$\sum a_n$

С Д М И на Република Македонија

РИСТО МАЛЧЕСКИ
АЛЕКСА МАЛЧЕСКИ

ИЗБРАНИ СОДРЖИНИ ОД ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА

ЗА МЛАДИТЕ МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Одговорен уредник
Д-р Костадин Тренчевски

Рецензенти
Д-р Боро Пиперевски, в.проф. на ЕТФ Скопје
Д-р Костадин Тренчевски, доцент на ПМФ Скопје

CIP-Каталогизација во публикација, Народна и универзитетска библиотека "Климент Охридски", Скопје
51(079.1)
МАЛЧЕСКИ, Ристо
Избрани содржини од елементарна математика/ Ристо Малчески, Алекса Малчески.-Скопје: Сојуз на друштвата на математичарите и информатичарите на Р.Македонија, 1994.-128 стр.; илустр.; 24 cm.-(Библиотека СИГМА)

1.МАЛЧЕСКИ, Алекса

Со мислење на **Министерството за култура и култура бр. 09-2/57 од 17.02.1991 год.** за публикацијата Избрани содржини од елементарна математика се плаќа повластена даночна стапка

Печатено во НИПРО "Нова Македонија"-ООЗТ "Печатница" - Скопје

Тираж 1000 примероци

ПРЕДГОВОР

Сојузот на друштвата на математичарите и информатичарите на Македонија скоро четири децении организира натпревари по математика за учениците од основното и средното образование, а од пред извесно време и натпревари по информатика за учениците од средното образование. Во изминатиот период се правени исклучителни напори за создавање на дополнителна литература, која на бројните натпреварувачи ќе им овозможи да ги дооформат стекнатите и да усвојат нови знаења. На ова поле особен придонес има популарното математичко списание за учениците од основното образование НУМЕРУС и библиотеката МАТЕМАТИЧКА ШКОЛА, која ја издава Природно-математичкиот факултет, под чиј патронат и се одржува Математичката школа за учениците од средното образование.

Оваа книга е само еден мал придонес во создавањето на литература за надарените ученици од средното образование. Самата книга опфаќа четири засебни целини, ако воопшто е можно да се каже дека некоја математичка област може да егзистира самостојно. Имено, во три глави, преку краток теоретски осврт и голем број на задачи се обработени содржините: ПРЕСЛИКУВАЊА, ПОЛИНОМИ, ФУНКЦИЈАТА $[x]$ И НЕЈЗИНАТА ПРИМЕНА ВО ТЕОРИЈАТА НА БРОЕВИ. *На крајот од книгата, во посебен додаток се презентирани* ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОД РЕАЛНИ ФУНКЦИИ. *Притоа, во додатокот искажаните теореми не се докажувани, бидејќи доказите на истите можат да се најдат во повеќе книги, како на пример во книгата "Математичка анализа I", Д-р Н. Иванюски, Универзитет "Св. Кирил и Методиј"-Скопје 1991. Сакаме да напоменеме дека при решавањето на некои задачи од првите параграфи се користени поими кои се усвоени во некој од следните параграфи. Секако дека ова е "недостаток", кој лесно можете да го пренебрегнете со привремено прескокнување на овие задачи и нивно разгледување откако ќе ги усвоите користените поими. Како и во секоја книга, така и овде потешките задачи се означени со •, па затоа на истите потребно е да обрнете посебно внимание.*

Се надеваме дека книгата добро ќе им послужи на сегашните и идните натпреварувачи, но и на сите оние кои подетално имаат намера да се запознаат со материјалот кој го содржи оваа книга.

На крајот сакаме да им се заблагодариме на сите, кои придонесоа оваа книга да се издаде, а посебно на рецензентите за корисните сугестии при конечното обликување на книгата.

Добар апетит! *Авторите*

Скопје, 1993 *год*

МНОЖЕСТВА И ПРЕСЛИКУВАЊА

1. ЗА ПОИМОТ МНОЖЕСТВО

Поимот *множество* е еден од важните основни поими во современата математика. Може да се зборува за множеството природни броеви $\mathbf{N}$, за множеството цели броеви $\mathbf{Z}$, за множеството рационални броеви $\mathbf{Q}$, за множеството реални броеви $\mathbf{R}$, множеството задачи во оваа книга и слично. Основачот на теоријата на множества *Г.Кантор* ја дал следната "дефиниција":

множество е збир од определени и различни објекти кои со нашата интуиција или интелект, мисловно ги опфаќаме во една целина.

Како синоними на зборот множество ги користиме зборовите: *севкупност, фамилија, класа*. Објектите од кои е составено едно множество ги нарекуваме негови *елементи* или *точки*. За едно множеството сметаме дека е определено, ако за секој разгледуван објект можеме да кажеме дали припаѓа или не припаѓа на множеството.

Нека A е множество. Фактот дека елементот x припаѓа на множеството A го означуваме со еден од симболите

$$x\in A \text{ или } A\ni x.$$

Во натамошните разгледувања ќе ги користиме следните начини на задавање на множествата.

(*i*) *Задавање на множествата со помош на набројување на неговите елементи*. На пример, множеството A е составено од елементите $a,b,c,\dots,k$. Притоа ја користиме ознаката

$$A=\{a,b,c,\dots;k\}.$$

Така,

$$\mathbb{N}=\{1,2,\dots,n,\dots\};\quad \mathbb{Z}=\{\dots,-n,\dots,-1,0,1,\dots,n,\dots\}.$$

(ii) Задавање на множествата со наведување својство на неговите елементи. Во секоја математичка задача најчесто ги разгледуваме елементите на точно одредено множество X, кое понекогаш го нарекуваме *основно множество*. Притоа потребно е да ги одделиме елементите кои задоволуваат одредено својство P (пишуваме $P(x)$), или не го задоволуваат својството P. Со помош на својството P одделуваме множество од сите оние елементи на X, кои го имаат својството P. Ова множество го означуваме со

$$\{x\in X|\ P(x)\}=\{x|\ P(x)\}.$$

Така,

$$\mathbb{N}=\{x\in\mathbb{Z}|\ x>0\};\quad \mathbb{Q}=\left\{x|\ \exists n\in\mathbb{N},\ \exists m\in\mathbb{Z}:\ x=\frac{m}{n}\right\}.$$

Од практична гледна точка допуштаме егзистенција на "множество" без елементи, т.е. на *празно множество*. Притоа, сметаме дека постои само едно празно множество. Празното множество го означуваме со симболот $\emptyset$.

Дефиниција 1. За множеството A велиме дека е *подмножество* на множеството B ако од $x\in A$ следува $x\in B$. Притоа означуваме $A\subseteq B$ или $B\supseteq A$.

Ако множеството B содржи елемент кој не се сдржи во множеството A и ако $A\subseteq B$, тогаш велиме дека A е *вистинско подмножество* од B, во ознака $A\subset B$ или $B\supset A$.

За празното множество сметаме дека е подмножество од секое множество X. Од претходната дефиниција непосредно следува дека $A\subseteq A$ за секое множество A, но A не е вистинско подмножество од A.

Дефиниција 2. Нека A е произволно множество. *Партитивно множество* (*булеан*), во ознака $\mathcal{P}(A)$, го нарекуваме множеството чии елементи се сите подмножества на множеството A, т.е.

$$X\in\mathcal{P}(A) \text{ ако и само ако } X\subseteq A.$$

Дефиниција 3. За множествата A и B велиме дека се *еднакви* ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Притоа означуваме $A=B$.

Вистинитоста на следните својства непосредно следува од претходните дефиниции.

Теорема 1. (i) $A=A$;

(ii) Ако $A=B$, тогаш $B=A$;

(iii) Ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, тогаш $A \subseteq C$;

(iv) Ако $A=B$ и $B=C$, тогаш $A=C$. ∎

2. ОПЕРАЦИИ СО МНОЖЕСТВА

Во овој параграф ќе ги разгледаме операциите: *пресек*, *унија*, *разлика*, *комплемент* и *декартов* (*директен*) *производ на множества*.

Дефиниција 4. *Унија на множествата* A *и* B го нарекуваме множеството C, кое се состои од сите елементи кои припаѓаат барем на едно од множествата A и B. Означуваме $C=A \cup B$.

Според тоа, $A \cup B=\{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

Дефиниција 5. *Пресек на множествата* A *и* B го нарекуваме множеството C, кое се состои од сите елементи кои прирпаѓаат на секое од множествата A и B. Означуваме $C=A \cap B$.

Според тоа, $A \cap B=\{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$.

Дефиниција 6. За множествата A и B велиме дека се *дисјунктни* ако немаат заеднички елемент, т.е. ако $A \cap B=\emptyset$.

Од дефинициите 5 и 6 непосредно следува точноста на следните тврдења.

Теорема 2. (i) $A \cup \emptyset=A$; $A \cap \emptyset=\emptyset$;

(ii) $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$; $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$;

(iii) $A \cap A=A$; $A \cup A=A$; (закони за идемпотентност)

(iv) $A \cap B=B \cap A$; $A \cup B=B \cup A$; (закони за комутативност)

(v) $A \cap (B \cap C)=(A \cap B) \cap C$;

$A \cup (B \cup C)=(A \cup B) \cup C$; (закони за асоцијативност)

(vi) $A\cap(A\cup B)=A$; $A\cup(A\cap B)=A$; **(закони за апсорпција)**

(vii) $x\notin A\cap B$ ако и само ако $x\notin A$ или $x\notin B$;

$x\notin A\cup B$ ако и само ако $x\notin A$ и $x\notin B$. □

Нека T е некое множество индекси и за секој $t\in T$ е зададено множество A_t. *Унија и пресек на множествата* A_t, $t\in T$, определуваме аналогно како во дефинициите 4 и 5 со релациите

$$\bigcup_{t\in T} A_t=\{x|\text{ постои } t_0\in T \text{ т.ш. } x\in A_{t_0}\} \text{ и}$$
$$\bigcap_{t\in T} A_t=\{x|\ x\in A_t,\text{ за секој } t\in T\},$$

соодветно.

Дефиниција 7. *Разлика на множествата* A *и* B го нарекуваме множеството C, кое се состои од сите елементи на множеството A кои не припаѓаат на множеството B. Означуваме $C=A\setminus B$.

Според тоа, $A\setminus B=\{x|\ x\in A \text{ и } x\notin B\}$.

Следните својства непосредно следуваат од дефиницијата на операцијата разлика на множества, па затоа истите нема да ги докажуваме. Доказите му ги препуштаме на читателот за вежба.

Теорема 3. (i) $A\setminus\emptyset=A$; $A\setminus A=\emptyset$; $\emptyset\setminus A=\emptyset$

(ii) $x\notin A\setminus B$ ако и само ако $x\notin A$ или $x\in B$;

(iii) Ако $A\subseteq B$, тогаш $A=B\setminus(B\setminus A)$;

(iv) $A\setminus B=\emptyset$ ако и само ако $A\subseteq B$;

(v) $A\setminus B=A$ ако и само ако $A\cap B=\emptyset$. □

Нека X е основно множество и $A\subseteq X$.

Дефиниција 8. *Комплемент на множеството* A го нарекуваме множеството ${}^cA=X\setminus A$.

Според тоа, ${}^cA=\{x|\ x\in X \text{ и } x\notin A\}$.

Следните својства се познати како ***Де Морганови теореми.***

Теорема 4. За секои множества A и B точни се равенствата

(i) ${}^c({}^cA)=A$; (ii) $A\subseteq B$ ако и само ако ${}^cB\subseteq{}^cA$;

(iii) ${}^c(A\cup B)={}^cA\cap{}^cB$; (iv) ${}^c(A\cap B)={}^cA\cup{}^cB$.

Доказ. Ќе ги докажеме тврдењата (i) и (iii). Имаме,

(i) $x \in {}^c({}^cA) \Leftrightarrow x \notin {}^cA \Leftrightarrow x \in A$.

(iii) $x \in {}^c(A \cup B) \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ и $x \notin B \Leftrightarrow x \in {}^cA$ и $x \in {}^cB \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in {}^cA \cap {}^cB$. ■

Дефиниција 9. *Декартов производ на множествата A и B* го нарекуваме множеството C, во ознака $C=A\times B$, кое се состои од сите подредени парови (x,y), каде што $x \in A$ и $y \in B$. Притоа,

$$(x_1,y_1)=(x_2,y_2) \text{ ако и само ако } x_1=x_2 \text{ и } y_1=y_2.$$

Според тоа, $A\times B=\{(x,y) \mid x \in A \text{ и } y \in B\}$.

Аналогно, дефинираме *декартов производ на множествата* A_i, $i=1,2,\dots,n$ со

$$A_1\times\dots\times A_n=\{(a_1,\dots,a_n) \mid a_i \in A_i,\ i=1,2,\dots,n\}.$$

Теорема 5. (i) $\emptyset\times A=B\times\emptyset=\emptyset$, за секои множества A и B.

(ii) Ако $A_1\subseteq A_2$ и $B_1\subseteq B_2$, тогаш $A_1\times B_1\subseteq A_2\times B_2$.

Доказ. (ii) Ако $(x,y)\in A_1\times B_1$, тогаш $x\in A_1$ и $y \in B_1$. Бидејќи $A_1\subseteq A_2$ и $B_1\subseteq B_2$ добиваме дека $x\in A_2$ и $y\in B_2$, т.е. $(x;y)\in A_2\times B_2$. Конечно, $A_1\times B_1\subseteq A_2\times B_2$. ■

3. ПРЕСЛИКУВАЊА

Дефиниција 10. Нека A и B се две непразни множества. Ако на секој елемент $x\in A$ му е придружен, по некое правило f, еднозначно определен елемент $y\in B$, тогаш велиме дека f е *пресликување* (*функција*) од A во B и ќе пишуваме $f: A\to B$. За елементот $y\in B$ велиме дека е *слика* на елементот $y\in A$, во ознака $y=f(x)$. Множеството A го нарекуваме *домен*, а B *кодомен* на f

За две пресликувања $f_1: A\to B$ и $f_2: A_1\to B_1$ велиме дека се еднакви ако $A=A_1$, $B=B_1$ и за секој $x\in A$ важи $f_1(x)=f_2(x)$.

Дефиниција 11. Пресликувањето $I_A: A\to A$ дефинирано со

$$I_A(x)=x,\ \forall x\in A$$

го нарекуваме *идентично пресликување* на A

Дефиниција 12. Нека $f: A\to B$, $g: B\to C$ се две пресликувања.

Ставаме $h(x)=g(f(x))$, за секој $x\in A$ и добиваме пресликување $h: A\to C$, кое го нарекуваме ***композиција на пресликувањата f и g***, и го означуваме со $h=g\circ f$.

Теорема 6. (а) Ако $f: A\to B$, тогаш $f\circ I_A=f$ и $I_B\circ f=f$.

