\mathbf{o}, \tag{1}$$

каде што $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се вектори, а x и y броеви.

Ако $\mathbf{a}=\mathbf{o}=\mathbf{b}$, тогаш равенството (1) е исполнето за кои било броеви x и y.

Ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни и барем едниот од нив не е нула, на пример, $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$, тогаш постои број k, таков што $\mathbf{b}=k\mathbf{a}$, а тоа можеме да го напишеме и вака:

$$k\mathbf{a}+(-1)\mathbf{b}=\mathbf{o}.$$

Значи, за така избрани вектори $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, равенството е исполнето при $x=k$ и $y=-1$. Да уочиме дека, тука, барем едниот од броевите x, y не е нула.

Обратно, ако е исполнето равенството (1), при што барем еден од броевите x, y не е нула, на пример, $y\neq 0$, тогаш можеме да напишеме

$$\mathbf{b}=-\frac{x}{y}\mathbf{a},$$

па според тврдењето од разделот **3.1**, следува дека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се колинеарни.

Значи, точна е следнава

Теорема 1. *Два вектора* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *се колинеарни ако и само ако е исполнето равенството* $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}=\mathbf{o}$ *за некои броеви* x *и* y, *од кои барем едниот не е нула.*

Ако $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не се колинеарни, тогаш од штотуку докажаната теорема следува дека равенството $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}=\mathbf{o}$ е исполнето само во случајат $x=y=0$ (зашто, ако барем едниот од броевите x, $y\neq 0$, тогаш $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ би биле колинеарни). Значи:

Последица. *Ако* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *се неколинеарни вектори, тогаш*

$$x\mathbf{y}+y\mathbf{b}=\mathbf{o}\Rightarrow x=y=0.$$

За илустрација, ќе ја докажеме следнава теорема (види зад. **6** од **1.3**):

Теорема 2. *Дијагоналите во секој паралелограм се преполовуваат.*

Доказ. Нека $ABCD$ е паралелограм и нека S е пресечната точка на дијагоналите AC и BD (црт. 3). Векторот $\overrightarrow{AS}$ е колинеарен со векторот $\overrightarrow{AC}$, а векторот $\overrightarrow{SB}$ е колинеарен со $\overrightarrow{DB}$, па постојат броеви x и y, такви што $\overrightarrow{AS}=x\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{SB}=y\overrightarrow{DB}$. Бидејќи

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}, \qquad \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD},$$

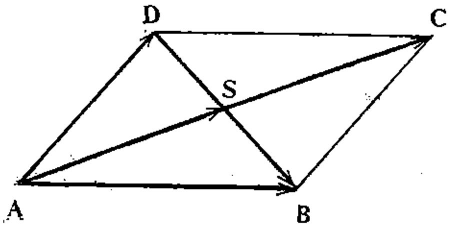
од $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{AB}$ добиваме:

$$x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB},$$

т.е.

$$x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+y(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB},$$

$$(x+y-1)\overrightarrow{AB}+(x-y)\overrightarrow{AD} = \mathbf{o}.$$



Црт. 3

Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ не се колинеарни, па следува

$$x+y-1=0, \quad x-y=0,$$

од каде што добиваме $x=y=\frac{1}{2}$.

Значи, S е средина на двете дијагонали.

Задачи

1. Нека векторите $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се неколинеарни. Да се определат x и y ако:

а) $(x+2y)\mathbf{a}+(3x-2y-8)\mathbf{b}=\mathbf{o}$;

б) $(6x-y)(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(2y-1)\mathbf{a}-\mathbf{b}$;

в) $(x-1)\mathbf{a}+(y+5)\mathbf{b}=(3x+y)(\mathbf{a}+\mathbf{b})+(x+2y)\mathbf{b}$.

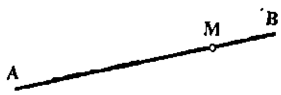
2. Нека E е средината на страната AB, од паралелограмот $ABCD$ и нека $M=AC\cap DE$. Да се најдат односите $\overline{AM}:\overline{MC}$ и $\overline{DM}:\overline{ME}$.

3. Нека E е средината на страната AB, а F средината на страната BC од паралелограмот $ABCD$ и нека $S=AF\cap DE$, $T=EF\cap BD$. Да се најдат односите: $\overline{ES}:\overline{SD}$, $\overline{AS}:\overline{SF}$, $\overline{TB}:\overline{TD}$, $\overline{ET}:\overline{TF}$.

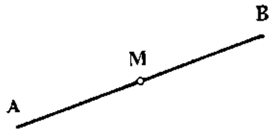
§ 4. Примена на векторите

4.1. Делење на отсечка во даден однос

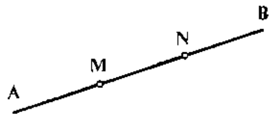
Нека AB е дадена отсечка и нека M е нејзина внатрешна точка. Бројот $k=\overline{AM}:\overline{MB}$ се вика *однос* во кој точката M ја дели отсечката AB (црт. 1).



Црт. 1



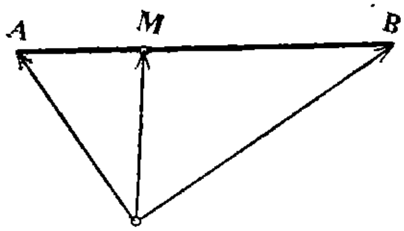
Црт. 2



Црт. 3

На пример, ако M е средината на отсечкта AB (црт. 2), тогаш $\overline{AM}=\overline{MB}$, па $k=1$, т.е. M ја дели отсечката AB во однос 1. Ако, пак, M и N ја делат отсечката AB на три еднакви дела (црт. 3), тогаш M ја дели отсечката AB во однос $\frac{1}{2}$.

Да забележиме дека односот k, во кој произволна внатрешна точка M ја дели отсечката AB, е позитивен број.



Црт. 4

Нека точката M ја дели отсечката AB во однос k и нека O е произволна точка од рамнината. Да видиме како се изразува векторот $\overrightarrow{OM}$ со помош на векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (црт. 4). Бидејќи векторите $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ се колинеарни и исто насочени, а $\overline{AM}:\overline{MB}=k$, следува дека $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{MB}$. Тогаш, за векторот $\overrightarrow{OM}$ имаме:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{OA}+k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OM},$$

од каде што добивме

$$(1+k)\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+k}(\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}). \qquad (1)$$

Ако $k=\frac{m}{n}$, добиваме

$$\overrightarrow{OM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}. \tag{2}$$

На пример, ако M е средина на отсечата AB, а O произволна точка од рамнината, тогаш

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}), \qquad 2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}. \tag{3}$$

Задача 1. Нека A_1, B_1 и C_1 се средини соодветно на страните BC, CA и AB од триаголникот ABC (црт. 5). Да се најде збирот на векторите $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$.

Според (3) имаме:

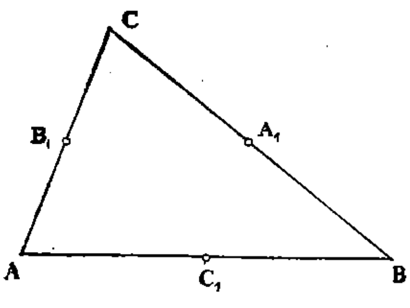
$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\ \overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}),\ \overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}),$$

па значи:

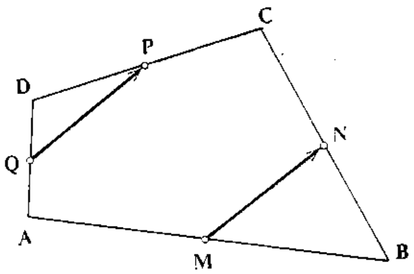
$$\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=$$

$$=\frac{1}{2}((\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}))=\mathbf{o}.$$



Црт. 5



Црт. 6

Задача 2. Да се покаже дека средините на страните на кој било четириаголник се темиња на паралелограм.

Нека $ABCD$ е произволен четириаголник (црт. 6) и нека M, N, P и Q се средини на страните AB, BC, CD и DA соодветно. Тогаш имаме:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{QP}.$$

Од равенството $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$, според теоремата од разделот **1.3**, следува дека четириаголникот $MNPQ$ е паралелограм.

Задачи

1. Точките M_1 и M_2 ја делат отсечката AB на три еднакви дела. Ако O е произволна точка, изрази ги векторите $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ со помош на векторите $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$.

2. Точките M_1, M_2 и M_3 ја делат отсечката AB на четири еднакви дела. Ако O е произволна точка, изрази ги векторите $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$ и $\overrightarrow{OM_3}$ со помош на векторите $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$.

3. Нека A_1, B_1 и C_1 се средини на страните BC, CA и AB од триаголникот ABC. Докажи дека:

а) $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, каде што O е произволна точка;

б) постои триаголник чии страни се еднакви и паралелни со отсечките AA_1, BB_1, CC_1.

4. Нека точката C ја дели отсечката AB во однос $m:n$. Да се пресмета $\overline{AC}:\overline{AB}$ и $\overline{CB}:\overline{AB}$.

5. Нека страните AC и BC од триаголникот ABC се поделени со точките M и N во ист однос $m:n$. Да се докаже дека правата MN е паралелна со страната AB и да се најде должината на отсечката MN ако $\overline{AB}=c$.

6. Нека M и N се точки на страните AC и BC од триаголникот ABC, такви што правата MN да е паралелна со AB. Да се докаже дека M и N ги делат страните AC и BC во ист однос.

4.2. Тежиште на триаголник

Нека ABC е даден триаголник и нека A_1, B_1, C_1 се средини на неговите страни BC, CA и AB соодветно (црт. 7). Отсечките AA_1, BB_1 и CC_1 се викаат тежишни линии на триаголникот ABC и (како што спомнавме порано, во § **3.1.** од гл. III), обично, се означуваат со t_a, t_b и t_c соодветно.

Ќе покажеме дека *тежишните линии се сечат во една иста точка.*

За таа цел, нека $T=AA_1\cap BB_1$. Од триаголникот ABT следува

$$\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TB}=\overrightarrow{AB}. \tag{1}$$

Векторите $\overrightarrow{AT}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ се колинеарни, па постои број x, така што $\overrightarrow{AT}=x\overrightarrow{AA_1}$. Исто така, векторите $\overrightarrow{TB}$ и $\overrightarrow{B_1B}$ се колинеарни, па постои број y, таков што $\overrightarrow{TB}=y\overrightarrow{B_1B}$. Бидејќи

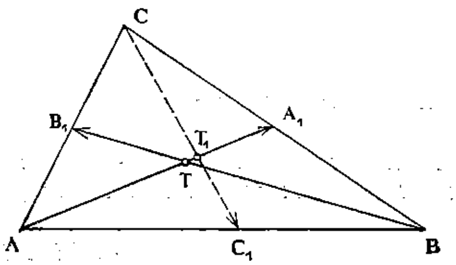
$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\ \overrightarrow{B_1B}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB},$$

заменувајќи во (1) добиваме

$$\frac{x}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+y\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB},$$

т.е.

$$\left(\frac{x}{2}+y-1\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right)\overrightarrow{AC}=\mathbf{o}.$$



Црт. 7

Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ не се колинеарни, па според **3.3** ,имаме:

$$\frac{x}{2}+y-1=0,\quad \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=0,$$

од каде што добиваме $x=y=\dfrac{2}{3}$. Значи:

$$\overrightarrow{AT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1},\ \overrightarrow{BT}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}.$$

Нека, сега, $T_1=AA_1\cap CC_1$. Разгледувајќи го триаголникот AT_1C наместо ATB, добиваме дека $\overrightarrow{AT_1}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{CT_1}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$.

Од равенството $\overrightarrow{AT}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{AT_1}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA_1}$, следува $T_1\equiv T$, т.е. тежишните линии во триаголникот ABC со сечат во една иста точа T. Точката T се вика *тежиште* на триаголникот ABC. Од горното разгледување заклучуваме дека тежиштето T ги дели тежишните линии во однос $1:2$.

Задачи

1. Нека T е тежиштето на триаголникот ABC. Докажи дека $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\mathbf{o}$.

2. Нека ABC е триаголник и M точка со својството: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\mathbf{o}$. Докажи дека M е тежиштето на $\triangle ABC$.

3. Нека A,B и C се точки од една права. Дали постои точка M од таа права, така што $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{o}$?

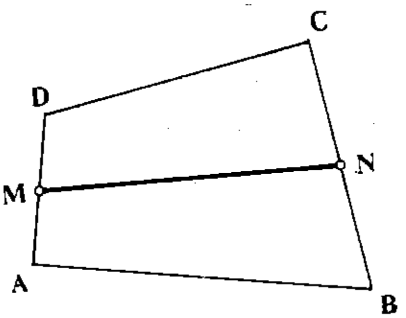
4. Нека $A_1A_2\ldots A_n$ е n-аголник. Докажи дека постои единствена точка T со својството: $\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{TA_2}+\ldots+\overrightarrow{TA_n}=\mathbf{o}$. (Точката T се вика *тежиште* на n-аголникот $A_1A_2\ldots A_n$.)

5. Нека M, N и P ги делат страните BC, CA и AB од триаголникот ABC во ист однос. Докажи дека тежиштата на триаголниците ABC и MNP се совпаѓаат.

6. Докажи дека тежишната линија t_a на триаголникот ABC е помала од $\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{AC}\right)$.

4.3. Средна линија на трапез

Нека $ABCD$ е произволен четириаголник. Отсечката што ги сврзува средините на две спротивни страни се вика *средна линија* на тој четириаголник.



Црт. 8

Нека M и N се средини на страните AD и BC соодветно (црт. 8). За векторот $\overrightarrow{MN}$ имаме:

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN},$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN},$$

од каде што добиваме,

$$2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})+$$

$$+(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC},$$

т.е.

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}). \tag{1}$$

Користејќи го тоа, ќе докажеме дека:

Теорема 1. *Четириаголникот $ABCD$ е трапез, со основи AB и DC ако и само ако*

$$\overline{MN}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{DC}). \tag{2}$$

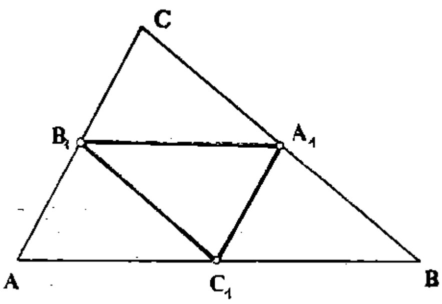
Доказ. Да претпоставиме дека $ABCD$ е трапез. Тогаш векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ се колинеарни, па и векторот $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ е колинеарен со нив. Бидејќи $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ имаат иста насока, следува дека

$$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{DC}\right|, \tag{3}$$

што значи дека важи равенството (2).

Обратно, нека важи равенството (2). Бидејќи за векторот $\overrightarrow{MN}$ важи равенството (1), од (2) следува (3), а тоа е можно само ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ се колинеарни и со иста насока. Следствено, четириаголникот $ABCD$ е трапез.

Отсечката што ги сврзува средините на две страни во еден триаголник се вика *средна линија* на тој триаголник. Значи, секој триаголник има три средни линии (црт. 9). Како и за средната линија на трапез, можеме да заклучиме дека:



Црт. 9

Теорема 2. *Секоја од средните линии во еден триаголник е паралелна со страната со која нема заеднички точки, а нејзината должина е половина од должината на таа страна.*

(Обиди се да го докажеш тоа директно, без да го користиш резултатот за средната линија на трапез.)

Задачи

1. Докажи дека средните линии во произволен четириаголник се преполовуваат.

2. Ако S_1, S_2 се средини на дијагоналите од произволен четириаголник, докажи дека отсечката S_1S_2 минува низ пресекот P на неговите средни линии и дека P е средина на S_1S_2.

3. Нека S_1, S_2 се средини на дијагоналите од трапезот $ABCD$. Докажи дека $\overline{S_1S_2}$ е полуразликата од основите.

4. Нека M е средина на отсечката AB, а M' средина на отчечката $A'B'$. Докажи дека средините на отсечките AA', BB' и MM' се колинеарни.

5. Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм ако и само ако средните линии минуваат низ пресекот на дијагоналите. Докажи!

Глава V

ДВИЖЕЊА

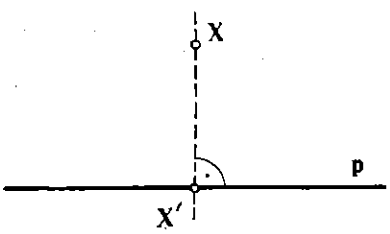
§ I. Пресликувања

I.I. Дефиниција и примери

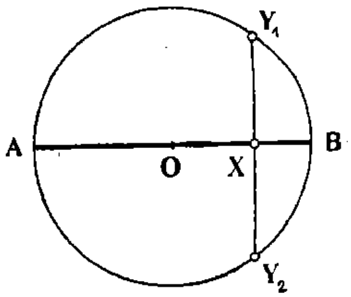
Ако се дадени две множества **F** и **G** (на пример, множества точки), тогаш на елементите од едното множество може да им се придружат елементи од другото множество на разни начини. Еве неколку примери.

Пример 1. Нека **F** е рамнината П, а **G** една права p (црт. 1). На секоја точка X од рамнината П да ѝ ја придружиме нејзината ортогонална проекција X' врз правата p.

Бидејќи низ секоја точка X може да се повлече единствена нормала на правата p заклучуваме дека придружената точка X' е еднозначно определена.



Црт. 1



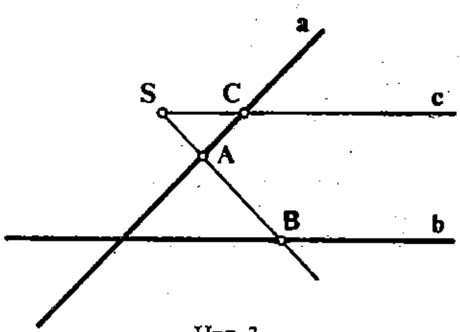
Црт. 2

Пример 2. Нека AB е дијаметар на кружницата k (црт. 2). На која било точка X од AB да ѝ ги придружиме точките Y_1 и Y_2 во кои нормалата на AB низ X ја сече дадената кружница.

Овде, за разлика од претходниот пример, на секоја внатрешна точка од дијаметарот AB ѝ придружуваме две точки, т.е. придружувањето не е еднозначно.

Пример 3. Нека a и b се две прави што се сечат и нека S е точка што не лежи ни на a ни на b (црт. 3). На точките од a да им придружиме точки од првата b, по следново правило: Ако x е права низ S што ги сече и двете прави a и b, тогаш на точката $A = a \cap x$ ѝ ја продужуваме точката $B = b \cap x$.

Ако c е правата низ S што е паралелна со b, тогаш на точката $C = c \cap a$ не можеме, на тој начин, да ѝ придружиме ниедна точка од правата b.



Црт. 3

Посебен интерес претставуваат придружувањата при кои на секој елемент од множеството **F** му се придружува единствен елемент од множеството **G**. Таквите придружувања ќе ги викаме пресликувања. Со други зборови:

Ако на кој било елемент од множеството **F** на некој начин (со некој пропис) му е придружен единствен елемент од множеството **G**, тогаш велиме дека е определено едно *пресликување* φ од **F** во **G** и го означуваме со $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ или само со φ.

Така, придружувањето од примерот 1 е пресликување, додека придружувањата од примерите 2 и 3 не се пресликувања, зашто во примерот 2 придружувањето не е еднозначно, а во примерот 3 на точката C не може да ѝ се придружи ниедна точка од правата b.

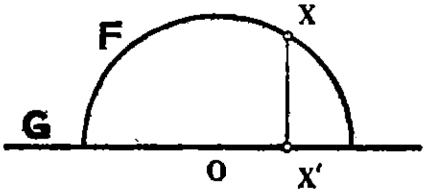
Ако за елементот $X \in \mathbf{F}$ придружениот елемент е $Y \in \mathbf{G}$, тогаш велиме дека Y е *слика* на X при пресликувањето $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$, а X е *оригинал* на Y и пишуваме $Y = \varphi(X)$. Множеството **F** го викаме *домен*, а **G** *мета* на пресликувањето.

Да дадеме уште два примера на пресликувања.

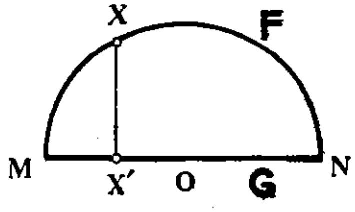
Пример 4. Нека **F** е една полукружница, а **G** правата p што минува низ дијаметарот на таа полукружница (црт.4). Ако на точката X од **F** ѝ ја придружиме нејзината ортогонална проекција X' од **G**, тогаш добиваме едно пресликување. $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$.

Да забележиме дека при ова пресликување некои точки од **G** не се слики на ниеден елемент од множество **F**, но не постојат две различни точки од **F**, коишто имаат исти слики.

Пример 5. Нека **F** е пак една полукружница, а **G** нека е дијаметарот MN (црт. 5). Ако на секоја точка X од **F** ѝ ја придружиме нејзината ортогонална проекција врз дијаметарот MN, тогаш добиваме едно пресликување $\psi: \mathbf{F} \to \mathbf{G}$.



Црт. 4



Црт. 5

Да забележиме дека при ова преселикување, за кои било две различни точки $X, Y \in \mathbf{F}$ сликите X' и Y', исто така, се различни, а секоја точка од **G** е слика барем на една точка од **F**.

Прописите со кои се зададени пресликувањата φ и ψ од примерите 4 и 5 се исти, т.е. ортогонални проектирања. Сепак, тие две пресликувања не ги сметаме за еднакви.

За две пресликувања $\varphi_1: \mathbf{F}_1 \to \mathbf{G}_1$, $\varphi_2: \mathbf{F}_2 \to \mathbf{G}_2$ ќе сметаме дека се *еднакви*, ако и само ако имаат еднакви домени, *еднакви* мети и за секој елемент X од доменот, сликите $\varphi_1(X)$ и $\varphi_2(X)$ се исти, т.е.

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2 \quad \text{и} \quad (\forall X \in \mathbf{F}_2)\, \varphi_1(X) = \varphi_2(X).$$

Разликите меѓу пресликувањата φ и ψ од примерите 4 и 5 не се само формални. Имено, при пресликувањето ψ (во примерот 5) секоја точка од множеството **G** е слика барем на една точка од множеството **F** (тоа својство го има и пресликувањето од примерот 1), додека за φ (во примерот 4) ова не важи. Од друга страна, пак, φ и ψ имаат и едно заедничко својство: различни точки од **F** ги пресликуваат во различни точки од **G**. Ова својство го нема пресликувањето од примерот 1.

За едно пресликување $\varphi: \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ велиме дека е *инјекција* (обратноеднозначно пресликување) ако различни елементи од **F** со φ се пресликуваат во различни елементи од **G**, т.е.

$$X_1 \neq X_2 \Rightarrow \varphi(X_1) \neq \varphi(X_2). \tag{1}$$

Значи за да провериме дали едно пресликување е инјекција, треба да провериме дали за него е исполнет условот (1). Но, често е згодно да се користи следниов признак:

Теорема 1. *Едно пресликување* $\varphi: \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ *е инјекција, ако и само ако е исполнет условот*

$$\varphi(X_1) = \varphi(X_2) \Rightarrow X_1 = X_2.$$

Доказот ќе го спроведеме применувајќи еден од законите на напето мислење, наречен контрапозиција, што го спомнавме во §4 од гл. I.

Да го означиме со p исказот „$\varphi(X_1) = \varphi(X_2)$“, а со q исказот „$X_1 = X_2$“. Тогаш $\neg p : \varphi(X_1) \neq \varphi(X_2)$, а $\neg q : X_1 \neq X_2$. Според законот за контрапозиција, следува дека

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

а тоа, во конкретниов случај значи дека

$$[\varphi(X_1) = \varphi(X_2) \Rightarrow X_1 = X_2] \Leftrightarrow [X_1 \neq X_2 \Rightarrow \varphi(X_1) \neq \varphi(X_2)].$$

Доказот можевме да го спроведеме и директно, без да го користиме овој закон. Обиди се да го направиш тоа сам!

За илустрација на овој признак ќе дадеме еден пример.

Пример 6. Нека $\mathbf{a}$ е даден вектор и нека $\varphi : \Pi \to \Pi$ е пресликувањето, дефинирано со:

$$\varphi(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \mathbf{a}$$

за секоја точка A. Да провериме дали ова пресликување е инјекција.

Нека $\varphi(A) = \varphi(B) = C$; тоа значи дека $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$, од каде што следува $A = B$, т.е. φ е инјекција.

За едно пресликување $\psi : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ ќе велиме дека е *сурјекција*, ако секој елемент од множеството $\mathbf{G}$ е слика барем на еден елемент од множеството $\mathbf{F}$, т.е. напишано со симболи:

$$(\forall Y \in \mathbf{G})(\exists X \in \mathbf{F})\, Y = \psi(X).$$

Такви се пресликувањата од примерите 1 и 5.

Ако едно пресликување е истовремено и инјекција и сурјекција, тогаш, него ќе го викаме *биекција*.

Ако едно пресликување $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ е биекција, тогаш секоја точка од $\mathbf{G}$ е слика точно на една точка од $\mathbf{F}$. Поради тоа, со помош на пресликувањето $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$, можеме да дефинираме ново пресликување ψ од $\mathbf{G}$ во $\mathbf{F}$ на следниов начин:

$$(\forall Y \in \mathbf{G})\, \psi(Y) = X \Leftrightarrow Y = \varphi(X). \tag{4}$$

Пресликувањето $\psi : \mathbf{G} \to \mathbf{F}$ определено со (4), исто така, е биекција. Него ќе го викаме *инверзна биекција* на биекцијата φ и ќе го означуваме со φ^{-1}.

Секое пресликување од едно множество $\mathbf{F}$ во себе, $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{F}$, се вика *трансформација* на множеството $\mathbf{F}$. Ваквите пресликувања се од посебен интерес за геометријата.

Задачи

1. Нека $\mathbf{F}$ е еден исполнет правоаголен триаголник (т.е. триаголник со неговата внатрешност), а $\mathbf{G}$ множеството точки од неговите страни. Нека φ е следниов пропис: на секоја точка X од $\mathbf{F}$ да ѝ се придружи најблиската точка од $\mathbf{G}$.

Дали φ е пресликување? Зошто?

2. Нека $\mathbf{F}$ е еден исполнет правоаголен триаголник, $\mathbf{G}$ множеството точки од неговите страни, а φ е ортогонално проектирање врз хипотенузата.

Покажи дека φ е пресликување од $\mathbf{F}$ во $\mathbf{G}$. Дали е φ: а) инјекција, б) сурјекција?

3. Нека (O,r) е кружница со центар во O и радиус r. На секоја точка X од рамнината Π да ѝ ја придружиме пресечната точка на кружницата и полуправата OX. Дали со тој пропис е дефинирано пресликување:

а) од Π во (O,r).

б) од $\Pi\setminus\{O\}$ во (O,r)?

в) од (O,r) во (O,r)?

4. Покажи дека пресликувањето φ од примерот 6 е биекција, а потоа најди ја инверзната биекција φ^{-1}.

5. Нека O е фиксна точка во рамнината Π. На произволна точка A ѝ ја придружуваме онаа точка A' од полуправата OA, што го задоволува условот $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=1$. Дали со тој пропис е дефинирано пресликување:

а) од Π во Π?
б) од Π во $\Pi\setminus\{O\}$?
в) од $\Pi\setminus\{O\}$ во Π?
г) од $\Pi\setminus\{O\}$ во $\Pi\setminus\{O\}$?

Во случај на потврден одговор, кое од пресликувањата е: инјекција, сурјекција биекција? За пресликувањето што е биекција, да се најде инверзната.

1.2. Геометриски трансформации

Како што спомнавме, секое пресликување φ од рамнината Π во себе се вика *трансформација* на множеството Π. Трансформациите на Π се викаат уште и *геометриски трансформации*, но ние ќе ги викаме, кратко, трансформации.

Секако, постои барем една трансформација на рамнината Π-тоа е трансформацијата којашто секоја точка X ја пресликува во себе. Таа трансформација ќе ја викаме *идентична трансформација* и ќе ја означуваме со ε. Значи:

$$\varepsilon(X)=X$$

за секоја точка X.

Според тоа, множеството трансформации на рамнината Π не е празно.

Нека φ и ψ се две трансформации на Π и нека A е произволна точка од Π. Ако $\varphi(A)=B$, $\psi(B)=C$, тогаш, придружувајќи ѝ ја точката C на точката A, добиваме нова трансформација на Π. Таа трансформација е добиена со последователно применување на φ и ψ

(по ред) и ќе ја викаме *состав*[1]) од трансформациите φ и ψ, а ќе ја означуваме со $\varphi \circ \psi$. Значи:

$$(\varphi \circ \psi)\ (X) = \psi(\varphi(X))$$

за секоја точка X.

Да ги разгледаме составите $\varepsilon \circ \varphi$ и $\varphi \circ \varepsilon$, каде што φ е произволна трансформација на Π, а ε идентичната. Ако $\varphi(X) = X'$, за произволна точка X, тогаш имаме:

$$(\varepsilon \circ \varphi)(X) = \varphi(\varepsilon(X)) = \varphi(X) = X',$$
$$(\varphi \circ \varepsilon)(X) = \varepsilon(\varphi(X)) = \varepsilon(X') = X',$$

што значи дека

$$\varepsilon \circ \varphi = \varphi = \varphi \circ \varepsilon .$$

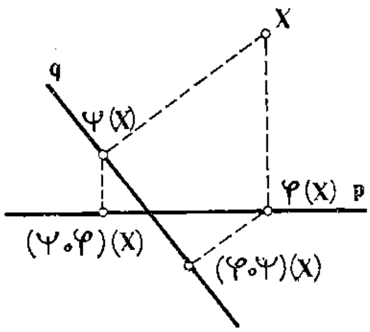
Да забележиме дека составите $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$ се трансформации, за произволни трансформации φ и ψ, но не мора да се еднакви. На пример, ако φ: $\Pi \to \Pi$ и ψ: $\Pi \to \Pi$ се ортогонални проектирања на точките од Π врз две непаралелни прави p и q (црт. 6), тогаш трансформациите $\varphi \circ \psi$ и $\psi \circ \varphi$ се различни.

Нека се дадени три трансформации φ, ψ, τ на рамнината Π. Можеме да ги формираме составите $\varphi \circ (\psi \circ \tau)$ и $(\varphi \circ \psi) \circ \tau$. Да провериме дали овие трансформации се еднакви.

Нека X е произволна точка од Π и нека $\varphi(X) = X'$, $\psi(X') = X''$, $\tau(X'') = X'''$. Тогаш имаме:

$$(\varphi \circ (\psi \circ \tau))(X) = (\psi \circ \tau)(\varphi(X)) = (\psi \circ \tau)(X') = \tau(\psi(X')) = \tau(X'') = X''',$$

$$((\varphi \circ \psi) \circ \tau)(X) = \tau((\varphi \circ \psi)(X)) = \tau(\psi(\varphi(X))) = \tau(\psi(X')) = \tau(X'') = X'''.$$



Црт. 6

Значи, трансформациите $\varphi \circ (\psi \circ \tau)$ и $(\varphi \circ \psi) \circ \tau$ се еднакви, т.е. операцијата состав на трансформации е асоцијативна.

Ако е дадена трансформацијата φ во Π, секако, можеме да го разгледуваме составот $\varphi \circ \varphi$ којшто ќе го означуваме со φ^2. Може да се случи трансформацијата φ^2 да биде идентичната, т.е. да важи равенството $\varphi^2 = \varepsilon$. На пример, нека O е фиксирана точка во рамнината и нека ја дефинираме трансформацијата φ со:

$$\varphi(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA'}$$

[1]) Во некои книги се вели *производ* или *композиција* наместо *состав* на трансформации; почесто се користи ознаката $\psi\varphi$ наместо $\varphi \circ \psi$.

за секоја точка A. Да го најдеме составот $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$. Ако $\varphi(A) = A'$, $\varphi(A') = A''$, тогаш имаме $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA''}$, па $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA''}$, т.е. $A'' = A$. Значи, имаме $\varphi^2(A) = A$ за секоја точка A, т.е. $\varphi^2 = \varepsilon$.

Ќе докажеме дека:

Теорема. *Ако трансформација* φ *на* Π *го задоволува условот* $\varphi^2 = \varepsilon$, *тогаш* φ *е биекција.*

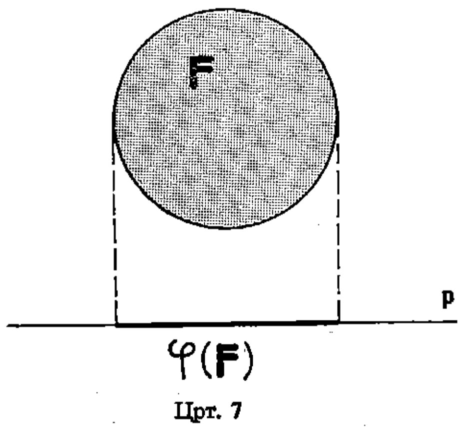
Да покажеме прво дека φ е инјекција. Нека $\varphi(A) = \varphi(B)$; тогаш имаме $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(\varphi(B))$, т.е. $\varphi^2(A) = \varphi^2(B)$, од каде што добиваме $A = B$, а тоа значи дека φ е инјекција.