(б) Ако $f: A\to B$, $g: B\to C$, $h: C\to D$, тогаш $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

Доказ. (а) Пресликувањата $f\circ I_A$ и f имаат ист домени и кодомени и притоа важи $(f\circ I_A)(x)=f(I_A(x))=f(x)$, од што следува дека $f\circ I_A=f$.

Аналогно се покажува дека $I_B\circ f=f$.

(б) Пресликувањата $h\circ(g\circ f)$ и $(h\circ g)\circ f$ имаат домен A и кодомен D и притоа за секој $x\in A$ важи

$(h\circ(g\circ f))(x)=h((g\circ f)(x))=(h(g(f(x)))=(h\circ g)(f(x))=((h\circ g)\circ f)(x)$,

од што следува $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$. ■

Дефиниција 13. За пресликувањето $f: A\to B$ велиме дека е *инјекција* ако од $f(x_1)=f(x_2)$ следува $x_1=x_2$.

За пресликувањето $f: A\to B$ велиме дека е *сурјекција* ако

$$\forall y\in B,\ \exists x\in A \text{ таков што } y=f(x),$$

т.е. секој елемент на B е слика на барем еден елемент на A.

Теорема 7. Ако $f: A\to B$, $g: B\to C$ се

(а) инјекции (б) сурјекции

тогаш соодветното својство го има и нивната композиција $g\circ f$.

Доказ. (а) Нека f и g се инјекции. Ако $x_1, x_2\in A$ се такви што $(g\circ f)(x_1)=(g\circ f)(x_2)$, тогаш $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ и како g е инјекција следува $f(x_1)=f(x_2)$. Но, f е инјекција, па од последното равенство добиваме $x_1=x_2$, што значи дека $g\circ f$ е инјекција.

(б) Нека f и g се сурјекции. За секој $z\in C$, бидејќи g е сурјекција постои барем еден $y\in B$, таков што $g(y)=z$, (може да постојат повеќе елементи со оваа особина). Избираме еден од овие елементи y и бидејќи f е сурјекција постои елемент $x\in A$ таков што $f(x)=y$. Според тоа, за секој $z\in C$ постои $x\in A$ таков што $g(f(x))=g(y)=z$, т.е. $g\circ f$ е сурјекција. ■

Дефиниција 14. Пресликувањето $f: A \to B$ го нарекуваме *биекција* ако е и инјекција и сурјекција.

Според тоа, f е биекција ако за секој елемент $y \in B$ постои точно еден елемент $x \in A$, таков што $y=f(x)$.

Теорема 8. Ако $f: A \to B$, $g: B \to C$ се биекции, тогаш и композицијата $g \circ f$ е биекција.

Доказ. Непосредно следува од теорема 7. ∎

Очигледно, за секое непразно множество A идентичното пресликување I_A е биекција.

Дефиниција 15. Ако $f: A \to B$ е биекција, тогаш со

$$g(y)=x \text{ ако и само ако } f(x)=y,$$

дефинираме пресликување $g: B \to A$, кое го нарекуваме *инверзно на пресликувањето* f. Ја прифаќаме ознаката $g=f^{-1}$.

Теорема 9. Ако $f: A \to B$ е биекција, тогаш инверзното пресликување $f^{-1}: B \to A$ е биекција.

Доказ. Од дефиниција 15 следува дека f^{-1} е пресликување од B во A. Ако $f^{-1}(y_1)=x=f^{-1}(y_2)$, тогаш $y_1=f(x)=y_2$, т.е. f е инјекција. Ако $x \in A$, тогаш $x=f^{-1}(y)$, каде $y=f(x)$, т.е. f^{-1} е и сурјекција. ∎

Теорема 10. За секое множество A, $I_A^{-1}=I_A$.

Доказ. Од дефиниција 15 следува дека I_A^{-1} е пресликување од A во A. Ако $I_A^{-1}(y)=x$, тогаш $I_A(x)=y$ и како $I_A(x)=x$ добиваме $x=y$. Според тоа, $I_A^{-1}(y)=y=I_a(y)$, $\forall y \in A$ т.е. $I_A^{-1}=I_A$. ∎

Лесно се докажува точноста и на следните тврдења. Доказите ги оставаме на читателот за вежба.

Теорема 11. Ако $f: A \to B$, $g: B \to C$ се биекции, тогаш

(а) $(f^{-1})^{-1}=f$ (б) $f \circ f^{-1}=I_B$ (в) $f^{-1} \circ f=I_A$

(г) $(g \circ f)^{-1}=f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Дефиниција 16. За множествата A и B велиме дека се *еквивалентни*, во ознака $A\sim B$, ако постои биекција f од A во B.

Теорема 12. (i) $A\sim A$;

(ii) Ако $A\sim B$, тогаш $B\sim A$;

(iii) Ако $A\sim B$ и $B\sim C$, тогаш $A\sim C$.

Доказ. Непосредно следува од теоремите 9, 10 и 11. ■

Теорема 13. Ако $A_1\sim B_1$, $A_2\sim B_2$, $A_1\cap A_2=\varnothing$, $B_1\cap B_2=\varnothing$, тогаш $A_1\cup A_2\sim B_1\cup B_2$.

Доказ. Нека $f_1:A_1\to B_1$, $f_2:A_2\to B_2$ се биекции и да ставиме

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \text{ако } x\in A_1 \\ f_2(x), & \text{ако } x\in A_2. \end{cases}$$

Бидејќи $A_1\cap A_2=\varnothing$ добиваме дека за секој $x\in A_1\cup A_2$ постои еден и само еден $y\in B_1\cup B_2$ таков што $f(x)=y$, што значи дека f е пресликување од $A_1\cup A_2$ во $B_1\cup B_2$.

Нека $f(x_1)=f(x_2)\in B_1\cup B_2$. Од $B_1\cap B_2=\varnothing$, добиваме

$$\text{или } f(x_1)=f(x_2)\in B_1 \text{ или } f(x_1)=f(x_2)\in B_2.$$

Ако $f(x_1)=f(x_2)\in B_1$, тогаш $f_1(x_1)=f_1(x_2)$ и како f_1 е инјекција, добиваме $x_1=x_2$. Ако $f(x_1)=f(x_2)\in B_2$, тогаш $f_2(x_1)=f_2(x_2)$ и како f_2 е инјекција, добиваме $x_1=x_2$. Според тоа, од $f(x_1)=f(x_2)$ следува $x_1=x_2$, т.е. f е инјекција.

Ако $y\in B_1\cup B_2$, тогаш $y\in B_1$ или $y\in B_2$. Но, f_1 и f_2 се сурјекции, па затоа постои $x_1\in A_1$ таков што $f_1(x_1)=y$ или постои $x_2\in A_2$ таков што $f_2(x_2)=y$. Според тоа, f е сурјекција. ■

• • •

Дефиниција 17. Нека $f:X\to Y$ е пресликување од множеството X во множеството Y и со $\mathcal{P}(X)$ и $\mathcal{P}(Y)$ да ги означиме партитивните множества на X и Y. Пресликувањето $f^{\bullet}:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y)$ дефинирано со

$$f^{\bullet}(A)=\{f(x):\ x\in A\},\ \text{за секое } A\subseteq X$$

ќе го нарекуваме *проширување* на пресликувањето f врз $\mathcal{P}(X)$.

Дефиниција 18. Ако $f^{\bullet}:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y)$ е проширување од $f:X\to Y$, тогаш пресликувањето $f_{\bullet}:\mathcal{P}(Y)\to\mathcal{P}(X)$ дефинирано со

$$f_{\bullet}(B)=\{x\in X:\ f(x)\in B\},\ \text{за секое } B\subseteq Y$$

ќе го нарекуваме *реципрочно проширување* на пресликувањето f.

Теорема 14. Нека $f:X\to Y$. Тогаш

(а) Ако $A\subseteq A_1$, тогаш $f^{\bullet}(A)\subseteq f^{\bullet}(A_1)$, за секои $A,A_1\subseteq X$.

(б) $A\neq\emptyset \Leftrightarrow f^{\bullet}(A)\neq\emptyset$, за секое $A\subseteq X$

5. ЗАДАЧИ

Задача 01. Докажете ги равенствата

(а) $(\bigcup_{a\in A} X_a)\cap Y=\bigcup_{a\in A}(X_a\cap Y)$

(б) $(\bigcap_{a\in A} X_a)\cup Y=\bigcap_{a\in A}(X_a\cup Y)$

(в) $(\bigcup_{a\in A} X_a)\cap(\bigcup_{b\in B} Y_b)=\bigcup_{\substack{a\in A\\ b\in B}}(X_a\cap Y_b)$

(г) $(\bigcap_{a\in A} X_a)\cup(\bigcap_{b\in B} Y_b)=\bigcap_{\substack{a\in A\\ b\in B}}(X_a\cup Y_b)$

Решение. Ќе го докажеме само равенството под (а).

Нека $x\in(\bigcup_{a\in A}X_a)\cap Y$. Тоа значи дека $x\in\bigcup_{a\in A}X_a$ и $x\in Y$. Од првата релација следува, постои $a_o\in A$ таков што $x\in X_{a_o}$. Според тоа, $x\in X_{a_o}\cap Y$, па затоа $x\in\bigcup_{a\in A}(X_a\cap Y)$.

Обратно, нека $y\in\bigcup_{a\in A}(X_a\cap Y)$. Според тоа, постои $a_1\in A$ таков да $y\in X_{a_1}\cap Y$ т.е. $y\in X_{a_1}$ и $y\in Y$. Но, тогаш $y\in\bigcup_{a\in A}X_a$ и $y\in Y$, па затоа $y\in(\bigcup_{a\in A}X_a)\cap Y$.

Останатите равенства се докажуваат аналогно. ■

Задача 02. Докажете ги равенствата

(а) $M\setminus(\bigcap_{a\in A}M_a)=\bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)$

(б) $M\setminus(\bigcup_{a\in A}M_a)=\bigcap_{a\in A}(M\setminus M_a)$

Решение. Ќе го докажеме само првото равенство.

Нека $x\in M\setminus(\bigcap_{a\in A}M_a)$. Тогаш $x\in M$ и $x\notin\bigcap_{a\in A}M_a$. Од последната релација следува, постои $a_o\in A$ таков да $x\notin M_{a_o}$, па според тоа $x\in M\setminus M_{a_o}$. Но тоа значи $x\in\bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)$.

Обратно, нека $y\in\bigcup_{a\in A}(M\setminus M_a)$. Тогаш постои $a_1\in A$ таков што

$y\in M\setminus M_{a_1}$, т.е. $y\in M$ и $y\notin M_{a_1}$. Од последната релација следува

$$y\notin \bigcap_{a\in A} M_a,\ \text{т.е. } y\in M\setminus(\bigcap_{a\in A} M_a). \ ■$$

Задача 03. Да се докаже дека

(а) $(\bigcup_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcup_{a\in A} N_a)\subset \bigcup_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$

(б) $(\bigcap_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcap_{a\in A} N_a)\supset \bigcap_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$

Решение. (а) Нека $x\in(\bigcup_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcup_{a\in A} N_a)$. Тогаш $x\in\bigcup_{a\in A} M_a$ и $x\notin\bigcup_{a\in A} N_a$, т.е. постои $a_o\in A$ таков да $x\in M_{a_o}$ и за секој $a\in A$ $x\notin N_a$. Според тоа, постои $a_o\in A$ таков што $x\in M_{a_o}\setminus N_{a_o}$ т.е. $x\in\bigcup_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$.

(б) Нека $x\in\bigcap_{a\in A}(M_a\setminus N_a)$. Значи за секој $a\in A$, $x\in M_a\setminus N_a$, т.е. за секој $a\in A$, $x\in M_a$ и $x\notin N_a$. Според тоа, $x\in\bigcap_{a\in A} M_a$ и $x\notin\bigcap_{a\in A} N_a$ што значи $x\in (\bigcap_{a\in A} M_a)\setminus(\bigcap_{a\in A} N_a)$. ■

Задача 04. Докажете дека $A\setminus B\subset(A\setminus D)\cup(D\setminus B)$, за секои множества A, B и D.

Решение. Нека $x\in A\setminus B$. Тогаш $x\in A$ и $x\notin B$. Ако $x\notin D$, тогаш $x\in A\setminus D$ и затоа $x\in(A\setminus D)\cup(B\setminus D)$. Ако $x\in D$, тогаш бидејќи $x\notin B$, добиваме $x\in D\setminus B$, па затоа $x\in(A\setminus D)\cup(D\setminus B)$. Според тоа,

$$A\setminus B\subset(A\setminus D)\cup(D\setminus B). \ ■$$

Задача 05. Докажете дека

(а) $(A_1\times\ldots\times A_n)\cap(B_1\times\ldots\times B_n)=(A_1\cap B_1)\times\ldots\times(A_n\cap B_n)$

(б) $(A_1\times\ldots\times A_n)\cup(B_1\times\ldots\times B_n)\subset(A_1\cup B_1)\times\ldots\times(A_n\cup B_n)$

Решение. Нека $x=(x_1,\ldots,x_n)\in(A_1\times\ldots\times A_n)\cap(B_1\times\ldots\times B_n)$. Според тоа, $x\in A_1\times\ldots\times A_n$ и $x\in B_1\times\ldots\times B_n$, односно $x_i\in A_i$ и $x_i\in B_i$, за $i=1,\ldots,n$. Но, тоа значи дека $x_i\in A_i\cap B_i$, за $i=1,\ldots,n$, т.е.

$$x=(x_1,\ldots,x_n)\in(A_1\cap B_1)\times\ldots\times(A_n\cap B_n).$$

Обратно, ако $x=(x_1,\ldots,x_n)\in(A_1\cap B_1)\times\ldots\times(A_n\cap B_n)$, тогаш $x_i\in A_i\cap B_i$, за секој $i=1,\ldots,n$. Според тоа, за $i=1,\ldots,n$ важи $x_i\in A_i$ и $x_i\in B_i$, т.е.

$$x=(x_1,\ldots,x_n)\in A_1\times\ldots\times A_n \text{ и } x=(x_1,\ldots,x_n)\in B_1\times\ldots\times B_n$$

т.е.

$$x\in(A_1\times\ldots\times A_n)\cap(B_1\times\ldots\times B_n).$$

Со тоа е докажано равенството (а).

(б) Нека $x=(x_1,\dots,x_n)\notin(A_1\cup B_1)\times\dots\times(A_n\cup B_n)$. Значи, постои $i_0\in\{1,\dots,n\}$ таков што $x_{i_0}\notin A_{i_0}\cup B_{i_0}$ т.е. $x_{i_0}\notin A_{i_0}$ и $x_{i_0}\notin B_{i_0}$. Според тоа, од $x_{i_0}\notin A_{i_0}$ имаме $x\notin A_1\times\dots\times A_n$ и од $x_{i_0}\notin B_{i_0}$ имаме $x\notin B_1\times\dots\times B_n$. Значи $x\notin A_1\times\dots\times A_n\cup B_1\times\dots\times B_n$.