Да покажеме сега дека φ е и сурјекција. Нека C е произволна точка во Π и нека $\varphi(C) = A$. Тогаш имаме $\varphi(\varphi(C)) = \varphi(A)$, $\varphi^2(C) = \varphi(A)$, т.е. $C = \varphi(A)$, а тоа значи дека φ е сурјекција. Следствено, φ е биекција.

Натаму ќе го користиме и следниов поим. Ако точката A со трансформацијата φ се пресликува во себе, т.е. ако $\varphi(A) = A$, тогаш A се вика *неподвижна* или *фиксна точка* за φ.

Исто така, ако φ е трансформација на рамнината Π, а $\mathbf{F}$ е некоја фигура, тогаш множеството точки што се слики при φ на точките од $\mathbf{F}$ е фигура, која ќе ја означуваме со $\varphi(\mathbf{F})$. Значи,

$$\varphi(\mathbf{F}) = \{\varphi(X) \mid X \in \mathbf{F}\}.$$



Црт. 7

Така, на пример, ако φ е трансформацијата од примерот 1, т.е. φ е „ортогонално проектирање врз правата p", и

1^0 ако $\mathbf{F}$ е круг, тогаш, $\varphi(\mathbf{F})$ е отсечка (црт. 7);

2^0 ако $\mathbf{F}$ е права што не е нормална на p, тогаш $\varphi(\mathbf{F}) = p$.

Задачи

1. Нека $\mathbf{F}$ е правоаголниот триаголник ABC и нека φ е ортогонално проектирање врз катетата AC а ψ ортогонално проектирање врз катетата BC.

Да се покаже дека φ и ψ се трансформации на множеството $\mathbf{F}$.

Да се најдат составите $\varphi\circ\psi$ и $\varphi\circ\psi$. Дали $\varphi\circ\psi=\psi\circ\varphi$?

2. Нека $\mathbf{F}$ е рамностраниот триаголник ABC и нека φ е ортогонално проектирање врз основата AB. Да се покаже дека φ е трансформација на множеството $\mathbf{F}$ и да се најде составот φ^2.

3. Нека $\mathbf{F}=\{A, B, C, D\}$, каде што A, B, C и D се темиња на еден квадрат и нека трансформациите φ и ψ на $\mathbf{F}$ се дефинирани со:

$$\varphi: A\to B,\ B\to C,\ C\to D,\ D\to A,$$
$$\psi: A\to C, B\to D,\ C\to A,\ D\to B.$$

Да се најдат составите $\varphi\circ\psi$ и $\psi\circ\varphi$.

4. Нека $\mathbf{F}=\{A, B, C, D\}$ каде што A, B, C и D се темиња на еден квадрат и нека трансформациите φ и ψ на $\mathbf{F}$ се дефинирани со:

$$\varphi: A\to A,\ B\to D,\ C\to C,\ D\to B;$$
$$\psi: A\to B,\ B\to A,\ C\to D,\ D\to C.$$

Да се најдат составите: φ^2, ψ^2, $\varphi\circ\psi$, $\psi\circ\varphi$. Дали $\varphi\circ\psi=\psi\circ\varphi$?
Кои од тие состави се биекции?

5. Нека φ, ψ се трансформации на множеството $\mathbf{F}$. Покажи дека, ако φ и ψ се биекции, тогаш и $\varphi\circ\psi$, $\psi\circ\psi$ се биекции.

§ 2. Транслација

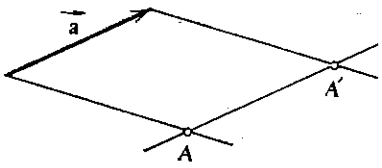
2.1. Дефиниција и својства на транслација

Нека е даден еден вектор $\mathbf{a}$. Ако A е произволна точка во рамнината Π, тогаш постои единствен вектор $\overrightarrow{AA'}$, којшто е еднаков со векторот $\mathbf{a}$. Значи, за секоја точка A постои единствена точка A' така што $\overrightarrow{AA'}=\mathbf{a}$, а тоа значи дека, ако на точката A ѝ ја придружиме точката A', тогаш добиваме една трансформација на рамнината Π. Оваа трансформација ќе ја викаме *транслација за вектор* $\mathbf{a}$ или само *транслација* и ќе ја означуваме со $\tau_{\mathbf{a}}$. Според тоа, транслација за вектор $\mathbf{a}$ е трансформацијата $\tau_{\mathbf{a}}\colon \Pi\to\Pi$ дефинирана со:

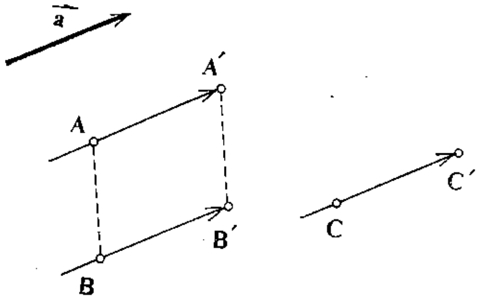
$$\tau_{\mathbf{a}}(A)=A' \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'}=\mathbf{a},$$

за секоја точка A (црт. 1).

Од дефиницијата на транслација гледаме дека на секој вектор $\mathbf{a}$ му одговара една транслација, имено, транслатацијата $\tau_{\mathbf{a}}$. Специјално, ако $\mathbf{a}$ е нултиот вектор, т.е. $\mathbf{a}=\mathbf{o}$, тогаш транслацијата $\tau_{\mathbf{o}}$ е идентичната трансформација, зашто од равенството $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{o}$ следува дека $A=A'$. Значи, постои барем една транслација што е биекција. Да провериме дали транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$ за произволен вектор $\mathbf{a}$ е биекција.



Црт. 1



Црт. 2

Нека A и B се две различни точки и нека $\tau_{\mathbf{a}}(A)=A'$, $\tau_{\mathbf{a}}(B)=B'$ (црт. 2). Тогаш имаме $\overrightarrow{AA'}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BB'}=\mathbf{a}$, т.е. $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$. Од ова следува дека четириаголникот $AA'B'B$ е паралелограм, па $A'\neq B'$, што значи дека транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$ е инјекција.

Нека C' е произволна точка од П. Да го конструираме векторот $\overrightarrow{CC'}=\mathbf{a}$(црт. 2). Тогаш имаме $\tau_{\mathbf{a}}(C)=C'$, што значи транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$ е сурјекција.

Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 1. *Секоја транслација* $\tau_{\mathbf{a}}$ *е биекција.*

Од оваа теорема следува дека за транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$ постои и инверзната биекција $\overset{-1}{\tau_{\mathbf{a}}}$. Ќе покажеме дека и таа е транслација.

Нека A е произволна точка и нека $\overset{-1}{\tau_{\mathbf{a}}}(A)=A'$. Тоа значи дека $\tau_{\mathbf{a}}(A')=A$, а од дефиницијата на транслација следува дека $\overrightarrow{A'A}=\mathbf{a}$, па, значи, $\overrightarrow{AA'}=-\mathbf{a}$. Користејќи ја пак дефиницијата на транслација, од равенството $\overrightarrow{AA'}=-\mathbf{a}$ следува дека $A'=\tau_{-\mathbf{a}}(A)$. Значи ,за произволна точка A имаме

$$\overset{-1}{\tau_{\mathbf{a}}}(A)=\tau_{-\mathbf{a}}(A),$$

т.е. $\overset{-1}{\tau_{\mathbf{a}}}=\tau_{-\mathbf{a}}$. Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 2. *Ако* $\tau_{\mathbf{a}}$ *е транслација за вектор* $\mathbf{a}$, *тогаш* $\overset{-1}{\tau_{\mathbf{a}}}=\tau_{-\mathbf{a}}$.

Задачи

1. Нека ABC е даден триаголник и нека $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. Да се најдат сликите на темињата A, B и C при транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$.

2. Нека $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ се два неколинеарни вектори и A фиксирана точка. Да се најдат сликите A_1 и A_2 на точката A при трансформациите $\tau_{\mathbf{a}} \circ \tau_{\mathbf{b}}$ и $\tau_{\mathbf{b}} \circ \tau_{\mathbf{a}}$ соодветно. Дали $A_1 = A_2$?

2.2. Слики на некои фигури при транслација

Овде ќе видиме што претставуваат сликите на некои попрости геометриски фигури при дадена транслација.

Нека е дадена отсечката AB и транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$. Ако $\tau_{\mathbf{a}}(A) = A'$, $\tau_{\mathbf{a}}(B) = B'$, тогаш имаме $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{a} = \overrightarrow{BB'}$, од каде што следува дека четириаголникот $AA'B'B$ е паралелограм. Значи, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 3. *При секоја транслација отсечка се пресликува во отсечка еднаква со неа, т.е. ако* $\tau_{\mathbf{a}}(A) = A'$, $\tau_{\mathbf{a}}(B) = B'$, *тогаш* $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.

Од оваа теорема следуваат и редица други. Ќе докажеме некои од нив.

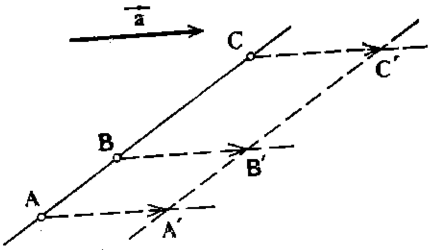
Теорема 4. *Ако A,B,C се три колинеарни точки и ако* $\tau_{\mathbf{a}}(A) = A'$, $\tau_{\mathbf{a}}(B) = B'$, $\tau_{\mathbf{a}}(C) = C'$, *тогаш и точките A',B' и C' се колинеарни. Ако притоа B е средина на отсечката AC, тогаш B' е средина на отсечката $A'C'$.*

Доказ. Ако точките A,B и C се колинеарни, тогаш важи само едно од равенствата

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$,

$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$,

$\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC}$.



Црт. 3

Можеме да претпоставиме дека $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ (црт. 3). Ако $\tau_{\mathbf{a}}(A) = A'$, $\tau_{\mathbf{a}}(B) = B'$, $\tau_{\mathbf{a}}(C) = C'$, тогаш, според Т.3, имаме $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, па заменувајќи во $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$, добиваме

$$\overline{A'C'} = \overline{A'B'} + \overline{B'C'},$$

а тоа значи дека точките A', B' и C' се колинеарни.

Ако, пак, B е средина на отсечката AC, бидејќи четириаголниците $AA'B'B$ и $BB'C'C$ се паралелограми, тогаш од равенството $\overline{AB}=\overline{BC}$ следува дека $\overline{A'B'}=\overline{B'C'}$, т.е. B' е средина на отсечката $A'C'$.

Теорема 5. *Секоја права при транслација се пресликува во права; притоа, правите се паралелни.*

Доказ Нека p е дадена права, $\tau_{\mathbf{a}}$ дадена транслација и нека за $A,B \in p$, $\tau_{\mathbf{a}}(A)=A'$, $\tau_{\mathbf{a}}(B)=B'$.

Да ја разгледаме правата $A'B'=p'$. Ако C е произволна точка од p, тогаш точките A,B и C се колинеарни, па според Т. 4, точките A', B' и $C'=\tau_{\mathbf{a}}(C)$, исто така, се колинеарни, т.е. $C' \in p'$. Значи, $\tau_{\mathbf{a}}(p)=p'$. Притоа, правите p и p' се паралелни, зашто од $\overrightarrow{AA'}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BB'}=\mathbf{a}$, следува $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$.

Да спомнеме уште две теореми кои се докажуваат на сличен начин. Обиди се да ги докажеш сам!

Теорема 6. *Кружницата (O, r) при транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$ се пресликува во кружницата (O', r), каде што $O'=\tau_{\mathbf{a}}(O)$.*

Теорема 7. *Секој агол при транслација се пресликува во нему еднаков агол.*

Задачи

1. Дадена е правата p и векторот $\mathbf{a}$. Конструирај ја правата $p'=\tau_{\mathbf{a}}(p)$.

2. Конструирај ја сликата на кружницата (O, r) при транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$.

3. Конструирај ја сликата од аголот $\measuredangle AOB$ при транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$ и докажи дека двата агла се еднакви.

4. Нека ABC е триаголник, $\tau_{\mathbf{a}}$ транслација и нека $A'=\tau_{\mathbf{a}}(A)$, $B'=\tau_{\mathbf{a}}(B)$, $C'=\tau_{\mathbf{a}}(C)$. Докажи дека триаголниците ABC и $A'B'C'$ се складни.

5. Нека $\mathbf{a}$ е ненулти вектор. Дали постои точка A со својство $\tau_{\mathbf{a}}(A)=A$?

6. Нека $\mathbf{a}$ е ненулти вектор и p права паралелна со $\mathbf{a}$. Докажи дека $\tau_{\mathbf{a}}(p)=p$. Дали постои права q што не е паралелна со $\mathbf{a}$ која се пресликува при транслацијата $\tau_{\mathbf{a}}$ во себе, т.е. $\tau_{\mathbf{a}}(q)=q$?

7. Ако правите p и q се заемно нормални и ако $\tau_{\mathbf{a}}(p)=p'$, $\tau_{\mathbf{a}}(q)=q'$, докажи дека правите p' и q' се заемно нормални.

8. Нека T е тежиштето, а H ортоцентарот на триаголникот ABC. Ако $\tau_{\mathbf{a}}(A)=A'$, $\tau_{\mathbf{a}}(B)=B'$, $\tau_{\mathbf{a}}(C)=C'$, $\tau_{\mathbf{a}}(T)=T'$, $\tau_{\mathbf{a}}(H)=H'$, докажи дека T' е тежиштето, а H' ортоцентарот на триаголникот $A'B'C'$.

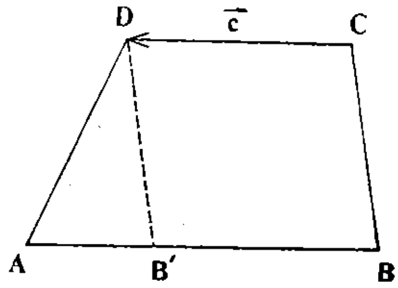
2.3. Примена на транслацијата

На неколку примери ќе покажеме како може да се искористи транслацијата при решавање на некои задачи.

Задача 1. Да се конструира трапез, ако се познати сите негови страни.

Решение. Анализа. Да претпоставиме дека трапезот $ABCD$, со поголема основа $AB = a$, е решение на задачата (црт. 4). Нека $\mathbf{c}=\overrightarrow{CD}$ и нека $\tau_{\mathbf{c}}(B)=B'$. Бидејќи $\tau_{\mathbf{c}}(C)=D$, имаме $\overline{BC}=\overline{B'D}$. Според тоа, за триаголникот $AB'D$ се познати страните $\overline{AD} = d$, $\overline{B'D} = b$ и $\overline{AB'} = a - c$. Значи, триаголникот $AB'D$ може да се конструира.

Конструкција. Да го конструираме триаголникот $AB'D$ со страни $\overline{AD}=d$, $\overline{B'D}=b$ и $\overline{AB}=a-c$. Ако $\mathbf{t}$ е вектор со должина c, колинеарен и исто насочен со векторот $\overrightarrow{AB'}$ и ако $B=\tau_{\mathbf{t}}(B')$ $C = \tau_{\mathbf{t}}(D)$, тогаш $ABCD$ е бараниот трапез.



Црт. 4

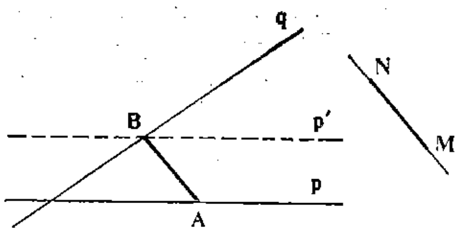
Доказ. Од конструкцијата следува $\overline{CD}=c$, $\overline{BC}=b$, $\overline{AB}=\overline{AB'}+\overline{B'B}= =(a-c)+c=a$ и $\overline{AD}=d$. Значи, конструираниот трапез одговара на зададените услови.

Дискусија. Првата постапка при конструкцијата, т.е. конструкцијата на триаголникот $AB'D$ е изводлива при условот

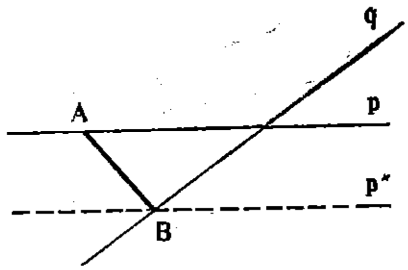
$$|b-d|<a-c<b+d.$$

При овој услов се изводливи еднозначно и другите постапки при конструкцијата, па, значи, ако е исполнет тој услов, задачата има единствено решение. Ако, пак, не е исполнет тој услов, задачата нема решение.

Задача 2. Дадени се правите p, q и отсечката MN. Да се конструира отсечка паралелна и еднаква со отсечката MN, чии крајни точки лежат на дадените прави.



Црт. 5



Црт. 6

Решение. Анализа. Да претпоставиме дека задачата е решена и нека AB е бараната отсечка ($A\in p, B\in q$) (црт. 5). Бидејќи отсечката AB е паралелна и еднаква со отсечката MN, ќе имаме или $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$ или $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NM}$.

Нека $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$ (црт. 5). Ако $\mathbf{a}=\overrightarrow{MN}$, тогаш $B=\tau_{\mathbf{a}}(A)$. Точката $A\in p$, па $B=\tau_{\mathbf{a}}(A)\in\tau_{\mathbf{a}}(p)=p'$. Значи, $B=p'\cap q$.

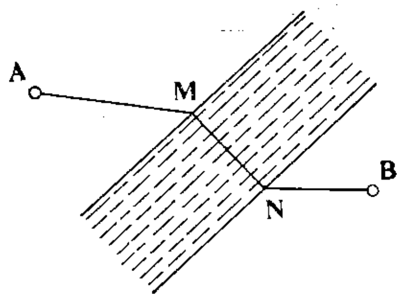
Ако, пак, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NM}$, тогаш $B=p''\cap q$, каде што $p''=\tau_{-\mathbf{a}}(p)$ (црт. 6).

Конструкција. Ги конструираме правите $p'=\tau_{\mathbf{a}}(p)$ и $p''=\tau_{-\mathbf{a}}(p)$, $\mathbf{a}=\overrightarrow{MN}$, и ги наоѓаме точките $B_1=p'\cap q$ и $B_2=p''\cap q$. Ако $A_1=\tau_{-\mathbf{a}}(B_1)$ и $A_2=\tau_{\mathbf{a}}(B_2)$, тогаш A_1B_1 и A_2B_2 се бараните отсечки.

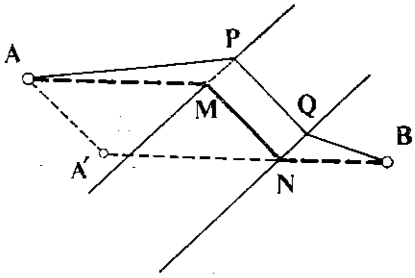
Доказ. Следува од конструкцијата.

Дискусија. Ако правите p и q се сечат задачата има две решенија; ако, пак, $p \parallel q$, задачата има или бесконечно многу решенија или ниедно.

Задача 3. Помеѓу селата A и B има канал со паралелни страни p и q. Каде треба да се направи мост на каналот, така што патот од селото A до селото B да биде најкраток (црт. 7)?

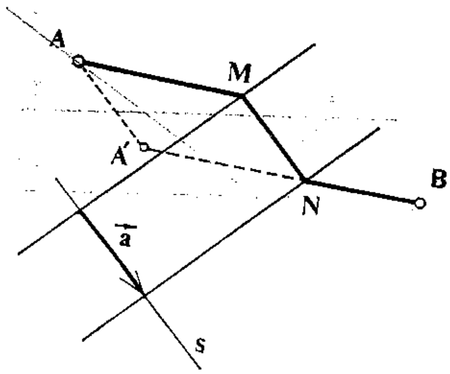


Црт. 7



Црт. 8

Решение. Анализа. Да претпоставиме дека задачата е решена и нека со PQ е претставен мостот (црт. 8). Ако $\mathbf{a}=\overrightarrow{PQ}$, тогаш $\tau_{\mathbf{a}}(P)=Q$. Нека $\tau_{\mathbf{a}}(A)=A'$. Тогаш $APQA'$ е паралелограм, па $\overline{A'Q}=\overline{AP}$. Патот од A до B за да биде најкраток, искршената линија $A'QB$ треба да е најкратка, а тоа е можно ако точките A', Q и B се колинеарни. Значи, $Q=A'B \cap q$.



Црт. 9

Конструкција. Да повлечеме права s нормална на p и q, и нека $R=s \cap p$, $S=s \cap q$ (црт. 9). Нека $\tau_{\mathbf{a}}(A)=A'$, каде што $\mathbf{a}=\overrightarrow{RS}$. Тогаш $N=A'B \cap q$, а $M=\tau_{-\mathbf{a}}(N)$.

Доказ. Треба да докажеме дека патот $AMNB$ (црт. 9) е најкраток. Бидејќи $\overline{MN}$ е константно, патот зависи само од отсечките AM и NB, а нивниот збир е најмал кога точките A', N и B се колинеарни (како што е и конструирано).

Дискусија. Бидејќи точката N е еднозначно определена, следува дека задачата секогаш има единствено решение.

Задачи

1. Над страните AB и CD од паралелограмот $ABCD$ се конструирани квадрати $AA'B'B$ и $DD'C'C$, така што векторите $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{DD'}$ се исто насочени. Ако S_1 и S_2 се центрите на квадратите, докажи дека $\overline{S_1S_2}=\overline{BC}$.

2. Дадени се кружниците k_1 (O_1, r_1), k_2 (O_2, r_2) и една права p. Да се конструира права q паралелна со p, така што кружниците k_1 и k_2 на неа да отсекуваат еднакви тетиви.

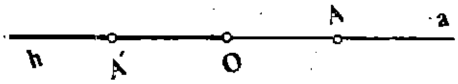
3. Да се конструира кружница која минува низ дадена точка A и допира две паралелни прави p и q.

4. Да се конструира четириаголник, ако се познати три негови агли и две спротивни страни.

§3 Централна симетрија

3.1. Дефиниција на централна симетрија

Нека O е фиксна точка во рамнината П и A произволна точка. Да ја разгледаме правата $a = OA$ и полуправата h од a, со почеток во точката O, што не ја содржи точката A (црт. 1). На полуправата h постои единствена точка A' со својството $\overline{OA} = \overline{OA'}$. За точката A' велиме дека е *симетрична на A во однос на O*. Притоа, симетричната точка на точката O е самата точка O. Поради единственоста на симетричната точка A' на A во однос на точката O, можеме да дефинираме една трансформација во П, придружувајќи ѝ ја на секоја точка A нејзината симетрична точка A' во однос на точката O. Оваа трансформација ќе ја наречеме *централна симетрија во однос на точката O* или само *централна симетрија* и ќе ја означуваме со σ_O. Точката O се вика *центар на σ_O*.



Црт. 1

Ако $\sigma_O(A) = A'$, тогаш векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$ се спротивни, т.е. $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA'}$. Ако, пак, за точките B и B' важи $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OB'}$, тогаш точките B и B' се симетрични во однос на точката O, т.е. $B' = \sigma_O(B)$. Значи, централната симетрија σ_O може да се дефинира и на следниов начин:

Трансформацијата σ_O дефинирана со

$$\sigma_O(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA'}$$

е централна симетрија.

Од дефиницијата на централната симетрија σ_O следува дека, ако $\sigma_O(A) = A'$, тогаш $\sigma_O(A') = A$, па значи:

$$\sigma_O^2(A) = (\sigma_O \circ \sigma_O)(A) = \sigma_O(\sigma_O(A)) = \sigma_O(A') = A,$$

т.е. $\sigma_O^2 = \varepsilon$. Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 1. *За секоја централна симетрија* σ_O *важи* $\sigma_O^2 = \varepsilon$.

Како последица од оваа теорема, според теоремата од **1. 2**, ја добиваме следнава теорема:

Теорема 2. *Секоја централна симетрија е биекција и притоа* $\sigma_O^{-1} = \sigma_O$.

Задачи

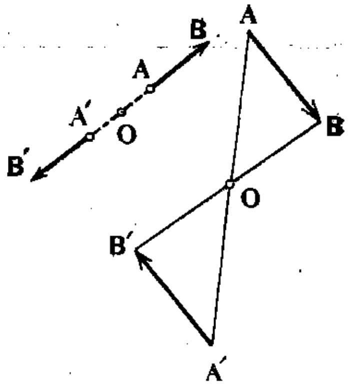
1. Центарот O е неподвижна точка за централната симетрија σ_O (зошто?). Дали постојат и други неподвижни точки за σ_O?

2. Нека σ_1 и σ_2 се централни симетрии со центри O_1 и O_2 соодветно. Избери точка A и најди ги точките $A'=\sigma_1(A)$ и $\sigma_2(A')=A''$. Докажи дека $\overrightarrow{AA''}=2\overrightarrow{O_1O_2}$!

3.2. Слики на некои фигури при централна симетрија

Овде ќе испитаме што претставуваат сликите на некои попрости геометриски фигури при дадена централна симетрија σ_O.

Нека AB е дадена отсечка и нека $\sigma_O(A) = A'$, $\sigma_O(B)=B'$ (црт. 2). Тогаш имаме $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OB'}$, па значи



Црт. 2

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$$
$$= -\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA'} =$$
$$= \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OB'} =$$
$$= \overrightarrow{B'A'} = -\overrightarrow{A'B'},$$

од каде што следува дека

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}.$$

Со тоа ја докажавме и следнава теорема:

Теорема 3. *Секоја отсечка при централна симетрија се пресликува во на неа еднаква отсечка, т. е. ако* AB *е дадена отсечка и ако*

$$\sigma_O(A) = A', \ \sigma_O(B) = B',$$

тогаш $\overline{A'B'} = \overline{AB}$.

Нека сега се дадени три колинеарни точки A, B, C и нека $\sigma_O(A)=A'$, $\sigma_O(B)=B'$, $\sigma_O(C)=C'$. Од колинеарноста на точките A,B и C следува дека векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ се колинеарни, а како што видовме,

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A'B'},\quad \overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{A'C'},$$

што значи дека и векторите $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{A'C'}$ се колинеарни, т.е. точките A', B', C', исто така, се колинеарни. Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 4. *При секоја централна симетрија колинеарни точки се пресликуваат во колинеарни точки, т.е. ако A,B,C се три колинеарни точки и ако $A'=\sigma_O(A)$, $B'=\sigma_O(B)$, $C'=\sigma_O(C)$, тогаш точките A',B' и C', исто така, се колинеарни.*

Нека е дадена една права a и централна симетрија σ_O. Ако A и B се две точки од правата a и ако $\sigma_O(A)=A'$, $\sigma_O(B)=B'$, тогаш според Т.4, следува дека $a'=A'B'=\sigma_O(AB)$. Бидејќи важи $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ следува дека правите a и a' се паралелни. Значи:

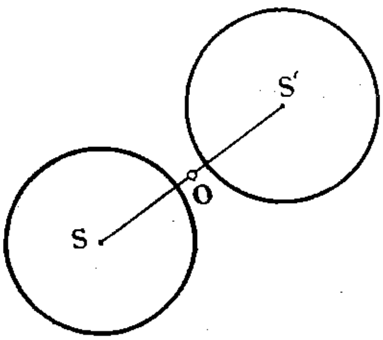
Теорема 5. *Секоја права при централна симетрија се пресликува во права. Притоа, правата и нејзината слика се паралелни.*

Да забележиме, ако правата a минува низ центарот O, тогаш $\sigma_O(a)=a$.

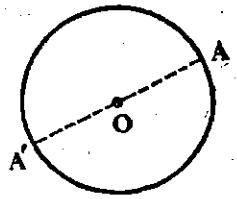
Како последица на Т.3, се добива и следнава теорема:

Теорема 6. *Кружницата $k(S,r)$ при централната симетрија σ_O се пресликува во кружницата $k'(S',r)$, каде што $S'=\sigma_O(S)$.*

Значи, за да ја најдеме кружницата $k'=\sigma_O(k)$, доволно е да ја најдеме точката $S'=\sigma_O(S)$ (црт. 3) и потоа да ја конструираме кружницата со центар во S' и радиус r.



Црт. 3



Црт. 4

Да забележиме и тоа дека ако $S=O$, тогаш, бидејќи $\sigma_O(O)=O$, имаме $\sigma_O(k)=k$, т.е. секоја кружница (O, r) се пресликува во себе, но, притоа, точката A од кружницата (O, r) се пресликува во дијаметрално спротивната точка A' (црт. 4).

Задачи

1. Дадена е правата p и точката O. Конструирај ја правата $p'=\sigma_O(p)$. Во кој случај $p'=p$?

2. Избери произволна фигура $\mathbf{F}$ (на пример, триаголник) и конструирај ја фигурата $\mathbf{F}'=\sigma_O(\mathbf{F})$.

3. Конструирај ја сликата на аголот $\sphericalangle ASB$ при централната симетрија σ_O и докажи дека тие агли се еднакви.

4. Ако $p \perp q$ и ако $\sigma_O(p)=p'$, $\sigma_O(q)=q'$, докажи дека $p' \perp q'$.

5. Ако p е тангента на кружницата $k(S,r)$ и ако $\sigma_O(p)=p'$, $\sigma_O(k)=k'$, докажи дека p' е тангента на кружницата k'. Дали може да биде $p'=p$?

6. Даден е триаголникот ABC. Да се конструира триаголникот $A'B'C'$ што е симетричен со триаголникот ABC во однос на: а) темето A, б) средината A_1 на страната BC, в) тежиштето T на триаголникот ABC.

7. Дадена е транслација $\tau_{\mathbf{a}}$ и централна симетрија σ_O. Избери една точка A и најди ги точките:

$$A'=\sigma_O(A), \quad A''=\tau_{\mathbf{a}}(A'),$$

$$A_1=\tau_{\mathbf{a}}(A), \quad A_2=\sigma_O(A_1).$$

Дали $A_2=A''$?

8. Дадени се две точки A и B. Дали постои централна симетрија σ_O со својства $\sigma_O(A)=B$, $\sigma_O(B)=A$?

9. Нека $\overline{AB}=\overline{CD}$ и $AB \parallel CD$. Дали постои точка O, таква што $\sigma_O(A)=C$, $\sigma_O(B)=D$?

10. Нека ABC е триаголник и нека $\sigma_O(A)=A'$, $\sigma_O(B)=B'$, $\sigma_O(C)=C'$. Што може да се каже за точките $\sigma_O(T)$ и $\sigma_O(H)$, каде што T е тежиштето, а H ортоцентарот на триаголникот ABC?

3.3. Централно симетрични фигури

Да разгледаме два примера.

Пример 1. Нека O е средина на отсечката AB. Тогаш имаме $\sigma_O(A)=B$ и $\sigma_O(B)=A$. Уште повеќе, ако X е произволна точка од AB и ако $\sigma_O(X)=X'$, тогаш, од равенството $\overline{OX}=\overline{OX'}$, следува дека X' ѝ припаѓа на отсечката AB. Затоа, велиме дека точката O е *центар на симетрија* на отсечката AB или дека отсечката AB е *централно симетрична фигура.*

(Дали постои друга точка што е центар на симетрија на отсечката AB?)

Пример 2. Нека a е дадена права и O произволна точка од a. Како што видовме, $\sigma_O(a) = a$, т.е.

$$X \in a \Leftrightarrow \sigma_O(X) = X' \in a.$$

Значи, точката O е центар на симетрија на правата a, т.е. правата a е централно симетрична фигура во однос на произволна точка O од правата a.

(Дали постои точка $O \notin a$ што е центар на симетријата на правата a?)

Нека сега $\mathbf{F}$ е произволна фигура. Ако постои точка O во рамнината Π со својството:

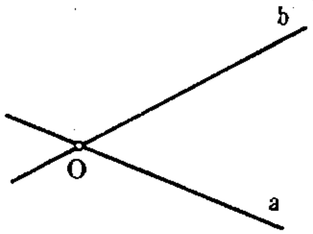
$$X \in \mathbf{F} \Leftrightarrow \sigma_O(X) = X' \in \mathbf{F},$$

тогаш велиме дека фигурата $\mathbf{F}$ е *централно симетрична* или дека точката O е *центар на симетрија* на фигурата $\mathbf{F}$.

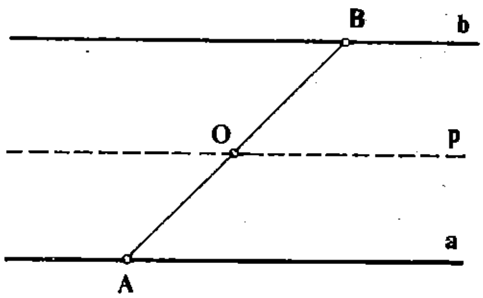
Како што видовме, отсечката AB има само еден центар на симетрија, а правата a има бесконечно многу центри на симетрија.