Обратната инклузија на важи. Доволно е да го разгледаме случајот кога $n=2$, $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{a,b\}$, $B_1=\{3,4\}$ и $B_2=\{c,d\}$. ■

Задача 06. Докажете дека, инклузијата

$$(A_1\cup B_1)\times(A_2\cup B_2)\subset(A_1\times A_2)\cup(B_1\times B_2)$$

е точна ако и само ако е исполнет еден од следните услови

(а) $A_1\subset B_1$ и $A_2\subset B_2$,

(б) $B_1\subset A_1$ и $B_2\subset A_2$,

(в) $A_1=B_1$, и

(г) $A_2=B_2$.

Решение. Нека е точна инклузијата

(1) $$(A_1\cup B_1)\times(A_2\cup B_2)\subset(A_1\times A_2)\cup(B_1\times B_2).$$

Ако ги искористиме равенствата

$$A_1\cup B_1=A_1\cup(B_1\setminus A_1),\quad A_2\cup B_2=A_2\cup(B_2\setminus A_2),$$
$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)\quad \text{и}$$
$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A),$$

чии докази, поради едноставноста, ги препуштаме на читателот, добиваме:

$$\begin{aligned}(A_1\cup B_1)\times(A_2\cup B_2)&=(A_1\cup(B_1\setminus A_1))\times(A_2\cup(B_2\setminus A_2))\\ &=((A_1\cup(B_1\setminus A_1))\times A_2)\cup((A_1\cup(B_1\setminus A_1))\times(B_2\setminus A_2))\\ &=(A_1\times A_2)\cup((B_1\setminus A_1)\times A_2)\cup(A_1\times(B_2\setminus A_2))\cup((B_1\setminus A_1)\times(B_2\setminus A_2)).\end{aligned}$$

Од последното равенство и од (1) следува

(2) $$(B_1\setminus A_1)\times A_2\subset(A_1\times A_2)\cup(B_1\times B_2),\ \text{и}$$

(3) $$A_1\times(B_2\setminus A_2)\subset(A_1\times A_2)\cup(B_1\times B_2).$$

За $B_1\setminus A_1$ можни се следните случаи

(4) $$B_1\setminus A_1\neq\emptyset,\ \text{и}$$

(5) $$B_1\setminus A_1=\emptyset.$$

За $B_2\setminus A_2$ можни се следните случаи

(6) $$B_2\setminus A_2\neq\emptyset,\ \text{и}$$

(7) $$B_2 \setminus A_2 = \varnothing.$$

Ако важи (4), тогаш од (2) добиваме $(B_1 \setminus A_1) \times A_2 \subset B_1 \times B_2$, па според тоа $A_2 \subset B_2$ (докажи!). Ако важи (5), тогаш очигледно $B_1 \subset A_1$. Аналогно од (6) следува $A_1 \times (B_2 \setminus A_2) \subset B_1 \times B_2$, т.е. $A_1 \subset B_1$, а од (7) имаме $B_2 \subset A_2$.

Од досега изнесеното можни се следните четири случаи: (4) и (6), (4) и (7), (5) и (6), (5) и (7), од што следува

- во првиот случај $A_1 \subset B_1$ и $A_2 \subset B_2$,
- во вториот случај $A_2 = B_2$,
- во третиот случај $A_1 = B_1$, и
- во четвртиот случај $B_1 \subset A_1$ и $B_2 \subset A_2$.

Обратната импликација е очигледна, па доказот на истата го оставаме на читателот. ■

Задача 07. Дадено е пресликувањето $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Пресметајте го збирот

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{1}{1}\right)+f\left(\frac{2}{1}\right)+\dots+f\left(\frac{n-1}{1}\right)+f\left(\frac{n}{1}\right)+\\ &+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{2}\right)+\dots+f\left(\frac{n-1}{2}\right)+f\left(\frac{n}{2}\right)+\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n}{n}\right). \end{aligned}$$

Решение. Забележуваме дека $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x^2}=1$ и $f(1)=\dfrac{1}{2}$. Збирот на членовите на дијагоналата е $\dfrac{n}{2}$, а збирот на останатите членови е $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Значи, вкупниот збир е $\dfrac{n^2}{2}$. ■

Задача 08. Нека $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Пресметајте го збирот

$$f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n}{n}\right),\ n\in\mathbb{N}.$$

Решение. За дадената функција важи релацијата

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{4^x+2}=1.$$

Ако во оваа релација за x замениме $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$ и ги собереме добиените равенства, добиваме

$$f(0)+f\left(\frac{n}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n}{n}\right)+f(0)=n+1$$

Според тоа, бараниот збир е

$$f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n}{n}\right)=\frac{n+1}{2}. \blacksquare$$

Задача 09. Докажете дека функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, за која важи

$$f(x^2)-(f(x))^2\geq\frac{1}{4},\ \forall x\in\mathbb{R}$$

не е инјективна.

Решение. За $x=0$, од $f(0)-(f(0))^2\geq\frac{1}{4}$ добиваме

$$\left(f(0)-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0 \quad \text{т.е.} \quad f(0)=\frac{1}{2}.$$

За $x=1$ имаме $f(1)-(f(1))^2\geq\frac{1}{4}$ имаме

$$\left(f(1)-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0 \quad \text{т.е.} \quad f(1)=\frac{1}{2}.$$

Според тоа, $f(0)=f(1)$, што значи дека функцијата f не е инјективна. ■

Задача 10. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е функција која ги задоволува следните услови

(*i*) $\forall x,y\in\mathbb{R}$ важи $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$

(*ii*) постои еден и само еден x_o таков што $f(x_o)=1993$.

Докажете дека функцијата f е инјективна.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$f(x_o)=f(x_o+0)=f(x_o)f(0),$$

од што следува дека $f(0)=1$. Понатаму $1=f(x+(-x))=f(x)\cdot f(-x)$, од што следува $f(x)\neq 0$ и $f(-x)=\frac{1}{f(x)}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ако $f(x)=f(y)$, тогаш $1=\frac{f(x)}{f(y)}=f(x)\cdot f(-y)=f(x-y)$. Според тоа $1993=f(x_o)f(x-y)=f(x_o+(x-y))$. Од (*ii*) добиваме дека $x_o+x-y=x_o$, т.е. $x=y$. Значи, f е инјективна функција. ■

Задача 11. Одредете за кои непарни броеви $n\geq 3$ функцијата $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ определена со $f(x)=x^n-2x$ е инјекција.

Решение. Ќе докажеме дека функцијата е инјекција за секој непарен природен број n. Нека претпоставиме дека за некои два рационални броеви x и y важи $f(x)=f(y)$, при што $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{c}{d}$, НЗД$(a,b)=1$, НЗД$(c,d)=1$ и $b>0$, $d>0$. Тогаш

(1) $\qquad ad^n(a^{n-1}-2b^{n-1})=cb^n(c^{n-1}-2d^{n-1}).$

Бидејќи a и b се заемно прости броеви, добиваме дека и броевите $a^{n-1}-2b^{n-1}$ и b се заемно прости, па од (1) следува $b^n|d^n$. Слично се покажува дека $d^n|b^n$. Значи $b^n=d^n$, т.е. $b=d$. Релацијата (1) се сведува на

(2) $$a^n-c^n=2b^{n-1}(a-c).$$

Ако $x\neq y$, тогаш $a\neq c$, па од (2) добиваме

(3) $$a^{n-1}+a^{n-2}c+\ldots+c^{n-1}=2b^{n-1}$$

На левата страна на (3) имаме непарен број собирци, па затоа броевите a и c мора да бидат парни, Но тогаш и b мора да биде парен број, што противречи на НЗД$(a,b)=1$. Значи $a=c$, т.е. $x=y$. Според тоа, функцијата f е инјективна. ■

Задача 12. Нека се $a_1< a_2< \ldots< a_n$ дадени реални броеви. Ако е $f:\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}\to\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ биекција со особина

$$a_1+f(a_1)< a_2+f(a_2)< \ldots<a_n+f(a_n),$$

тогаш f е идентитет. Докажете!

Решение. (а) Нека $f(a_i)=a_1$ и $i>1$. Тогаш е

$$a_1+f(a_1)< a_2+f(a_2)< \ldots<a_i+f(a_i)=a_i+a_1,$$

и мора да биде аналогно ... a_i

?. $$\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{i-1})\}\subseteq\{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}\}.$$ од

Но, $f(a_k)\neq a_1$, за $k=1,2,\ldots,i-1$, бидејќи $f(a_i)=a_1$, т.е. условот, ...

$$\{f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{i-1})\}\subseteq\{a_2, \ldots, a_{i-1}\},$$

што не е можно, бидејќи f е биекција.

(б) Ако $f(a_1)=a_1$, тогаш можеме да се ограничиме на множеството $\{a_2, \ldots, a_n\}$ и да ги повториме размислувањата од (а).■

Задача 13. Нека $f:X\to Y$. Докажете дека

(а) $f(f^{-1}(B))\subseteq B$, за секое $B\subseteq Y$.

(б) $f^{-1}(f(A))\supseteq A$, за секое $A\subseteq X$.

(в) $f(f^{-1}(B))=B$, за секое $B\subseteq Y$ ако и само ако f е сурјекција.

(г) $f^{-1}(f(A))=A$, за секое $A\subseteq X$ ако и само ако f е инјекција.

Решение. (а) Ако $y \in f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, тогаш постои $x \in f^{-1}(B)$ таков што $f(x) \in B$ и $f(x)=y$. Според тоа, $y \in B$.

Обратната инклузија не е точна. Најдете пример.

(б) Ако $x \in A$, тогаш $f(x)=y \in f(A)$, па значи $x \in f^{-1}(f(A))$.

Обратната инклузија не е точна. Најдете пример.

(в) Ако $f(f^{-1}(B))=B$, $\forall B \subseteq Y$ и $y \in Y$, тогаш $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Навистина, ако $f^{-1}(\{y\})=\emptyset$, тогаш $\{y\}=f(f^{-1}(\{y\}))=\emptyset$ што е противречност. Според тоа, постои $x \in X$ таков што $x \in f^{-1}(\{y\})$, што значи постои $x \in X$ таков што $f(x)=y$, т.е. f е сурјекција.

Во тврдењето под (а) докажавме дека $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, за секое $B \subseteq Y$. Ќе докажеме дека, ако f е сурјекција, тогаш $f(f^{-1}(B)) \supseteq B$, за секое $B \subseteq Y$. Ако $y \in B$, тогаш бидејќи f е сурјекција постои $x \in X$ таков што $y=f(x)$, т.е. постои $x \in X$ таков што $x \in f^{-1}(B)$. Според тоа $y=f(x) \in f(f^{-1}(B))$.

(г) Нека $f^{-1}(f(A))=A$, за секое $A \subseteq X$ и $f(x_1)=f(x_2)$. Тогаш, $f(\{x_1\})=f(\{x_2\})$, па значи $\{x_1\}=\{x_2\}$ т.е. $x_1=x_2$, т.е f е инјекција.

Во тврдењето под (б) докажавме дека $f^{-1}(f(A)) \supseteq A$, за секое $A \subseteq X$. Ќе докажеме дека, ако f е инјекција, тогаш $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ за секое $A \subseteq X$. Ако $x \notin A$, тогаш $f(x) \notin f(A)$. Навистина, ако $f(x) \in f(A)$, тогаш постои $x_1 \in A$ таков што $f(x_1)=f(x)$ и како f е инјекција добиваме $x=x_1 \in A$, што е противречност. Сега од $f(x) \notin f(A)$ следува $x \notin f^{-1}(f(A))$, односно $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$. ■

Задача 14. Нека $f: X \to Y$ е пресликување на X во Y и $M_a \subset X$, секој $a \in A$. Да се докаже дека

(а) $f(\bigcup_{a \in A} M_a) = \bigcup_{a \in A} f(M_a)$, и

(б) $f(\bigcap_{a \in A} M_a) \subset \bigcap_{a \in A} f(M_a)$.

Решение. (а) Нека $f(x) \in f(\bigcup_{a \in A} M_a) = \{f(t):\ t \in \bigcup_{a \in A} M_a\}$. Според тоа, $x \in \bigcup_{a \in A} M_a$ т.е постои $a_o \in A$ таков што $x \in M_{a_o}$, па затоа постои $a_o \in A$ таков што $f(x) \in M_{a_o}$. Значи, $f(x) \in \bigcup_{a \in A} f(M_a)$.

Обратно, ако $f(x) \in \bigcup_{a \in A} f(M_a)$, тогаш $f(x) \in f(M_{a_o})$ за барем еден $a_o\in A$. Според тоа, постои $a_o\in A$, $x\in M_{a_o}$, т.е. $x\in\bigcup_{a\in A}M_a$. Значи, $f(x)\in f(\bigcup_{a\in A}M_a)$.

(б) Од $f(x)\in f(\bigcap_{a\in A}M_a)=\{f(t):\ t\in\bigcap_{a\in A}M_a\}$ следува $x\in\bigcap_{a\in A}M_a$, т.е. за секој $a\in A$, $x\in M_a$. Според тоа, за секој $a\in A$, $f(x)\in f(M_a)$. Значи, $f(x)\in\bigcap_{a\in A}f(M_a)$, со што инклузијата е докажана. ■

Задача 15. Нека $f:X\to Y$ е пресликување и $N_a\subset Y$, за секој $a\in A$. Докажете, дека

(а) $f^{-1}(\bigcup_{a\in A}N_a)=\bigcup_{a\in A}f^{-1}(N_a)$, и

(б) $f^{-1}(\bigcap_{a\in A}N_a)=\bigcap_{a\in A}f^{-1}(N_a)$.

Решение. (а) Ако $x\in f^{-1}(\bigcup_{a\in A}N_a)$, тогаш $f(x)\in\bigcup_{a\in A}N_a$. Значи постои $a_o\in A$ и $f(x)\in N_{a_o}$, односно постои $a_o\in A$ и $x\in f^{-1}(N_{a_o})$ т.е. $x\in\bigcup_{a\in A}f^{-1}(N_a)$. Докажавме дека $f^{-1}(\bigcup_{a\in A}N_a)\subset\bigcup_{a\in A}f^{-1}(N_a)$.

Нека претпоставиме дека $x\in\bigcup_{a\in A}f^{-1}(N_a)$. Тогаш постои a_1 и $x\in f^{-1}(N_{a_1})$, т.е. $f(x)\in N_{a_1}$, за некој $a_1\in A$. Затоа, $f(x)\in\bigcup_{a\in A}N_a$, односно $x\in f^{-1}(\bigcup_{a\in A}N_a)$. Конечно, $\bigcup_{a\in A}f^{-1}(N_a)\subset f^{-1}(\bigcup_{a\in A}N_a)$.