Да разгледаме уште неколку примери.

Пример 3. Нека $\mathbf{F}$ е фигурата составена од две прави a и b што се сечат (црт. 5). Ако $O = a \cap b$, тогаш имаме $\sigma_O(a) = a$ и $\sigma_O(b) = b$. Значи, O е центар на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$. (Дали оваа фигура има и други центри на симетрија?)



Црт. 5

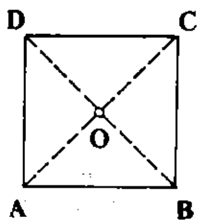


Црт. 6

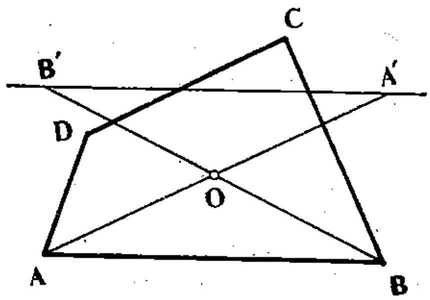
Пример 4. Нека $\mathbf{F}$ е фигурата составена од две паралелни прави a и b (црт. 6). Ако $A \in a, B \in b$ и O е средина на отсечката AB, тогаш имаме $\sigma_O(A) = B$, $\sigma_O(B) = A$, па значи $\sigma_O(a) = b$, $\sigma_O(b) = a$. Значи точката, O е центар на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$. Фигурата $\mathbf{F}$ има и други центри на симетрија — секоја точка од правата p што минува низ O и е паралелна со a и b е центар на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$.

Пример 5. Да разгледаме еден триаголник ABC. Ако O е центар на симетрија на тој триаголник, тогаш отсечката $A'B' = \sigma_O(AB)$ е паралелна и еднаква со страната AB, па, значи, ќе имаме $A' = B$ и $B' = A$, т. е. O е средина на страната AB. Слично, O ќе биде средина и на страната AC, а тоа не е можно. Значи, ниеден триаголник не е централно симетричен.

Пример 6. Нека $ABCD$ е квадрат и O пресекот на неговите дијагонали (црт 7). Точката O е средина на дијагоналите AC и BD, па, значи, $\sigma_O(A) = C$, $\sigma_O(C) = A$, $\sigma_O(B) = D$, $\sigma_O(D) = B$. Но, тогаш $\sigma_O(AB) = CD$ и $\sigma_O(BC) = DA$, т.е. O е центар на симетрија на квадратот $ABCD$. Други центри на симетрија квадратот $ABCD$ нема.



Црт. 7



Црт. 8

Да разгледаме сега произволен четириаголник $ABCD$. Да претпоставиме дека O е центар на симетрија на четириаголникот $ABCD$ (црт. 8). Ако $\sigma_O(A) = A'$, $\sigma_O(B) = B'$, тогаш правите AB и $A'B'$ се паралелни, па, значи, страната AB мора да се преслика во отсечка што лежи на правата CD, зашто, само тие две прави, на кои лежат страните од четириаголникот $ABCD$ можат да бидат паралелни. Слично добиваме дека и правите BC и AD се паралелни. Значи, ако точката O е центар на симетрија на четириаголникот $ABCD$, тогаш тој четириаголник мора да биде паралелограм и точката O мора да биде пресекот на дијагоналите на тој паралелограм.

Обратно, ако $ABCD$ е паралелограм, тогаш точката $O = AC \cap BD$ е центар на симетрија. Докажи го тоа!

Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 7. *Четириаголникот $ABCD$ е централно симетричен ако и само ако е паралелограм.*

Од разгледаните примери гледаме дека една фигура **F** може да биде централно симетрична, но не мора. Ако **F** е централно симетрична, тогаш таа има или само еден центар на симетрија (како, на пример, отсечка) или бесконечно многу (како, на пример, права).

Задачи

1. Дали фигурата $\mathbf{F}=\{A,B,C\}$ може да има центар на симетрија?

2. Дадени се кружниците $k_1(S_1,r_1)$ и $k_2(S_2,r_2)$. Во кој случај фигурата составена од кружниците k_1 и k_2 е централно симетрична?

3. Фигурата $\mathbf{F}=\{A,B,C,D\}$ е централно симетрична. Што може да се каже за положбата на точките A, B, C и D?

4. Дадена е кружница $k(S, r)$, точка A и права p. Во кој случај фигурата формирана од: а) кружницата и точката, б) кружницата и правата, е централно симетрична?

5. Докажи дека при секоја централна симетрија триаголник се пресликува во складен триаголник.

6. Нека A_1, B_1, C_1 се средини на страните BC, CA и AB од триаголникот ABC, а T тежиштето на тој триаголник. Ако A_2, B_2 и C_2 се средини на отсечките TA, TB и TC соодветно, докажи дека триаголниците $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ се складни.

7. Ако O_1 и O_2 се центри на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$, докажи дека $O_3=\sigma_{O1}(O_2)$ е, исто така, центар на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$.

8. Докажи дека, ако една фигура $\mathbf{F}$ е централно симетрична, тогаш таа има или само еден центар на симетрија или, пак, бескрајно многу.

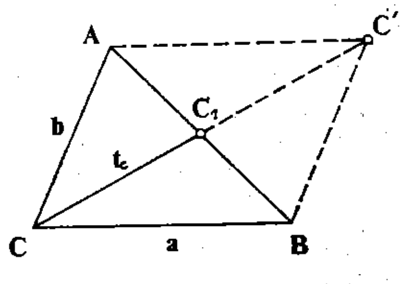
3.4. Примена на централната симетрија

Ќе решиме неколку задачи од кои ќе може да се види како може централната симетрија да се искористи при решавање на некои задачи.

Задача 1. Да се конструира триаголник ABC ако се познати страните a, b и тежишната линија t_c.

Решение. Анализа. Да претпоставиме дека триаголникот ABC е конструиран (црт. 9). Ако σ_1 е централната симетрија во однос на средината C_1 на страната AB, тогаш имаме

$$\sigma_1(A)=B,\ \sigma_1(B)=A.$$



Црт. 9

Ако $\sigma_1(C) = C'$, тогаш четириаголникот $ACBC'$ е централно симетричен, па, значи, тој е паралелограм. За него се познати страните $\overline{CA} = b$, $\overline{CB} = a$ и дијагоналата $\overline{CC'}=2t_c$, па тој може да се конструира.

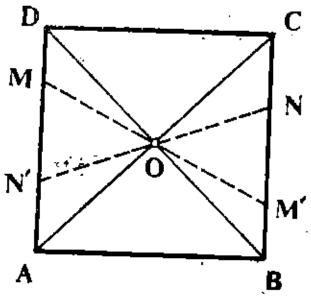
Конструкција. Конструираме паралелограм $ACBC'$ со страни $\overline{AC} = b$, $\overline{BC} = a$ и дијагонала $\overline{CC'}=2t_c$. Бараниот триаголник е триаголникот ABC.

Доказ. Следува од конструкцијата.

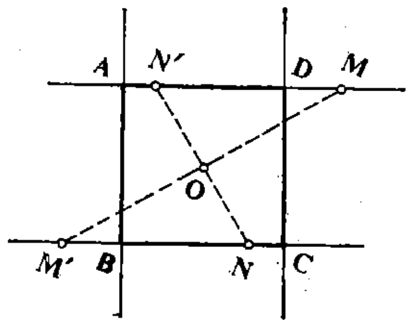
Дискусија. Паралелограмот може да се конструира ако е исполнет условот $|a-b| < 2t_c < a+b$ и, во тој случај, тој со дадените елементи е еднозначно определен. Значи, ако е исполнет условот $|a-b| < 2t_c < a+b$ тогаш задачата има единствено решение.

Задача 2. Дадени се точките M, N и O. Да се конструира квадрат со центар во O, така што две негови спротивни страни или нивните продолженија да минуваат низ M и N соодветно.

Решение. Анализа. Да претпоставиме дека $ABCD$ е бараниот квадрат (црт. 10). Ако O е центарот на квадратот, тогаш O е центар на симетрија на квадратот. Значи, ако M е точка од страната AD, тогаш $M' = \sigma_O(M)$ ќе лежи на спротивната страна BC.



Црт. 10



Црт. 11

Конструкција. Ако ги најдеме точките $M' = \sigma_O(M)$ и $N' = \sigma_O(N)$, тогаш темињата A и D ќе лежат на правата MN', а темињата B и C ќе лежат на правата NM'. Значи, страната на квадратот е еднаква со растојанието меѓу правите MN' и NM', а бидејќи центарот O е познат, квадратот може да се конструира (црт. 11).

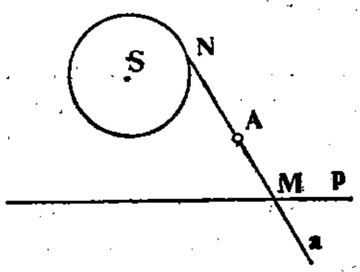
Доказ. Доказот следува од конструкцијата.

Дискусија. Ако точките M, N и O не се колинеарни, задачата има единствено решение. Ако, пак, точките M, N и O се колинеарни, тогаш задачата има или бесконечно многу решенија или нема ниедно. Имено, ако O е средина на отсечката MN, тогаш на секој пар паралелни прави што минуваат низ M и N ќе одговара еден квадрат, чии две спротивни страни лежат на тие прави. Ако, пак, O не е средина на отсечката MN, тогаш не е можно да се конструира квадрат со бараните својства, т.е. задачата нема решение.

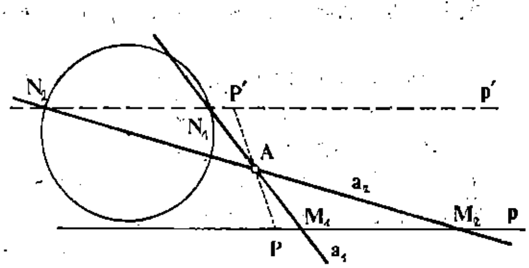
Задача 3. Дадени се права p, кружницата $k(S, r)$ и точката A. Низ точката A да се повлече права a, така што A да биде средина на отсечката MN, каде што $M = p \cap a$, $N \in k \cap a$.

Решение Анализа. Да претпоставиме дека задачата е решена (црт. 12). Бидејќи A е средина на отсечката MN ќе имаме $\sigma_A(M) = N$. Точката M лежи на правата p, па точката $N = \sigma_A(M)$ ќе лежи на правата $p' = \sigma_A(p)$ (како што знаеме, p' е паралелна со p). Од ова следува дека $N \in p' \cap k$.

Конструкција. Ја наоѓаме правата $p'=\sigma_A(p)$. Тоа можеме да го направиме на следниов начин: Избираме една точка P од p, ја наоѓаме точката $P'=\sigma_A(P)$ и ја повлекуваме правата p' што минува низ точката P' и е паралелна со p (црт. 13). Ако $N\in p'\cap k$, тогаш бараната права е правата AN.



Црт. 12



Црт. 13

Доказ. Следува од анализата и конструкцијата.

Дискусија. Задачата има две, едно или ниедно решение, во зависнос од тоа дали правата $p'=\sigma_A(p)$ и кружницата k имаат две, една или ниедна заедничка точка.

Задачи

1. Правата p што минува низ пресекот O на дијагоналите од паралелограмот $ABCD$ ги сече страните AB и CD во точките E и F. Докажи дека $\overline{AE}=\overline{CF}$

2. Даден е четириаголник $ABCD$ и една точка M. Да се покаже дека точките P,Q,R и S што се симетрични на M во однос на средините на страните од четириаголникот $ABCD$ се темиња на еден паралелограм.

3. Над страните на еден паралелограм, надвор од него, конструирани се правилни петаголници. Да се покаже дека нивните центри се темињата на еден паралелограм.

4. Да се конструира триаголник ABC, ако се познати: темето A, тежиштето T и правите p и q на кои лежат страните AB и AC.

5. Дадени се правите p и q и точката A. Низ точката A да се повлече права a, така што A да е средина на отсечката MN, каде што $M=a\cap p$, $N=a\cap q$.

6. Нека кружниците $k_1(O_1,r_1)$ и $k_2(O_2,r_2)$ се сечат во точката A. Низ точката A да се повлече права a на која кружниците k_1 и k_2 отсекуваат еднакви тетиви.

7. Дадени се точките O_1,O_2,O_3 и O_4 и отсечката A_0B_0. Нека σ_i е централна симетрија во однос на точката O_i, $i=1,2,3,4$ и нека

$$A_1B_1=\sigma_1(A_0B_0),\ A_2B_2=\sigma_2(A_1B_1),$$

$$A_3B_3=\sigma_3(A_2B_2),\ A_4B_4=\sigma_4(A_3B_3).$$

Докажи дека $\overline{A_0A_4}=\overline{B_0B_4}$.

8. Дадени се точките A,B,C и M. Најди ги точките

$$\sigma_A(M)=M_1,\ \sigma_B(M_1)=M_2,\ \sigma_C(M_2)=M_3,$$

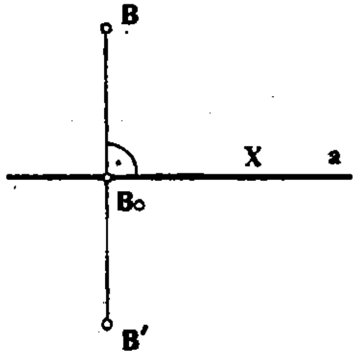
$$\sigma_A(M_3)=M_4,\ \sigma_B(M_4)=M_5,\ \sigma_C(M_5)=M_6.$$

Докажи дека $M_6\equiv M$.

§ 4. Осна симетрија

4.1. Дефиниција на осна симетрија

Нека a е фиксна права во рамнината П, а B произволна точка. Да ја повлечеме правата b што минува низ точката B и е нормална на правата a (таква права, како што знаеме, има само една). Нека $B_0 = a \cap b$. На правата b постои единствена точка B', таква што $\overline{BB_0} = \overline{B_0B'}$, што значи, B и B' со еднакво оддалечени од правата a и се на различни страни од неа (црт. 1). За точката B' ќе велиме дека е *симетрична* на B во однос на правата a. Притоа, симетричната точка на произволна точка X од правата a е самата точка X.



Црт. 1

Поради единственоста на симетричната точка B' на точката B во однос на правата a, можеме да дефинираме една трансформација во П, придружувајќи ѝ ја на секоја точка B нејзината симетрична точка B' во однос на правата a. Оваа трансформација ќе ја наречеме *осна симетрија* во однос на правата a и ќе ја означуваме со σ_a. Значи, $\sigma_a(B) = B' \Leftrightarrow B'$ е симетричната точка на B во однос на правата a.

Од самата дефиниција на осната симетрија следува дека, ако $\sigma_a(A) = A'$, тогаш $\sigma_a(A') = A$, па значи,

$$\sigma_a^2(A) = (\sigma_a \circ \sigma_a)(A) = \sigma_a(\sigma_a(A)) = \sigma_a(A') = A,$$

т.е. $\sigma_a^2 = \varepsilon$. Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 1. *За секоја осна симетрија* σ_a *важи* $\sigma_a^2 = \varepsilon$.

Користејќи ја теоремата од **1.2**, како последица од Т. 1, се дообива и следнава теорема:

Теорема 2. *Секоја осна симетрија* σ_a *е биекција и, притоа,* $\sigma_a^{-1} = \sigma_a$.

Да забележиме и тоа дека ако X е точка од правата a, тогаш $\sigma_a(X) = X$.

Задачи

1. Кои точки се неподвижни за осната симетрија σ_a?

2. Правите a и b се паралелни и d е нивното растојание. Избери една точка A и најди ги точките $A' = \sigma_a(A)$, $A'' = \sigma_b(A')$. Докажи дека $\overline{AA''} = 2d$.

3. Правите a и b се заемно нормални. Избери една точка A и најди ги точките $A' = \sigma_a(A)$, $A'' = \sigma_b(A')$. Ако $O = a \cap b$, докажи дека точките A, O и A'' се колинеарни и дека $\sigma_O(A) = A''$.

4. Правите a и b се заемно нормални. Избери точка A и најди ги точките:

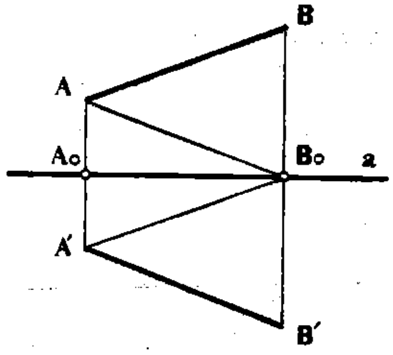
$$A' = \sigma_a(A), \quad A'' = \sigma_b(A'),$$
$$A_1 = \sigma_b(A), \quad A_2 = \sigma_a(A_1).$$

Докажи дека $A_2 \equiv A$.

4.2. Слики на некои фигури при осна симетрија

Овде, како и кај транслацијата и централната симетрија, ќе испитаме што претставуваат сликите на некои попрости геометриски фигури при дадена осна симетрија.

Нека AB е дадена отсечка и нека $\sigma_a(A) = A'$, $\sigma_a(B) = B'$ (црт. 2). Ќе покажеме дека должината на отсечката $A'B'$ е еднаква со должината на отсечката AB. Навистина, триаголниците AA_0B_0 и $A'A_0B_0$ се складни (зошто?), па $\sphericalangle AB_0A_0 = \sphericalangle A'B_0A_0$ и $\overline{AB_0} = \overline{A'B_0}$. Од тоа, пак, следува дека $\sphericalangle AB_0B = \sphericalangle A'B_0B'$. Значи, за триаголниците AB_0B и $A'B_0B'$ имаме:



Црт. 2

$$\overline{AB_0} = \overline{A'B_0}, \ \overline{B_0B} = \overline{B_0B'},$$
$$\sphericalangle AB_0B = \sphericalangle A'B_0B',$$

па, според правилото CAC, следува дека овие триаголници се складни, а од тоа

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}.$$

Го разгледавме случајот кога и двете точки A и B лежат од иста страна на правата a, а истовремено и случајот, кога една од точките е на правата a. Разгледај го и преостанатиот случај, кога точките A и B се на различни страни од правата a!

Со тоа е докажана следнава теорема:

Теорема 3. *Ако A и B се две дадени точки и ако $\sigma_a(A) = A'$, $\sigma_a(B) = B'$, тогаш $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.*

Како последица од оваа теорема се добива и следнава теорема:

Теорема 4. *При секоја осна симетрија колинеарни точки се пресликуваат во колинеарни точки, т.е. ако A,B,C се три колинеарни точки и ако $\sigma_a(A) = A'$, $\sigma_a(B) = B'$ и $\sigma_a(C) = C'$, тогаш и точките A', B' и C' се колинеарни.*

Докажи ја оваа теорема на сличен начин како и соодветната теорема при транслација.

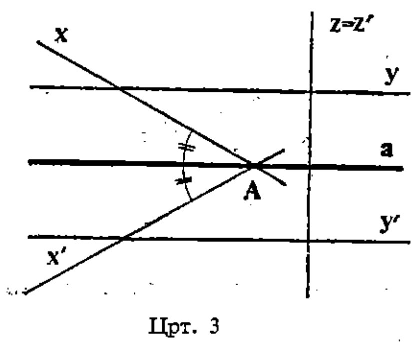
Од Т. 4. можеме да заклучиме дека, ако x е произволна права и σ_a дадена осна симетрија, тогаш $\sigma_a(x)$ е права.

Ако, $x = a$, тогаш за секоја точка $X \in a$, имаме $\sigma_a(X) = X$, па значи и $\sigma_a(a) = a$.

Ако, пак, правите x и a се сечат, на пример, $x \cap a = A$, тогаш имаме $\sigma_a(A) = A$, па значи и правата $\sigma_a(x) = x'$ минува низ точката A. Притоа, x и x' зафаќаат еднакви агли со a (црт. 3).

Ако правата y е паралелна со правата a, тогаш и правата $y' = \sigma_a(y)$ ќе биде паралелна со нив (црт. 3).

Ако правата z е нормална на правата a, тогаш $\sigma_a(z) = z$ (црт. 3).



Црт. 3

Значи, да заклучиме:

Теорема 5. *При секоја осна симетрија σ_a права x се пресликува во права x'. Притоа:*

(1) $\sigma_a(a) = a$,

(2) $x \perp a \Rightarrow \sigma_a(x) = x$,

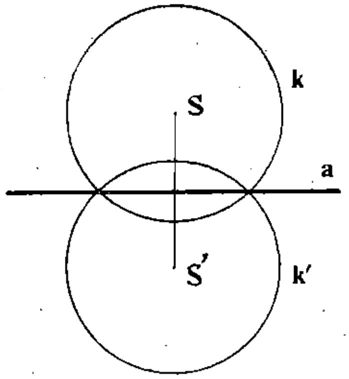
(3) $x \parallel a \Rightarrow \sigma_a(x) \parallel a$,

(4) $x \nparallel a \Rightarrow \sigma_a(x) \cap x \in a$.

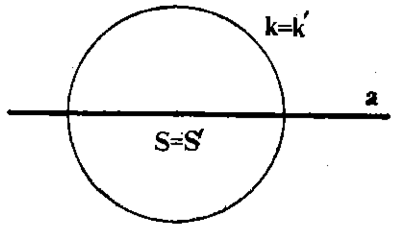
Како последица од Т. 3 се добива и следнава теорема:

Теорема 6. *Секоја кружница $k(S, r)$ при оснатa симетрија σ_a се пресликува во кружницата $k(S', r)$, каде што $S' = \sigma_a(S)$.*

За да ја најдеме кружницата $k' = \sigma_a(k)$, доволно е да ја најдеме точката $S' = \sigma_a(S)$ (црт. 4) и потоа, да ја конструираме кружницата со центар во S' и радиус r. Да забележиме и тоа дека, ако $S \in a$, тогаш $\sigma_a(S) = S$, па значи $\sigma_a(k) = k$, т. е. секоја кружница со центар на правата a при осната симетрија σ_a се пресликува во себе, но притоа само две точки од кружницата се неподвижни (црт. 5).



Црт. 4



Црт. 5

Задачи

1. Дадена е правата a. Кои прави x се неподвижни за осната симетрија σ_a, т.е. $\sigma_a(x)=x$? Кои кружници k се неподвижни за σ_a?

2. Дадени се две точки A и B. Дали постои осна симетрија со својството $\sigma_a(A) = B$?

3. Дадени се две прави p и q. Дали постои осна симетрија σ_a со својството $\sigma_a(p)=q$, $\sigma_a(q)=p$?

4. Избери еден агол $\sphericalangle ASB$ и една права a. Конструирај ја сликата на аголот при осната симетрија σ_a. Докажи дека двата агла се складни.

5. Избери три неколинеарни точки A, B, C и една права a. Најди ги точките $A'=\sigma_a(A)$, $B'=\sigma_a(B)$ и $C'=\sigma_a(C)$. Докажи дека триаголниците ABC и $A'B'C'$ се складни.

6. Дадени се две отсечки AB и CD. Во кој случај постои осна симетрија σ_a која отсечката AB ја пресликува во отсечката CD?

7. Дадени се две кружници $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$. Во кој случај постои осна симетрија σ_a со својството $\sigma_a(k_1)=k_2$?

4.3. Основиметрични фигури

Во претходниот параграф видовме дека постојат некои геометриски фигури (на пример, квадрат) што имаат својство при некоја централна симетрија да се пресликаат сами во себе. Овде ќе разгледаме некои фигури што имаат својство при некоја осна симетрија да се пресликаат сами во себе. Таква фигура е, на пример, кружницата.

Ако a е права што минува низ центарот S на кружницата (S, r), тогаш, како што видовме, $\sigma_a(k) = k$.

Нека $\mathbf{F}$ е дадена фигура. Ако постои права a со стојството $\sigma_a(\mathbf{F}) = \mathbf{F}$, т.е.

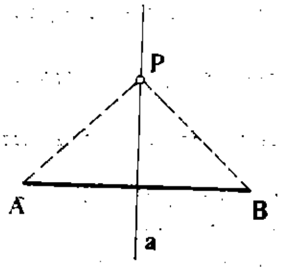
$$X \in \mathbf{F} \Leftrightarrow \sigma_a(X) \in \mathbf{F},$$

тогаш за фигурата $\mathbf{F}$ ќе велиме дека е *оснoсиметрична* и дека a е *оска на симетрија* на фигурата $\mathbf{F}$.

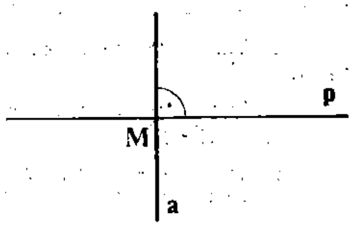
Значи, секоја кружница $k(S, r)$ е оснoсиметрична, зашто секоја права што минува низ центарот S е оска на симетрија за кружницата. Да разгледаме уште неколку примери.

Пример 1. Нека AB е дадена отсечка и нека M е средината на AB, а a права што минува низ M и е нормална на правата AB (црт. 6). Тогаш $\sigma_a(A) = B$, $\sigma_a(B) = A$ и, ако X е произволна точка од отсечката AB, $X' = \sigma_a(X)$ ѝ припаѓа на отсечката AB. Значи, правата a е оска на симетрија на отсечката AB, т.е. секоја отсечка е оснoсиметрична фигура. Правата a се вика уште и *симетрала на отсечката* AB.

Да забележиме дека произволна точка P од симетралата a е еднакво оддалечена од точките A и B, зашто $\sigma_a(PA) = PB$. Уште повеќе, геометриското место на точки што се еднакво оддалечени од точките A и B е токму симетралата на отсечката AB. Навистина, ако P е точка што е еднакво оддалечена од A и B, тогаш триаголникот APB е рамнокрак, па нормалата на AB, спуштена од P, е симетрала на AB, т.е. $P \in a$.



Црт. 6



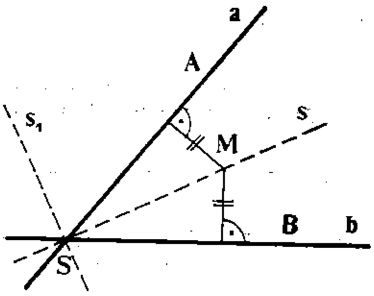
Црт. 7

Пример 2. Нека p е произволна права, а a права што е нормална на p (црт. 7). Тогаш, имаме $\sigma_a(p) = p$, па значи, a е оска на симетрија на правата p, т.е. правата p е оснoсиметрична фигура.

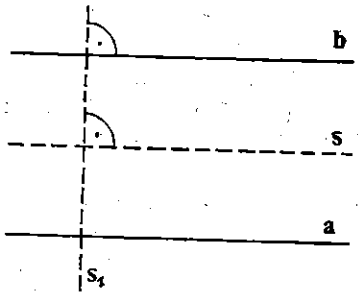
Колку оски на симетрија има правата p?

Пример 3. Нека a и b се две прави што се сечат, $a \cap b = S$ и нека M е точка што е еднакво оддалечена од правите a и b (црт. 8). Ако $s = SM$, тогаш имаме $\sigma_s(a) = b$, $\sigma_s(b) = a$ (зошто?), т. е. s е оска на симетријата на фигурата $\mathbf{F}$, образувана од правите a и b. Секоја точка од s е еднакво оддалечена од правите a и b и уште повеќе, $\measuredangle ASM = \measuredangle MSB$, т.е. s е симетрала на аголот $\measuredangle ASB$. Правата s_1, што минува низ S и е нормална на s, исто така, е оска на симетрија на фигурата $\mathbf{F}$. (Образложи го ова!)

Пример 4. Нека a и b се две паралелни прави (црт. 9). Правата s што е еднакво оддалечена од a и b е оска на симетрија на фигурата **F**, образувана од правите a и b. Исто така, секоја права s_1 што е нормална на правите a и b е оска на симетрја на фигурата **F**.



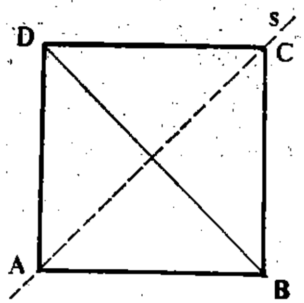
Црт. 8



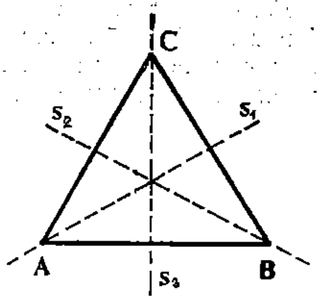
Црт. 9

Пример 5. Нека четириаголникот $ABCD$ е квадрат и нека s е правата AC (црт. 10). Тогаш, имаме $\sigma_s(A)=A$, $\sigma_s(C)=C$, $\sigma_s(B)=D$, $\sigma_s(D)=B$. (Зошто?). Значи, s е оска на симетрија на квадратот $ABCD$, т.е. секој квадрат е осносиметричен.

Пример 6. Нека ABC е рамностран триаголник и s_1 нека е правата низ A нормална на BC. Тогаш имаме $\sigma_{s1}(A) = A$, $\sigma_{s1}(B) = C$, $\sigma_{s1}(C)=B$, што значи дека s_1 е оска на симетрија на триаголникот ABC. Исто така, правите s_2 и s_3 што минуваат низ B и C и се нормални на AC и AB, се оски на симетрија на триаголникот ABC (црт. 11).



Црт. 10



Црт. 11

Задачи

1. Нека A,B и C се три колинеарни точки. Покажи дека фигурата $\mathbf{F}=\{A,B,C\}$ е осносиметрична. Колку оски на симетрија може да има таа фигура?

2. Нека точките A, B, C и D се колинеарни. Покажи дека фигурата $\mathbf{F}=\{A,B,C,D\}$ е осносиметрична. Колку оски на симетрија може да има таа фигура?

3. Наведи некои големи букви од македонската азбука кои, како фигури, се осносиметрични.

4. Колку оски на симетрија има квадратот?

5. Покажи дека еден рамнокрак триаголник (што не е рамностран) има само една оска на симетрија.

6. Покажи дека, ако еден триаголник има две оски на симетрија, тогаш тој триаголник е рамностран.

7. Нека правите a и b се заемно нормални. Ако тие прави се оски на симетрија на една фигура **F**, тогаш таа фигура е централно симетрична. Која точка е центарот на симетрија?

8. Нека a и b се оски на симетрија на фигурата **F**. Дали точката $O = a \cap b$ мора да биде центар на симетрија на фигурата **F**?

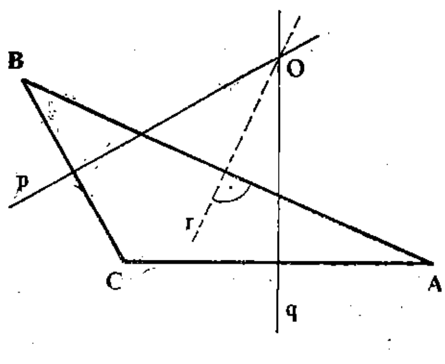
9. Нека O е центар на симетрија, а p оска на симетрија на фигурата **F**, при што $O \in p$. Покажи дека правата q што минува низ O и е нормална на p, исто така, е оска на симетрија на фигурата **F**.

§ 5. *Примена на оснаша симешрија*

5.1. Симетрали на страни во триаголник

Нека ABC е произволен триаголник. Симетралите на отсечките AB, BC CA се викаат *симешрали на сшраниише на шриаголникош* ABC. Ќе покажеме дека симетралите на страните на произволен триаголник ABC се сечат во една точка.

Нека p и q се симетрали на страните BC и CA од триаголникот ABC и нека $O = p \cap q$ (црт. 1). Од тоа што $O \in p$, следува дека O е еднакво оддалечена од точките B и C, а бидејќи $O \in q$, следува дека O е еднакво оддалечена и од точките C и A. Значи, имаме $\overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OA}$, т.е. O е еднакво оддалечена и од точките A и B. Тоа значи дека O лежи на симетралата r од страната AB, т.е. симетралите p, q и r минуваат низ една иста точка O.



Црт. 1

Бидејќи точката O е еднакво оддалечена од темињата A,B,C на триаголникот ABC, следува дека O е центар на една кружница со радиус $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. Оваа кружница $(O,\overline{OA})$ се вика *ойишана кружница* околу триаголникот ABC, а точката O се вика *ценшар* на опишаната кружница.

Задачи

1. Нека r е симетралата на страната AB од триаголникот ABC. Ако r минува низ C, што може да се каже за триаголникот ABC?

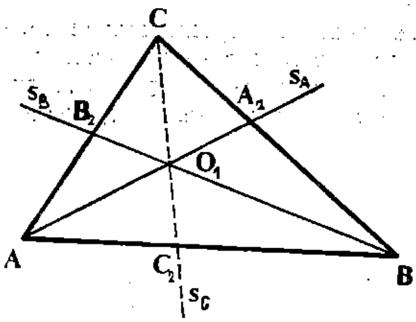
2. Ако симетралите на две страни од триаголникот ABC минуваат низ спротивните темиња, тогаш триаголникот ABC е рамностран. Докажи!

3. Ако спротивните агли на еден четириаголник се суплементни, тогаш то четириаголник е тетивен. Докажи! (Види и зад. 10 од III. **7.6.**).

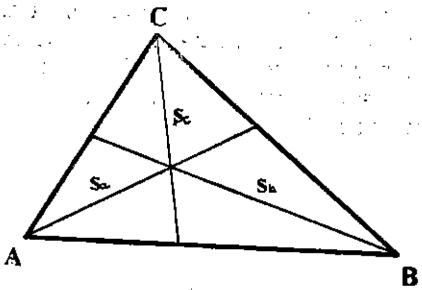
5.2. Симетрали на агли во триаголник

Нека ABC е произволен триаголник и нека s_A, s_B и s_C се симетралите на аглите $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle ACB$ соодветно. Ќе покажеме дека правите s_A, s_B и s_C се сечат во една иста точка.

Нека $O_1 = s_A \cap s_B$ (црт. 2). Од тоа што $O_1 \in s_A$, следува дека O_1 е еднакво оддалечена од правите AC и AB, а од тоа што $O_1 \in s_B$, следува дека O_1 е еднакво оддалечена од правите AB и BC. Значи, точката O_1 е еднакво оддалечена од правите CA и CB, т.е. правата O_1C е симетрала на аголот $\sphericalangle ACB$. Со тоа покажавме дека симетралите на аглите во триаголникот ABC се сечат во една иста точка O_1.



Црт. 2



Црт. 3

Значи, точката O_1 е еднакво оддалечена од страните на триаголникот ABC. Да го означиме со r растојанието од O_1 до страните AB, BC, CA. Тогаш, кружницата (O_1, r) ги допира трите прави AB, BC и CA. Оваа кружница се вика *вйишана кружница* во триаголникот ABC, а точката O_1 се вика *ценшар* на впишаната кружница во триаголникот ABC.

Вообичаено е, за симетрали на аглите во триаголникот да не се земаат правите s_A, s_B и s_C, туку отсечките AA_2, BB_2 и CC_2, каде што $A_2 = BC \cap s_A$, $B_2 = AC \cap s_B$ и $C_2 = AB \cap s_C$ или, пак, нивните должини. Нив ќе ги означуваме со s_a, s_b, s_c (црт. 3).

Задачи

1. Нацртај еден триаголник ABC и конструирај го центарот O_1 на впишаната кружница во триаголникот ABC.

2. Даден е триаголник ABC, чија симетрала s_c е нормална на страната AB. Што може да се каже за тој триаголник?

3. Ако симетралите на два агла од триаголникот ABC се нормални на спротивните страни, тогаш тој триаголник е рамностран. Докажи!

4. Во кој случај симетралата s_c се совпаѓа со симетралата на страната AB од триаголникот ABC?

5. Покажи дека никои две од симетралите на аглите во еден триаголник не се заемно нормални!

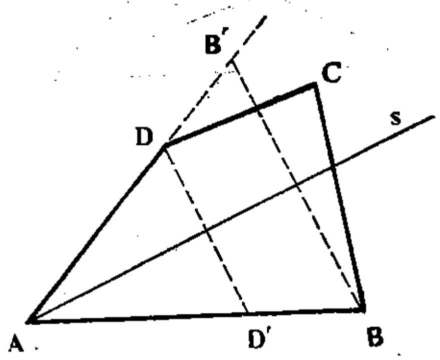
6. Покажи дека секоја од симетралите на аглите во еден триаголник минува низ поголемиот од аглите образувани од другите две!

7. Ако за еден четириаголник збирот на двете спротивни страни е еднаков со збирот на другите две спротивни страни, тогаш тој четириаголник е тангентен. (Види и зад. 11 од III. **7.6.**)

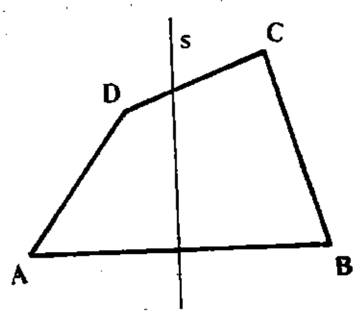
5.3. Осносиметрични четириаголници

Во претходниот параграф (**4.3**) видовме дека постојат геометриски фигури што се осносиметрични. Така, на пример, видовме дека квадратот е осносиметрична фигура. Овде ќе видиме какви својства има еден четириаголник кој е осносиметричен.

Нека $ABCD$ е произволен четириаголник. Да претпоставиме дека тој е осносиметричен, т.е. постои права s што е оска на симетрија на четириаголникот $ABCD$. Ќе разгледаме два случаја: кога s минува низ некое теме (црт. 4) и кога s не минува низ ниедно од темињата (црт. 5).



Црт. 4



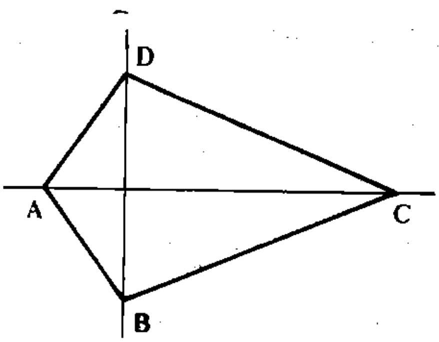
Црт. 5

1°. Нека s минува низ едно теме на четириаголникот $ABCD$, на пример, низ A (црт. 4). Тогаш, точката $D' = \sigma_s(D)$ ќе мора да лежи на страната AB, а точката $B' = \sigma_s(B)$ ќе мора да лежи на страната AD.

(Зошто?). Значи, s е симетрала на $\sphericalangle BAD$. Страната, пак, CD ќе мора да се преслика во страната CB, а тоа значи дека $D' = \sigma_s(D) \equiv B$, а $\sigma_s(C) = C$. Значи, s е дијагоналата AC, и притоа имаме

$$\overline{AD} = \overline{AB},\ \overline{CD} = \overline{CB}.$$

Од тоа следува дека четириаголникот $ABCD$ е или делтоид, или ромб или квадрат и тоа:



Црт. 6

— ако само правата $s = AC$ е оска на симетрија, тогаш четириаголникот $ABCD$ е делтоид (црт. 6);

— ако и двете прави AC и BD се оски на симетрија, тогаш четириаголникот $ABCD$ е или ромб или квадрат.

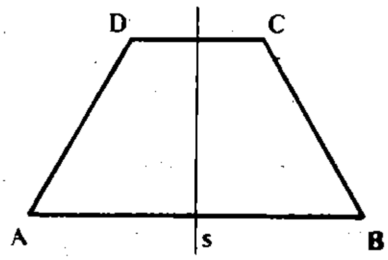
2^0. Сега да претпоставиме дека оската s на симетрија на четириаголникот $ABCD$ не минува низ ниедно од темињат- (црт. 5). Можеме да претпоставиме дека таа ги сече страните AB и CD (како на црт. 5). Тогаш мора да биде

$$\sigma_s(A) = B,\ \sigma_s(B) = A,\ \sigma_s(C) = D,\ \sigma_s(D) = C,$$

т.е. s е симетрала и на двете страни AB и CD, од што следува дека AB и CD се паралелни и $\overline{AD} = \overline{BC}$. Значи, четириаголникот $ABCD$ е или рамнокрак трапез (црт. 7) или правоаголник и тоа:

— ако четириаголникот $ABCD$ има само една оска на симетрија што не минува низ ниедно од темињата, тогаш тој четириаголник е рамнокрак трапез;

— ако четириаголникот $ABCD$ има точно две оски на симетрија што не минуваат низ ниедно од темињата, тогаш тој четириаголник е правоаголник.



Црт. 7

Од сето тоа следуваат следниве теореми:

Теорема 1. *Секој делтоид има само една оска на симетрија.*

Навистина, ако $ABCD$ е делтоид со $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{BC} = \overline{CD}$ и $\overline{AB} \neq \overline{BC}$, тогаш правата AC е негова оска на симетрија, но BD не е оска на симетрија. Бидејќи кај делтоид нема паралелни страни, делтоидот нема оска на симетрија што не минува низ некое теме. Следствено, само правата AC е оска на симетрија на делтоидот $ABCD$.

Теорема 2. *Дијагоналите во кој било делтоид се заемно нормални.*

Навистина, ако $ABCD$ е делтоид со $\overline{AB}=\overline{AD}$ и $\overline{BC}=\overline{CD}$, тогаш правата $s=AC$ е негова оска на симетрија, па $\sigma_s(B)=D$, од каде што следува дека $AC \perp BD$.

Исто така, слично се докажуваат следниве теореми.

Теорема 3. *Секој ромб ABCD има точно две оски на симетрија: тоа се правите AC и BD на кои лежат дијагоналите.*

Теорема 4. *Дијагоналите во кој било ромб се заемно нормални.* (види и **6.1.** од гл. IV).

Теорема 5. *Во кој било ромб ABCD правите AC и BD, на кои лежат дијагоналите, се симетрали на аглите при темињата што ги сврзуваат.*

Теорема 6. *Правоаголник што не е квадрат има точно две оски на симетрија.*

Теорема 7. *Секој квадрат има четири оски на симетрија.*

Задачи

1. Докажи дека, ако еден четириаголник има барем една оска на симетрија што минува низ некое од неговите темиња и барем една оска на симетрија што не минува низ ниедно од неговите темиња, тогаш тој четириаголник е квадрат.

2. Докажи дека правата што ги сврзува средините на основите на еден рамнокрак трапез минува низ пресекот од продолженијата на краците и низ пресекот на дијагоналите.

3. Нека $ABCD$ е рамнокрак трапез со основи AB и CD. Ако p е правата што ги сврзува пресекот на дијагоналите AC и BD и пресекот на правите AD и BC, тогаш p е нормална на основите и ги располовува.

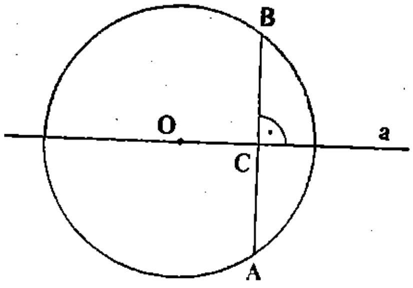
5.4. Некои теореми за кружница

Како што спомнавме во 4.3, секоја кружница (O, r) е осносиметрична, зашто секоја права што минува низ центарот O е оска на симетрија. Користејќи го ова, ќе докажеме некои теореми за кружница.

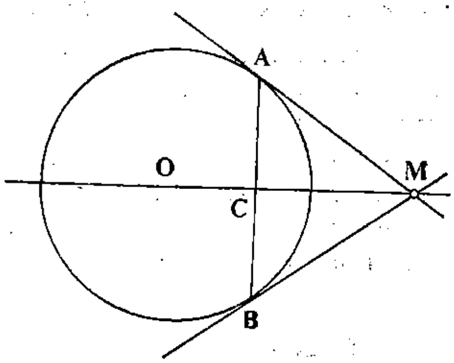
Теорема 8. *Правата a што минува низ центарот O на кружницата (O,r) и е нормална на тетивата AB, ја дели таа тетива на два еднакви дела.*

Доказ. Нека (O, r) е кружница, AB една тетива и a права што минува низ центарот на кружницата и е нормална на тетивата AB

(црт. 8). Правата a е оска на симетрија на кружницата (O, r), па точката $\sigma_a(A)$ ќе лежи на кружницата. Бидејќи $AB \perp a$, следува дека $\sigma_a(A)=B$, т.е. a е симетрала на отсечката AB.



Црт. 8



Црт. 9

Теорема 9. *Нека MA и MB се тангенти на кружницата (O, r) повлечени од точката M* (црт. 9) *Тогаш*:

а) $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA$;

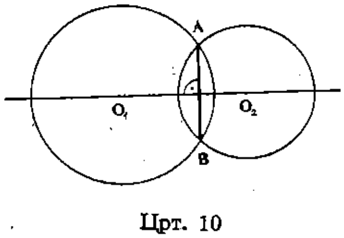
б) $\overline{MA} = \overline{MB}$;

в) *правата MO е симетрала на тетивата AB.*

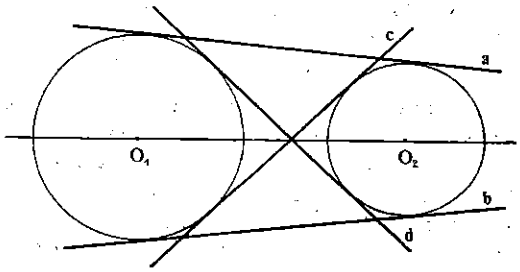
Доказ. Правата MO е оска на симетрија на кружницата (O, r), од каде што и следуваат тврдењата во теоремата. (Спроведи го доказот со сите детали.)

Теорема 10. *Заедничката тетива AB на кружниците (O_1, r_1) и (O_2, r_2) што се сечат е нормална на централната линија O_1O_2* (црт. 10).

Навистина, централната линија O_1O_2 е оска на симетрија и на двете кружници, па, значи, таа е симетрала на отсечката AB.



Црт. 10



Црт. 11

Теорема 11. *Заедничките надворешни тангенти на кружниците* (O_1, r_1) *и* (O_2, r_2) *или се паралелни или, пак, се сечат во точка од централната линија* O_1O_2.

Заедничките внатрешни тангенти на кружниците (O_1, r_1) *и* (O_2, r_2) *се сечат во точка од централната линија* O_1O_2.

Доказ. Навистина, правата $p = O_1O_2$ (црт. 11) е оска на симетрија на двете кружници, па ако t е тангента на двете кружници, тогаш и $\sigma_p(t)$ ќе биде тангента на двете кружници. Од тоа следува дека $\sigma_p(a) = b$, $\sigma_p(c) = d$ (црт. 11). Значи, надворешните тангенти a и b или се паралелни (во случајот $r_1 = r_2$) или, пак, се сечат во точка од правата O_1O_2 (во случајот $r_1 \neq r_2$), а внатрешните заеднички тангенти c и d се сечат на правата O_1O_2.

Задачи

1. Нека центарот O на кружницата (O, r) лежи на симетралата на даден агол ABC. Ако кружницата ги сече краците на аголот, докажи дека:

а) тетивите MN и PQ што ги отсекува кружницата на краците од аголот се еднакви;

б) тетивите MP и NQ (односно MQ и MP) или се паралелни или се еднакви.

2. На тангентата t од кружницата (O, r), со допирна точка T, се нанесени две еднакви отсечки TA и TB. Од точките A и B се повлечени тангенти AC и BD на кружницата. Докажи дека: а) $\sphericalangle TAC = \sphericalangle TBD$; б) правите t и CD се паралелни; в) $\overline{AD} = \overline{BC}$.

3. Нека кружниците $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ се сечат во точките A и B. Докажи дека тангентите на k_1 и k_2 во точката A, односно B зафаќаат еднакви агли.

4. Избери две концентрични кружници $k_1(O, r_1)$ и $k_2(O, r_2)$ и една права p што ги сече двете кружници. Ако p ја сече k_1 во точките A и B, а k_2 во C и D докажи дека $\overline{AC} = \overline{BD}$ и $\overline{AD} = \overline{BC}$.

5.5. Решени задачи

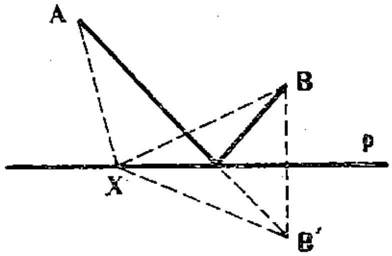
Задача 1. Дадена е права p и две точки A и B на иста страна од неа. Да се најде точка M на правата p така што триаголникот ABM да има најмал периметар.

Решение. Бидејќи страната AB на триаголникот ABM е дадена, триаголникот ABM ќе има најмал периметар кога збирот $\overline{AM} + \overline{MB}$ ќе биде најмал. Нека X е произволна точка од правата p и нека $\sigma_p(B) = B'$ (црт. 12); имаме: $\overline{BX} = \overline{B'X}$, па значи $\overline{AX} + \overline{XB} = \overline{AX} + \overline{XB'}$. Следствено, збирот $\overline{AX} + \overline{XB}$ е најмал, ако збирот $\overline{AX} + \overline{XB'}$ е најмал, т.е. должината на искршената линија AXB' е најмала, а тоа е можно кога точките A, X и B' се колинеарни.

Според тоа, бараната точка M ќе биде точката $AB' \cap p$, каде што $B' = \sigma_p(B)$.

Задача 2. Дадени се правите p, q и r, кои минуваат низ една иста точка O, и точката A од правата p, $A \neq O$. Да се конструира триаголник ABC, така што p, q и r да се симетрали на неговите внатрешни или надворешни агли.

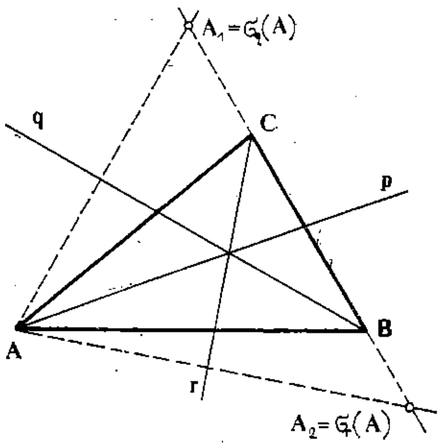
Решение. Анализа. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник (црт. 13). Правата q е симетрала на $\sphericalangle CBA$, па значи, правата AB со σ_q се пресликува во правата BC, што значи $\sigma_q(A) = A_1 \in BC$. Правата, пак, r е симетрала на $\sphericalangle ACB$, па значи, $\sigma_r(CA) = BC$, т.е. $\sigma_r(A) = A_2 \in BC$. Значи, ако ги најдеме точките $A_1 = \sigma_q(A)$ и $A_2 = \sigma_r(A)$, тогаш темињата B и C ќе лежат на правата A_1A_2.



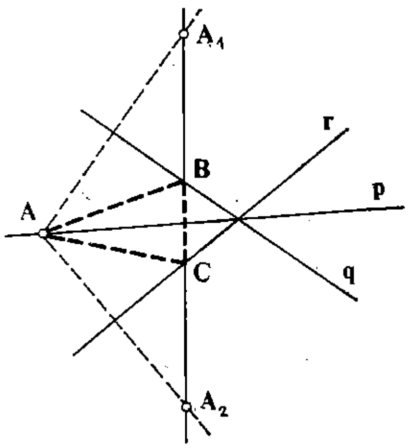
Црт. 12

Конструкција. Ги наоѓаме точките $A_1 = \sigma_q(A)$ и $A_2 = \sigma_r(A)$. Тогаш, $B = A_1A_2 \cap q$, $C = A_1 A_2 \cap r$ (црт. 14).

Доказ. Од конструкцијата е јасно дека q и r се симетрали на аглите кај темињата B и C. Но, симетралите на аглите се сечат во една иста точка, па правата $AO = p$ ќе биде симетрала на аголот кај A.



Црт. 13



Црт. 14

Дискусија. Бидејќи q и r се различни, точките A_1 и A_2 секогаш се различни, па правата A_1A_2 е еднозначно определена со точката A и со правите q и r. Според тоа, задачата ќе има решение ако можат да се најдат точките B и C и, притоа, тие да се различни.

Ако $q \perp r$, тогаш правата A_1A_2 минува низ точката O (види задача 3 од **4.1**), па значи $B \equiv C$, т.е. задачата нема решение. Ако или $p \perp q$ или $p \perp r$, тогаш правата A_1A_2 е паралелна со r, односно q (зошто?), па и во овој случај задачата нема решение, зашто една од точките B и C не може да се најде.

Затоа, да претпоставиме дека кои било две од дадените прави p, q и r не се заемно нормални. Во тој случај, правата A_1A_2 не е паралелна со ниедна од правите q и r и не минува низ точката O. Тоа значи дека можат да се најдат $B = A_1A_2 \cap q$ и $C = A_1A_2 \cap r$ и, притоа, $B \neq C$. Според тоа, во овој случај задачата има единствено решение.

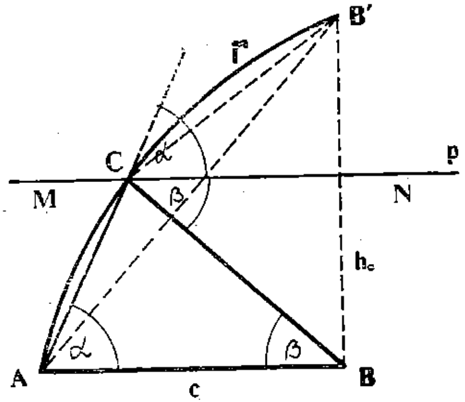
Правите p, q и r ќе бидат симетрали на внатрешните агли од конструираниот триаголник ABC, ако и само ако ниедна од нив не минува низ помалиот од аглите образувани од другите две (види задача 6 од 5.2). Ако, пак, една од правите p, q и r минува низ помалиот од аглите образувани со другите две, тогаш две од дадените прави ќе бидат симетрали на надворешните агли од триаголникот ABC. Да забележиме дека не е можно сите три прави да се симетрали на надворешни агли.

Задача 3. Да се конструира триаголник ABC ако се познати: c, h_c, $\alpha - \beta$.

Решение. Анализа. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник (црт. 15). Нека p е права низ C, паралелна со правата AB, а $B' = \sigma_p(B)$. Тогаш имаме:

$$\sphericalangle ACN = 180° - \alpha, \quad \sphericalangle BCN = \sphericalangle B'CN = \beta,$$

$$\sphericalangle ACB' = \sphericalangle ACN + \sphericalangle NCB' = (180° - \alpha) + \beta = 180° - (\alpha - \beta).$$



Црт. 15

Значи, ако се познати темињата A и B, тогаш можеме да ја конструираме правата p, зашто е позната висината h_c; потоа можеме да ја најдеме и точката B'. Отсечката AB' се гледа од темето C под агол $180° - (\alpha - \beta)$.

Конструкција. Ги избираме точките A и B, такви што $\overline{AB} = c$, а потоа ја конструираме правата p што е паралелна со правата AB и е на растојание h_c од неа. Ако $B' = \sigma_p(B)$, тогаш го конструираме геометриското место на точки Г, од кои отсечката AB' се гледа под агол $180° - (\alpha - \beta)$. Темето C лежи на правата p и на геометриското место Г, т.е. $C \in Г \cap p$ (црт. 15).

Доказот и дискусијата обиди се сам да ги спроведеш. Да напоменеме само тоа, дека при условот $\alpha > \beta$, задачата има единствено решение.

Задачи

1. Дадена е правата MN и точките A, B на иста страна од неа. На MN да се најде точка X, така што $\sphericalangle AXM = \sphericalangle AXB$.

2. Дадена е кружницата (O, r) и правите p, q и r што минуваат низ O. Околу кружницата (O, r) да се опише триаголник ABC, така што правите p, q и r да се симетрали на неговите внатрешни или надворешни агли.

3. Избери три прави p, q и r што минуваат низ иста точка O и на правата p точка A_1. Конструирај триаголник ABC, така што A_1 да е средина на страната BC, а p, q и r да се симетрали на страните BC, CA и AB соодветно.

4. Да се конструира триаголник ABC ако е познато: а) $b, c - a, \alpha$; б) $a, b, \alpha - \beta$.

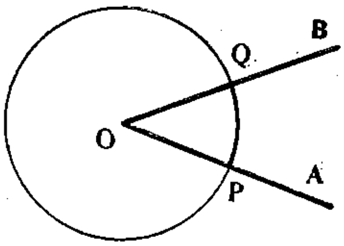
5. Да се конструира квадрат, така што две негови спротивни темиња да лежат на дадена права, а другите две на две дадени кружници.

6. Дадени се правите p, q и кружницата (O, r). Да се конструира ромб $ABCD$, така што $\sphericalangle BAD = 60°$, $A, C \in p$, $B \in q$, $C \in (O, r)$.

§ 6. Ротација

6.1. Насочени агли

Нека е даден агол AOB, помал од $180°$ и нека P и Q се пресечните точки на кружницата (O, r) со краците на тој агол (црт. 1). При дефиницијата за агол краците OA и OB ги сметавме за рамноправни и затоа ознаките $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOA$ ни претставува еден ист агол.



Црт. 1

Меѓутоа, во некои случаи е згодно да се земе едниот крак за *почетен*, а другиот за *краен*, нарушувајќи ја со тоа рамноправноста меѓу нив. Со тоа се наложува потребата од воведување на еден нов вид агли.

Дефиниција. Агол при кој еден крак е земен за почетен, а другиот за краен, се вика *насочен агол.*

Ако за аголот AOB кракот OA е почетен, а OB краен, тогаш насочениот агол ќе го означуваме со $\sphericalangle \overrightarrow{AOB}$. Тој агол ќе го сметаме за *позитивно насочен*, ако, одејќи по лакот PQ од P кон Q, како на црт. 1, се движиме во спротивна насока од движењето на стрелките кај часовникот (се разбира, кога часовникот „работи сам"!). Во спротивниот случај, аголот го сметаме за *негативно насочен.*

Според тоа, аглите $\sphericalangle \overrightarrow{AOB}$ и $\sphericalangle \overrightarrow{BOA}$ се еднакви по големина, а спротивно насочени; пишуваме $\sphericalangle \overrightarrow{BOA} = - \sphericalangle \overrightarrow{AOB}$.

Ако полуправите OA и OB се дополнуваат до права, т.е. кога $\sphericalangle AOB = 180°$, тогаш аголот $\sphericalangle \overrightarrow{AOB}$ можеме да сметаме дека е еднаков, како на $+180°$, така и на $-180°$.

Од дефиницијата за насочени агли следува дека аголот $\sphericalangle \overrightarrow{AOB}$ секогаш е меѓу $-180°$ и $+180°$.

Задачи

1. Нека AOC е произволен агол помал од 180° и OB е полуправа што минува низ внатрешноста на тој агол. Докажи дека $\sphericalangle \overrightarrow{AOB} + \sphericalangle \overrightarrow{BOC} + \sphericalangle \overrightarrow{COA} = 0$.

2. Нека A,B,M и N се четири произволни точки на една кружница. Каква врска постои меѓу насочените агли $\sphericalangle \overrightarrow{AMB}$ и $\sphericalangle \overrightarrow{ANB}$? (Да се разгледаат двата случаја.)

3. Низ краевите A и B на една отсечка AB се повлечени две прави AM и BN така што:

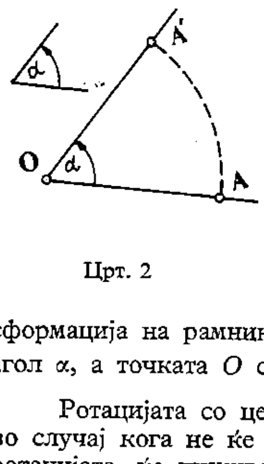
а) $\sphericalangle \overrightarrow{BAM} = \sphericalangle \overrightarrow{BAN}$; б) $\sphericalangle \overrightarrow{BAM} = -\sphericalangle \overrightarrow{ABN}$.

Што може да се каже за тие прави?

6.2 Дефиниција на ротација

Да избереме една фиксирана точка O во рамнината и еден насочен агол α (црт. 2). Нека $A\,(\neq O)$ е произволна точка во рамнината и нека точката A' е определена на следниов начин:

$$1)\ \sphericalangle \overrightarrow{AOA'} = \alpha, \quad 2)\ \overline{OA} = \overline{OA'}.$$



Црт. 2

Точката A' е еднозначно определена, зашто таа е пресек на кружницата $(O,\overline{OA})$ и вториот крак $\overrightarrow{OA'}$ на аголот $\sphericalangle \overrightarrow{AOA'} = \alpha$.

Според тоа, ако на која било точка $A \neq O$ од рамнината ѝ ја продужиме точката A' определена со 1) и 2), а на точката O ѝ ја придружиме самата точка O, тогаш добиваме една трансформација на рамнината. Оваа трансформација се вика *ротација* за агол α, а точката O се вика *центар* на ротацијата.

Ротацијата со центар O и агол α ќе ја означуваме со $\rho_{O,\alpha}$. Но, во случај кога не ќе има недоразбирање за аголот и за центарот на ротацијата, ќе пишуваме само ρ.

Да забележиме дека секоја ротација за агол нула е идентичната трансформација. Ротација, пак, за агол $\alpha = \pm 180°$ претставува централна симетрија, т.е. $\rho_{O,\alpha} = \sigma_O$.

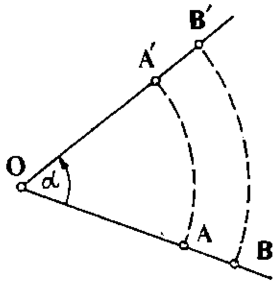
Ќе покажеме дека секоја ротација е биекција.

Нека ρ е ротација за агол α и со центар O. Нека A, B се произволни различни точки од рамнината и $A' = \rho(A)$, $B' = \rho(B)$. Точките O, A и B можат да бидат колинеарни или неколинеарни.

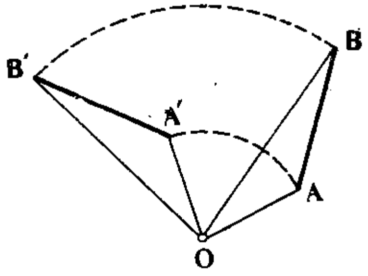
Ако O, A и B се колинеарни (црт. 3), тогаш, поради $A \neq B$, имаме $\overline{OA} \neq \overline{OB}$, од што следува $\overline{OA'} \neq \overline{OB'}$, т.е. $A' \neq B'$.

Да претпоставиме сега дека O, A и B не се колинеарни (црт. 4). Тогаш имаме:

$$\sphericalangle \overrightarrow{AOB} = \sphericalangle \overrightarrow{AOA'} + \sphericalangle \overrightarrow{A'OB} = \sphericalangle \overrightarrow{BOB'} + \overrightarrow{A'OB} =$$
$$= \sphericalangle \overrightarrow{A'OB} + \sphericalangle \overrightarrow{BOB'} = \sphericalangle \overrightarrow{A'OB'}.$$



Црт. 3



Црт. 4

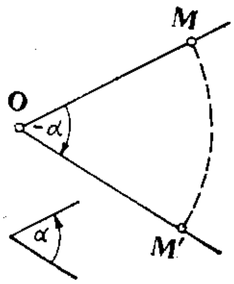
Од тоа што точките O, A и B се неколинеарни, следува дека $\sphericalangle AOB \neq 0$, па, значи, и $\sphericalangle A'OB' \neq 0$, т.е. точките O, A', B' се неколрнеарни. Тоа значи дека $A' \neq B'$.

Со тоа докажавме дека при секоја ротација, различни точки се пресликуваат во различни точки, т.е. секоја ротација е инјекција.

Нека M' е произволна точка од рамнината. Ако $M' \equiv O$, тогаш $\rho(O) = O$. Затоа, да претпоставиме дека $M' \neq O$ и нека M е точка определена со следниве услови (црт. 5):

а) $\overline{OM} = \overline{OM'}$,

б) $\sphericalangle \overrightarrow{M'OM} = -\alpha$.



Црт. 5

Тогаш имаме $\sphericalangle MOM' = \alpha$ и $\overline{OM} = \overline{OM'}$, па значи, $\rho(M) = M'$. Според тоа, секоја ротација е сурјекција. Следствено:

Теорема 1. *Секоја ротација е биекција.*

Во доказот дека секоја ротација е инјекција видовме дека триаголниците AOB и $A'OB'$ (црт. 4.) се складни, па значи, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Според тоа:

Теорема 2. *Ако A и B се произволни точки и $\rho_{O,\alpha}(A) = A'$, $\rho_{O,\alpha}(B) = B'$, тогаш $\overline{AB} = \overline{A'B'}$.*

Задачи

1. Дадена е ротација $\rho_{O, \alpha}, \alpha \neq 0^0$. Докажи дека O е единствената неподвижна точка за таа ротација.

2. Дадени се три точки O, A и B. Во кој случај постои ротација $\rho_{O, \alpha}$ којашто точката A ја пресликува во B?

3. Даден е насочен агол α и две точки A и B. Дали постои ротацаја ρ за агол α таква што $\rho(A) = B$? Ако постои, најди го центарот O на таа ротација. Колку такви ротации постојат?

4. Дадени се две точки A и B. Колку ротации постојат при кои A се пресликува во B?

5. Избери две точки O, A и најди ги точките $A_1 = \rho_{O, 90^\circ}(A)$ и $A_2 = \rho_{O, -90^\circ}(A)$. Провери дека $\sigma_O(A_1) = A_2$.