(б) Нека $x\in f^{-1}(\bigcap_{a\in A}N_a)$. Тогаш $f(x)\in\bigcap_{a\in A}N_a$, па затоа за секој $a\in A$, $f(x)\in N_a$. Според тоа, за секој $a\in A$, $x\in f^{-1}(N_a)$, односно $x\in\bigcap_{a\in A}f^{-1}(N_a)$.

Обратно, ако $x\in\bigcap_{a\in A}f^{-1}(N_a)$, тогаш $x\in f^{-1}(N_a)$, за секој $a\in A$, т.е. $f(x)\in N_a$, за секој $a\in A$. Според тоа, $f(x)\in\bigcap_{a\in A}N_a$ односно $x\in f^{-1}(\bigcap_{a\in A}N_a)$. ■

Задача 16. Нека $f:X\to Y$ е произволно пресликување и $M,N\subset Y$. Докажете, дека $f^{-1}(M\setminus N)=f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$.

Решение. Ако $x\in f^{-1}(M\setminus N)$, тогаш $f(x)\in M\setminus N$, т.е. $f(x)\in M$ и $f(x)\notin N$. Но, тогаш $x\in f^{-1}(M)$ и $x\notin f^{-1}(N)$, па затоа

$$x\in f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N).$$

Докажавме дека $f^{-1}(M\setminus N)\subset f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$

Ако $x\in f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$, тогаш $x\in f^{-1}(M)$ и $x\notin f^{-1}(N)$. Според тоа, $f(x)\in M$ и $f(x)\notin N$, т.е. $f(x)\in M\setminus N$. Конечно, $x\in f^{-1}(M\setminus N)$ т.е. $f^{-1}(M\setminus N)\subset f^{-1}(M)\setminus f^{-1}(N)$. ■

Задача 17. Нека $f:X\to X$ е пресликување. За множеството $M\subseteq X$ ќе велиме дека е *стабилно во однос на f* ако $f(M)\subset M$ и $f^{-1}(M)\subset M$. Докажете дека

(а) X и $\emptyset$ се стабилни множества,

(б) пресек и унија на произволна фамилија стабилни множества е стабилно множество,

(в) меѓу стабилните множества, кои содржат дадено множество $A\subset X$, постои минимално во однос на инклузијата, кое го нарекуваме *стабилна обвивка* на A и ќе го означуваме со $\Phi(A)$,

(г) меѓу стабилните множества, кои се содржат во дадено множество $A\subset X$, постои максимално во однос на инклузијата, кое го нарекуваме стабилно јадро на A и ќе го означуваме со $\psi(A)$,

(д) комплементот $X\setminus M$ на стабилно множество $M\subset X$ е стабилно множество,

(ѓ) за секое $A\subset X$ точни се равенствата $\Phi(A)=X\setminus\psi(X\setminus A)$ и $\psi(A)=X\setminus\Phi(X\setminus A)$,

(е) од $\Phi(x)\cap\Phi(y)\neq\emptyset$, $x,y\in X$ следува $\Phi(x)=\Phi(y)$,

(ж) $\Phi(A)=\cup\{\Phi(x):x\in A\}$.

Решение. (а) Јасно е дека $f(X)\subset X$ и $f^{-1}(X)\subset X$. Исто така $f(\emptyset)\subset\emptyset$ и $f^{-1}(\emptyset)\subset\emptyset$. Според тоа, X и $\emptyset$ се стабилни множества.

(б) Според задача 7 имаме:

$$f(\bigcup_{a\in A}M_a)=\bigcup_{a\in A}f(M_a)\subset\bigcup_{a\in A}M_a \text{ и } f(\bigcap_{a\in A}M_a)\subset\bigcap_{a\in A}f(M_a)\subset\bigcap_{a\in A}M_a,$$

кога M_a, $a\in A$ се стабилни множества.

Според задача 8 имаме

$$f^{-1}(\bigcup_{a\in A}M_a)=\bigcup_{a\in A}f^{-1}(M_a)\subset\bigcup_{a\in A}M_a \text{ и } f^{-1}(\bigcap_{a\in A}M_a)==\bigcap_{a\in A}f^{-1}(M_a)\subset\bigcap_{a\in A}M_a,$$

кога M_a, $a\in A$ се стабилни множества.

Според тоа, $\bigcup_{a\in A}M_a$ и $\bigcap_{a\in A}M_a$ се стабилни множества ако M_a, $a\in A$ се стабилни множества.

(в) Со $\Phi(A)$ да го означиме пресекот на сите стабилни подмножества од X кои го содржат A. Јасно $\Phi(A)$ е стабилно множество. Нека A_o е најмалото стабилно подмножество од X, кое го содржи A. Очигледно $\Phi(A)\subset A_o$. Од друга страна, $\Phi(A)$ е пресек на сите стабилни подмножества кои го содржат A и како A_o е најмалото множество со оваа особина добиваме $A_o=A_o\cap\Phi(A)\subset\Phi(A)$. Според тоа, $\Phi(A)=A_o$.

(д) Бидејќи $f^{-1}(M)\subset M$, од $f^{-1}(M)\cap(X\setminus M)=\varnothing$ имаме $M\cap f(X\setminus M)=\varnothing$, т.е. $f(X\setminus M)\subset X\setminus M$. Од друга страна, од $f(M)\subset M$ имаме $f(M)\cap(X\setminus M)=\varnothing$ т.е. $M\cap f^{-1}(X\setminus M)=\varnothing$. Значи $f^{-1}(X\setminus M)\subset X\setminus M$. Според тоа, $X\setminus M$ е стабилно множество.

(ѓ) Со $\psi(A)$ ќе ја означиме унијата од сите стабилни множества кои се содржат во A. Јасно, $\psi(A)$ е стабилно множество. Со слични размислувања како во тврдењето под (в) се докажува дека тоа е максималното множество, во однос на инклузијата, со бараната особина.

(е) Од $\Phi(x)\cap\Phi(y)\neq\varnothing$ следува $x\in\Phi(y)$ и $x\in\Phi(y)$. Навистина, ако $x\notin\Phi(y)$, ќе имаме $x\in X\setminus\Phi(y)$ и како множеството $X\setminus\Phi(y)$ е стабилно, добиваме $\Phi(x)\subset X\setminus\Phi(y)$, што е противречност. Значи $\Phi(x)\subset\Phi(y)$ и $\Phi(y)\subset\Phi(x)$.

(ж) Множеството $\cup\{\Phi(x):x\in A\}$ е стабилно. Од очигледната инклузија $A\subset\cup\{\Phi(x):x\in A\}$ следува $\Phi(A)\subset\cup\{\Phi(x):x\in A\}$.

Обратната инклузија е очигледна, бидејќи $\Phi(x)\subset\Phi(A)$, за секој $x\in A$.

(ѕ) За вежба. ■

Задача 18. Ако пресликувањето $f:X\to X$ е инјекција, $A\subset X$ и $\Phi(A)$ е стабилната обвивка за A, тогаш

$$\Phi(A)=\ldots\cup f^{-1}(f^{-1}(A))\cup f^{-1}(A)\cup A\cup f(A)\cup f(f(A))\cup\ldots\ .$$

Решение. Ставаме

$$M=\ldots\cup f^{-1}(f^{-1}(A))\cup f^{-1}(A)\cup A\cup f(A)\cup f(f(A))\cup\ldots\ .$$

Бидејќи $A\subset\Phi(A)$ и $\Phi(A)$ е стабилно множество, добиваме

$$f(A)\subset f(\Phi(A))\subset\Phi(A),\ f^{-1}(A)\subset f^{-1}(\Phi(A))\subset\Phi(A) \text{ итн.}$$

Според тоа, $M\subset\Phi(A)$.

Бидејќи стабилната обвивка $\Phi(A)$ на A се содржи во секое стабилно множество, кое го содржи A, за да ја докажеме обратната инклузија доволно е да докажеме дека M е стабилно. За таа цел да го определиме $f(M)$. Притоа, ќе користиме дека за секое множество B важи $f(f^{-1}(B))\subset B$. Според тоа,

$$f(M)=\ldots\cup f(f^{-1}(f^{-1}(A)))\cup f(f^{-1}(A))\cup f(A)\cup f(f(A))\cup\ldots\subset$$
$$\subset\ldots\cup f^{-1}(A)\cup A\cup f(A)\cup f(f(A))\cup\ldots=M.$$

Ако се искористи фактот дека, за произволно множество B и инјективно пресликување f важи $f^{-1}(f(B))=B$, тогаш добиваме

$$f^{-1}(M)=\ldots\cup f^{-1}(f^{-1}(A))\cup f^{-1}(A)\cup f^{-1}(f(A))\cup f^{-1}(f(f(A)))\cup\ldots=$$
$$=\ldots\cup f^{-1}(f^{-1}(A))\cup f^{-1}(A)\cup A\cup f(A)\cup f(f(A))\cup\ldots=M.$$

Докажавме дека множеството M е стабилно и од $M\subset\Phi(A)$ добиваме $M=\Phi(A)$. ■

Задача 19. Функцијата f е дефинирана во множеството цели броеви со формулата

$$f(x)=\begin{cases} x-10, & \text{ако } x>100\\ f(f(x+11)), & \text{ако } x\le 100.\end{cases}$$

Докажете дека $f(x)=91$, за $x\le 100$.

Решение. Да забележиме дека важи

$$f(100)=f(f(100+11))=f(f(111))=f(101)=101-10=91.$$

Да претпоставиме дека $f(x)=91$, за секој $x\in\{k+1,k+2,\ldots,100\}$, каде k е цел број помал од 100. Ако е $90<k<100$, тогаш е

$$f(k)=f(f(k+11))=f(k+1)=91,$$

а ако $k\le 90$, тогаш

$$f(k)=f(f(k+11))=f(91)=91.$$

Од принципот на математичка индукција добиваме дека за секој цел број $k\le 100$ важи $f(k)=91$. ■

Задача 20. За функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ важи

(а) $f(f(n))=4n+9$, за секој $n\in\mathbb{N}$, и

(б) $f(2^k)=2^{k+1}+3$, за секој $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Пресметајте $f(1789)$.

Решение. Од (а) имаме

$$f^9(4)=f^7(25)=f^5(109)=f^3(445)=f(1789),$$

бидејќи

$$25=4\cdot 4+9$$
$$109=4\cdot 25+9$$
$$445=4\cdot 109+9$$
$$1789=4\cdot 445+9.$$

Од (б) имаме:

$$f^9(4)=f^9(2^2)=f^8(2^3+3)=f^8(11).$$

Од (а) имаме:

$$f^8(11)=f^6(53)=f^4(221)=f^2(893)=3581,$$

бидејќи

$$53=4\cdot 11+9$$

$$221=4\cdot 53+9$$

$$893=4\cdot 221+9$$

$$3581=4\cdot 893+9.$$

Според тоа, $f(1789)=3581$. ■

Задача 20.1 Функцијата $f(n)$ е дефинирана за сите природни броеви n и прима ненегативни целобројни вредности. Познато е дека

(а) за секој m и n, $f(m+n)-f(m)-f(n)$ прима една од вредностите 0 или 1,

(б) $f(2)=0$,

(в) $f(3)>0$,

(г) $f(9999)=3333$.

Определете $f(1982)$.

Решение. За $m=n=1$ имаме $0=f(2)=\begin{cases} 2f(1) \\ 2f(1)+1 \end{cases}$, па е $f(1)=0$.

За $m=2$, $n=1$ имаме $f(3)=\begin{cases} f(2)+f(1) \\ f(2)+f(1)+1 \end{cases}$, па според (в) важи $f(3)=1$. Понатаму

$$f(3n+3) \geq f(3n)+f(3)= f(3n)+1,$$

и со индукција се докажува дека $f(n) \leq n$. Притоа ако во оваа релација знакот > важи за некое n, тогаш тој важи и за секој $m>n$. Затоа од $f(9999)=3333$ добиваме $f(3n)=n$ за секој $n\leq 3333$. Специјално,

$$1982 = f(3\cdot 1982) \geq f(2\cdot 1982)+f(1982) \geq 3f(1982),$$

односно

$$661 > \frac{1982}{3} \geq f(1982) \geq f(1980) \geq f(1980)+f(2) = 660.$$

Значи $f(1982)=660$. ■

$f(2)=0$
$f(2)\geq 2$

Задача 21. Функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е зададена со
$$f(m)=m+\left[\sqrt{m}\,\right].$$
Докажете дека за секој $m\in\mathbb{N}$ постои $k\in\mathbb{N}$, таков што
$$f^k(m)=\underbrace{f(f(\ldots(f(m))\ldots))}_{\text{k-пати}}$$
е потполн квадрат.

Решение. Да забележиме дека за секој природен број m постои природен број n таков што $n^2\le m\le n^2+2n=(n+1)^2-1$. Ако $m=n^2$, тогаш
$$f(m)=f(n^2)=n^2+n,$$
$$f^2(n^2)=n^2+2n,$$
$$f^3(n^2)=n^2+3n=(n+1)^2+n-1$$
$$f^5(n^2)=(n+1)^2+n-1+2(n+1)=(n+2)^2+n-2,$$
$$f^7(n^2)=(n+2)^2+n-2+2(n+2)=(n+3)^2+n-3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{2n-1}(n^2)=(n+n-1)^2+1,$$
$$f^{2n+1}(n^2)=(2n-1)^2+1+2(2n-1)=(2n)^2.$$
Слично, за $m=n^2+\ell n+k$, каде $\ell\in\{0,1\}$, $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ имаме
$$f^{2k-1}(m)=f^{2k-1}(n^2+\ell n+k)=(n+k)^2.\ \blacksquare$$

Задача 22. Докажете дека не постои биекција
$$f:\{1,2,\ldots\}\to\{0,1,2,\ldots\}$$
таква што
$$f(mn)=f(m)+f(n)+3f(m)f(n)$$
за сите $m,n\ge1$.

Решение. Да претпоставиме дека таква биекција постои. За $m=n=1$ добиваме $f(1)+3(f(1))^2=0$, од каде следува $f(1)=0$. Значи $f(n)\ge1$ за $n\ge2$. Ако $m,n\ge2$, тогаш $f(mn)\ge1+1+3=5$, па $f(k)\ge5$ за секој сложен број k. Значи постојат различни прости броеви n_1 и n_3 такви што $f(n_1)=1$ и $f(n_3)=3$.

Нека n_8 е природниот број за кој важи $f(n_8)=8$. Тогаш е
$$f(n_3^2)=3+3+3\cdot3\cdot3=33 \quad\text{и}\quad f(n_1n_8)=1+8+3\cdot1\cdot8=33.$$
Бидејќи f е биекција, следува дека $n_1n_8=n_3^2$. Од овде добиваме $n_1\,|\,n_3^2$, што противречи на фактот дека n_1 и n_3 се различни прости броеви. $\blacksquare$

Задача 23. Множеството $\mathbb{N}$ е претставено како унија на две дисјунктни подмножества

$$\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\} \text{ и } \{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\},$$

каде

$$f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots,$$

$$g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots,$$

$$g(n) = f(f(n)) + 1, \text{ за секој } n \geq 1.$$

Одредете го $f(240)$.