6. Избери две прави p и q што се сечат. Потоа, избери точка $A \neq O = p \cap b$ и најди ги точките

$$A' = \sigma_p(A), \quad A'' = \sigma_q(A').$$

Докажи дека $A'' = \rho_{O, 2\alpha}(A)$, каде што α е помалиот од аглите меѓу правите p и q насочен од p кон q.

6.3. Слики на некои фигури при ротација

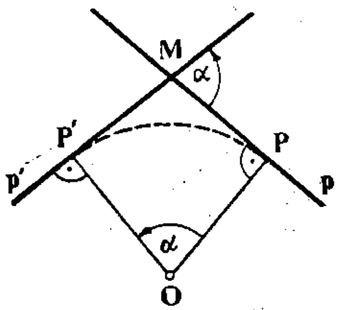
Ако A' и B' се сликите на точките A и B при некоја ротација, тогаш, како што видовме (в. Т. 2), важи равенството $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Од ова равенство непосредно следуваат следниве теореми (обиди се да го спроведеш доказот сам за секоја од нив!):

Теорема 3. *При секоја ротација, колинеарни точки се пресликуваат во колинеарни точки.*

Теорема 4. *Секоја кружница (O, r) при ротацијата ρ се пресликува во кружница со ист радиус r и центар $O' = \rho(O)$.*

Теорема 5. *Сликата на агол при ротација е агол, еднаков со него.*

Нека е дадена права p и ротација $\rho_{O, \alpha}$. Од Т. 3. следува дека $\rho(p) = p'$ е права. Да видиме како се конструира правата p'. Нека P е ортогоналната проекција од O врз правата p и нека $P' = \rho(P)$ (црт. 6).



Црт. 6

Правите p и OP се заемно нормални, па, значи, и правите p' и OP' се заемно нормални, т.е. p' е правата што минува низ точкато P' и е нормална на OP'. Од четириаголникот $OPMP'$ следува дека правите p и p' зафаќаат агол α.

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема 6. *При секоја ротација ρ за агол α, права се пресликува во права и, притоа, тие зафаќаат агол α.*

Задачи

1. Дадена е ротацијата $\rho_{O,\alpha}$, $\alpha \neq 0°, 180°$. Дали постојат прави кои се неподвижни за оваа ротација?

2. Дадена е ротацијата $\rho_{O,\alpha}$. Избери кружница (S, r) и најди ја нејзината слика при дадената ротација. Во кој случај кружницата (S, r) се пресликува во себе?

3. Дадени се правите p и q. Во кој случај постои ротација ρ со својството $\sigma(p) = q$?

4. Покажи дека еден триаголник при ротација се пресликува во складен триаголник.

5. Нацртај рамностран триаголник ABC со центар O и конструирај ја неговата слика $A'B'C'$ при ротацијата $\rho_{O,60°}$. Дали шестаголникот $AA'BB'CC'$ е централно или осно симетричен?

6.4. Примена

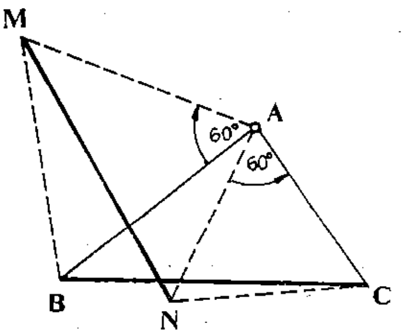
Наредниве решени примери во доволна мера ја илустрираат примената на ротацијата при решавање задачи.

Задача 1. Даден е триаголникот ABC. Над страната AB, надвор од триаголникот ABC, конструиран е рамностран триаголник ABM. Исто така, над страната AC, спрема темето B, конструиран е рамностран триаголник ACN (црт. 7). Да се докаже дека $\overline{MN} = \overline{BC}$.

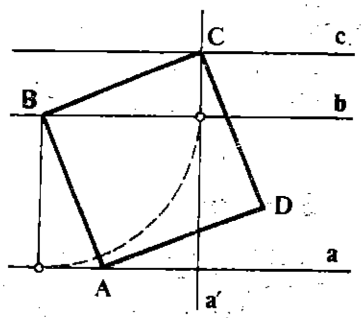
Решение. Се гледа дека $\measuredangle BAM = 60°$ и $\measuredangle CAN = 60°$. Исто така, од условот на задачата следува дека и двата агли се исто насочени. Од друга страна, имаме $\overline{CA} = \overline{NA}$, $\overline{BA} = \overline{MA}$, па ако ρ е ротација со центар A и агол $\alpha = \measuredangle BAM$, тогаш следува $\rho(B) = M$, $\rho(C) = N$, т.е. $\overline{BC} = \overline{MN}$.

Задача 2. Да се конструира квадрат $ABCD$, таков што три негови темиња да лежат на три дадени паралелни прави a, b и c.

Решение. А н а л и з а. Да претпоставиме дека задачата е решена и $ABCD$ е бараниот квадрат (црт. 8). Бидејќи $\overline{BA} = \overline{BC}$ и $\measuredangle ABC = 90°$, ако ρ е ротација со центар B и агол $\alpha = 90°$ или $\alpha = -90°$, тогаш ќе имаме $\rho(A) = C$. Нека, на пример, $\measuredangle ABC = 90°$. Бидејќи $A \in a$, следува дека $\rho(A) = C \in \rho(a) = a'$. Значи, $C = a' \cap c$. Ако, пак, $\alpha = -90°$, тогаш $C = a' \cap c$, каде што $a'' = \rho_{B,-90°}(a)$.



Црт. 7.



Црт. 8

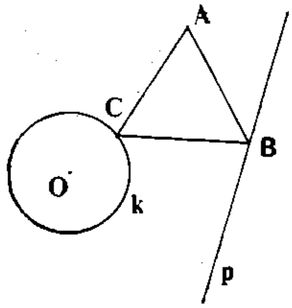
К о н с т р у к ц и ј а Избираме точка B на правата b и ги наоѓаме правите $a' = \rho_{B,90°}(a)$, $a'' = \rho_{B,-90°}(a)$. Ако $C_1 = a' \cap c$, $C_2 = a'' \cap c$, тогаш ги конструираме квадратите $C_1BA_1D_1$ и $C_2BA_2D_2$ со страни C_1B и C_2B соодветно.

Д о к а з. Темињата C_1 и B од квадратот $C_1BA_1D_1$ лежат на правите c и b по конструкцијата. Бидејќи $C = a' \cap c$, добиваме дека $A_1 = \rho_{B,-90°}(C_1)$, т.е. $A_1 \in a$. Значи, квадратот $C_1BA_1D_1$ ги задоволува условите на задачата. Слично за квадратот $C_2BA_2D_2$.

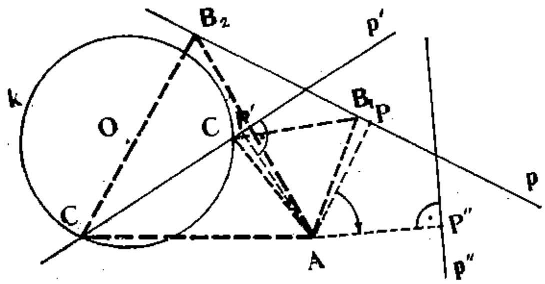
Д и с к у с и ј а. Правата a' е нормална на a, па, значи, е нормална и на c. Значи, точката C_1 секогаш постои, па, според тоа, и квадратот $C_1BA_1D_1$ постои. Од тоа следува дека, при избрана точка $B \in b$, задачата има секогаш две решенија.

Задача 3. Дадена е точката A, кружницата $k(O, r)$ и правата p. Да се конструира рамностран триаголник ABC, таков што $B \in p$, $C \in k$.

Решение. А н а л и з а. Да претпоставиме дека задачата е решена и ABC е бараниот триаголник (црт. 9). Бидејќи триаголникот ABC е рамностран, имаме $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\sphericalangle BAC = 60°$, а тоа значи дека $C = \rho_{A,60°}(B)$ или $C = \rho_{A,-60°}(B)$. Бидејќи $B \in p$, следува дека $C \in p' \cap k$, каде што $p' = \rho_{A,60°}(p)$ или $p' = \rho_{A,-60°}(p)$.



Црт. 9



Црт. 10

К о н с т р у к ц и ј а. Ги наоѓаме правите $p' = \rho_{A,60°}(p)$ и $p'' = \rho_{A,-60°}(p)$, а потоа точките $C_1, C_2 \in p' \cap k$ и $C'_1, C'_2 \in p'' \cap k$ (црт. 10). На крајат, ги конструираме рамностраните триаголници AC_1B_1, AC_2B_2, $AC_1'B_1'$ и $AC_2'B_2'$ со страна AC_1, AC_2, AC_1' и AC_2' соодветно.

Д о к а з. Доволно е да се докаже дека точките B_1, B_2, B_1' и B_2' лежат на правата p (докажи го тоа сам!).

Д и с к у с и ј а. Задачата може да има едно, две, три, четири или, пак, ниедно решение, во зависност од бројот на пресечните точки на правите p', p'' со кружницата k.

Задачи

1. Избери права p и на неа три точки A, B и C, така што B да е меѓу A и C. Над отсечките AB и BC, од иста страна на правата p, конструирај рамностран триаголник ABE и BCF. Ако M е средина на AF, а N средина на CE, докажи дека триаголникот BMN е рамностран.

2. Избери еден триаголник ABC. Над страните AB и BC конструирај квадрат $ABMN$ и $BCPQ$, но така што квадратот $ABMN$ и триаголникот ABC да се од различни страни на правата AB, а квадратот $BCPQ$ и триаголникот ABC да се наоѓаат на иста страна од правата BC. Докажи дека $\overline{MQ}=\overline{AC}$ и дека правата MQ е нормална на правата AC.

3. Дадени се правите p, q и точката A. Конструирај рамностран триаголник ABC, така што $B \in p$, $C \in q$.

4. Дадени се три концентрични кружници k_1, k_2 и k_3. Конструирај рамностран триаголник ABC, така што $A \in k_1$, $B \in k_2$ и $C \in k_3$.

5. Избери четири точки A, B, C и D, така што $\overline{AB} = \overline{CD}$, но $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$. Покажи дека постои ротација ρ, и тоа само една, таква што $\rho(A) = C$, $\rho(B) = D$. Разгледај го случајот кога $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$!

§ 7. Правилни многуаголници

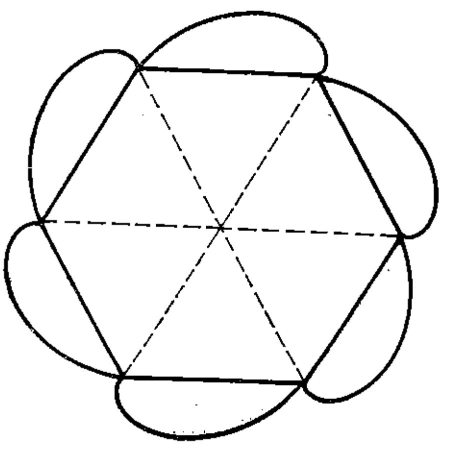
7. 1. Симетрија со ред n

Во § 3 и § 4 разгледавме неколку фигури кои, при некоја централна или осна симетрија, се пресликуваат во себе. Овде ќе се задржиме кратко на некои фигури, кои се пресликуваат во себе при некоја ротација.

Дефиниција. Ако една фигура **F** при некоја ротација за агол $\frac{360^\circ}{n}$, каде што n е природен број, се пресликува во себе, тогаш велиме дека **F** има *симетрија со ред n*. Центарот O на таа ротација се вика *центар на симетријата со ред n* (на црт. 1 фигурата има симетрија со ред 6).

Поимот симетрија со ред n претставува обопштување на поимот централна симетрија, зашто секоја централна симетрија е симетрија со ред 2.

Ако фигурата **F** има симетрија со ред n, а бројот n е делив со бројот m, тогаш **F** има и симетрија со ред m. Навистина, ако $n = mk$, тогаш имаме $\frac{360^\circ}{m} = k\frac{360^\circ}{n}$, па ротацијата за агол $\frac{360^\circ}{m}$ се добива со последователно применување на k ротации за агли $\frac{360^\circ}{n}$ (при ист центар).



Црт. 1

Задачи

1. Нацртај ја фигурата F составена од три кружници со ист радиус, секоја од кои ги допира другите две. Покажи дека F има центар на симетрија со ред 3.

2. Нацртај три кружници со ист радиус, така што секоја од нив да минува низ центрите на другите две и исшрафирај го заедничкиот дел на соодветните кругови. Дали исшрафираната фигура има центар на симетрија и, ако има, со кој ред е?

3. Ако една ограничена фигура F има точно n оски на симетрија, тогаш таа има симетрија со ред n. Докажи!

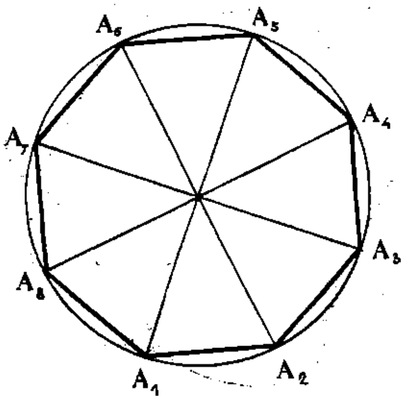
Упатство. Покажи, прво дека сите оски на симетрија минуваат низ иста точка. Потоа, ако p и q се оски на симетрија за фигурата F, тогаш и правите $\sigma_p(q)$, $\sigma_q(p)$ се оски на симетрија на фигурата F.

7.2. Правилни многуаголници

Околу секој триаголник може да се опише кружница. Со други зборови, страните на кој било триаголник се тетиви на некоја кружница. Тоа, во општ случај, не важи за четириаголниците. Но, постојат четириаголници околу кои може да се опише кружница. Таквите четириаголници ги нарековме *тетивни четириаголници* (в. зад. 10 од III. 7.6). Слично, можеме да разгледуваме и произволни многуаголници околу кои иоже да се опише кружница.

Дефиниција. За еден n-аголник $A_1A_2 \cdots A_n$ ќе велиме дека е *тетивен* ако неговите темиња лежат на иста кружница. Ако, уште, страните на n-аголникот меѓусебно се еднакви, тогаш тој n-аголник ќе го викаме *правилен n-аголник*. Кружницата на која лежат темињата на n-аголникот се вика *опишана кружница*, а нејзиниот центар се вика *центар* на n-аголникот.

На црт. 2 е преставен еден правилен 8-аголник.



Црт. 2

Бидејќи на еднакви тетиви во една кружница одговараат еднакви лаци и обратно, следува дека еден правилен многуаголник може да се добие на тој начин, што дадената кружница ќе се подели на n еднакви делови.

Ќе испитаме неколку својства на правилните n-аголници.

Нека $A_1A_2 \cdots A_n$ е правилен многуаголник и нека O е неговиот центар. Бидејќи на еднакви лаци во една кружница одговараат еднакви централни агли, следува дека аглите A_1OA_2, $A_2OA_3, \cdots, A_nOA_1$, се меѓусебно еднакви, што значи

$$\sphericalangle A_1OA_2 = \sphericalangle A_2OA_3 = \cdots = \sphericalangle A_nOA_1 = \frac{360^\circ}{n}.$$

Според тоа, ако извршиме ротација ρ со центар O за агол $\sphericalangle \overrightarrow{A_1OA_2}$, тогаш

$$\rho(A_1) = A_2,\ \rho(A_2) = A_3, \cdots, \rho(A_n) = A_1,$$

т.е. правилниот многуаголник со ρ се пресликува во себе. Значи, секој правилен n-аголник има симетрија со ред n.

Нека, сега, еден n-аголник има симетрија со ред n со центар O. Тоа значи дека при ротацијата ρ со центар O за агол $\frac{360^\circ}{n}$, n-аголникот се пресликува во себе. Ако A_1 е теме на n-аголникот, тогаш $\rho(A_1)$ ќе биде некое друго теме, да речеме A_2, $\rho(A_2)$ ќе биде ново теме, да речеме A_3, итн. Од тоа следува дека сите темиња лежат на кружница со центар во O и дека темињата ја делат таа кружница на n еднакви делови. Следствено, n-аголникот е правилен.

Со тоа ја докажавме следнава теорема:

Теорема 1. *Еден n-аголник е правилен, ако и само ако тој има симетрија со ред n.*

Користејќи ја оваа теорема, можеме да испитаме кои правилни n-аголници се централносиметрични. Еден правилен n-аголник е централносиметричен ако (и само ако) има симтрија со ред 2. Значи:

Теорема 2. *Еден правилен n-аголник е централносиметричен ако и само ако n е парен број.*

Од оваа теорема следува дека триаголник, петаголник, седумаголник, итн. (многуаголник со непарен број темиња) не може да биде централносиметрична фигура.

Бидејќи при ротација, агол се пресликува во еднаков агол, од доказот на Т.1, ја добиваме и следнава теорема:

Теорема 3. *Аглите на кој било правилен n-аголник се меѓусебно еднакви.*

Во еден правилен n-аголник сите страни, односно сите агли, меѓусебно се еднакви. Важи и обратното:

Теорема 4. *Ако во еден n-аголник* $A_1A_2 \cdots A_n$ *сите страни се еднакви и сите агли меѓу себе се еднакви, тогаш тој n-аголник е правилен.*

За доказ на теоремава е доволно да се увиди дека пресекот O од симетралите на аглите при две соседни темиња (на пример, A_1 и A_2) е центар на симетрија со ред n на тој n-аголник. (Спроведи го доказот сам, со сите подробности.)

Задачи

1. Може ли еден тетивен n-аголник да има еднакви страни, но нееднакви агли?

2. Може ли еден тетивен n-аголник да има еднакви агли но нееднакви страни?

3. Може ли еден тангентен n-аголник да има еднакви страни, но нееднакви агли?

4. Може ли еден тангентен n-аголник да има еднакви агли, но нееднакви страни?

5. Страните AB, BC и CA на рамностраниот триаголник ABC се поделени со точките K, L и M во однос $2:1$. Покажи дека триаголникот KLM е рамностран и дека неговиот центар се совпаѓа со центарот на триаголникот ABC.

6. Над страните од еден квадрат, надвор од него, конструирани се рамнострани триаголници. Покажи дека нивните центри се темиња на квадрат.

7. Покажи дека средините на дијагоналите на еден правилен шестаголник, што не минуваат низ центарот, се темиња на правилен шестаголник.

8. Покажи дека секој правилен n-аголник е оскосиметрична фигура.

9. Колку оски на симетрија има еден правилен n-аголник?

10. Дали мора еден а) оскосиметричен, б) централносиметричен n-аголник да биде правилен?

*§ 8. Движења и складност

8.1. Движења

Како што видовме (§**2**, **3**, **4** и **6**) секоја транслација, централна симетрија, осна симетрија, ротација, го запазува растојанието меѓу точки, т.е. ако φ е некоја од спомнатите трансформации и ако $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, тогаш

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}. \tag{1}$$

Ова својство е заедничко и карактеристично за горните трансформации. Тоа ги издвојува нив во посебна класа трансформации, наречени движења.

Дефиниција. Една трансформација φ на рамнината Π, што го има својството (1), се вика *движење* или *изометрична трансформација*.

Според тоа, секоја транслација, централна симетрија, осна симетрија, ротација е движење. (Натаму, ние ќе ги спомнуваме како „изучени движења".) За секоја од нив покажавме дека е биекција. Може да се покаже дека и кое било движење е биекција.

Да го означиме со $\mathcal{D}$ множеството од сите движења на рамнината П. Од реченото е јасно дека множеството $\mathcal{D}$ не е празно. Ќе покажеме дека $\mathcal{D}$ во однос на операцијата составување на трансформации (§ **1.2**) е група (§ **2** од гл. IV).

Нека $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ и нека $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\psi(A') = A''$ и $\psi(B') = B''$. Тогаш,

$$(\varphi \circ \psi)\ (A) = \psi(\varphi(A)) = \psi(A') = A'',$$

$$(\varphi \circ \psi)\ (B) = \psi(\varphi(B)) = \psi(B') = B''.$$

Бидејќи φ и ψ се движења, следува дека $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ и $\overline{A'B'} = \overline{A''B''}$, од каде што добиваме $\overline{AB} = \overline{A''B''}$. Значи, составот $\varphi \circ \psi$, исто така, е движење, т.е. $\varphi \circ \psi \in \mathcal{D}$.

Идентичната трансформација ε на рамнината П секоја точка ја пресликува во себе, па, значи, го запазува растојанието меѓу точките, т.е. $\varepsilon \in \mathcal{D}$. Како што знаеме (§ **1.2**),

$$\varepsilon \circ \varphi = \varphi \circ \varepsilon = \varphi$$

за кое било движење φ, па, значи, ε е неутрален елемент во однос на операцијата составување на движења.

Како што спомнавме, секое движење е биекција, па ако φ е некое движење, тогаш постои инверзната биекција φ^{-1}. Ако A и B се произволни точки и $\varphi^{-1}(A) = A'$, $\varphi^{-1}(B) = B'$, тогаш $\varphi(A') = A$, $\varphi(B') = B$, па значи, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. Следствено и φ^{-1} е движење, т.е. $\varphi^{-1} \in \mathcal{D}$.

Ассоцијативниот закон важи за состав на кои било трансформации (§ **1.2**), значи, и са состав на движења.

Од сето тоа следува дека *множеството $\mathcal{D}$ на движења е група во однос на операцијата составвување на трансформации.*

Видовме дека состав на движења е движење. Од тоа следува дека составот на кои било од изучените движења пак е движење. Пример, состав на транслации е движење, состав на ротација и осна симетрија е движење, итн. Уште повеќе, може да се покаже дека кое било движење е некое од изучените движења или, пак, состав на некои од нив.

Исто така, може да се покаже дека *при секое движење*

—*права се пресликува во права,*

—*кружница се пресликува во кружница со ист радиус,*

—*агол се пресликува во нему еднаков агол.*

Во задачите од овој раздел се бара да се утврди какво движење е составот на некои од изучените движења. Во таа смисла, овде, ќе разгледаме еден пример — ќе видиме што претставува состав на две осни симетрии.

Нека σ_a и σ_b се осни симетрии со оски a и b соодветно. Ако. $a=b$, тогаш $\sigma_a=\sigma_b$, па $\sigma_a \circ \sigma_a=\sigma_a^2=\varepsilon$, т.е. составот на σ_a и σ_b е идентичната трансформација.

Сега да го разгледаме случајот кога $a \neq b$.

Нека $a \parallel b$ и нека X е произволна точка од рамнината (црт. 1) Ако $\sigma_a(X)=X'$ и $\sigma_b(X')=X''$, тогаш имаме $(\sigma_a \circ \sigma_b)\ (X)=\sigma_b(\sigma_a(X))=$ $=\sigma_b(X')=X''$. Ставајќи $A=XX'' \cap a$ и $B=XX'' \cap b$, од $\sigma_a(X)=X'$ и $\sigma_b(X')=X''$, следува дека $\overrightarrow{XA}=\overrightarrow{AX'}$ и $\overrightarrow{X'B}=\overrightarrow{BX''}$, а од тоа добиваме

$$\overrightarrow{XX''}=\overrightarrow{XX'}+\overrightarrow{X'X''}=2\overrightarrow{AX'}+2\overrightarrow{X'B}=2\overrightarrow{AB};$$

бидејќи правите a и b се зададени, можеме да сметаме дека и векторот $\overrightarrow{AB}$ е зададен. Ставајќи $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, можеме да напишеме $\overrightarrow{XX''}=2\mathbf{a}$, а тоа значи дека точката X'' можеме да ја добиеме од X со транслација за вектор $2\mathbf{a}$, т.е.

$$X''=\tau_{2\mathbf{a}}(X).$$

Од сето тоа следува дека за произволна точка X важи

$$(\sigma_a \circ \sigma_b)\ (X)=\tau_{2\mathbf{a}}(X),$$

а тоа значи дека $\sigma_a \circ \sigma_b=\tau_{2\mathbf{a}}$, т.е. составот на осните симетрии е транслација (за вектор $2\mathbf{a}$).

Нека, сега, правите a и b се сечат во точката O и нека $\alpha=\sphericalangle POQ$ (црт. 2). Ако X е произволна точка од рамнината и ако $\sigma_a(X)=X'$, а $\sigma_b(X')=X''$, тогаш

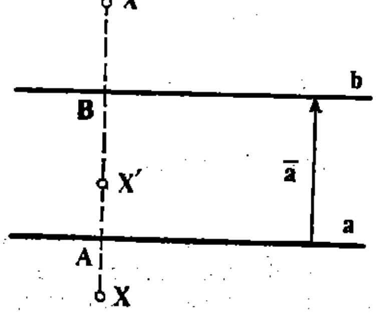
$$(\sigma_a \circ \sigma_b)\ (X)=X''.$$

Нека

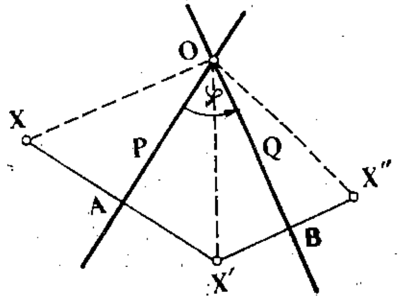
$$A=XX' \cap a,\quad B=X'X'' \cap b.$$

Од $\sigma_a(X)=X'$ и $\sigma_b(X')=X''$ следува дека

$$\overline{OX}=\overline{OX'}=\overline{OX''},\qquad \sphericalangle \overrightarrow{XOA}=\sphericalangle \overrightarrow{AOX'},\qquad \sphericalangle \overrightarrow{X'OB}=\sphericalangle \overrightarrow{BOX''},$$



Црт. 1



Црт. 2

па значи

$$\sphericalangle \overrightarrow{XOX''} = \sphericalangle \overrightarrow{XOX'} + \sphericalangle \overrightarrow{X'OX''} = 2 \sphericalangle \overrightarrow{AOX'} + 2 \sphericalangle \overrightarrow{X'OB} =$$
$$= 2 \sphericalangle \overrightarrow{AOB} = 2\alpha.$$

Од $\overline{OX} = \overline{OX''}$ и $\sphericalangle \overrightarrow{XOX''} = 2\alpha$ следува дека точката X'' може да се добие од точката X со ротација ρ за агол 2α околу точката O, т.е. $X'' = \rho(X)$. Според тоа, за произволна точка X имаме

$$(\sigma_a \circ \sigma_b)\ (X) = \rho(X),$$

а тоа значи дека $\sigma_a \circ \sigma_b = \rho$.

Со тоа ја докажавме следнава теорема.

Теорема. *Составот* $\sigma_a \circ \sigma_b$ *на две осни симетрии* σ_a σ_b *е или транслација (кога* $a \parallel b$*) или ротација (кога* $a \nparallel b$*).*

Во специјалниот случај кога $a \perp b$, составот на σ_a и σ_b е централна симетрија, т.е.

$$\sigma_a \circ \sigma_b = \sigma_O = \sigma_b \circ \sigma_a,$$

каде што $O = a \cap b$.

Задачи

1. Покажи дека состав на две транслации е транслација. Дали важи комутативниот закон за состав на транслации?

2. Со $\mathcal{T}$ да го означиме множеството од сите транслации на рамнината П. Покажи дека $\mathcal{T}$ во однос на операцијата состав на транслации е група, којашто е комутативна.

3. Нека p е дадена права и нека $\mathcal{T}_p$ е множество транслации за вектор паралелен со правата p, т.е.

$$\mathcal{T}_p = \{\tau_{\mathbf{a}} \mid \mathbf{a} \parallel p\}.$$

Провери дека $\mathcal{T}_p$ е група.

4. Покажи дека составот $\sigma_S \circ \sigma_T$ на централните симетрии σ_S и σ_T е транслација за вектор $2\overrightarrow{ST}$, $=2\,\mathbf{a}$, т.е.

$$\sigma_S \circ \sigma_T = \tau_{2\mathbf{a}}.$$

Дали $\sigma_S \circ \sigma_T = \sigma_T \circ \sigma_S$?

5. Покажи дека состав на централна симетрија и транслација (транслација и централна симетрија) е централна симетрија.

6. Со $\mathcal{T}_c$ да го означиме множеството од сите транслации и централни симетрии на рамнината П. Покажи дека $\mathcal{T}_c$ е група.

7. Покажи дека состав од: а) парен број централни симетрии е транслација; б) непарен број централни симетрии е централна симетрија.

8. Нека a, b и c се три паралелни прави. Покажи дека $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ е осна симетрија. Која е нејзината оска?

9. Нека правите a, b и c минуваат низ иста точка O. Покажи дека $\sigma_a \circ \sigma_b \circ \sigma_c$ е осна симетрија, со оска што минува низ точката O.

10. Нека ρ_1 и ρ_2 се ротации со ист центар O и агли α и β соодветно. Покажи дека $\rho_1 \circ \rho_2$ е ротација со центар O и агол $\alpha + \beta$.

11. Нека O е фиксна точка во рамнината и нека $\mathcal{R}_O$ е множеството од сите ротации со центар O. Покажи дека $\mathcal{R}_O$ е група. Дали оваа група е комутативна?

12. Нека ρ_1, ρ_2 се ротации со центри O_1, O_2 и агли α, β соодветно, при што $O_1 \neq O_2$. Покажи дека:

а) ако $\alpha + \beta \neq 0°$, тогаш $\rho_1 \circ \rho_2$ е ротација за агол $\alpha + \beta$;
б) ако $\alpha + \beta = 0°$, тогаш $\rho_1 \circ \rho_2$ е транслација.

13. Покажи дека множеството $\mathcal{G}_r$ од сите транслации и ротации на рамнината е група. Дали оваа група е комутативна?

14. Дадени се пет точки S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5. Конструирај петаголник $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, таков што дадените точки S_1, S_2, S_3, S_4 и S_5 да се средини на неговите страни A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 и A_5A_1 соодветно.

Упатство. Ако σ_k е централна симетрија во однос на $S_k (k = 1, 2, \ldots, 5)$, тогаш A_1 е центарот на централната симетрија $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ldots \circ \sigma_5$.

15. Дадени се четири точки S_1, S_2, S_3, S_4. Дали постои четириаголник, таков што дадените точки да се средини на неговите страни? Колку такви четириаголници постојат?

16. Во кружница да се впише триаголник, таков што неговите страни да се паралелни со три зададени прави.

17. Во дадена кружница да се впише петаголник, таков што неговите страни да се паралелни со пет зададени прави.

18. Дадени се четири прави p_1, p_2, p_3, p_4 и кружницата (O, r). Во кој случај во кружницата (O, r) може да се впише четириаголник, чии страни се паралелни со дадените прави?

8.2. Складност

Во гл. III, **3.2**, го воведовме поимот за складни триаголници. Притоа, два триаголника ABC и $A_1B_1C_1$ ги нарековме складни ако

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1}, \quad \overline{BC} = \overline{B_1C_1}, \quad \overline{CA} = \overline{C_1A_1},$$
$$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B_1, \quad \sphericalangle C = \sphericalangle C_1.$$

Оваа дефиниција важи само за триаголници, па не може да се примени на други фигури. Затоа, овде ќе го прошириме тој поим за произволни геометриски фигури.

Дефиниција. За фигурата $\mathbf{F}_1$ велиме дека е *складна* со фигурата $\mathbf{F}_2$ ако постои движење φ, такво што $\mathbf{F}_2$ да е слика на $\mathbf{F}_1$ при φ, т.е. $\varphi(\mathbf{F}_1)=\mathbf{F}_2$ и ќе пишуваме $\mathbf{F}_1 \cong \mathbf{F}_2$.

На пример, полуправата OA е складна со која било полуправа OB (со ист почеток O), зашто OB е слика од OA при ротацијата ρ со центар O и агол $\sphericalangle \overrightarrow{AOB}$.

Исто така, кружницата $k_1(S_1, r)$ е складна со која било кружница $k_2(S_2, r)$ (со ист радиус r), зашто k_2 е слика од k_1, на пример, при транслацијата за вектор $\overrightarrow{S_1S_2}$.

Со дефиницијата за складни фигури е определена една релација во множеството на сите фигури во рамнината. Неа ќе ја викаме *складност* и ќе ја означуваме со $\cong$.

Ќе покажеме дека *релацијата складност е еквивалентност.*

Секоја фигура $\mathbf{F}$ е складна со себе, зашто $\varepsilon(\mathbf{F})=\mathbf{F}$. Нека фигурата $\mathbf{F}_1$ е складна со фигурата $\mathbf{F}_2$, т.е. $\varphi(\mathbf{F}_1)=\mathbf{F}_2$ при некое движење φ. Бидејќи φ^{-1} е движење и притоа

$$\varphi^{-1}(\mathbf{F}_2)=\varphi^{-1}(\varphi(\mathbf{F}_1))=(\varphi\circ\varphi^{-1})\ (\mathbf{F}_1)=\varepsilon(\mathbf{F}_1)=\mathbf{F}_1,$$

следува дека и $\mathbf{F}_2$ е складна со $\mathbf{F}_1$. На крајот, нека фигурата $\mathbf{F}_1$ е складна со фигурата $\mathbf{F}_2$, а $\mathbf{F}_2$ е складна со фигурата $\mathbf{F}_3$. Тоа значи дека $\varphi(\mathbf{F}_1)=\mathbf{F}_2$, $\psi(\mathbf{F}_2)=\mathbf{F}_3$ за некои движења φ, ψ. Бидејќи составот $\varphi\circ\psi$ е движење и притоа

$$(\varphi\circ\psi)\ (\mathbf{F}_1)=\psi(\varphi(\mathbf{F}_1))=\psi(\mathbf{F}_2)=\mathbf{F}_3,$$

следува дека $\mathbf{F}_1$ е складна со $\mathbf{F}_3$.