Решение. $g(n)=f(f(n))+1$ и како $f(f(n))$ е член на низата $\{f(i)\}$, постојат точно $n-1$ членови на низата $\{g(i)\}$ кои се помали од $f(f(n))$. Според тоа,

$$f(f(n)) = f(n) + n - 1. \qquad (1)$$

Но $g(1)=f(f(1))+1>1$, па затоа $f(1)=1$ односно

$$g(1)=f(f(1))+1=2.$$

Да забележиме дека бројот кој му претходи на членот на низата $g(i)$ мора да припаѓа на низата $\{f(i)\}$, т.е. не е можно два последователни природни броеви да бидат членови на низата $g(i)$. Ако ова го земеме во предвид, тогаш со повеќекратна примена на релацијата (1) добиваме

$f(2)=3$, $f(3)=f(2)+1=4$, $f(4)=f(3)+2=6$, $f(6)=f(4)+3=9$,

$f(9)=9+5=14$, $f(14)=22$, $f(22)=35$, $f(35)=56$, $f(56)=90$,

$f(90)=145$, $f(145)=234$ и $f(234)=378$.

Да се вратиме сега на $f(35)=56$. Од досега изнесеното имаме $91=f(f(35))+1$ е член на низата $\{g(i)\}$, па затоа $f(57)=92$. Од (1) имаме $f(92)=148$, $f(148)=239$, $f(239)=386$. Конечно, $387=f(f(148))+1$ е член на низата $g(i)$, па затоа $f(240)=388$. ■

Задача 24. Нека f е функција дефинирана за секој природен број, чии вредности се исто така позитивни цели броеви. Ако за секој n важи неравенството $f(n+1)>f(f(n))$, докажете дека за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $f(n)=n$.

Решение. Со математичка индукција по n ќе докажеме дека $f(k) \geq n$ за секој $k \geq n$. За $n=1$ тврдењето очигледно е исполнето. Да претпоставиме дека тврдењето важи за некој природен број n.

Нека е $k\geq n+1$. Од $k-1\geq n$, според индуктивната претпоставка следува $f(k-1)\geq n$, а од овде имаме $f(f(k-1))\geq n$. Од $f(k)>f(f(k-1))$ добиваме $f(k)\geq n+1$. Од докажаното тврдење следува дека $f(n)\geq n$, за секој природен број n. Да претпоставиме дека за некој n важи неравенството $f(n)>n$. Нека е

$$f(m)=\min_{k>n} f(k).$$

Како е $m-1\geq n$ добиваме $f(m-1)>n$ (ако е $m-1>n$, тогаш $f(m-1)\geq m-1$, а ако е $m-1=n$, тогаш $f(n)>n$). Нека е $l=f(m-1)$. Од $f(m)>f(f(m-1))$ следува $f(m)>f(l)$. Противречност. ■

Задача 25. Докажете дека, ако $A\setminus B\sim B\setminus A$, тогаш $A\sim B$.

Решение. За множествата A и B се исполнети равенствата

$$A=(A\setminus B)\cup(A\cap B) \text{ и } B=(B\setminus A)\cup(A\cap B),$$

при што

$$(A\setminus B)\cap(A\cap B)=\varnothing \text{ и } (B\setminus A)\cap(A\cap B)=\varnothing.$$

Од $A\setminus B\sim B\setminus A$ и $A\cap B\sim A\cap B$, според теорема 13 добиваме $A\sim B$. ■

Задача 26. Дадени се множествата B и C такви што $B\cap C=\varnothing$. Докажете дека, ако $A\subset B$ и $A\sim A\cup C$, тогаш $B\sim B\cup C$.

Решение. За множествата B и $B\cup C$ се исполнети равенствата

$$B=(B\setminus A)\cup A \text{ и } B\cup C=(B\setminus A)\cup(A\cup C),$$

при што

$$(B\setminus A)\cap A=\varnothing \text{ и } (B\setminus A)\cap(A\cup C)=\varnothing.$$

Од $B\setminus A\sim B\setminus A$ и $A\sim A\cup C$, според теорема 13 добиваме $B\sim B\cup C$. ■

Задача 27. Нека функцијата $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ е зададена со

$$f(x,y)=(ax-by,bx+ay), \quad a,b\in\mathbb{R}.$$

Определете ги константите a и b така што $f\circ f\circ f=f$.

Решение. Од $f\circ f\circ f=f$ следува дека за секој пар (x,y) мора да важи $f(x,y)=0$ т.е. $a=b=0$, или дека мора да постои f^{-1}, од што следува дека $f\circ f=I$.

Важно е да забележиме дека f има инверзна функција ако и само ако $a^2+b^2=0$.

Бидејќи $(f\circ f)(x,y)=((a^2-b^2)x-2aby,\ 2abx+(a^2-b^2)y)$ следува

$$(a^2-b^2)x-2aby=x,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

$$2abx+(a^2-b^2)y=y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

па значи $\begin{cases} a^2-b^2=1 \\ 2ab=0 \end{cases}$ т.е. $a=\pm1$, $b=0$. ■

Задача 28. Одредете ја најмалата и најголемата вредност на функцијата

$$f(x,y,z,t)=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt},\quad (a>0,\ b>0)$$

при услов $x+z=y+t=1$, $x,y,z,t\geq0$.

Решение. Од $0\leq x\leq1$ и $0\leq y\leq1$ следува $x^2\leq x$, $y^2\leq y$, па е $ax^2+by^2\leq ax+by$. Слично се добива дека $az^2+bt^2\leq az+bt$, па затоа

$$f(x,y,z,t)=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}\leq1+1=2.$$

Бидејќи $f(1,0,0,1)=2$, добиваме дека 2 е најголемата вредност на функцијата f при дадените услови.

Од $ab(x-y)^2\geq0$ добиваме $(a+b)(ax^2+by^2)\geq(ax+by)^2$, односно

$$\frac{ax^2+by^2}{ax+by}\geq\frac{ax+by}{a+b}$$

т.е.

$$f(x,y,z,t)\geq\frac{ax+by}{a+b}+\frac{az+bt}{a+b}=1.$$

Бидејќи $f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=1$ добиваме дека 1 е најмалата вредност на функцијата при дадените услови. ■

Задача 29. Функцијата $f:\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ ги задоволува условите

(а) $f(0,y)=y+1$,

(б) $f(x+1,0)=f(x,1)$,

(в) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$,

за сите ненегативни цели броеви. Одредете $f(4,1990)$.

Решение. Од (а) и (б) добиваме $f(0,1)=f(1,0)=2$. Комбинирајќи го овој резултат со (а) и (в) за $x=0$ добиваме

$$f(1,y+1)=f(0,f(1,y))=f(1,y)+1,\ \text{ за } y\geq0 \text{ и}$$

(г) $f(1,y)=y+2$, за $y\geq2$.

Од (б) и (г) имаме $f(2,0)=f(1,1)=3$. Од (в) за $x=1$ и од (г) имаме

$$f(2,y+1)=f(1,f(2,y))=f(2,y)+2,\ \text{ за } y\geq0.$$

Комбинирајќи ги овие два резултати со индукција наоѓаме

(д) $f(2,y)=2y+3$, за $y\geq0$.

Во (3) ставаме $x=2$ и користејќи го (д) добиваме

$$f(3,y+1) = f(2,f(3,y)) = 2f(3,y)+3, \text{ за } y\geq 0,$$

што заедно со $f(3,0)=f(2,1)=5=8-3$ и принципот на математичката индукција повлекува

(ѓ) $f(3,y) = 2^{y+3}-3$, за $y\geq 0$.

Во (в) ставаме $x=3$ и користејќи ја (ѓ) добиваме

$$f(4,y+1) = f(3,f(4,y)) = 2^{f(4,y)+3}-3, \text{ за } y\geq 0.$$

Но, $f(4,0)=f(3,1)=2^4-3$ и со математичка индукција добиваме

$$f(4,y) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3, \quad (y+3)\text{-двојки за } y\geq 0,$$

односно

$$f(4,1990) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3, \quad 1993\text{-двојки.} \ ■$$

Задача 30. Дадена е функцијата $f\colon \mathbb{N}\to A$ со особина: ако $|i-j|=p$, (p е прост број), тогаш $f(i)\neq f(j)$. Колку елементи најмалку може да има множеството A?

Решение. Лесно се гледа дека бараниот број не е 1, бидејќи тогаш $f(k)=const$, за сите природни броеви k.

Бараниот број не е ни 2, заради контрапримерот: за $i=6$, $j=4$, $k=1$ важи $|i-j|=2$, $|j-k|=3$, $|i-k|=5$, па од условот на задачата добиваме $f(i)\neq f(j)$, $f(k)\neq f(j)$ и $f(i)\neq f(k)$. Очигледно

(1) $$f(i)\neq f(j)\neq f(k)\neq f(i),$$

па A мора да има барем три елементи.

Да ги набљудуваме првите осум природни броеви. Мора да важи (1), па $f(1)=a_1$, $f(4)=a_2$ и $f(6)=a_3$. Не може да е $f(3)=a_3$ и $f(3)=a_1$. Да претпоставиме дека $f(3)=a_2$. Не може да е $f(2)=a_2$, па да претпоставиме дека $f(2)=a_1$. Потоа еднозначно следува дека $f(5)=a_3$ и $f(7)=a_1$, па затоа $f(8)$ не може да е ни a_1, ни a_2, ни a_3. Аналогно, ако претпоставиме дека $f(2)=a_3$ доаѓаме до истиот заклучок. Значи $|A|>3$.

Да ја разгледаме функцијата:

$$f(n)=\begin{cases} a_i, & \text{ако } n=4k+i,\ i=1,2,3 \\ a_4, & \text{ако } n=4k. \end{cases}$$

Очигледно важи $f(i)=f(j)$ ако и само ако $|i-j|=4k$. Значи множеството A може да има најмалку четири елементи. ■

Напомена. Ако земеме $a_4=0$, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$ една функција која ги задоволува бараните услови е $f(n)=n-4\cdot\left[\frac{n}{4}\right]$. ■

Задача 31. Дадени се целите броеви n и r $(1\le r\le n)$. Да ги формираме сите r-елементни подмножества од множеството $1,\dots,n$ и за секое од овие подмножества да го разгледаме неговиот најмал елемент. Со $f(n,r)$ да ја означиме аритметичката средина на сите така добиени броеви. Докажете дека $f(n,r)=\frac{n+1}{r+1}$.

Решение. Бидејќи бројот k $(=1,2,\dots,n-r+1)$ е минимален елемент во $\binom{n-k}{r-1}$ r-елементни подмножества на множеството $\{1,2,\dots,n\}$ имаме да е

$$f(n,r)=\frac{1}{\binom{n}{r}}\sum_{k=1}^{n-r+1}k\binom{n-k}{r-1}.$$

Со индукција може да се покаже дека

$$\sum_{k=1}^{n-r+1}k\binom{n-k}{r-1}=\binom{n+1}{r+1}.$$

Значи,

$$f(n,r)=\frac{1}{\binom{n}{r}}\cdot\binom{n+1}{r+1}=\frac{n+1}{r+1},$$

што и требаше да докажеме. ■

Задача 32. Нека се n и k природни броеви, $n/2\le k\le n$ и $S=\{1,2,3,\dots,n\}$. Колку функции има за кои важи:

(а) $f(f(j))=f(j)$, $\forall j\in S$,

(б) Множеството $A=\{f(j)\mid j\in S\}$ содржи точно k елементи,

(в) Секој елемент од A е слика на најмногу два елементи од S при пресликувањето f?

Решение. Секоја точка на множеството A е неподвижна точка на пресликувањето f, а рестрикцијата на пресликувањето f на $S\setminus A$ е инјекција. Елементите на множеството A можеме да ги избереме на $\binom{n}{k}$ начини. Елементите на множеството $S\setminus A$ можеме да ги пресликаме на

$$k(k-1)\dots(k-(n-k)+1)=\frac{k!}{(2k-n)!}$$

начини.

Според тоа, постојат $\frac{n!}{(n-k)!(2k-n)!}$ функции за кои се исполнети условите на задачата. ■

Задача 33. Нека $m\in\mathbb{N}$ и $f:\{1,2,3,\dots,m\}\mapsto\mathbb{N}$ е пресликување такво што

(а) $f(1)+f(2)+\dots+f(m)=2s$, за некој $s\in\mathbb{N}$, и

(б) $m>s$.

Докажете дека постојат $a\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и $n\in\mathbb{N}$, такви што

1° $\{a+1,a+2,\dots,a+n\}\subset\{1,2,\dots,m\}$, и

2° $f(a+1)+f(a+2)+\dots+f(a+n)=s$.

Решение. Означуваме:

$$p_1=f(1),\ p_2=f(2)+f(1),\dots,\ p_s=f(s)+\dots+f(2)+f(1).$$

(а) Ако постои $k\in\{1,2,\dots,s\}$, таков што $p_k=s$, тврдењето е покажано: $a=0$ и $n=k$.

(б) Нека

$$p_k\neq s,\ \text{за секој}\ k\in\{1,2,\dots,s-1\}. \tag{1}$$

Бидејќи е $f(k)>0$, за секој $k\in\{1,2,\dots,s-1\}$ добиваме

$$p_k<p_{k+1},\ \text{за секој}\ k\in\{1,2,\dots,s-1\} \tag{2}$$

Понатаму, од $p_s=f(s)+\dots+f(2)+f(1)$, $s<m$ имаме

$$p_s<2s. \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) заклучуваме $0<p_k<2s$ и p_k не е делив со s, па од принципот на Дирихле имаме

$$(\exists\ i,j\in\{1,2,3,\dots,s\}):\ i<j\ \text{и}\ p_i\equiv p_j\ (\text{мод}\ s).$$

Бидејќи $0<p_i<p_j<2s$, добиваме $0<p_j-p_i<2s$, што според $s\mid(p_j-p_i)$ значи $p_j-p_i=s$, па за $a=i$ и $n=j-i$ тврдењето е докажано. ■

Задача 34. Нека $m\in\mathbb{N}$, $S=\{1,2,\dots,m\}$ и $f:S\to\mathbb{N}$ е пресликување такво што

$$f(1)+f(2)+\dots+f(m)=2m \tag{1}$$

Ако

$$k=\left|\ \{i\in\{1,2,\dots,m\}:\ f(i)=1\}\ \right|,$$

тогаш

$$\max\{f(i): 1\le i\le m\}\le 2+k.$$

Докажете!

Решение. (а) Ако е $k=0$, т.е. $f(i)\ne 1$, за секој $i\in S$, тогаш $f(i)\ge 2$, за секој $i\in S$. Од (1) следува дека $f(i)=2$, за секој $i\in S$, па е $\max\{f(i): 1\le i\le m\}=2\le 2+k$.

(б) Нека $k>0$ и нека за точно еден елемент $i\in S$ важи $f(i)=2$ Очигледно е $k+1<m$. Да претпоставиме дека постои елемент $i\in S$, таков што $f(i)\ge k+3$. Добиваме: за k елементи од S важи $f(i)=1$, за по еден елмент е $f(i)=2$ и $f(i)\ge k+3$, па затоа

$$2m=f(1)+f(2)+\ldots+f(m)\ge k\cdot 1+2\cdot 1+3(m-k-2)+k+3=3m-k-1$$

или $k+1>m$, што е противречност. Значи,

$$f(i)\le k+2, \text{ за секој } i\in S. \blacksquare$$

Задача 35. Нека $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$ е множеството цели ненегативни броеви. Докажете дека не постои функција $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ таква што $f(f(n))=n+1987$, $\forall n\in\mathbb{N}_0$.

Решение. Ако таква функција постои, тогаш

$$f(n+1987)=f(f(f(n)))=f(n)+1987, \ \forall n\in\mathbb{N}_0.$$

Од последното равенство користејќи го принципот на математичка индукција добиваме

$$f(n+1987k)=f(n)+1987k, \ \forall k,n\in\mathbb{N}_0. \qquad (1)$$

Нека разгледаме произволен број $0\le r<1987$ и да го поделиме $f(r)$ со 1987: $f(r)=\ell+1987k$, $k\in\mathbb{N}_0$ и $0\le\ell<1987$. Но од (1) имаме

$$f(\ell)+1987k=f(\ell+1987k)=f(f(r))=r+1987.$$

Во последното равенство бројот k може да биде еднаков само на 0 или 1, бидејќи во спротивно ќе добиеме противречност со $r<1987$. Значи или $f(r)=\ell$ при $k=0$ или $f(\ell)=r$ при $k=1$. И во двата случаи $\ell\ne r$, бидејќи во спротивно ќе добиеме противречност со условот $f(f(n))=n+1987$.

Така, добиваме разбивање на множеството $\{0,1,\ldots,1986\}$ на парови (ℓ,r), каде или $f(r)=\ell$ или $f(\ell)=r$ и $r\ne\ell$, што не е можно бидејќи множеството $\{0,1,2,\ldots,1986\}$ содржи 1987 елементи.

Значи, функција со зададеното својство не постои. $\blacksquare$

Забелешка. Ако наместо 1987 земеме произволен парен број, тогаш функцијата f постои. Која е таа функција?

Задача 36. Дали може да се разбие множеството цели броеви на три подмножества така, што за секој цел број n броевите n, $n+70$ и $n+1987$ припаѓаат на три различни множества?

Решение. Да претпоставиме дека множествата A, B и C ги задоволуваат условите на задачата, и нека n е произволен цел број. Ставаме $p=70$, $q=1987$ и добиваме дека броевите n, $n+p$, $n+q$ припаѓаат на три различни множества. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека

$$n\in A,\ n+p\in B,\ n+q\in C.$$

Со $f_A(x)$ ја означуваме *карактеристичната функција* на множеството A,

$$f_A(x)=\begin{cases} 1, & \text{ако } x\in A \\ 0, & \text{ако } x\notin A. \end{cases}$$

Забележуваме дека бројот $n+p+q=(n+p)+q=(n+q)+p$ не припаѓа ниту на множеството B, ниту на множеството C, па затоа

$$n+p+q\in A.$$

Според тоа, ако $n\in A$, тогаш $n+p+q\in A$.

Бидејќи множествата A, B, C се рамноправни, оваа особина ја имаат и множествата B и C. Исто така, ако $n\in A$, тогаш $n-p-q\in A$. Слично, на пример, ако $n-p-q\in B$, тогаш $n\in B$.

Значи, функцијата $f_A(x)$ има период $p+q$.

Понатаму, броевите $n+p$, $n+2p$ и $n+p+q$ лежат во различни множества и затоа $n+2p\in C$. Според тоа, ако $n+q\in C$, тогаш $n+2p\in C$, при што, со оглед на рамноправноста на A и B, не е важно дали $n\in A$, $n+p\in B$ или обратно. Од тука, ставајќи $n=k-q$, добиваме

$$k\in C \Rightarrow k+2p-q\in C.$$

Затоа, функцијата $f_C(x)$ има два периоди: $2p-q$ и $p+q$. Меѓутоа, лесно се проверува дека броевите $2p-q$ и $p+q$ се заемно прости, па затоа период на функцијата $f_C(x)$ е и бројот 1, т.е. $f_C(x)$ е константа на $\mathbf{Z}$, што е противречност. Значи бараното разбивање не е можно. ■

Задача 37. Функцијата f е определена на множеството природни броеви и за неа важи,

(1) $f(1)=1$,

(2) $f(3)=3$,

(3) $f(2n)=f(n)$,

(4) $f(4n+1)=2\cdot f(2n+1)-f(n)$, и

(5) $f(4n+3)=3\cdot f(2n+1)-2\cdot f(n)$.

Најдете го бројот на сите такви вредности n, за кои

$$f(n)=n \text{ и } 1\leq n\leq 1988.$$

Решение. Со индукција по бројот на цифрите во бинарниот запис ќе докажеме дека, ако

$$n=a_0 2^k+a_1 2^{k-1}+\ldots+a_k;\ a_i\in\{0,1\},\ a_0\neq 0$$

тогаш

$$f(n)=a_k 2^k+a_{k-1} 2^{k-1}+\ldots+a_0.$$

(а) За броевите $1=1_2$, $2=10_2$ и $3=11_2$ тврдењето директно следува од (1), (2) и (3).

(б) Да претпоставиме дека тврдењето е точно за сите броеви кои во бинарен запис имаат помалку од $(k+1)$-на цифра. Нека

$$n=a_0 2^k+a_1 2^{k-1}+\ldots+a_k;\quad a_0=1$$

Треба да ги разгледаме следните три случаи (i) $a_k=0$, $(ii) a_k=1$, $a_{k-1}=0$ и $a_{k-1}=a_k=1$.

Ќе го разгледаме само случајот (ii).

(ii) $n=4m+1$, каде

$$m=a_0 2^{k-2}+a_1 2^{k-3}+\ldots+a_{k-2}$$

и

$$2m+1=a_0 2^{k-1}+a_1 2^{k-2}+\ldots+2a_{k-2}+1.$$

Согласно со условот (4) имаме

$$f(n)=2\cdot f(2m+1)-f(m).$$

Според индуктивната претпоставка

$$f(m)=a_{k-2} 2^{k-2}+a_{k-3} 2^{k-3}+\ldots+a_0$$

и

$$f(2m+1)=2^{k-1}+a_{k-2} 2^{k-2}+a_{k-3} 2^{k-3}+\ldots+a_0.$$

Значи,

$$f(n)=2^k+2(a_{k-2}2^{k-2}+\dots+a_0)-(a_{k-2}2^{k-2}+\dots+a_0)=$$
$$=2^k+a_{k-2}2^{k-2}+\dots+a_0=a_k2^k+a_{k-1}2^{k-1}+a_{k-2}2^{k-2}+\dots+a_0,$$
што и требаше да докажеме.

Задачата ја сведовме на наоѓање на броевите, кои не се поголеми од 1988 и имаат симетричен бинарен запис. Да забележиме, дека бројот на симетричните n-цифрени, во бинарен запис, броеви е еднаков на $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ и дека само два 11-цифрени симетрични броеви 11111111111_2 и 11111011111_2 се поголеми од 1988. Затоа бараниот број е

$$(1+1+2+2+2^2+2^2+2^3+2^3+2^3+2^4+2^5)-2=(2^5-1)+(2^6-1)-2=92. \blacksquare$$

Задача 38. Нека $a,b,c,d\in\mathbb{N}_0$ и $d\neq0$. Функцијата $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ е дефинирана со $f(x)=\left[\dfrac{ax+b}{cx+d}\right]$. Докажете дека f е инјективна, ако и само ако $c=0$ и $a\geq d$.

Решение. Нека претпоставиме дека $c=0$ и $a\geq d$ и нека x_1 и x_2 се такви природни броеви што $x_1<x_2$. Тогаш $x_2-x_1\geq1$, па затоа

$$\frac{ax_2+b}{d}-\frac{ax_1+b}{d}=\frac{a}{d}(x_2-x_1)\geq1,$$

т.е. $f(x_2)-f(x_1)>0$. Значи функцијата f е инјективна.

За да го докажеме обратното тврдење, ќе докажеме дека било кој од условите

1° $c\neq0$ $\qquad\qquad$ 2° $c=0$ и $a<d$

повлекува дека f не е инјекција.

Во случајот 1° можеме да запишеме

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}.$$

Ако $a/c=\alpha$ е цел број, тогаш во еден од интервалите $(\alpha-1,\alpha]$ и $[\alpha,\alpha+1)$ (во зависност од знакот на $bc-ad$) ќе се наоѓаат сите броеви за доволно голем x, што значи дека функцијата f не е инјективна. Слично, ако α не е цел број и $[\alpha]=\beta$, тогаш сите броеви $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ за доволно големи x ќе припаѓаат во интервалот $[\beta,\beta+1)$, па затоа f и во овој случај не е инјективна.

Во случајот 2° да означиме со $y_n=\dfrac{an+b}{d}$, за $n\in\mathbb{N}_0$ и да избереме природен број k, таков што $\dfrac{a}{d}<1-\dfrac{1}{k}$. Бидејќи за $n\in\mathbb{N}_0$

важи $y_{n+1}-y_n=\frac{a}{d}$, добиваме $y_k-y_0=k\frac{a}{d}<k-1$. Но, тоа значи дека за некој $i\in\{0,1,2,\dots,k-1\}$ броевите y_i и y_{i+1} припаѓаат на ист интервал од обликот $[\alpha,\alpha+1)$, за некој $\alpha\in\mathbb{N}_0$. Тогаш $f(i)=f(i+1)$, што значи дека f не е инјективна функција. ■

Задача 39. Нека X е множеството од сите конечни слогови чии членови се броевите 0 и 1 и $F:X\to X$ е функција дефинирана со условот:

за $x\in X$, $F(x)$ го добиваме така што во слогот x секоја единица ја заменуваме со 01, а секоја нула со 10. Колку парови 00 се појавуваат во слогот

$$\underbrace{F(F(\dots(F}_{n\text{-пати}}(1))\dots))?$$

Решение. Со a_n да го означиме бројот на 00 во слогот

$$F^n(1)=\underbrace{F(F(\dots(F}_{n\text{-пати}}(1))\dots)).$$

Бидејќи важат следните равенства

$$F(1)=01$$
$$F^2(1)=1001$$
$$F^3(1)=01101001$$
$$F^4(1)=1001011001101001$$
$$F^5(1)=01101001100101101001011001101001$$

непосредно добиваме $a_1=0$, $a_2=1$, $a_3=1$, $a_4=3$, $a_5=5$. Понатаму, да забележиме дека важат следните тврдења (кои едноставно се покажуваат со математичка индукција):

а) Слогот $F^k(1)$ има 2^k членови.

б) Втората половина на слогот $F^{k+1}(1)$ е еднаква на слогот $F^k(1)$.

в) Слогот $F^{2k}(1)$ е симетрична, со два централни членови еднакви на 00.

г) Првата половина на слогот $F^{2k+1}(1)$ се добива од втората кога секоја единица се замени со нула, а секоја нула со едница. Затоа оваа низа содржи еднаков број парови на нули и единици.

д) Бројот на паровите 11 во слогот $F^{2k}(1)$ за еден е помал од бројот на паровите 00 во тој слог.

Од наведените особини следува дека за секој природен број k важи $a_{2k}=2a_{2k-1}+1$ и $a_{2k+1}=2a_{2k}-1$, па значи

$$a_{2n}=2a_{2n-1}+1=2^2a_{2n-2}-2+1=2^3a_{2n-3}+4-2+1$$
$$=.................................$$
$$=2^{2n-1}a_1+(2^{2n-2}-2^{2n-3}+...+2^2-2+1)$$
$$=\frac{1-(-2)^{2n-1}}{1-(-2)}=\frac{2^{2n-1}+1}{3} \text{ и}$$
$$a_{2n+1}=2\frac{2^{2n-1}+1}{3}-1=\frac{2^{2n}-1}{3}. \blacksquare$$

Задача 40. Определете ги сите функции $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$ кои ги задоволуваат следните два услови:

(а) $f(1)=2$, и

(б) $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$, $\forall x,y\in\mathbf{Q}$.

Решение. Ако во (б) замениме $y=1$ добиваме

$$f(x)=2f(x)-f(x+1)+1, \text{ т.е.}$$
$$f(x+1)=f(x)+1, \quad \forall x\in\mathbf{Q}. \tag{1}$$

Од (1) и принципот на математичка индукција добиваме

$$f(x+n)=f(x)+n, \quad \forall x\in\mathbf{Q}, \forall n\in\mathbf{N} \tag{2}$$

Ако во (1) ставиме $x=0$ добиваме $f(0)=1$. Ако во (2) ставиме $x=0$ добиваме

$$f(n)=n+1, \quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

Ако $q\in\mathbf{Q}$, тогаш $q=\frac{m}{n}$, $m\in\mathbf{Z}$, $n\in\mathbf{N}$, па затоа

$$f(nx)=f(n)f(x)-f(x+n)+1$$

т.е.

$$m+1=f(m)=f(x)(n+1)-f(x)-n+1=nf(x)-n+1.$$

Од последното равенство добиваме

$$f(q)=\frac{m}{n}+1=q+1, \quad \forall q\in\mathbf{Q}. \blacksquare$$

Задача 41. Нека $\mathbf{Q}^+$ е множеството позитивни рационални броеви. Конструирајте функција $f:\mathbf{Q}^+\to\mathbf{Q}^+$ за која е исполнет условот

$$f(x\cdot f(y))=\frac{f(x)}{y}, \quad \forall x,y\in\mathbf{Q}^+. \tag{1}$$

Решение. Ако $f(y_1)=f(y_2)$, тогаш според (1) имаме $y_1=y_2$. Заменувајќи $y=1$ добиваме $f(x\cdot f(1))=f(x)$, т.е. $x\cdot f(1)=x$, односно $f(1)=1$. Ако ставиме $x=1$ добиваме $f(f(y))=\frac{1}{y}$, за секој $y\in\mathbb{Q}^+$. Од последното равенство имаме

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=f(f(f(y)))=\frac{1}{f(y)},\ \forall y\in\mathbb{Q}^+.$$

Конечно, ако земеме $y=f\left(\frac{1}{t}\right)$, добиваме $f(y)=f\left(f\left(\frac{1}{t}\right)\right)=t$ и $\frac{1}{y}=f(t)$, па од (1) следува

$$f(xt)=f(x)\cdot f(t),\ \forall x,t\in\mathbb{Q}^+.$$

Обратно, лесно се докажува дека функцијата која ги задоволува условите

(а) $f(xt)=f(x)\cdot f(t),\ \forall x,t\in\mathbb{Q}^+$, и

(б) $f(f(x))=\frac{1}{x},\ \forall x\in\mathbb{Q}^+$

е решение на функционалната равенка (1).