Значи, *релацијата складност е рефлексивна, симетрична и транзитивна*, т.е. *таа е еквивалентност.*

Од дефиницијата за складност произлегува дека два триаголника ABC и $A_1B_1C_1$ се складни, ако постои движење φ при кое $\triangle A_1B_1C_1$ е слика на $\triangle ABC$, т.е. $\varphi(A)=A_1$, $\varphi(B)=B_1$, $\varphi(C)=C_1$. Од тоа следува

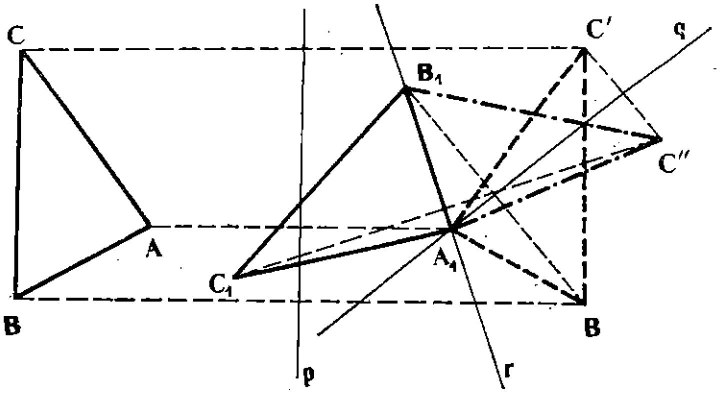
$$\overline{AB}=\overline{A_1B_1},\quad \overline{BC}=\overline{B_1C_1},\quad \overline{CA}=\overline{C_1A_1}, \tag{1}$$

а исто така,

$$\sphericalangle A=\sphericalangle A_1,\quad \sphericalangle B=\sphericalangle B_1,\quad \sphericalangle C=\sphericalangle C_1 \tag{2}$$

што значи дека триаголниците се складни и според дефиницијата од гл. III, **3.2.**

Обратно, нека сега за триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ важат равенствата (1) и (2), т.е. нека триаголниците се складни (црт. 3). Ќе покажеме дека постои движење φ такво што $\varphi(A) = A_1$, $\varphi(B) = B_1$, $\varphi(C) = C_1$.



Црт. 3

За таа цел ќе ја земеме симетралата p на отсечката AA_1. Тогаш имаме $\sigma_p(A) = A_1$. Ако $\sigma_p(B) = B'$, $\sigma_p(C) = C'$ и ако $B' \equiv B_1$, $C' \equiv C_1$, тогаш движењето φ е осната симетрија σ_p. Ако, пак, тоа не е случај, тогаш од

$$\overline{A_1B'} = \overline{AB} = \overline{A_1B_1},$$

следува дека точката A_1 лежи на симетралата q од отсечката BB_1, а тоа значи дека

$$\sigma_q(A_1) = A_1, \ \sigma_q(B') = B_1.$$

Нека $\sigma_q(C') = C''$. Ако $C'' = C_1$, тогаш бараното движење е движењето $\varphi = \sigma_p \circ \sigma_q$. Ако, пак, тоа не е случај, тогаш правата $r = A_1B_1$ е симетрала на отсечката $C''C_1$, па, значи имаме

$$\sigma_r(A_1) = A_1, \ \sigma_r(B_1) = B_1, \ \sigma_r(C'') = C_1.$$

Според тоа, составот $\sigma_p \circ \sigma_q \circ \sigma_r$ е бараното движење, што требаше да се докаже.

Следствено, сеедно е која дефиниција за складни триаголници ќе ја користиме, зашто тие две дефиниции се еквивалентни.

Задачи

1. Избери две полуправи и покажи дека тие се складни.

2. Покажи дека отсечката AB е складна со отсечката BA, т.е. постои движење φ, такво што $\varphi(A) = B$, $\varphi(B) = A$.

3. Два квадрата се складни, ако и само ако имаат еднакви страни.

4. Во кој случај два ромба се складни?

5. Нека A B и C се три неколинеарни точки и нека φ е движење со својството

$$\varphi(A) = A, \quad \varphi(B) = B, \quad \varphi(C) = C.$$

Покажи дека $\varphi = \varepsilon$.

6. Нека триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се складни. Покажи дека постои единствено движење φ со својството: $\varphi(A) = A_1$, $\varphi(B) = B_1$, $\varphi(C) = C_1$.

Упатство. Егзистенцијата на движењето φ е покажана во текстот. За единственост, искористи ја претходната задача.

7. Нека φ е движење. Покажи дека φ е: или транслација, или ротација (специјално, централна симетрија), или осна симетрија или, пак, состав на осна симетрија и транслација, при што, векторот на транслацијата е паралелен со оската на симетријата.

8.3. Групата движења и евклидската геометрија

5

Со поимот група во оваа книга се сретнавме прв пат во §2,7 од гл IV, а потоа, во овој параграф, докажувајќи дека множеството $\mathcal{D}$ трансформации, наречени движења, формираат група во однос на операцијата состав на трансформации. Кога би суделе по неговото „случајно“ појавување во книгава, би можело да се помисли дека тој поим за геометријата има само периферно значење. Но, не е така. Напротив, поимот група е извонредно значаен за геометрија.

Ние видовме дека, освен движења, постојат и други трансформации на рамнината Π (види зад. 2,3,6,12,14 од § 8. 1). Општо, може да се покаже дека множеството $\mathcal{B}$ од сите биекции на дадено множество S во себе формира група во однос на операцијата состав на трансформации. Таа група, а и секоја друга група трансформации на множеството S се вика *трансформациона група* за S.

Овде нас нè интересира, пред сè, групата $\mathcal{D}$ од движења (т.е изометрични трансформации) и „дејството“ на нејзините елементи врз геометриските фигури од рамнината Π.

Ако $\mathbf{F}$ е некоја фигура од рамнината, на пример, рамностран триаголник со страна a, а φ е некој елемент од групата $\mathcal{D}$, т.е. некое движење, тогаш сликата $\varphi(\mathbf{F})$ е пак некоја фигура од рамнината, складна со $\mathbf{F}$. И општо, сите фигури добиени како слика од $\mathbf{F}$ со φ, кога φ се менува во $\mathcal{D}$, се складни со $\mathbf{F}$; за нив велиме дека формираат *класа* фигури, складни со $\mathbf{F}$ и дека $\mathbf{F}$ е само еден нивни *претставник*. Така, на пример, ако $\mathbf{F}$ е рамностран триаголник со страна a, тогаш сите негови слики добиени при некое движење формираат класа рамнострани триаголници со страна a; тие се разликуваат еден од друг единствено по својата положба во рамнината.

Меѓутоа, кога изучуваме својства на некоја геометриска фигура во елементарната геометрија, нас не нè интересира нејзината положба во рамнината. Кога велиме, на пример, дека еден рамностран триаголник е определен ако е позната должината на неговата страна, тогаш ние не мислиме на некој конкретен рамностран триаголник, со точно означена положба, туку на кој било рамностран триаголник со страна a. Со други зборови, за нас се рамноправни сите меѓусебно складни рамнострани триаголници. Тоа важи и за која било друга фигура.

Според тоа, елементарната геометрија ги изучува оние својства на дадена фигура, што се заеднички за сите фигури, складни со неа, а тоа значи оние својства (на фигурите), што остануваат неизменети при „извршување" на некое движење. Некои од тие својства можеме да наведеме. Тоа се, на пример, должина, колинеарност, паралелност, нормалност, агли, складност, плоштина, сличност. Тие се наречени *метрични својства* (на фигурите), па затоа и геометријава што ја изучуваме се вика уште и метрична елементарна геометрија или, почесто, *евклидска геометрија*.

Така, значи, поимот група може да послужи за подобра и точна определба на предметот на геометријата што ја изучуваме. Имено, можеме да кажеме дека евклидската геометрија е наука, која ги изучува оние својства на множеството точки од рамнината, кои остануваат неизменети кога точките од рамнината се подложени на трансформации од групата $\mathcal{D}$ (движења на рамнината).

Овој пристап, пак, ни овозможува да ја разгледаме таа работа поопшто. Ако наместо групата $\mathcal{D}$ се земе некоја друга трансформациона група на рамнината П (на пример, групата $\mathcal{S}$ од сличности, со која ќе се сретнеме во гл. VI), тогаш може да се постави задача за изучување на оние својства (на фигурите) кои остануваат неизменети при трансформациите од таа група. На тој начин се определува предметот на една друга геометрија. (Во случајот на групата $\mathcal{S}$ од сличности, карактеристично својство е запазувањето на аглите, т.е. фигурите ја задржуваат својата форма при сличностите, па така определената геометрија се вика *еквиформна*.)

Според тоа, би можеле да кажеме најопшто што е тоа геометрија:

Геометрија на едно множество S е наука, која ги изучува оние својства на множеството S, што остануваат неизменети кога елементите на S се подложени на елементите од некоја трансформациона група за S.

Овие идеи потекнуваат од германскиот математичар Феликс Клајн (1849—1925).

Глава VI

ТРАНСФОРМАЦИИ НА СЛИЧНОСТ

§ 1. Хомотетија

1.1. Дефиниција на хомотетија

Нека O е фиксирана точка во рамнината, $k \neq 0$ даден реален број и A произволна точка. Нека A' е точка што го задоволува условот

$$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}. \tag{1}$$

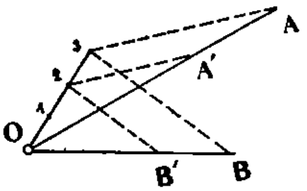
Точката A' што ѝ одговара на A, според условот (1), е еднозначно определена. Со тоа добивме една трансформација на рамнината која се вика *хомотетија со центар O и коефициент k*; ќе ја означиме со $\chi_{O,k}$ или, само, со χ. Значи:

$$\chi_{O,k}(A) = A' \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}. \tag{2}$$

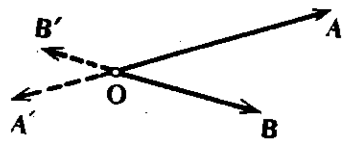
Нека $\chi_{O,k}(O) = O'$; тогаш имаме $\overrightarrow{OO'} = k\overrightarrow{OO} = k\mathbf{o} = \mathbf{o}$, а тоа значи, $O' = O$, т.е. центарот O е неподвижна точка за хомотетијата $\chi_{O,k}$.

Ако $k > 0$, тогаш векторите $\overrightarrow{OA'}$ и $\overrightarrow{OA}$ се исто насочени. Тоа значи дека точката A' лежи на полуправата OA. На пример, ако $k = \frac{2}{3}$, тогаш имаме $\overrightarrow{OA'} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{OA}$. Притоа, A' е онаа точка од отсечката OA, која ја дели во однос 2 : 1 (црт. 1).

Ако $k<0$, тогаш векторите $\overrightarrow{OA'}$ и $\overrightarrow{OA}$ се спротивно насочени. Тоа значи дека точката O е меѓу точките A и A'. На црт. 2 се најдени точките $A'=\chi_{O,-\frac{1}{2}}(A)$ и $B'=\chi_{O,-\frac{1}{2}}(B)$ при дадени A и B.



Црт. 1



Црт. 2

Специјално, ако $k=-1$ и ако $\chi_{O,-1}(A)=A'$, тогаш имаме $\overrightarrow{OA'}=-\overrightarrow{OA}$, т.е. $A'=\sigma_O(A)$. Според тоа, $\chi_{O,-1}=\sigma_O$, т.е. хомотетија со коефициент $k=-1$ е централна симетрија. Ако, пак, $k=1$, тогаш $\chi_{O,1}=\varepsilon$.

Значи, идентичноста ε и секоја централна симетрија се хомотетии. Како што знаеме, тие се биекции. Ќе покажеме дека секоја хомотетија е биекција.

Навистина, нека A и B се две точки и нека $\chi_{O,k}(A)=A'$, $\chi_{O,k}(B)=B'$. Тогаш имаме $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=k\overrightarrow{OB}$, а потоа

$$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{OB'}-\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OB}-k\overrightarrow{OA}=k(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=k\overrightarrow{AB}.$$

Ако $A\neq B$, тогаш $\overrightarrow{AB}\neq\mathbf{o}$, па од равенството $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$, следува $\overrightarrow{A'B'}\neq\mathbf{o}$, т.е. $A'\neq B'$. Значи, хомотетијата $\chi_{O,k}$ е инјекција.

Ако, пак, A' е произволна точка и точката A е определена со условот $\overrightarrow{OA}=\frac{1}{k}\overrightarrow{OA'}$, тогаш имаме $\overrightarrow{OA'}=k\overrightarrow{OA}$, т.е. $\chi_{O,k}(A)=A'$. Значи, хомотетијата $\chi_{O,k}$ е и сурјекција. Според тоа:

Теорема 1. *Секоја хомотетија $\chi_{O,k}$ е биекција и притоа*

$$\chi_{O,k}^{-1}=\chi_{O,\frac{1}{k}} \tag{3}$$

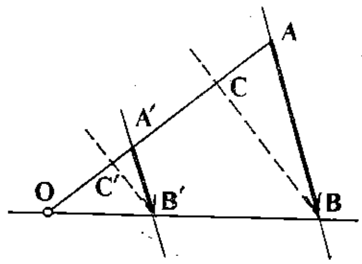
Со доказот дека хомотетијата $\chi_{O,k}$ е инјекција, ја докажавме и следнава теорема:

Теорема 2. *Ако $\chi_{O,k}(A)=A'$, $\chi_{O,k}(B)=B'$, тогаш $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$, т.е. векторите $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{AB}$ се колинеарни и, притоа, ако $k>0$, тогаш тие се исто насочени, а ако $k<0$, тогаш тие се спротивно насочени.*

Од оваа теорема следува дека секоја хомотетија е еднозначно определена со центарот и со еден пар точки, колинеарни со него.

Навистина, нека O, A и A' се три различни колинеарни точки. Тогаш, векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OA'}$ се колинеарни, па постои реален број $k \neq 0$ таков што $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$. Тоа значи дека $\chi_{O,k}(A) = A'$.

Да видиме сега како ќе ја најдеме сликата на произволна точка B при $\chi_{O,k}$. Нека B е точка што не е колинеарна со O и A (црт. 3). За да ја најдеме точката $B' = \chi_{O,k}(B)$, ја повлекуваме правата OB, зашто B' е колинеарна со O и B. Векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ се колинеарни, па, значи, точката B' лежи и на правата a' што минува низ A' и е паралелна со правата AB. Од тоа следува дека $B' = OB \cap a'$. Ако, пак, C е колинеарна со точките O и A, тогаш претходно избираме точка B неколинеарна со O и A, ја наоѓаме $B' = \chi_{O,k}(B)$, а потоа, користејќи ја неа, ја наоѓаме и точката $C' = \chi_{O,k}(C)$ (црт. 3).



Црт. 3

Задачи

1. Избери точки O и A и најди ги точките $A_1 = \chi_{O,2}(A)$, $A_2 = \chi_{O,-2}(A)$, $A_3 = \chi_{O,3/2}(A)$.

2. Избери три колинеарни точки O, A и A'. Ако бројот k го задоволува условот $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, најди ја сликата на произволна точка B при хомотетијата $\chi_{O,k}$.

3. Докажи дека, ако $k \neq 1$, тогаш точката O е единствена неподвижна точка за хомотетијата $\chi_{O,k}$.

4. Дадени се три произволни точки O, A и A'. Во кој случај постои хомотетија χ со центар O, таква што $\chi(A) = A'$? Колку такви хомотети постојат?

5. Нека A, B, A', B' се четири точки. Покажи дека постои хомотетија χ, таква што $\chi(A) = A'$, $\chi(B) = B'$, ако и само ако векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ се колинеарни, но различни, т.е. $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$, при што $k \neq 1$. Разгледај го случајот кога $k = 1$.

1.2. Слики на некои фигури при хомотетија

Во претходниот дел видовме дека, ако $\chi_{O,k}$ е дадена хомотетија, и ако $\chi_{O,k}(A) = A'$, $\chi_{O,k}(B) = B'$, тогаш $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ (теорема 2), т.е. векторите $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$ се колинеарни. Според тоа:

— *колинеарни точки при хомотетија се пресликуваат во колинеарни точки*,

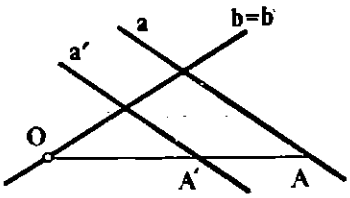
— *права при хомотетија се пресликува во права, паралелна со дадената.*

Тоа значи, дека ако a е дадена права и $\chi_{O,k}(a)=a'$, тогаш правите a и a' се паралелни. Ако правата a минува низ центарот O на хомотетијата, тогаш, бидејќи $\chi_{O,k}(O)=O$, правата a' ќе мивува исто така, низ точката O, т.е. $a'=a$. Значи, секоја права што минува низ центарот O на хомотетијата $\chi_{O,k}$ се пресликува во себе т.е.

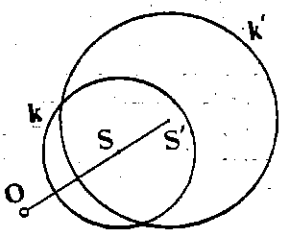
$$O\in a\Rightarrow\chi_{O,k}(a)=a.$$

За да ја најдеме правата $a'=\chi_{O,k}(a)$ доволно е да ја најдеме сликата A' на една точка $A\in a$ и потоа да ја конструираме правата што минува низ A' и е паралелна со правата a (црт. 4).

Да видиме сега што претставува сликата на кружница при хомотетија.



Црт 4.



Црт 5.

Нека $k(S,r)$ е дадена кружница, $\chi_{O,k}$ дадена хомотетија. Ако M е произволна точка од кружницата $k(S,r)$ и $\chi_{O,k}(M)=M'$, $\chi_{O,k}(S)=S'$, тогаш

$$\overline{S'M}=|k|\,\overline{SM}=|k|\,r.$$

Од ова следува дека M' лежи на кружницата $(S',|k|r)$. Значи сликата на кружницата $k(S,r)$ при хомотетијата $\chi_{O,k}$ е кружницата со центар $S'=\chi_{O,k}(S)$ и радиус $|k|r$.

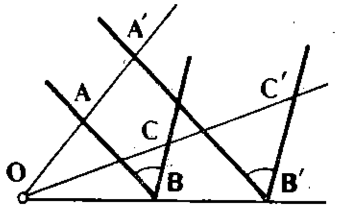
На црт. 5 е преставена сликата на кружницата $k(S,r)$ при хомотетијата $\chi_{O,\frac{2}{3}}$.

Нека сега е даден агол $\alpha=\sphericalangle ABC$ и хомотетијата $\chi_{O,k}$. Ако $\chi_{O,k}(A)=A'$, $\chi_{O,k}(B)=B'$, $\chi_{O,k}(C)=C'$ (црт. 6 и 7), тогаш имаме $\overrightarrow{B'A'}=k\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B'C'}=k\overrightarrow{BC}$, т.е. полуправите $B'A'$ и BA, односно $B'C'$ и BC се паралелни и притоа или се исто насочени (ако $k>0$, како на црт. 6) или се спротивно насочени (ако $k<0$, како на црт. 7). Значи, во секој случај $\sphericalangle A'B'C'=\sphericalangle ABC$, т.е. *агол при хомотетија се пресликува во нему еднаков агол.*

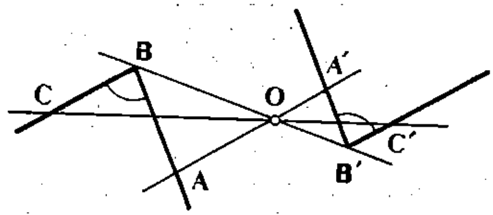
Од тоа, пак, следува:

— *заемно нормални прави при хомотетија се пресликуваат во заемно нормални прави,*

— *секој триаголник при хомотетија се пресликува во нему сличен триаголник.*



Црт. 6



Црт. 7

Задачи

1. Избери една права a и една точка O и конструирај ја правата $a' = \chi_{O, \frac{1}{2}}(a)$. Разгледај ги двата случаја кога a минува низ O и кога a не минува низ O.

2. Избери еден триаголник ABC и конструирај ја сликата на овој триаголник при химотетијата: $\chi_{A}, \frac{2}{3}$, $\chi_{B}, -\frac{1}{2}$, $\chi_{T}, -\frac{1}{2}$, $\chi_{A_1}, \frac{3}{2}$, каде што T е тежиштето на триаголникат а A_1 средината на страната BC.

3. Дали постојат кружници кои се неподвижни при хомотетијата $\chi_{O,k}$, $k \neq 1$?

4. За фигурите $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_1$ велиме дека се *хомотетични,* ако постои хомотетија χ при која фигурата $\mathbf{F}$ се пресликува во фигурата $\mathbf{F}_1$.

Во кој случај фигурите $\mathbf{F}=\{A,B\}$ и $\mathbf{F}_1=\{C,D\}$ се хомотетични?

5. Во кој случај фигурите $\mathbf{F}=\{A, B, C\}$ и $\mathbf{F}_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ се хомотетични, каде што A, B, C лежат на правата p, а A_1, B_1, C_1 — на правата q?

6. Дадени се две прави p и q. Во кој случај овие прави се хомотетични? Колку хомотетии постојат кои правата p ја пресликуваат во правата q?

7. Во кој случај два дадени квадрати се хомотетични?

8. Дадени се две концентрични кружници. Дали тие кружници се хомотетични?

1.3. Хомотетија на кружници

Во претходниот дел видовме дека при хомотетија, кружница се пресликува во кружница, т.е. ако χ е хомотетија со центар O и коефициент k, тогаш кружницата (S, r) се пресликува во кружницата (S', r') каде што

$$S' = \chi(S), \qquad r' = |k| r. \tag{1}$$

Овде ќе покажеме дека кои било две кружници се хомотетични, т.е. дека постои хомотетија, која едната кружница ја пресликува во другата.

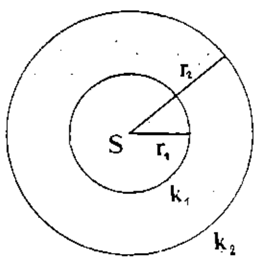
Нека $k_1(S_1, r_1)$ и $k_2(S_2, r_2)$ се две дадени кружници. Ако постои хомотетија χ при која кружницата k_1 се пресликуа во k_2, тогаш нејзиниот коефициент, според (1) мора да биде или $\frac{r_2}{r_1}$ или $-\frac{r_2}{r_1}$. Од $S_2 = \chi(S_1)$, пак, следува дека центарот O на хомотетијата χ мора да лежи на централната линија S_1S_2.

Да ги разгледаме двата случаја кога кружниците: 1° се концентрични и 2° не се концентрични.

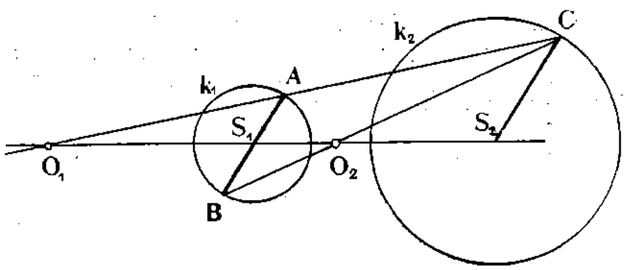
1° Ако $S_1 \equiv S_2 \equiv S$ (црт. 8), тогаш хомотетијата χ со центар S и коефициент r_2/r_1 ја пресликува кружницата k_1 во k_2.

2° Да претпоставиме сега дека $S_1 \neq S_2$ и $r_1 \neq r_2$ (црт. 9). Нека C е произволна точка од кружницата k_2, а AB дијаметарот на k_1 што е паралелен со правата S_2C и нека $O_1 = S_1S_2 \cap AC$, $O_2 = S_1S_2 \cap BC$. Тогаш хомотетијата χ_1 со центар O_1 и коефициент $\frac{r_2}{r_1}$, односно хомотетијата χ_2 со центар O_2 и коефициент $-\frac{r_2}{r_1}$, ја пресликува кружницата k_1 во кружницата k_2.

Ако, пак, $r_1 = r_2$, тогаш правата AC ќе биде паралелна со правата S_1S_2, но правата BC ја сече S_1S_2, па при хомотетијата χ_2 кружницата k_1 ќе се преслика во кружницата k_2.



Црт. 8



Црт. 9

Со тоа покажавме дека *кои било две кружници се хомотетични*. Центарот на хомотетијата, во тој случај, се вика и *центар на сличност* (или центар на хомотетија) на тие кружници.

Од горното разгледување следува дека две концентрични кружници имаат само еден центар на сличност, а неконцентрични кружници може да имаат или два или еден центар на сличност. Во случајот кога кружниците имаат два центра на сличност, едниот се вика *надворешен* (O_1 на црт. 9), а другиот *внатрешен* центар на сличност (O_2 на црт. 9).

Интересно е да се забележи, дека, ако t е заедничка тангента на две кружници, тогаш таа е или паралелна со централната линија или минува низ еден од центрите на сличноста. Според тоа, за да ги конструираме заедничките тангенти на две кружници, треба да ги најдеме нивните центри на сличност и од нив да ги повлечеме тангентите на едната од кружниците.

Задачи

1. Во кој случај две дадени кружници имаат само еден центар на сличност?

2. Кружниците $k_1(S_1, r_1)$ и $k_2(S_2, r_2)$ се допираат во точката T. Дали T е центар на сличност на кружниците k_1 и k_2?

3. Колку центри на сличност имаат две дадени кружници ако кружниците: а) се допираат однатре, б) се допираат однадвор, в) немаат заеднички точки?

4. Колку заеднички тангенти може да имаат две дадени кружници? Разгледај ги сите можни случаи.

5. Избери две кружници што се сечат и конструирај ги нивните заеднички тангенти.

6. Избери две кружници што се допираат и конструирај ги нивните заеднички тангенти.

7. Избери две кружници што не се сечат и конструирај ги нивните заеднички тангенти. Разгледај ги сите можни случаи.

1.4. Примена на хомотетијата

Ќе решиме неколку задачи кои, во извесна мера, ќе ја илустрираат примената на хомотетијата.

Задача 1. Да се покаже дека тежиштето T, ортоцентарот H и центарот O на опишаната кружница за кој било триаголник ABC се колинеарни.

Решение. Нека ABC (црт. 10) е произволен триаголник. Како што знаеме, тежиштето T ги дели тежишните линии AA_1, BB_1 и CC_1 во однос $2:1$. Од тоа следува дека

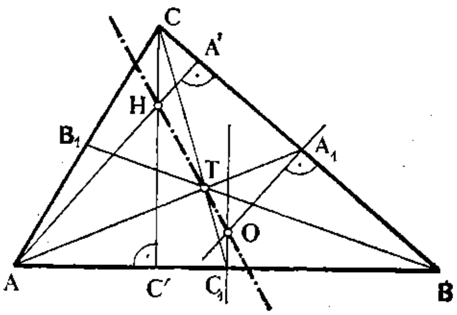
$$\overrightarrow{TA} = -2\,\overrightarrow{TA_1},$$

$$\overrightarrow{TB} = -2\,\overrightarrow{TB_1},\ \overrightarrow{TC} = -2\,\overrightarrow{TC_1}.$$

Тоа значи, дека, ако χ е хомотетија со центар T и коефициент $-\frac{1}{2}$, тогаш

$$\chi(A)=A_1,\ \chi(B)=B_1,\ \chi(C)=C_1,$$

т.е. триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$ се хомотетични со коефициент $-\frac{1}{2}$.



Црт. 10

Да ја најдеме точката $\chi(H)$. Ако CC' е висината на триаголникот ABC, спуштена од темето C, тогаш правата CC' ќе се преслика со χ во права што ѐ паралелна со неа и минува низ точката C_1, т.е. во симетралата на страната AB. Аналогно својство важи и за висините AA' и BB'. Од тоа следува дека $\chi(H)=O$, што значи $\overrightarrow{TO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{TH}$, т.е.

$$\overrightarrow{TH} = 2\,\overrightarrow{OT}. \tag{1}$$

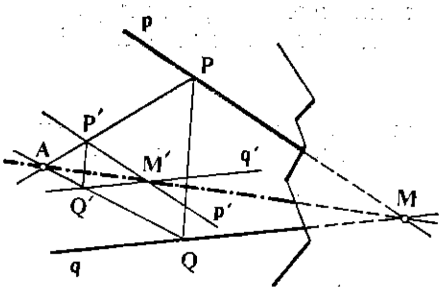
Од равенството (1) следува дека точките T, O и H се колинеарни. Уште повеќе, точката T ја дели отсечката HO во однос $2:1$.

Правата на која лежат точките T, O и H се вика *Ојлерова права.*

Задача 2. Дадена е точка A и две прави p, q кои се сечат надвор од листот на кој цртаме. Да се конструира правата $a = AM$, каде што $M = p \cap q$.

Решение. За да ја нацртаме правата a доволно е, на листот на кој цртаме, да најдеме една точка, којашто е колинеарна со точките A и M. При секоја хомотетија со центар A, правата a се пресликува во себе, па, значи, ако избереме хомотетија χ со центар во A и таков коефициент што точката $\chi(M) = M'$ е на листот на кој цртаме, тогаш бараната права ќе биде правата AM'. Секако коефициентот на хомотетијата треба да биде помал од 1.

Да избереме произволна точка P од правата p и точка P' колинеарна со A и P (црт. 11). Нека χ е хомотетија со центар A и коефициент $\frac{\overline{AP'}}{\overline{AP}}$. Ако $\chi(p) = p'$, $\chi(q) = q'$, тогаш $\chi(M) = M'$ ќе биде точката $p' \cap q'$.



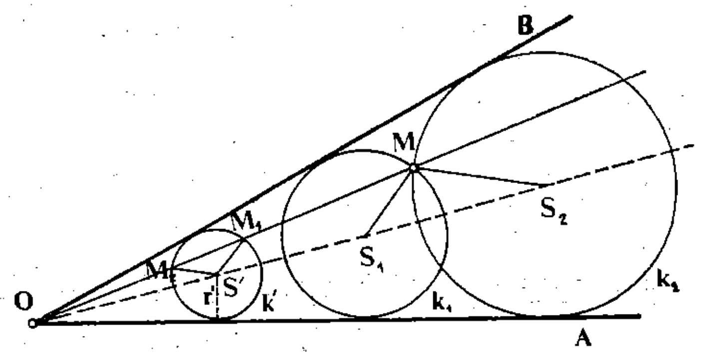
Црт. 11

Задача 3. Даден е аголот AOB и една негова внатрешна точка M. Да се конструира кружница k која ги допира краците на аголот и минува низ точката M.

Решение. Анализа. Нека $k(S, r)$ е бараната кружница. Бидејќи k ги допира краците на аголот AOB, центарот S на кружницата k ќе лежи на симетралата s на $\sphericalangle AOB$. Но, ако χ е хомотетија со центар во O и позитивен коефициент, тогаш краците OA и OB на аголот се пресликуваат со χ во себе, а кружницата $k(S, r)$ ќе се преслика во кружницата (S', r') што, исто така, ги допира краците на $\sphericalangle AOB$. Значи, за да ја конструираме кружницата k, доволно е да конструираме произволна кружница k_1 што ги допира краците на $\sphericalangle AOB$, а потоа да определиме таква хомотетија χ, при која кружницата k_1 ќе се преслика во кружница што минува низ точката M.

Конструкција. Нека s е симетралата на аголот AOB и нека $S' \in s$ (црт. 12). Потоа, нека $k'(S', r')$ е кружница со центар во S' што ги допира краците OA и OB на аголот AOB. Ако M_1 и M_2 се пресечните точки на правата OM со кружницата k' и ако χ_1 е хомотетија со центар во O и коефициент $k_1 = \frac{\overline{OM}}{\overline{OM_1}}$, χ_2 е хомотетија со центар во O и коефициент $k_2 = \frac{\overline{OM}}{\overline{OM_2}}$, тогаш имаме $\chi_1(M_1) = M$ и $\chi_2(M_2) = {}$ $= M$. Значи кружниците $\chi_1(k')$ и $\chi_2(k')$ ќе минуваат низ точката M и ќе ги допираат краците на $\sphericalangle AOB$. Нивните центри ќе бидат точките $S_1 = \chi_1(S')$ и $S_2 = \chi_2(S')$.