Функција $f:\mathbb{Q}^+\to\mathbb{Q}^+$, која го задоволува условот (а) може да се конструира со произволно дефинирање над простите броеви и со степенување, како

$$f(p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{n_k})=\left[f(p_1)\right]^{n_1}\left[f(p_2)\right]^{n_2}\cdot\ldots\cdot\left[f(p_k)\right]^{n_k},$$

каде p_j, е j-тиот прост број, а $n_j\in\mathbb{Z}$. Оваа функција ќе го задоволува условот (б) ако и само ако условот (б) е исполнет за секој прост број. Можна конструкција е

$$f(p_j)=\begin{cases} p_{j+1}, & \text{ако } j \text{ е непарен} \\ \dfrac{1}{p_{j-1}}, & \text{ако } j \text{ е парен.}\end{cases}$$

Јасно е дека $f(f(p))=\frac{1}{p}$, за секој прост број p, т.е. функцијата ја задоволува функционалната равенка (1). ■

Задача 42. Нека $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$. Образложете дали постои пресликување $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такво што

$f(1)=2;$

$f(f(n))=f(n)+n$, за секој $n\in\mathbb{N}$, и

$f(n)<f(n+1)$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

АЛГЕБРА НА ПОЛИНОМИ

1. ОСНОВНА ТЕОРЕМА НА АЛГЕБРАТА

Дефиниција 1. Функцијата од облик

(1) $$P_n(x)=a_o x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

каде коефициентите a_i, $i=0,1,\ldots,n$ се комплексни броеви, n е природен број и $a_o\neq 0$ ја нарекуваме *полином од n-ти* степен.

За полиномимите

$$P_n(x)=a_o x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, \text{ и}$$
$$Q_m(x)=b_o x^m+b_1 x^{m-1}+\ldots+b_{m-1}x+b_m$$

ќе велиме дека се *еднакви* (*идентични*) ако $m=n$ и $a_i=b_i$, за $i=0,1,2,\ldots,n$.

Дефиниција 2. Равенката

$$P_n(x)\equiv a_o x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

ја нарекуваме *алгебарска равенка* по x. Полиномот $P_n(x)$ ќе го нарекуваме *полином на равенката.*

Дефиниција 3. Комплексниот број x_o за кој важи $P(x_o)=0$ ќе го нарекуваме *нула* или *корен* на полиномот $P(x)$. Секоја нула на полиномот $P(x)$ ќе ја нарекуваме *нула* или *корен* на алгебарската равенка $P(x)=0$.

Следната теорема е позната како *основна теорема на алгебрата* и истата овде нема да ја докажуваме. Постојат повеќе докази на оваа теорема од кои само **Гаус** дал четири (1799, 1815, 1816 и 1849 год).

Теорема 1. Секоj полином, со степен $n\geq 1$, **има барем една нула.** □

2. ФАКТОРИЗАЦИЈА НА ПОЛИНОМИ. НУЛИ НА ПОЛИНОМИ

Дефиниција 4. Ако x_1 е нула на полиномот

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ n\geq 1$$

тогаш полиномот $x-x_1$ го нарекуваме ***линеарен фактор*** на полиномот $P_n(x)$.

Од основната теорема на алгебрата следува дека за секоj полином $P_n(x)$, $n\geq 1$ постои барем еден линеарен фактор.

Дефиниција 5. За полиномот $P(x)$ ќе велиме дека е ***делив*** со полиномот $Q(x)$, ако постои полином $R(x)\neq 0$ таков што

$$P(x)=Q(x)R(x).$$

Притоа ќе пишуваме $Q(x)|P(x)$.

Теорема 2. (**Безу**) Нека $P_n(x)$, $n\geq 1$ е произволен полином. Ако $x-x_1$ е линеарен фактор на $P_n(x)$, тогаш $(x-x_1)|P_n(x)$.

Доказ. Да го разгледаме полиномот $P_n(x)-P_n(x_1)$. Ако го искористиме идентитетот

$$x^k-x_1^k=(x-x_1)(x^{k-1}+x^{k-2}x_1+\ldots+xx_1^{k-2}+x_1^{k-1}),\ k\in\mathbb{N}$$

тогаш имаме:

(1) $$P_n(x)-P_n(x_1)=a_0(x^n-x_1^n)+a_1(x^{n-1}-x_1^{n-1})+\ldots+a_{n-1}(x-x_1)= =(x-x_1)P_{n-1}(x)$$

каде P_{n-1} е полином од $n-1$ степен од облик

$$P_{n-1}(x)=a_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1},$$

пришто $b_1,b_2,\ldots,b_{n-2},b_{n-1}$ се функции од $x_1,a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$.

Ако x_1 е нула на полиномот $P_n(x)$, тогаш $P_n(x_1)=0$ и $x-x_1$ е линеарен фактор на полиномот $P_n(x)$, па од (1) следува

$$P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x)$$

т.е. $(x-x_1)|P_n(x)$. ■

Последица 1. Ако $P(x)$ е полином со степен $n\geq 1$, а k е бројот на неговите различни нули, тогаш $k\leq n$.

Доказ. Ќе го спроведеме со индукција по степенот на полиномот n.

(i) За $n=1$, $P(x)=a_0x+a_1$ и $x_0=-a_1/a_0$ е единствена нула на полиномот.

(ii) Да претпоставиме дека тврдењето е точно за полином со степен $n=k$.

(iii) Доказ за $n=k+1$. Ако $P(x)$ е полином со степен $k+1$ и ако x_o е корен на $P(x)$, тогаш постои полином $P_1(x)$ со степен k, таков што $P(x)=(x-x_o)P_1(x)$. Но, x_1 е корен на $P(x)$ ако и само ако $(x_1-x_o)P_1(x_1)=0$, т.е. ако и само ако $x_1=x_o$ или $P_1(x_1)=0$. Бидејќи $P_1(x)$ има најмногу k нули заклучуваме дека $P(x)$ има најмногу $k+1$ нули. ■

Теорема 3. Бројот a е нула на полиномот $P_n(x)$ ако и само ако $(x-a)|P_n(x)$.

Доказ. Ако $(x-a)|P_n(x)$, тогаш постои полином $Q(x)$, чиј степен е $n-1$ и таков што $P_n(x)=(x-a)Q(x)$. Според тоа,

$$P_n(a)=(a-a)Q(a)=0\cdot Q(a)=0,$$

т.е. a е нула на полиномот $P_n(x)$.

Ако a е нула на полиномот $P_n(x)$, тогаш $x-a$ е линеарен фактор на $P_n(x)$, па од теоремата на Безу следува $(x-a)|P_n(x)$. ■

Теорема 4. За секој полином

$$P_n(x)=a_ox^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \tag{1}$$

постојат комплексни боеви $x_1,x_2,\ldots,x_n$ такви што

$$P_n(x)=a_o(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n). \tag{2}$$

Доказ. Ако x_1 е нула на полиномот $P_n(x)$, тогаш докажавме

$$P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x).$$

Полиномот $P_{n-1}(x)$, според основната теорема на алгебрата, има барем една нула, да кажеме x_2, па затоа

$$P_{n-1}(x)=(x-x_2)P_{n-2}(x),$$

каде $P_{n-2}(x)$ е полином од $(n-2)$-ор степен од обликот

$$P_{n-2}(x)=a_o x^{n-2}+c_1 x^{n-3}+\ldots+c_{n-3}x+c_{n-2},$$

при што $c_1, c_2, \ldots, c_{n-3}, c_{n-2}$ се функции од $x_2, a_o, b_1, \ldots, b_{n-2}$.

Продолжувајќи ја постапката, која мора да заврши бидејќи n е конечен природен број, добиваме

$$P_2(x)=a_o x^2+r_1 x+r_2, \text{ т.е. } P_2(x)=(x-x_{n-1})P_1(x),$$

каде $P_1(x)=a_o x+s_1=a_o(x-x_n)$.

Ако во конструираната низа идентитети

$$P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x)$$
$$P_{n-1}(x)=(x-x_2)P_{n-2}(x)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_2(x)=(x-x_{n-1})P_1(x)$$
$$P_1(x)=a_o(x-x_n)$$

извршиме последователна замена за $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_{n-1}(x)$ ја добиваме релацијата (2), со што теоремата е докажана. ■

Од досега изнесеното непосредно следува:

-Ако x_1 е нула на полиномот $P_n(x)$, тогаш

$$P_n(x)=(x-x_1)P_{n-1}(x).$$

Притоа, ако x_1 не е нула на полиномот $P_{n-1}(x)$, тогаш ќе велиме дека x_1 е *нула од прв ред* на полиномот $P_n(x)$. Ако x_1 е нула на полиномот $P_{n-1}(x)$, тогаш

$$P_{n-1}(x)=(x-x_1)P_{n-2}(x).$$

Притоа, ако x_1 не е нула на полиномот $P_{n-2}(x)$, тогаш ќе велиме дека x_1 е *нула од втор ред* на полиномот $P_n(x)$ и т.н.

Претходните размислувања можеме да ги искажиме поопшто. Имено, ако x_1 е нула на полиномите

$$P_n(x), P_{n-1}(x), \ldots, P_{n-k+1}(x),\ k\le n$$

а не е нула на полиномот $P_{n-k}(x)$, тогаш ќе велиме дека x_1 е *нула од k-ти ред* на полиномот $P_n(x)$ и овој полином можеме да го запишеме во облик

$$P_n(x)=(x-x_1)^k P_{n-k}(x), \text{ каде } P_{n-k}(x_1)\neq 0.$$

За нулата чиј ред е $k>1$ ќе велиме дека е *повеќекратна*, а за нулата чиј ред е $k=1$ дека е *еднократна* или *проста нула*.

Доказот на следната теорема непосредно следува од претходните излагања, па затоа истиот го оставаме на читателот како вежба.

Теорема 5. Комплексниот број a е нула од k-ти, $k\le n$ ред на полиномот $P_n(x)$ ако и само ако постои полином $Q(x)$ таков што

$$P_n(x)=(x-a)^kQ(x) \text{ и } Q(a)\neq 0. \ \square$$

Теорема 6. *Полином од n-ти степен, ($n\ge 1$), не може да се анулира за повеќе од n различни комплексни броеви.*

Доказ. Доволно е да докажеме дека полином од n-ти степен не може да се анулира за $n+1$ различен комплексен број.

Нека претпоставиме дека полиномот

(1) $$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$$

се анулира за секој елемент од множеството $S=\{q_1,q_2,\dots,q_{n+1}\}$, т.е. дека се анулира за $n+1$ комплексен број. Според теорема 4 постојат комплексни броеви $x_1,x_2,\dots,x_n$ такви што

$$P_n(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n).$$

Бидејќи $P_n(q_1)=0$, заклучуваме дека $q_1=x_i$, за некој $i\in\{1,2,\dots,n\}$. Според тоа, $q_1\in S_1=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$. Аналогно, $q_i\in S_1$ за секој $i=1,2,\dots,n+1$, па затоа $S\subseteq S_1$, што е противречност бидејќи множеството S_1 има најмногу n елементи, а множеството S има $n+1$ елемент. ■

Последица 2. Дадени се полиномите $P_n(x)$ и $Q_n(x)$, $n\ge 1$. Ако постојат броеви x_i, $i=1,2,\dots,n+1$, такви што $x_i\neq x_j$, за $i\neq j$ и $P_n(x_i)=Q_n(x_i)$, за секој $i=1,2,\dots,n+1$, тогаш $P_n(x)=Q_n(x)$.

Доказ. Да го разгледаме полиномот $R(x)=P_n(x)-Q_n(x)$. Ако $P_n(x)\neq Q_n(x)$, тогаш полиномот $R(x)$ е ненулти полином со степен помал или еднаков на n и се анулира за повеќе од n различни комплексни броеви, што противречи на теорема 6. ■

Теорема 7. Секој полином $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ може единствен начин да се претстави во обликот

(1) $$P_n(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_r)^{k_r}$$

каде $x_1,\dots,x_r$ се различни комплексни броеви, а $k_1,\dots,k_r$ се

природни броеви, такви што $k_1+\ldots+k_r=n$.

Доказ. Егзистенцијата на претставувањето (1) следува од **теорема 4**.

Да претпоставиме дека полиномот $P_n(x)$ може да се претстави и на некој друг начин, на пример,

$$P_n(x)=A(x-t_1)^{m_1}(x-t_2)^{m_2}\ldots(x-t_s)^{m_s} \tag{2}$$

каде $t_1,\ldots,t_s$ се различни комплексни броеви, а $m_1,\ldots,m_s$ се природни броеви за кои важи $m_1+\ldots+m_s=n$. Ако ги измножиме (1) и (2) и ги споредиме коефициентите пред највисоките степени, добиваме $a_0=A$. Сега од (1) и (2) следува

$$(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}=(x-t_1)^{m_1}(x-t_2)^{m_2}\ldots(x-t_s)^{m_s}. \tag{3}$$

Од (1) добиваме дека $P_n(x_1)=0$, па затоа од (3) следува дека постои t_i, $1\le i\le s$, таков што $x_1=t_i$. Слично важи и за x_2,x_3 $\ldots,x_r$. Според тоа, ако ставиме

$$S=\{x_1,x_2,x_3\ldots,x_r\},\ S_1=\{t_1,\ldots,t_s\}$$

добиваме дека $S\subseteq S_1$. Аналогно, од (2) и (3) добиваме дека $S_1\subseteq S$, па значи $S=S_1$. Според тоа, $r=s$, па можеме да земеме $x_i=t_i$, $i=1,2,\ldots,r$.

Сега, да претпоставиме дека $k_1\le m_1$. Тогаш од (3) добиваме

$$(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}=(x-t_1)^{m_1-k_1}(x-t_2)^{m_2}\ldots(x-t_s)^{m_s}. \tag{4}$$

Бидејќи t_1 не е нула на полиномот на левата страна во (4), t_1 не може да е нула на полиномот на десната страна (4) па затоа $k_1=m_1$. Аналогно се покажува дека $k_2=m_2,k_3=m_3,\ldots,k_r=m_r$. ∎

Забелешка. Во претходната теорема различните комплексни броеви $x_1,\ldots,x_r$ во претставувањето на полиномот $P_n(x)$ всушност се нулите на полиномот, а природните броеви $k_1,\ldots,k_r$ со особина $k_1+\ldots+k_r=n$ се кратностите на $x_1,\ldots,x_r$ соодветно.