Доказ. Кружницата k' минува низ точките M_1 и M_2, па кружниците $k_1=\chi_1(k')$ и $k_2=\chi_2(k')$ ќе минуваат низ точката $M=\chi_1(M_1)=\chi_2(M_2)$. Дека кружниците k_1 и k_2 ги допираат краците на $\sphericalangle AOB$, следува од анализата.

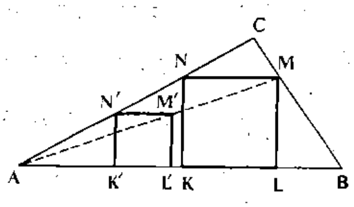


Црт. 12

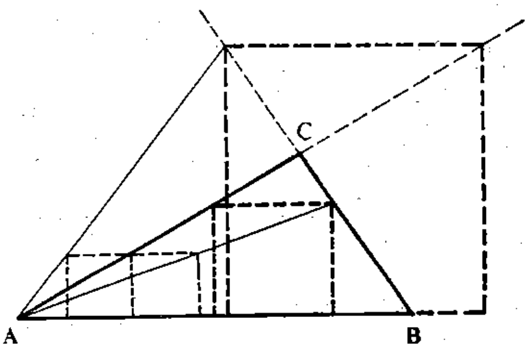
Дискусија. Точката M е внатрешна на аголот AOB, па правата OM ја сече кружницата k' во две точки. Тоа значи дека задачата секогаш има две решенија.

Задача 4. Во даден триаголник ABC да се впише квадрат, така што две негови темиња да лежат на основата AB, а другите две на BC и CA соодветно.

Решение. Анализа. Да претпоставиме дека задачата е решена и $KLMN$ е бараниот квадрат (црт. 13). Ако χ е хомотетија со центар во A и некој коефициент $k \neq 1$, тогаш квадратот $KLMN$ ќе се преслика во квадратот $K'L'M'N'$ при што K' и L' ќе лежат на правата AB, а N' ќе лежи на правата AC (зошто?). Точката, пак, M' нема да лежи на правата BC (зошто?). Ако точката N' ја избереме произволно на страната AC, квадратот $K'L'M'N'$ може лесно да се конструира (црт. 13). Бидејќи M, M' и центарот A на хомотетијата се колинеарни, следува дека M е пресечната точка на правите AM' и BC.



Црт. 13



Црт. 14

Конструкција. Да избереме произволна точка N' на страната AC. Нека K' е ортогоналната проекција од N' на правата AB, и нека $K'L'M'N'$ е квадрат со страна $K'N'$. Ако M е пресечната точка на правите AM' и BC, а L е ортогоналната проекција на M врз AB, тогаш бараниот квадрат е квадратот $KLMN$ со страна MN.

Доказ. Дека конструкцијата е правилна следува од тоа, што хомотетијата со центар A и коефициент $\overline{AM} : \overline{AM'}$ го пресликува квадратот $K'L'M'N'$ во квадратот $KLMN$.

Дискусија. За да можеме да ја спроведеме дискусијата за тоа кога задачата има решенија, а кога не, треба претходно да се договориме што ќе ни значат зборовите „квадрат впишан во триаголник".

Вообичаено е под тие зборови да се подразбира квадрат со темиња на страните од триаголникот. Во тој случај, задачата има единствено решение, ако ниеден од аглите $\alpha = \sphericalangle A$, $\beta = \sphericalangle B$ не е тап, а ќе нема решение, ако едниот од тие агли е тап (зошто?).

Но, под „квадрат впишан во триаголник" може да се подразбере и „квадрат чии темиња лежат на страните од триаголникот или на нивните продолженија" (според тоа, квадратот не мора да лежи во триаголникот). Во овој случај, задачата секогаш има решение, при што таа има, обично, две решенија (црт. 14) но може да има и само едно (кој е тој случај?).

Да забележиме дека под „многуаголник $\mathbf{F}_1$ впишан во многуаголник $\mathbf{F}_2$" често се подразбира многуаголник $\mathbf{F}_1$, таков што сите негови темиња да лежат на страните или на продолженијата од страните на многуаголникот $\mathbf{F}_2$; притоа, $\mathbf{F}_1$ не мора да лежи во $\mathbf{F}_2$.

Задачи

1. Да се конструира триаголник ABC, ако се дадени α, β, h_c.

2. Да се конструира правоаголен триаголник, ако е позната висината, спуштена од темето на правиот агол и ако едната катета е двапати поголема од другата.

3. Да се конструира триаголник ABC ако е дадена симетралата на најмалиот од неговите агли, а неговите страни се однесуваат како $m:n:p$ $(m<n<p)$.

4. Да се конструира триаголник ABC, ако се познати: темето A, ортоцентарот H и центарот O на опишаната кружница.

5. Во триаголникот ABC да се впише триаголник PQR, чии страни се нормални на страните од триаголникот ABC.

6. Во даден триаголник ABC да се впише ромб се остар агол $\alpha = 60°$, таков што две негови темиња да лежат на основата AB, а другите две, соодветно, на страните BC и AC.

7. Нека AB е дијаметар на кружницата (O, r). Да се конструира квадрат $KLMN$, така што темињата K и L да лежат на дијаметарот AB, а M и N на кружницата (O, r).

8. Во дадена кружница да се впише триаголник ABC, сличен со еден даден триаголник PQR.

9. Дадена е кружница (O, r) и точката A на неа. Да се определи геометриското место на средините од тетивите повлечени од A.

10. Дадена е кружница (O, r) и точките A, B, C на неа. Да се конструира тетива AX, која со тетивата BC е поделена на половина.

11. Правите a, b односно c, d се сечат надвор од листот на кој цртаме. Низ точката S да се повлече права паралелна со правата MN, каде што $M = a \cap b$, $N = c \cap d$.

12. Да се конструира кружница, којашто:

а) допира две дадени прави и минува низ дадена точка,

б) допира дадена права и минува низ две дадени точки,

в) допира две дадени прави и дадена кружница.

13. Нека T_1, T_2 и T_3 се тежиштата соодветно на триаголниците ABC, ABD, ABE. Докажи дека, ако точките C, D и E се колинеарни, тогаш и точките T_1, T_2 и T_3 се колинеарни.

14. Нека $ABCD$ е трапез со основи AB и CD. Ако M е средината на AB, N е средината на CD, P е пресекот на дијагоналите и Q е пресекот на продолженијата од бочните страни, тогаш, покажи дека точките M, N, P и Q се колинеарни.

*§2. Сличности и слични фигури

2.1. Сличности

Во претходниот параграф видовме дека за произволна хомотетија χ со коефициент k и за кои било точки A, B важи равенството

$$\overline{A'B'} = |k|\,\overline{AB},$$

каде што $A' = \chi(A)$, $B' = \chi(B)$.

Тоа равенство го задоволува и кој било состав на хомотетија и движење. Навистина, ако A и B се произволни точки, а φ е движење и χ хомотетија, при што $\varphi(A) = A_1$, $\varphi(B) = B_1$, а $\chi(A_1) = A'$ и $\chi(B_1) = B'$ тогаш $(\varphi\circ\chi)(A) = \chi(\varphi(A) = \chi(A_1) = A'$, $(\varphi\circ\chi)(B) = B'$ и

$$\overline{A'B'} = |k|\,\overline{A_1B_1} = |k|\,\overline{AB}.$$

Притоа, составот $\varphi\circ\chi$ не мора да биде хомотетија. На пример, ако φ е осна симетрија со оска p и χ хомотетија, а AB отсечка што не е паралелна со оската p, тогаш AB не е паралелна со $A'B'$, па, значи, $\varphi\circ\chi$ не е хомотетија, зашто отсечка со хомотетија се пресликува во паралелна отсечка.

Тоа природно, ја наметнува следнава дефиниција:

Дефиниција. Нека ψ е трансформација на рамнината Π и нека $\psi(A) = A'$, $\psi(B) = B'$, при што A и B се произволни точки. Ако ψ го задоволува условот

$$\overline{A'B'} = k\,\overline{AB},$$

каде што k е даден позитивен реален број, тогаш ψ се вика *трансформација на сличност* или, кратко, *сличност со коефициент* k.

Од дефиницијата, направо може да се заклучи дека секое движење е сличност со коефициент 1 и секоја хомотетија со коефициент k е сличност со коефициент $|k|$. Исто така, состав на движење и хомотетија, односно хомотетија и движење е сличност.

Може да се покаже дека секоја сличност е биекција. Уште повеќе, сличност што не е хомотетија и не е движење мора да е состав од ротација и хомотетија или, пак, состав од осна симетрија и хомотетија.

Од сето тоа може да се заклучи дека:

Трансформацијата ψ *на рамнината* Π *е сличност ако и само ако* ψ *е состав на движење и хомотетија.*

Слично како кај движењата се покажува дека *множеството* $\mathcal{S}$ *од сите сличности на рамнината* Π *е група во однос на операцијата составување на трансформации.*

Задачи

1. Нека χ_1, χ_2 се хомотетии со ист центар O и коефициети k_1 и k_2. Покажи дека составот $\chi_1 \circ \chi_2$ е хомотетија со центар O и дека $\chi_1 \circ \chi_2 = \chi_2 \circ \chi_1$.

2. Покажи дека множеството $\mathcal{H}_O$ од сите хомотетии со ист центар O, е група. Дали групата е комутативна?

3. Нека χ_1, χ_2 се хомотетии со центар O_1, O_2 $(O_1 \neq O_2)$ и коефициенти k_1 k_2 соодветно. Покажи дека $\chi_1 \circ \chi_2$ е:

а) транслација, ако $k_1 k_2 = 1$.

б) хомотетија, ако $k_1 k_2 \neq 1$.

Упатство. Ака A, B се две произволни точки и A', B' се нивните слики при составот $\chi_1 \circ \chi_2$, покажи дека $\overrightarrow{A'B'} = k_1 k_2 \overrightarrow{AB}$, а потоа искористи ја задачата 5 од § **1.1.**

4. Ако $\chi_1 \circ \chi_2$ е транслација (задача 3), најди го векторот на транслацијата. Притоа, користи ги само центрите на хомотетиите.

5. Ако $\chi_1 \circ \chi_2 = \chi$ е хомотетија (зад. 3), најди го центарот на χ и покажи дека центрите на трите хомотетии се колинеарни.

6. Покажи дека состав на централна симетрија и хомотетија, односно хомотетија и централна симетрија, е хомотетија.

7. Нека τ е дадена транслација за вектор $\mathbf{a}$ и χ дадена хомотетија со центар O и коефициентот k.

а) Покажи дека составите $\tau \circ \chi$ и $\chi \circ \tau$ се хомотетии.

б) Најди ги нивните центри.

в) Дали $\tau \circ \chi = \chi \circ \tau$?

8. Покажи дека множеството $\mathcal{H}_t$ од сите хомотетии и транслации е група и дека таа група не е комутативна.

2.2. Слични фигури

Во § **5** од гл. III го воведовме поимот за слични триаголници, при што, за два триаголника ABC и $A_1B_1C_1$ велиме дека се слични, ако соодветните агли им се еднакви, а соодветните страни пропорционални, т.е.

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A_1, \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B_1, \quad \sphericalangle C = \sphericalangle C_1,$$

$$\overline{AB} : \overline{A_1B_1} = \overline{BC} : \overline{B_1C_1} = \overline{CA} : \overline{C_1A_1}$$

Оваа дефиниција може да се обопшти за многуаголници, но не и за произволни фигури. За да можеме да зборуваме за слични фигури во општ случај, овде ќе го воведеме тој поим, користејќи ги трансформациите на сличности.

Дефиниција. За фигурата $\mathbf{F}_1$ велиме дека е *слична* со фигурата $\mathbf{F}_2$, ако постои сличност ψ, така што $\mathbf{F}_2$ да е слика на $\mathbf{F}_1$ при ψ, т.е. $\psi(\mathbf{F}_1) = \mathbf{F}_2$ и ќе означуваме $\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_2$.

На пример, кои било две кружници се слични, зашто се хомотетични, кои било две прави се слични, зашто се складни. Исто така, кои било две отсечки се слични, зашто, ако се паралелни, тогаш тие се хомотетични, а ако не се паралелни, тогаш едната отсечка можеме со некое движење да ја доведеме до паралелна отсечка со другата.

Во претходниот раздел видовме дека секоја сличност е состав од некое движење и некоја хомотетија. Од тоа следува дека, ако две фигури се слични, тогаш постои фигура која е складна со едната, а хомететична со другата.

Со дефиницијата за слични фигури е определена една релација во множеството на сите фигури во рамнината. Неа ќе ја викаме, исто така, *сличност* и ќе ја означуваме со симболот $\sim$.

Од тоа што множеството $\mathcal{S}$ од трнсформации на сличности на рамнината е група при состав на трансформации, можеме лесно да заклучиме дека релацијата $\sim$ е рефлексивна, симетрична и транзитивна, т.е. дека е еквивалентност.

Слично како за складноста на триаголниците се покажува дека дефиницијата за слични триаголници што произлегува од „општата" дефиниција за сличност е еквивалентна со првобитната дефиниција за слични триаголници.

Задачи

1. Покажи дека се слични: а) кои било два рамнострани триаголници б) кои било два квадрата, в) кои било два правилни шестаголници.

2. Во кој случај се слични: а) два ромба, б) два правоаголника, в) ромб и ромбоид?

3. Покажи дека: а) секоја фигура $\mathbf{F}$ е слична со себе, б) ако $\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_2$, тогаш $\mathbf{F}_2 \sim \mathbf{F}_1$, в) ако $\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2 \sim \mathbf{F}_3$, тогаш $\mathbf{F}_1 \sim \mathbf{F}_3$.

4. Дадена е правата p, точката A на неа и кружниците k_1 и k_2. Да се конструира триаголник ABC за кој правата p е симетрала на аголот α (при темето A), темињата B и C лежат на кружниците k_1 и k_2 соодветно и познат е односот $\overline{AB} : \overline{AC}$.

5. Дадени се кружниците k_1 и k_2, точката A и аголот α. Да се конструира триаголник ABC за кој е познат односот $\overline{AB} : \overline{AC}$, $\sphericalangle A = \alpha$, а темињата B и C лежат на k_1 и k_2, соодветно.

5. Во даден триаголник ABC да се впише триаголник PXY, сличен со даден триаголник KLM, ако точката P е дадена на страната AB.

Глава VII

ЌОШЕ И ПОЛИЕДРИ

§1. Точка и рамнина

1.1. Точка и рамнина

Со аксиомата А.3. (в. гл. II, §2) прифативме дека за секоја рамнина Σ постојат точки во просторот што ѝ припаѓаат (бесконечно многу) и точки што не ѝ припаѓат. Патем да спомнеме дека и точките што не ѝ припаѓаат на Σ, исто така, се бесконечно многу; навистина, ако $P \in \Sigma$ и $Q \notin \Sigma$, тогаш правата PQ има бесконечно многу точки (А. 2), од кои само точката P лежи на рамнината Σ.

Нека точките A, B, C не лежат на рамнината Σ. Ако отсечката AB има со рамнината Σ заедничка внатрешна точка, тогаш велиме дека точките A и B *се разделени* со рамнината Σ, или дека точките A и B *лежат на различни страни* од рамнината Σ. Во случај кога отсечката BC нема заеднички точки со рамнината Σ, велиме дека точките B, C *лежат на иста страна* од рамнината Σ.

1.2. Полупростор

Очигледно е дека кои било две точки што не ѝ припаѓаат на една фиксирана рамнина, или ќе лежат на иста страна или ќе лежат на различни страни од таа рамнина.

Значи, која било рамнина Σ го разделува множеството точки од просторот што не лежат на таа рамнина, на две непразни множества, така што

— кои било две точки од едно исто множество да лежат на иста страна од рамнината;

— кои било две точки, земени по една од секое множество, да се разделуваат со рамнината Σ.

Дефиниција. Фигурата образувана од една рамнина и сите точки во просторот што се на иста страна од рамнината ја викаме *йолуйросшор*. Рамнината ја викаме *граница* или *sug* на тој полупростор.

Обично, велиме дека секоја рамнина го разбива просторот на два полупростора со *заеднички sug*.

Задачи

1. Да се докаже: ако кои било четири точки од некоја фигура лежат во една рамнина, тогаш таа фигура е рамнинска, т.е. сите нејзини точки лежат во една рамнина.

2. Нека точките A и B се на различни страни од рамнината Σ. Да се докаже дека секоја искршена линија со крајни точки A и B има барем една заедничка точка со рамнината Σ.

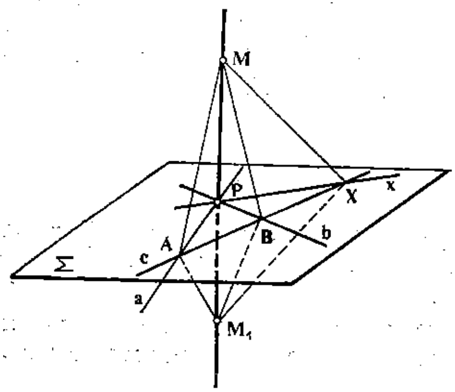
§2. Права и рамнина

2.1. Нормала на рамнина

Правата што прободува една рамнина и е нормална на секоја права од рамнината која минува низ нејзиниот прибод, ја викаме *нормала на рамнинаша*, односно велиме дека правата и рамнината се заемно *нормални*.

Следнава теорема ни дава еден основен признак за нормалност на права и рамнина.

Теорема. *Ако една йрава йрободува дадена рамнина и е нормална на две йрави од шаа рамнина шшо минуваат низ йрободош, шогаш шаа е нормална и на рамнинаша.*



Црт. 1

Доказ. Да земеме дека правата p ја прободува рамнината Σ во точката P и дека е нормална на правите a и b од рамнината Σ што минуваат низ точката P (црт. 1).

На правата p избираме точки M и M_1, така што $\overline{PM}=\overline{PM_1}$, т.е. точката P да е средина на отсечката MM_1. Лесно се забележува дека правите a и b од рамнината Σ се симетрали на отсечката MM_1.

Низ точката P повлекуваме произволна права x што лежи во рамнината Σ; исто така, во Σ избираме друга права c што ги сече правите a, b и x во точките A, B и X.

Поради $\overline{AM}=\overline{AM_1}$, $\overline{BM}=\overline{BM_1}$ (зошто?) и AB — заедничка страна, според признакот CCC, триаголниците ABM и ABM_1 се складни, од каде што $\measuredangle MAB = \measuredangle M_1AB$. Исто така, поради: $\overline{AM}=\overline{AM_1}$, AX—заедничка страна и $\measuredangle MAX = \measuredangle M_1AX$, според признакот CAC, и триаголниците AXM и AXM_1 се складни, од каде што $\overline{XM}=\overline{XM_1}$. Тогаш, јасно е дека и правата x е симетрала на отсечката MM_1, односно дека правите p и x се нормални меѓу себе.

Значи, покажавме дека правата p е нормална на произволна права од Σ што минува низ нејзиниот прободн. Според тоа, правата p е нормална на рамнината Σ.

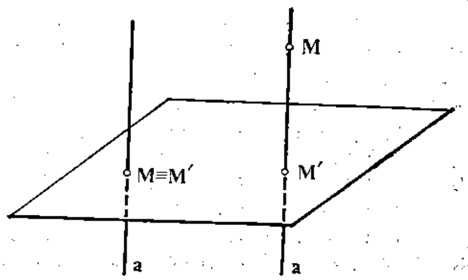
2.2. Растојание од точка до рамнина

Да се потсетиме дека низ која било точка A од една рамнина минува единствена нормала на дадена права во таа рамнина. Аналогно својство важи и во простор. Имено:

Низ секоја точка M минува една и само една права a што е нормална на дадена рамнина Σ (црт. 2).

Ако точката M не лежи на рамнината Σ, тогаш прободот M' на нормалата, спуштена од M на Σ, го викаме уште и *проекција* на точката M врз рамнината Σ. Често пати за проекцијата M' велиме дека е *подножје* на нормалата спуштена од точката M.

Растојанието од некоја точка M до нејзината проекција M' врз дадена рамнина Σ, $d=\overline{MM'}$, го викаме *растојание* од точката M до рамнината Σ.

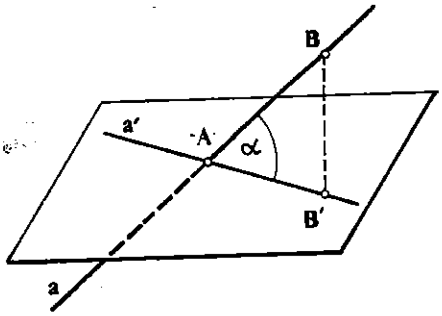


Црт. 2

2.3. Агол меѓу права и рамнина

Нека правата a ја прободува рамнината Σ во точката A и нека B' е проекција од некоја точка B на правата a врз рамнината Σ (црт. 3). Ако A и B се различни точки, и ако a не е нормална на Σ, тогаш правата AB' што лежи на рамнината Σ ја викаме *проекција на правата a врз рамнината* Σ.

Правата a и нејзината проекција имаат заедничка точка, па, според тоа, лежат во една рамнина. Аголот меѓу една права и нејзината проекција врз некоја рамнина го викаме *агол меѓу правата и рамнината;* на црт. 3 тоа е $\sphericalangle BAB'$.



Црт. 3

Ако правата е паралелна со рамнината, тогаш тој агол е еднаков на нула; ако, пак, правата е нормална на рамнината — аголот е прав. Во секој друг случај аголот е меѓу нулата и правиот агол; тогаш за правата велиме дека е *наведната* кон рамнината.

Задачи

1. Покажи дека правите што минуваат низ една точка на дадена права и што се нормални на таа права лежат во една рамнина.

2. Да се докаже дека геометриското место на точки во просторот, што се еднакво оддалечени од две зададени точки, е рамнина која е нормлна на отсечката AB и минува низ нејзината средна точка.

3. Точките A и B лежат на различни страни од рамнината Σ. Проекциите на точките A и B врз Σ се точките A' и B' и, при тоа, $\overline{AA'}=\overline{BB'}$. Да се докаже дека отсечките AB и $A'B'$ имаат една заедничка точка и дека се преполовуваат со таа точка.

4. Триаголникот ABC лежи во рамнината Σ. Правата p е нормална на рамнината Σ и ја прободува во точката P; притоа, точката P е на исто растојание од темињата на $\triangle ABC$, т.е. $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$. Да се докаже дека секоја точка X од правата p е на исто растојание од темињата на $\triangle ABC$.

5. Дадени се: рамнината Σ, правата a што ја прободува Σ во точката P и правата b од рамнината Σ што минува низ P. Нека аголот меѓу a и Σ го означуваме со α, а аголот меѓу правите a и b со β. Да се покаже дека $\alpha \leqslant \beta$.

6. Правите BC и BD лежат во рамнината Σ. Правата BC е нормална на рамнината Π_1 а правата BD е нормална на рамнината Π_2, рамнините Π_1 и Π_2 се сечат во правата AB. Да се покаже дека правата AB е нормална на рамнината Σ.

§3. Две рамнини. Диедар

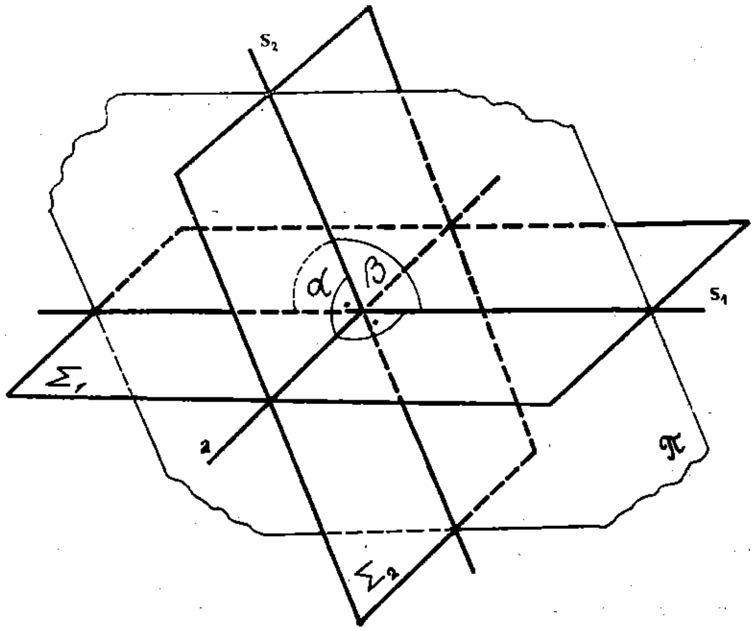
3.1. Агол меѓу две рамнини. Нормални рамнини

За две рамнини што не се паралелни знаеме дека се сечат по една права, т.е. заедничките точки на овие рамнини претставува права. На црт.1 се претставени рамнините Σ_1 и Σ_2 што се сечат по правата

a. Поставуваме една нова рамнина П што е нормална на пресечната права a; оваа рамнина П ги сече рамнините Σ_1, односно Σ_2, по правите s_1, односно s_2. Правите s_1 и s_2 образуваат два напоредни агли α и β (види го цртежот); помалиот од овие два напоредни агли го викаме *агол меѓу рамнините* Σ_1 и Σ_2.

Може да се види дека аголот меѓу рамнините Σ_1, Σ_2 не зависи од положбата на рамнината П, т.е. не зависи од точката во која рамнината П ја сече правата a.

Ако аголот меѓу две рамнини е прав агол, тогаш за рамнините велиме дека се *заемно нормални*.



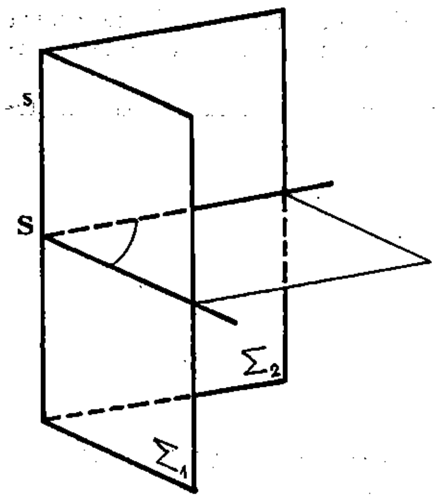
Црт. 1

3.2. Диедар

На црт. 2 се нацртани две полурамнини Σ_1, Σ_2 со заеднички раб s. Фигурата што е образувана од две полурамнини со заеднички раб ја викаме *диедар*.

Полурамнинте ги викаме *ѕидови*, а нивниот заеднчки раб — *раб на диедарот*.

Да земеме една точка S на работ s и да повлечеме две полуправи на ѕидовите на диедарот што се нормални на работ. Овие две полуправи определуваат еден агол што го викаме *агол на диедарот*; лесно се гледа дека тој не зависи од изборот на точката S.



Црт. 2

Да забележиме една разлика меѓу аголот на диедарот и аголот меѓу две рамнини. Ако внимателно се погледаат нивните дефиниции, лесно се согледува дека аголот меѓу две рамнини не е поголем од 90°, додека аголот на еден диедар може да има која било вредност меѓу нула и 180°.

Две полурамнини со заеднички раб го разбиваат просторот на два дела. Затоа може да стане збор за „дел од просторот што е зафатен со еден диедар". Делот од просторот во кој се наоѓа внатрешноста од аголот на диедарот, го викаме *внатрешност* на диедарот.

Задачи

1. Правите a и b лежат во рамнината Σ_1 и се сечат; рамнината Σ_2 е паралелна и со правата a и со правата b. Покажи дека рамнините Σ_1, Σ_2 се паралелни.

2. Нека се зададени: точка A и рамнина Π. Како би определил рамнина Σ што минува низ A и е нормална на Π? Колку такви рамнини постојат?

3. Нека се зададени права p и рамнина Π. Како би определил рамнина Σ што минува низ правата p и е нормална на рамнината Π?

4. Ако две рамнини се меѓусебно нормални, тогаш правата што лежи во едната од нив и што е нормална на пресечната права, е нормална на другата рамнина. Да се докаже!

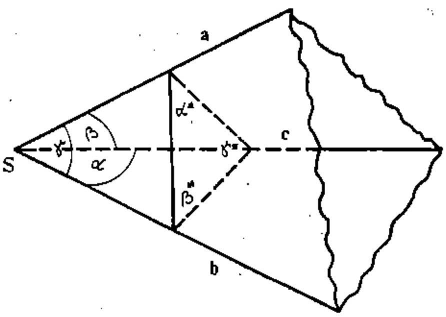
§4. Ќоше

4.1. Дефиниција на ќоше

Нека a, b, c се три полуправи со заедничка почетна точка S, коишто не лежат во иста рамнина. Полуправите a, b, c образуваат три агла (ab), (bc), (ac); фигурата образувана од овие три агла ја викаме *трирабно ќоше* (црт. 1).

Точката S ја викаме *теме*, полуправите a, b, c *рабови*, а аглите (ab), (bc), (ac), заедно со деловите од рамнините што ги определуваат содветните полуправи, *ѕидови* на ќошето.

Аглите (ab), (bc), (ac) ги викаме уште и *рабни агли* на ќошето. Рамнините на кои било два од овие рабни агли се сечат во некој раб на ќошето, со што образуваат еден диедар. Значи, секое трирабно ќоше има три рабни агли: (ab) ќе го означуваме со γ, (bc) — со α и (ac) со β и три диедри: диедарот со раб a ќе го означиме со α^*, диедарот со раб b — β^* и диедарот со раб c — γ^*.



Црт. 1

На сличен начин може да се образува во просторот и фигура што ќе има повеќе од три раба и три ѕидови; таквата фигура ја викаме *повеќерабно ќоше*.

4.2. Агли на трирабно ќоше

За аглите на едно трирабно ќоше важат следниве својства.

Теорема 1. *Секој рабен агол на едно трирабно ќоше е помал од збирот на другите два негови рабни агли.*

Доказ. Трирабното ќоше на црт. 2 ќе го означиме со $SABC$. Ако сите три рабни агли се еднакви меѓу себе, тогаш точноста на теоремата е очигледна. Затоа, нека $\sphericalangle CSA > \sphericalangle CSB$ и нека во аголот $\sphericalangle CSA$ повлечеме полуправа SD, таква што $\sphericalangle CSD = \sphericalangle CSB$.

Нека точката D е замена така, што $\overline{SD} = \overline{SB}$, тогаш, поради: SC — заедничка страна и $\sphericalangle CSD = \sphericalangle CSB$, според признакот CAC, триаголниците CSD и CSB се складни, од каде што $\overline{BC} = \overline{CD}$.

Ако сега A, D, C се колинеарни точки, тогаш од $\triangle ABC$ имаме $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$, односно $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{CD}$ или $\overline{AC} - \overline{CD} < \overline{AB}$, т.е. $\overline{AD} < \overline{AB}$. Тогаш, од триаголниците ASD и ASB имаме $\sphericalangle ASD < \sphericalangle ASB$. Ако на ова неравенство му додадеме на двете страни $\sphericalangle CSD = \sphericalangle CSB$, тогаш, поради $\sphericalangle CSD + \sphericalangle ASD = \sphericalangle ASC$,

$$\sphericalangle ASC < \sphericalangle ASB + \sphericalangle CSB.$$

Со тоа теоремата е докажана.

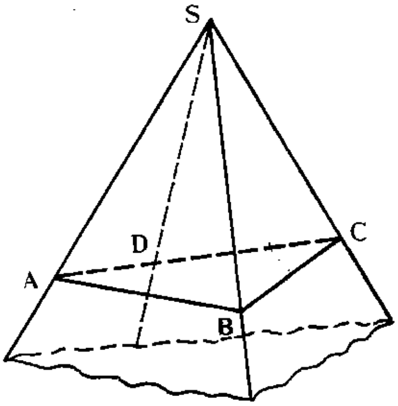
Теорема 2. *Збирот на рабните агли на едно трирабно ќоше секогаш е помал од 360°.*

Доказ. Работ SA на ќошето $SABC$ го продолжуваме во спротивна насока, така што ја добиваме полуправата SA' (црт. 3). Да го разгледаме ќошето $SA'BC$. Според претходната теорема, ќе имаме

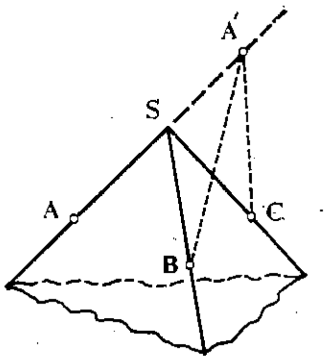
$$\sphericalangle BSC < \sphericalangle BSA' + \sphericalangle CSA',$$

т.е.

$$\sphericalangle BSC < 180° - \sphericalangle BSA + 180° - \sphericalangle CSA,$$



Црт. 2



Црт. 3

од каде што непосредно следува

$$\sphericalangle BSC + \sphericalangle BSA + \sphericalangle CSA < 360°.$$

Оваа теорема важи и за рабните агли на едно повеќерабно ќоше.

Задачи

1. Нека A, B, C се три произволно земени точки на рабовите од едно трирабно ќоше чиишто рабни агли се прави. Да се докаже дека $\triangle ABC$ е остроаголен.

2' Сите рабни агли на едно ќоше се по 60°. Колку рабови може да има тоа ќоше?

§5. Геометриско тело

5.1. Топка и сфера

Нека O е која било точка од просторот **P** и нека R е произволен реален број.

Фигурата образувана од точките, чиешто растојание од дадената точка O не е поголемо од R, ја викаме *топка* и ја означуваме со $T[O, R]$. Значи:

$$T[O, R] = \{X \mid X \in \mathbf{P},\ \overline{OX} \leqslant R\}. \tag{1}$$

Точката O ја викаме *центар*, а бројот R — *радиус* на топката. Обично, и секоја отсечка OM со должина $\overline{OM} = R$ се вика радиус на топката.

Фигурата, пак, образувана од точките во просторот, чие растојание од дадената точка O е R, ја викаме *сфера* и ја означуваме со $S(O, R)$. Значи:

$$S(O, R) = \{X \mid X \in \mathbf{P},\ \overline{OX} = R\}. \tag{2}$$

Можеме да забележиме дека сферата $S(O, R)$ е вистинско подмножество од топката $T[O, R]$, зашто, на пример, точката A, за која $\overline{OA} = \frac{1}{2}R$, ѝ припаѓа на топката, но не ѝ припаѓа на сферата.

Според тоа, ако од топката $T[O, R]$ ги исфрлиме точките што ѝ припаѓаат на сферата $S(O, R)$, тогаш добиваме една нова фигура, образувана од оние точки во просторот, чие растојание до O е помало од R. Таа фигура ќе ја викаме *отворена топка*, со центар O и ќе ја означиме со $T(O, R)$. Значи:

$$T(O, R) = \{X \mid X \in \mathbf{P},\ \overline{OX} < R\}. \tag{3}$$

Секоја отворена топка со центар во точката O се вика и *околина* на точката O.

Центарот O, односно радиусот R на топката $T[O, R]$ ги викаме *центар*, односно *радиус* и на сферата $S(O, R)$. Секоја отсечка што сврзува две точки од сферата $S(O, R)$ и минува низ центарот O, се вика *дијаметар* на сферата; исто така, секоја таква отсечка се вика дијаметар на топката $T[O, R]$.

Задачи

1. Да ставиме $A = T[O, R]$, $B = S(O, R)$, $C = T(O, R)$; кои фигури се множествата: $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \setminus C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$?

2. Нека $r < R$. Покажи дека: $T[O, r]$, $S(O, r)$ и $T(O, r)$ се подмножества од $T[O, R]$.

3. Нека $M \in T[O, R]$ и нека $r < R - \overline{OM}$. Покажи дека $T[M, r]$, $S(M, r)$ и $T(M, r)$, се подмножества од топката $T[O, R]$.

4. Покажи дека за која било точка M од отворената топка $T(O, R)$ постои број r, таков што секоја точка X од $T(M, r)$ да ѝ припаѓа на $T(O, R)$, т.е $T(M, r) \subset T(O, R)$.

5. Нека O_1 и O_2 се две различни точки и нека $R = \frac{1}{2}\overline{O_1O_2}$. Да се најде:

$$T(O_1, R) \cap T(O_2, R),\quad T(O_1, R) \cap T[O_2, R],\quad T[O_1, R] \cap T[O_2, R].$$

6. Нека O_1 и O_2 се произволни различни точки. Покажи дека постојат броеви R_1 и R_2, такви што

а) $T(O_1, R_1) \cap T(O_2, R_2) = \varnothing$,

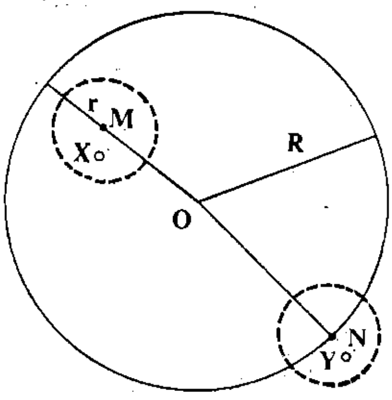
б) $T[O_1, R_1] \cap T[O_2, R_2] = \varnothing$.

5.2. Област

Во претходниот раздел секоја отворена топка со центар O ја нарековме *околина* на точката O. На соодветен начин се дефинира околина на точка во рамнина и околина на точка на права.

Имено, ако O е точка од рамнината П, тогаш секој *отворен круг* во П со центар O (т.е. круг со центар O, без точките од соодветната кружница) се вика *околина* на точката O во рамнината П. Ако, пак, a е права и O е произволна точка од a, тогаш секоја *отворена отсечка* (т.е. отсечка без нејзините крајни точки) чија средина е точката O, се вика *околина* на O на правата a.

Нека **F** е некоја фигура, т.е. некое непразно множество точки. За една точка $A \in$ **F** велиме дека е *внатрешна точка* на **F** ако постои околина на A која целосно се содржи во **F**.



Црт. 1

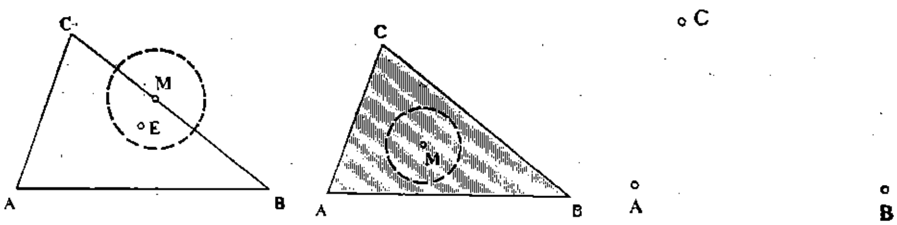
Пример 1. Нека $k[O, R]$ е круг со центар O и радиус R. Нека M е точка од $k[O, R]$, таква што $\overline{OM} < R$. Ако земеме, на пример, $r = \frac{1}{2}(R - \overline{OM})$, тогаш која било точка X од отворениот круг $k[M, r)$ (црт. 1) му припаѓа на кругот $k[O, R]$, т.е. $k[M, r) \subset k[O, R]$. Значи, M е внатрешна точка на дадениот круг.

Од друга страна, пак, ако N е точка од кружницата $k(O, R)$, тогаш *секој* отворен круг $k[N, r_1)$ со центар N содржи точки што не му припаѓаат на кругот $k[O, R]$, на пример, точката Y (црт. 1), за која $\overline{OY} = R + \frac{1}{2} r_1$. Следствено, N не е внатрешна точка на кругот $k[O, R]$.

Од тоа можеме да заклучиме дека внатрешни точки на кругот $k[O, R]$ се точките од соодветниот отворен круг (и само тие).

Пример 2. Нека M е која било точка од триаголникот ABC (т.е. M е точка што лежи на некоја од страните на тој триаголник). Секој отворен круг со центар M содржи точки што не му припаѓаат на триаголникот (на пример, точката E на црт. 2), па, значи, M не е внатрешна точка на $\triangle ABC$.

Според тоа, ако еден триаголник се разгледува вака, како „еднодимензионална" рамнинска фигура, тогаш тој нема ниедна внатрешна точка. Меѓутоа, ако триаголникот ABC се разгледува како „дводимензионална" фигура, т.е. како фигура образувана од затворената искршена линија $ABCA$ и нејзината внатрешност, тогаш секоја точка од внатрешноста е внатрешна точка на таа фигура (црт. 3).



Црт. 2 Црт. 3 Црт. 4

Кога триаголникот ABC се разгледува со неговата внатрешност, т.е. како „дводимензионална" фигура, тогаш тој, обично, се вика *исполнет триаголник*.

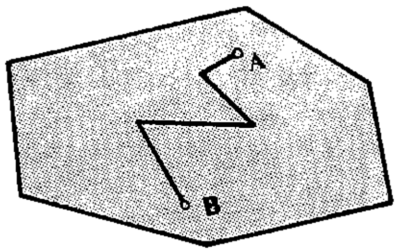
Аналогно, еден многуаголник, земен заедно со неговата внатрешност, се вика *исполнет многуаголник*. Во оваа глава „многуаголник" ќе ни значи, обично, „исполнет многуаголник".

(Патем да забележиме дека еден триаголник (аналогно — многуаголник) може да се разгледува и како *„нулдимензионална"* фигура (црт. 4), ако при разгледувањата се земат само неговите темиња, како што често се случува при конструктивните задачи.)

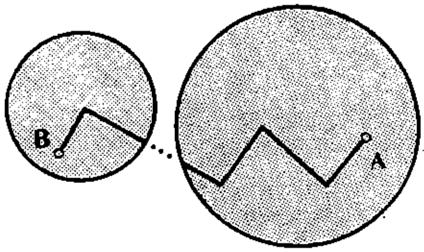
Други примери за внатрешни точки на фигури: секоја точка од една топка $T[O, R]$ што не ѝ припаѓа на соодветната сфера $S(O, R)$; секоја точка од внатрешноста на еден диедар, итн.

За една фигура **F** велиме дека е *сврзлива*, ако кои било две точки од **F** можат да се сврзат со искршена линија која целосно лежи во **F** (т.е. секоја точка од искршената линија ѝ припаѓа на фигурата **F**).

На пример: секој круг, секој исполнет многуаголник (црт. 5) е сврзлива (рамнинска) фигура, но кружницата не е сврзлива фигура; потоа: секоја топка, отворена топка и диедар се сврзливи фигури, но ниедна сфера не е сврзлива фигура. Фигурата составена од два дисјунктни круга (претставени на црт. 6) не е сврзлива.



Црт. 5



Црт. 6

Сврзливите фигури, за кои секоја нивна точка е внатрешна, се од посебен интерес за нас и затоа нив посебно ќе ги обдележиме. Имено, за една фигура **F** ќе велиме дека е *област* ако **F** е сврзлива и ако секоја нејзина точка е внатрешна.

Разликуваме: област на права, област на рамнина и област во простор; нив ќе ги викаме: *линеарна, рамнинска* и *йросшрана област* соодветно.

На пример: отворена отсечка е линеарна област, но не е ни рамнинска ни просторна; отворен круг е рамниска област, но не е просторна; самата рамнина е рамнинска област, но не е просторна; отворена топка е просторна област. Пример на фигури кои не се области: триаголник, исполнет триаголник, сфера, топка (зошто?).

Задачи

1. Кои се внатрешни точки на еден агол?

2. Дали една кружница има внатрешни точки?

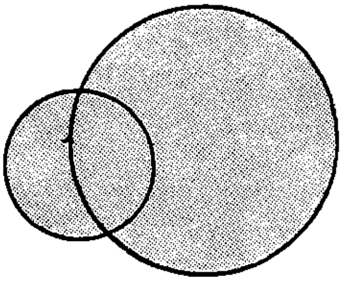
3. Која од следниве фигури е сврзлива: а) агол, б) n - аголник, в) полукружница, г) кружен прстен?

4. Која од следниве фигури, претставени со цртежите 7 — 13, е сврзлива?

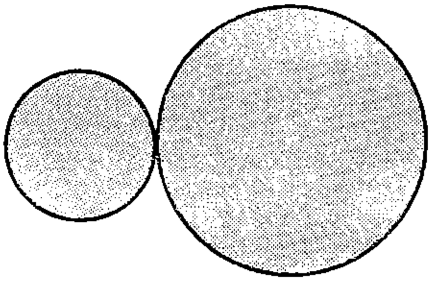
5. Кои од следниве фигури се линеарни области: а) полуправа, б) полуправа без почетната точка, в) права, г) две отворени отсечки без заеднички точки, д) три колинарни точки?

6. Дали некоја од фигурите на црт. 7 — 13 е рамнинска област?

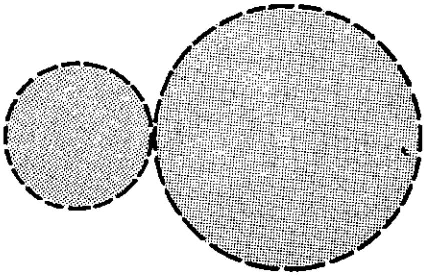
7. Нека k_1 и k_2 се два отворени круга со непразен пресек. Покажи дека фигурата $k_1 \cup k_2$ е рамнинска област.



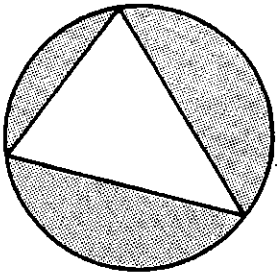
Црт. 7



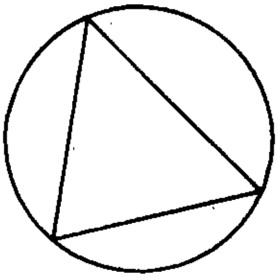
Црт. 8



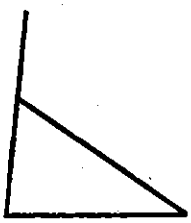
Црт. 9



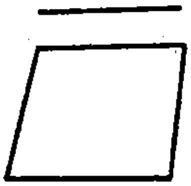
Црт. 10



Црт. 11



Црт. 12



Црт. 13

8. Внатрешноста на едно ќоше е просторна област. Образложи!

9. $\mathbf{G}_1$ и $\mathbf{G}_2$ се две области од ист вид. Во кој случај фигурата $\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{G}_2$ е област?

10. Во кој случај унијата на две области од ист вид е област?

5.3. Затворена област. Тело

За една точка M ќе велиме дека е *гранична точка* на фигурата **F**, ако секоја околина на M содржи точки од **F** и точки што не ѝ припаѓаат на **F**. Како и за област, може да се разгледува гранична точка на: линеарна, рамнинска и просторна фигура.

На пример: N е гранична точка на кругот $k[O, r]$ (пример 1, црт. 1); секоја точка од страните на $\triangle ABC$ е гранична на тој триаголник (пример 2, црт. 2 и црт. 3); сите точки од сферата $S(O, R)$ се гранични точки на: топката $T[O, R]$, отворената топка $T(O, R)$ и сферата $S(O, R)$.

Од разгледаните примери е јасно дека една гранична точка на фигурата **F** може да ѝ припаѓа на **F**, но не мора; исто така, една гранична точка на **F** не може да биде внатрешна, ниту, пак, една внатрешна точка може да биде гранична точка на **F**.

Според тоа, ниедна точка од една област **G** не е нејзина гранична точка, зашто сите точки на **G** се внатрешни. Така, ако кон областа **G** ги приклучиме сите нејзини гранични точки, добиваме една нова фигура; неа ќе ја викаме *затворена област* и ќе ја означуваме со $\overline{\mathbf{G}}$.

Примери за затворени области:

— линеарни: отсечка, полуправа;

— рамнински: круг, исполнет многуаголник;

— просторни: топка, исполнет диедар.

Множеството од сите гранични точки на една област се вика *граница на областа* (а и *граница* на содветната затворена област).

На пример: кружницата $k(O, r)$ е граница за кругот $k[O, r]$; сферата $S(O, R)$ е граница за соодветната топка $T[O, R]$; ѕидовите на едно ќоше претставуваат граница на соодветното исполнето ќоше, итн.

За една фигура **F** ќе велиме дека е *ограничена* ако постои топка $T[O R]$ таква што $\mathbf{F} \subseteq T[O, R]$. Секоја, пак, ограничена и затворена просторна област се вика *геометриско тело* или, само, *тело*.

Во наредниот параграф ќе изучуваме некои геометриски тела.

Да спомнеме дека ограничена и затворена рамнинска област се вика *геометриска слика* (или *геометриски лик*).

Задачи

1. Нацртај една фигура **F** што содржи: а) и внатрешни и гранични точки б) само внатрешни точки, в) само гранични точки.

2. Секоја точка од една искршена линија **F** е гранична точка на **F**. Образложи!

4. Кои се границите на фигурите од црт. 7 — 13?

4. Кои од фигурите на црт. 7 — 13 се затворени области?

5. Секоја затворена област $\overline{F}$ е унија од соответната област **F** и границата на **F**. Образжложи!

6. Кои од фигурите на црт. 2 — 13 се геметриски слики?

§ 6. Полиедри

6.1. Поим за полиедар

Во претходниот параграф дефиниравме геометриско тело како ограничена и затворена просторна област. Од фигурите што ги разгледавме досега, тело е, на пример, секоја топка. Овде ќе се задржиме на еден посебен вид тела, наречени полиедри.

Дефиниција. Едно геометриско тело се вика *полиедар* ако неговата граница е составена од конечен број многуаголници.

Многуаголниците што ја образуваат границата на полиедарот ги викаме *ѕидови*, а нивните страни — *рабови* на полиедарот. Темињата на многуаголниците, исто така, ги викаме *темиња* на полиедарот; во секое теме на полиедарот се сретнуваат барем три негови раба.

Секој раб на полиедарот е страна на два и само два многуаголника од неговата граница, односно секој раб е и раб на еден диедар што го формираат полурамнините во кои лежат тие многуаголници.

Еден полиедар се вика *конвексен* ако тој е расположен на една страна од рамнината на кој било негов ѕид. Натаму, терминот полиедар ќе ни означува конвексен полиедар.

Секое теме на полиедарот е и теме на едно ќоше што го формираат внатрешните агли на многуаголниците од границата, чиишто темиња се совпаѓаат со тоа теме на полиедарот. Според Т.2 од § **4**, збирот на овие агли (рабните агли на ќошето) е помал од 360°, па, значи, формата на овие многуаголници не е сосем произволна.

Ако еден полиедар има t темиња, s ѕидови и r рабови, тогаш за овие броеви важи следново равенство

$$t+s=r+2.$$

Тоа својство на полиедрите е познато под името *Ојлерова теорема.*

Задачи

1. Нацртај еден полиедар и провери ја Ојлеровата теорема.

2. Да се покаже дека еден полиедар не може да има помалку од 6 рабови. (Упатство: согледајте колку најмалку ѕидови и темиња може да има еден полиедар.)

Задачи

1. Основата на една пирамида е: а) триаголник, б) трапез, в) ромб. Дали може бочните рабови на таа пирамида да се еднакви?

2. Сите бочни рабови на една пирамида, со основа правоаголен триаголник, се еднакви меѓу себе. Да се докаже дека еден од бочните ѕидови е нормален на основата.

3. Дали можат бочните ѕидови на една правилна а) четиристрана б) шестстрана пирамида да се 1) правоаголни, 2) рамнострани триаголници?

6.4. Правилни полиедри

Еден конвексен полиедар се вика *правилен полиедар* ако неговите ѕидови се правилни складни многуаголници и во секое теме се среќаваат ист број рабови.

Секое теме на правилен полиедар е и теме на едно ќоше; рабните агли на тоа ќоше се меѓусебно еднакви, зашто тие се внатрешни агли на складни правилни многуаголници. Според Т. 2 од § **4**, збирот на овие агли е помал од 360°.

Природно, се наметнува прашањето: дали може да биде формиран правилен полиедар од произволен број складни правилни n-аголници? Ојлеравата теорема (од претходниот раздел) ни сугерира дека бројот n, како и бројот на правилните n-аголници не е произволен. Затоа, овде, ќе испитаме од кои правилни n-аголници може да се формира правилен полиедар.

1°. Да претпоставиме дека постои правилен полиедар **G**, чии ѕидови се рамнострани триаголници и да го означиме со m бројот на рабовите што се среќаваат во едно теме. Бидејќи секое ќоше има најмалку три рабни агли, секој од кои има 60°, следува дека m може да биде 3, 4 или 5, зашто $180° \leqslant m \cdot 60° < 360°$ само за $m = 3, 4, 5$.

За броевите 3, 4 и 5 постојат правилни полиедри, ограничени со рамнострани триаголници и тие се:

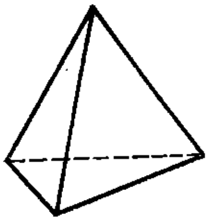
— *правилен тетраедар* (црт. 5), во секое теме се среќаваат по три раба, а има: четири ѕида, четири темиња и шест рабови;

— *правилен октаедар* (црт. 6), во секое теме се среќаваат по четири раба, а има: осум ѕида, шест темиња и дванаесет рабови;

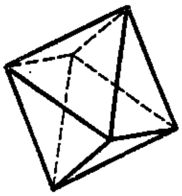
— *правилен икосаедар* (црт. 7), во секое теме се среќаваат по пет раба, а има: дваесет ѕидови, дванаесет темиња и триесет рабови.

2°. Ако постои правилен полиедар чии ѕидови се квадрати, тогаш во секое теме се среќаваат по три раба, зашто $3 \cdot 90° = 270° < 360°$, додека $m\, 90° \geqslant 360°$ за секој $m \geqslant 4$. Таков правилен полиедар постои (црт. 8) и се вика *коцка* (или *правилен хексаедар*); тој има шест ѕида, осум темиња и дванаесет рабови.

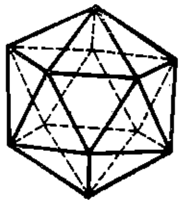
3°. Внатрешниот агол на еден правилен петаголник изнесува 108°. Бидејќи $3 \cdot 108° < 360°$, а $m \cdot 108° > 360°$ за секој $m \geqslant 4$ следува дека може да има само еден правилен полиедар чии ѕидови се петаголници. Таков полиедар е претставен на црт. 9. Тој има 12 ѕидови, 30 рабови и 20 темиња, а во секое теме се срекаваат по три раба; наречен е *правилен додекаедар*.



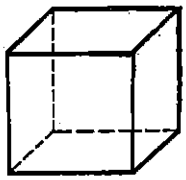
Црт. 5



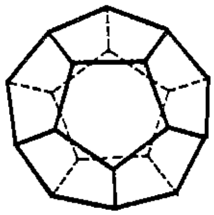
Црт. 6



Црт. 7



Црт. 8



Црт. 9

4°. Бидејќи внатрешниот агол на еден правилен шестаголник изнесува 120°, а $m\,120° \geqslant 360°$ за секој $m \geqslant 3$, од Т. 2, § 4 следува дека не постои правилен полиедар чии ѕидови би биле шестаголници. Аналогно, заклучуваме дека не постои правилен полиедар чии ѕидови би биле правилни n-аголници за $n \geqslant 6$.

Според тоа, правилни полиедри се спомнатите пет, и само тие.

Задачи

1. Нацртај ја мрежата на правилниот: тетраедар, октаедар, икосаедар, хексаедар, додекаедар.

2. Покажи дека на правилен тетраедар може да му се впише и да му се опише сфера и дека тие сфери се концентрични. Како се одредува нивниот центар?

3. Покажи дека на секој правилен полиедар може да му се впише и да му се опише сфера и дека тие сфери се концентрични.

4. Докажи дека центрите на ѕидовите од еден правилен полиедар се темиња на правилен полиедар. На кој?

5. Користејќи ја Ојлеровата теорема за врската меѓу темињата, ѕидовите и рабовите на еден полиедар, докажи дека има точно пет правилни полиедри.

СОДРЖИНА

Глава I. УВОДНИ ПОИМИ

§ 1. Увод — — — — — — — — — — — — — — — — 7
§ 2. Основни и изведени поими — — — — — — — — — — 9
§ 3. Основни и изведени тврдења — — — — — — — — — 9
*§ 4. Методи на логичко заклучување
4. 1. Неколку поими од математичката логика — — — — 10
4. 2. Правило за транзитивност на еквиваленцијата — — — 11
4. 3. Правило за транзитивност на импликацијата — — — — 12
4. 4. Правило на раздвојување (или модус поненс) — — — 12
4. 5. Правило на контрадикција — — — — — — — — 12
4. 6. Закон за контрапозиција — — — — — — — — — 13

Глава II. МЕЃУСЕБНИ ОДНОСИ НА ОСНОВНИТЕ ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

§ 1. Права. Меѓусебен однос на точка и права — — — — — 16
§ 2. Рамнина. Меѓусебен однос на точка и рамнина — — — — 18
§ 3. Меѓусебен однос на права и рамнина — — — — — — — 19
§ 4. Меѓусебен однос на две рамнини — — — — — — — — 21
§ 5. Меѓусебен однос на две прави — — — — — — — — — 22
§ 6. Растојание — — — — — — — — — — — — — — 24
§ 7. Подредување на точките од една права
7. 1. Релацијата „меѓу“ — — — — — — — — — — — 26
7. 2. Полуправа — — — — — — — — — — — — 28
§ 8. Отсечка. Искршена линија
8. 1. Дефиниција на отсечка. Еднакви отсечки — — — — 29
8. 2. Графички операции со отсечки — — — — — — — 30
8. 3. Искршена линија — — — — — — — — — — — 31

Глава III. ПОВАЖНИ ФИГУРИ ВО РАМНИНАТА

§ 1. Полурамнина. Агол
1. 1. Полурамнина — — — — — — — — — — — — — 33
1. 2. Агли — — — — — — — — — — — — — — — 35
1. 3. Мерење на агли. Еднакви агли — — — — — — — 36
1. 4. Графички операции со агли — — — — — — — — 37
1. 5. Прав агол. Остар и тап агол — — — — — — — 38
1. 6. Накрсни агли. Нормални прави — — — — — — — 38
§ 2. Многуаголник — — — — — — — — — — — — — 40
§ 3. Триаголник
3. 1. Поим за триаголник — — — — — — — — — — 42
3. 2. Складни триаголници — — — — — — — — — — 44
3. 3. Основни конструкции на триаголник — — — — — — 46
3. 4. Рамнокрак триаголник — — — — — — — — — 48
3. 5. Однос меѓу страни и агли — — — — — — — — 49
3. 6. Нормала на права од дадена точка — — — — — — 51
3. 5. Растојание од точка до права — — — — — — — 52

§ 4. Паралелни прави
4. 1. Аксиома за паралелност — — — — — — — — — — 53
4. 2. Агли на трансверзалата — — — — — — — — — — 53
4. 3. Збир на аглите на триаголник — — — — — — — 55
4. 4. Агли со паралелни краци — — — — — — — — 56
§ 5. Слични триаголници
5. 1. Пропорционални отсечки — — — — — — — — — 57
5. 2. Некои конструкции на пропорционални отсечки — — — 59
5. 3. Слични триаголници — — — — — — — — — — 60
5. 4. Пропорционални отсечки во правоаголниот триаголник — 61
§ 6. Четириаголник
6. 1. Поим за четириаголник — — — — — — — — — 63
6. 2. Паралелограм — — — — — — — — — — — 64
§ 7. Кружница и круг
7. 1. Поим за кружница и круг — — — — — — — — 65
7. 2. Точка и кружница — — — — — — — — — — 66
7. 3. Права и кружница — — — — — — — — — — 67
7. 4. Две кружници — — — — — — — — — — — 69
7. 5. Лак. Полукружница — — — — — — — — — — 72
7. 6. Централни и периферисќи агли — — — — — — — 73
*§ 8. Геометриски конструкции
8. 1. Што е тоа „конструктивна задача“ — — — — — — 75
8. 2. Како се решава една конструктивна задача — — — — 76
8. 3. Колку решенија има една конструктивна задача — — — 76
8. 4. Елементарни конструктивни задачи — — — — — — 77
8. 5. Решавање на конструктивна задача — — — — — — 79
8. 6. Геометриско место на точки — — — — — — — — 82
8. 7. Метод на геометриски места — — — — — — — — 83

Глава IV. ВЕКТОРИ

§ 1. Поим за вектор
1. 1. Дефиниција на вектор — — — — — — — — — 85
1. 2. Колинеарни вектори — — — — — — — — — — 86
1. 3. Еднаквост на вектори — — — — — — — — — 88
§ 2. Собирање и одземање на вектори
2. 1. Собирање на вектори — — — — — — — — — — 90
2. 2. Нулти вектор — — — — — — — — — — — — 91
2. 3. Својства на собирањето на вектори — — — — — — 92
2. 4. Одземање на вектори — — — — — — — — — 95
*2. 5. Групови својства на собирањето на вектори — — — — 97
§ 3. Множење на вектор со број
3. 1. Дефиниција — — — — — — — — — — — — — 98
3. 2. Својства на множењето на вектор со број — — — — 100
3. 3. Равенството $x\mathbf{a} + x\mathbf{b} = \mathbf{o}$ — — — — — — — — 102
§ 4. Примена на векторите
4. 1. Делење на отсечка во даден однос — — — — — — 104
4. 2. Тежиштето на триаголник — — — — — — — — 106
4. 3. Средна линија на трапез — — — — — — — — — 108

Глава V. ДВИЖЕЊА

§ 1. Пресликувања
1. 1. Дефиниција и примери — — — — — — — — — 110
1. 2. Геометриски трансформации — — — — — — — — 114
§ 2. Транслација
2. 1. Дефиниција и својства на транслација — — — — — 117
2. 2. Слики на некои фигури при транслација — — — — — 119
2. 3. Примена на транслацијата — — — — — — — — 120
§ 3. Централна симетрија
3. 1. Дефиниција на централна симетрија — — — — — — 123
3. 2. Слики на некои фигури при централна симетрија — — 124
3. 3. Централно симетрични фигури — — — — — — — 126
3. 4. Примена на централната симетрија — — — — — — 129

§ 4. Осна симетрија
4. 1. Дефиниција на осна симетрија — — — — — — — — 132
4. 2. Слики на некои фигури при осна симетрија — — — — 133
4. 3. Основиметрични фигури — — — — — — — — — 135

§ 5. Примена на осната симетрија
5. 1. Симетрали на страни во триаголник — — — — — — 138
5. 2. Симетрали на агли во триаголник — — — — — — 139
5. 3. Основиметрични четириаголници — — — — — — — 140
5. 4. Некои теореми за кружница — — — — — — — — 142
5. 5. Решени задачи — — — — — — — — — — — 144

§ 6. Ротација
6. 1. Насочени агли — — — — — — — — — — — — 147
6. 2. Дефиниција на ротација — — — — — — — — 148
6. 3. Слики на некои фигури при ротација — — — — — 150
6. 4. Примена — — — — — — — — — — — — — 151

§ 7. Правилни многуаголници
7. 1. Симетрија со ред n — — — — — — — — — — 153
7. 2. Правилни многуаголници — — — — — — — — — 154

*§ 8. Движења и складност
8. 1. Движења — — — — — — — — — — — — — 156
8. 2. Складност — — — — — — — — — — — — 160
8. 3. Групата движења и евклидската геометрија — — — — 163

Глава VI. ТРАНСФОРМАЦИИ НА СЛИЧНОСТ

§ 1. Хомотетија
1. 1. Дефинција на хомотетија — — — — — — — — — 165
1. 2. Слики на некои фигури при хомотетија — — — — — 167
1. 3. Хомотетија на кружници — — — — — — — — — 169
1. 4. Примена на хомотетијата — — — — — — — — — 171

*§ 2. Сличности и слични фигури
2. 1. Сличности — — — — — — — — — — — — 175
2. 2. Слични фигури — — — — — — — — — — — 177

Глава VII. ЌОШЕ И ПОЛИЕДРИ

§ 1. Точка и рамнина
1. 1. Точка и рамнина — — — — — — — — — — — 179
1. 2. Полупростор — — — — — — — — — — — — 179

§ 2. Права и рамнина
2. 1. Нормала на рамнина — — — — — — — — — — 180
2. 2. Растојание од точка до рамнина — — — — — — — 181
2. 3. Агол меѓу права и рамнина — — — — — — — — 181

§ 3. Две рамнини. Диедар
3. 1. Агол меѓу две рамнини. Нормални рамнин — — — — 182
3. 2. Диедар — — — — — — — — — — — — — 183

§ 4. Ќоше
4. 1. Дефиниција на ќоше — — — — — — — — — — 184
4. 2. Агли на трирабно ќоше — — — — — — — — — 185

§ 5. Геометриско тело
5. 1. Топка и сфера — — — — — — — — — — — 186
5. 2. Област — — — — — — — — — — — — — 188
5. 3. Затворена област. Тело — — — — — — — — — 192

§ 6. Полиедри
6. 1. Поим за полиедар — — — — — — — — — — — 193
6. 2. Призма — — — — — — — — — — — — — 194
6. 3. Пирамида — — — — — — — — — — — — — 195
6. 4. Правилни полиедри — — — — — — — — — — 196

РОЗТ за учебници „Просветно дело“ — Скопје
ул. „Иво Рибар Лола“ бб Градски ѕид блок 4

*

За издавачот
Михаило Ќорвезироски

*

Д-р Живко Мадевски, д-р Александар Самарџиски и м-р Наум Целакоски

ГЕОМЕТРИЈА

за II клас на средното образование

*

Уредник
Кирил Милчев

*

Јазична редакција
Мира Николова

*

Илустрации и коректура
Авторите

*

Технички уредник
Благоја Попантоски

*

Корицата ја илустрира
Петар Танчевски

*

Ракописот е предаден во печат во април 1976 година. Печатењето е завршено во август 1976 година. Обем: 202 страни. Формат: 17 × 24 см. Тираж: 10.000 примероци. Книгава е отпечатена во Графичкиот завод „Гоце Делчев“ — Скопје (2609)