3. НУЛИ НА РЕАЛЕН ПОЛИНОМ

Дефиниција 6. За полиномот

$$P_n(x)=a_o x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

ќе велиме дека е *реален* ако коефициентите a_i, $i=0,1,\ldots,n$ се реални броеви.

Теорема 8. Нека $P_n(x)=a_o x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ е реален полином. Ако комплексниот број z_o е нула на $P_n(x)$, тогаш и $\overline{z_o}$ е нула на $P_n(x)$.

Доказ. Бидејќи z_o е нула на $P_n(x)$ имаме $P_n(z_o)=0$. Од друга страна,

$$P_n(\overline{z_0})=a_0\overline{z_0}^n+a_1\overline{z_0}^{n-1}+\ldots+a_n=\overline{a_0}\,\overline{z_0^n}+\overline{a_1}\,\overline{z_0^{n-1}}+\ldots+\overline{a_n}=$$

$$=\overline{a_o z_o^n+a_1 z_o^{n-1}+\ldots+a_n}=\overline{P_n(z_o)}=0,$$

т.е. $\overline{z_o}$ е нула на $P_n(x)$. ∎

Од досега изнесеното следува дека реален полином има реален фактор од обликот

$(x-x_o)^k$, каде k е редот на реалната нула x_o

или

$(x^2+px+q)^k$, $p,q\in\mathbb{R}$; k е редот на комплексните нули z_o и $\overline{z_o}$, бидејќи ако $z_o=\alpha+i\beta$, тогаш

$$(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)=(x-\alpha)^2+\beta^2=x^2+px+q,\quad p,q\in\mathbb{R}.$$

Според тоа важи следната теорема.

Теорема 9. Секој реален полином $P_n(x)$ на единствен начин може да се изрази во облик на производ

$$P_n(x)=a_o(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{t_s}$$

каде $k_1,\ldots,k_r$ и $t_1,\ldots,t_s$ се природни броеви такви што

$$(k_1+\ldots+k_r)+2(t_1+\ldots+t_s)=n.\ \blacksquare$$

4. ВИЕТОВИ ФОРМУЛИ

Да го разгледаме полиномот

$$P_n(x)=a_o x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\quad (a_o\neq 0)$$

запишан во обликот

$$P_n(x)=a_o(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

каде $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се нулите на полиномот $P_n(x)$.

Од идентитетот

$$a_o(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=a_o x^n+a_1 x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

следуваат формулите

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_o}$$

$$x_1x_2+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+\ldots+x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_o}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2\ldots x_k+\ldots+x_1x_2\ldots x_{k-1}x_n+\ldots+x_{n-k+1}x_{n-k+2}\ldots x_n=(-1)^k\frac{a_k}{a_o}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_o}.$$

Овие формули се познати како *Виетови формули* и истите можеме да ги претставиме во облик

$$\sum x_i=-\frac{a_1}{a_o},$$

$$\sum x_{i_1}x_{i_2}=\frac{a_2}{a_o},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_k}{a_o},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\sum x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}=(-1)^n\frac{a_n}{a_o}.$$

$\sum x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ го означува збирот од сите производи формирани од $x_1, x_2, \ldots, x_n$ како множители, така што секој производ има точно k $(k\leq n)$ множители земени меѓу броевите $x_1, \ldots, x_n$.

$\sum x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ ќе го нарекуваме *основен симетричен полином од ред* k.

5. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ

Дефиниција 7. Ако $P(x)$ и $Q(x)$ се два полиноми и ако за полиномот $R(x)\neq 0$ важи $R(x)|P(x)$ и $R(x)|Q(x)$, тогаш ќе велиме дека полиномот $R(x)$ е ***заеднички делител*** на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$.

Теорема 10. Ако $R(x)|P(x)$ и $R(x)|Q(x)$, тогаш

$$R(x)\,|\,\big[p(x)P(x)+q(x)Q(x)\big],$$

за секои полиноми $p(x)$ и $q(x)$.

Доказ. Од $R(x)|P(x)$ и $R(x)|Q(x)$ следува дека постојат полиноми $A(x)$ и $B(x)$ такви што $P(x)=R(x)A(x)$ и $Q(x)=R(x)B(x)$.

Според тоа,

$$p(x)P(x)+q(x)Q(x)=R(x)\big[A(x)p(x)+q(x)B(x)\big],$$

т.е. $R(x)\,|\,\big[p(x)P(x)+q(x)Q(x)\big]$. ∎

Дефиниција 8. Полиномот $d(x)$ е ***најголем заеднички делител*** на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ ако е $d(x)|P(x)$ и $d(x)|Q(x)$ и ако секој заеднички делител $R(x)$ на $P(x)$ и $Q(x)$ е делител на $d(x)$.

Забелешка. Јасно, ако полиномот $d(x)$ е најголем заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$, тогаш и секој полином $\alpha\cdot d(x)$ ($\alpha\neq 0$, α е комплексен број) е најголем заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$.

Теорема 11. За секои два ненулти полиноми $P(x)$ и $Q(x)$ постои најголем заеднички делител. Тој е единствен со точност до мултипликативна константа.

Доказ. Нека степенот на полиномот $P(x)$ е n, а степенот на полиномот $Q(x)$ е m. Без ограничување на општоста можеме да земеме $m\leq n$. При делење на полиномот $P(x)$ со $Q(x)$ добиваме количник $Q_1(x)$ и остаток $R_1(x)$. Ако $R_1(x)\equiv 0$, тогаш $Q_1(x)$ е најголем заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ и теоремата е докажана. Ако $R_1(x)\neq 0$, тогаш го делиме $Q(x)$ со $R_1(x)$ и нека количникот е $Q_2(x)$, а остатокот $R_2(x)$. Продолжувајќи ја постапката (која мора да заврши бидејќи со секој следен чекор степенот на остатокот опаѓа, а n е конечен број), добиваме остаток $R_k(x)$ кој се содржи во претходниот остаток $R_{k-1}(x)$. Всушност ги добиваме следните идентитети:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&P(x)=Q(x)Q_1(x)+R_1(x),\\
&Q(x)=R_1(x)Q_2(x)+R_2(x),\\
&R_1(x)=R_2(x)Q_3(x)+R_3(x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&R_{k-3}(x)=R_{k-2}(x)Q_{k-1}(x)+R_{k-1}(x),\\
&R_{k-2}(x)=R_{k-1}(x)Q_k(x)+R_k(x),\\
&R_{k-1}(x)=R_k(x)Q_{k+1}(x).
\end{aligned}
$$

Ќе докажеме дека $R_k(x)$ е најголемиот заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$. Од последните две равенства во (1) добиваме $R_{k-2}(x)=R_k(x)(Q_{k+1}(x)Q_k(x)+1)$, т.е $R_k(x)|R_{k-2}(x)$. Аналогно од равенството

$$R_{k-3}(x)=R_{k-2}(x)Q_{k-1}(x)+R_{k-1}(x),$$

и фактот дека $R_k(x)|R_{k-2}(x)$ и $R_k(x)|R_{k-1}(x)$ следува

$$R_k(x)|R_{k-3}(x).$$

Продолжувајќи ја постапката добиваме:

$$R_k(x)|R_{k-4}(x),\ R_k(x)|R_{k-5}(x),\dots,R_k(x)|P(x) \text{ и } R_k(x)|Q(x),$$

т.е. $R_k(x)$ е заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$.

Нека е $\rho(x)$ произволен делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$. Тогаш од равенствата (1) последователно добиваме

$$\rho(x)|R_1(x),\ \rho(x)|R_2(x),\ \dots,\ \rho(x)|R_{k-1}(x),\ \rho(x)|R_k(x),$$

т.е. $\rho(x)$ е најголемиот заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$.

Останува да докажеме дека најголемиот заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ е единствен со точност до мултипликативна константа. Ако $d_1(x)$ и $d_2(x)$ се два најголеми заеднички делители на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$, тогаш $d_1(x)|d_2(x)$ и $d_2(x)|d_1(x)$, од што следува $d_1(x)=c\cdot d_2(x)$. ∎

Забелешка. Постапката од теорема 10, за наоѓање на НЗД на два полиноми е позната како *Евклидов алгоритам.*

Теорема 12. Ако $d(x)$ е најголемиот заеднички делител на полиномите $P(x)$ и $Q(x)$, тогаш постојат полиноми $A(x)$ и $B(x)$ такви што $d(x)=A(x)P(x)+B(x)Q(x)$.

Доказ. Непосредно следува од равенствата (1) во доказот на теорема 11, ако почнувајќи од равенството

$$R_1(x)=P(x)-Q(x)Q_1(x),$$

$R_1(x)$ го елиминираме од равенството $Q(x)=R_1(x)Q_2(x)+R_2(x)$ итн. од што после конечен број чекори добиваме

$$d(x)=A(x)P(x)+B(x)Q(x). \blacksquare$$

Дефиниција 9. За полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ ќе велиме дека се *релативно прости* ако 1 е најголем заеднички делител за $P(x)$ и $Q(x)$.

Дефиниција 10. Полиномот $d(x)$ е најголем заеднички делител на полиномите $P_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$ ако е $d(x)|P_i(x)$ за секој $i=1,2,\dots,n$ и ако секој заеднички делител $R(x)$ на полиномите $P_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$ е делител на полиномот $d(x)$.

Најголемиот заеднички делител на полиномите

$$P_i(x),\ i=1,2,\dots,n$$

можеме да го одредиме на следниот начин: прво наоѓаме најголем заеднички делител на полиномите $P_1(x)$ и $P_2(x)$. Нека тоа е полиномот $d_2(x)$. Потоа, наоѓаме најголем заеднички делител на полиномите $P_3(x)$ и $d_2(x)$, и нека тоа е $d_3(x)$ и тн. Така во последниот чекор наоѓаме полином $d_n(x)$, кој е најголем заеднички делител на полиномите $P_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$.

6. ЗАДАЧИ

Задача 01. Нека $p(x)$ е полином со целобројни коефициенти, таков што $p(19)=p(89)=1989$. Дали може $p(1989)$ да е петцифрен природен број?

Решение. За секој полином $p(x)$ со целобројни коефициенти и за секои $a,b\in\mathbb{Z}$ важи $(a-b)\mid\left(p(a)-p(b)\right)$, (Зошто?). Според тоа, за дадениот полином добиваме

$$1970=1989-19\mid p(1989)-p(19)=p(1989)-1989$$

$$1900=1989-89\mid p(1989)-p(89)=p(1989)-1989$$

Значи, бројот $p(1989)-1989$ е делив со бројот

$$A=\text{НЗС}(1970,1900)=1900\cdot 197,$$

т.е.

$$p(1989)-1989=kA \text{ или } p(1989)=kA+1989,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Конечно,

-за $k<0$ имаме $p(1989)<0$,

-за $k=0$ имаме $p(1989)=1989$, и

-за $k>0$ имаме $p(1989)\geq A+1989>A=1900\cdot 197>100000$,

т.е. $p(1989)$ не може да биде петцифрен природен број. ■

Задача 02. За полиномот $p(x)$ важи

(1) $$(p(x))^2=p(x^2)-2p(x),$$

(2) $$p(x)+p(-x)=-2.$$

(а) Одредете го степенот на полиномот.

(б) Дали полиномот има реални нули?

Решение. (а) Од $p(x)+p(-x)=-2$ следува дека слободниот член на полиномот $p(x)$ е -1. Релацијата (1) ќе ја запишеме во облик

$$(p(x)+1)^2=p(x^2)+1.$$

Лесно се гледа, дека полиномот е или константата -1 или пак бином од обликот $x^{2k+1}-1$.

Имено, ако полиномот $p(x)$ содржи член од облик $a_{2m+1}x^{2m+1}$ каде a_{2m+1} е ненулти коефициент пред највисокиот степен за кој $k\geq m+1$, тогаш

$$(p(x)+1)^2=x^{4k+2}+2a_{2m+1}x^{2k+2m+1}+\dots$$
$$p(x^2)+1=x^{4k+2}+a_{2m+1}x^{4m+2}+\dots$$

што не е можно. Значи $p(x)=x^{2k+1}-1$ или $p(x)=-1$.

(б) Ако $p(x)=x^{2k+1}-1$, тогаш полиномот има една реална нула, а ако $p(x)=-1$, тогаш полиномот нема реални нули. ■

Задача 03. Докажете дека не постои полином $P(x)$ со целобројни коефициенти таков што $P(7)=11$ и $P(11)=13$.

Решение. Нека претпоставиме дека за полиномот

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_o,$$

важи $P(7)=11$ и $P(11)=13$. Тогаш

$$11=a_n\cdot 7^n+a_{n-1}\cdot 7^{n-1}+\dots+a_1\cdot 7+a_o, \text{ и}$$
$$13=a_n\cdot 11^n+a_{n-1}\cdot 11^{n-1}+\dots+a_1\cdot 11+a_o.$$

Ако првото равенство го извадиме од второто, добиваме

$$2=a_n(11^n-7^n)+a_{n-1}(11^{n-1}-7^{n-1}+\dots+a_1(11-7). \tag{1}$$

Бидејќи за секој $k\geq 1$, 11^k-7^k се дели со 4 и изразот на десната страна во (1) се дели со 4, а 2 не се дели со 4, што е противречност. ■

Задача 04. Најдете го збирот на коефициентите пред непарните степени на полиномот

$$p(x)=(x^2+2x+2)^{1994}+(x^2-3x-3)^{1994}$$

Решение. Ако

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_o,$$

е произволен полином од n-ти степен, тогаш

$$p(1)=a_n+a_{n-1}+\dots+a_o,$$
$$p(-1)=a_n(-1)^n+a_{n-1}(-1)^{n-1}+\dots+a_1(-1)+a_o,$$

па значи $\frac{1}{2}\left[p(1)+p(-1)\right]$ е збирот на коефициентите пред парните степени на x, а $\frac{1}{2}\left[p(1)-p(-1)\right]$ е збирот на коефициентите пред непарните степени на x.

Според тоа, збирот на коефициентите пред непарните степени на дадениот полином $p(x)=(x^2+2x+2)^{1994}+(x^2-3x-3)^{1994}$ ќе биде

$$\frac{1}{2}\left[p(1)-p(-1)\right]=\frac{1}{2}\left[5^{1994}+(-5)^{1994}-1^{1994}-1^{1994}\right]=5^{1994}-1. ■$$

Задача 05. Докажете дека не постои полином $P(x)$ со целобројни коефициенти таков што $P(a)=b, P(b)=c, P(c)=a$, каде $a, b,$ и c се три различни цели броеви.

Решение. Нека $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_o$. Забележуваме дека

$$\frac{P(a)-P(b)}{a-b}=\frac{a_n(a^n-b^n)+a_{n-1}(a^{n-1}-b^{n-1})+\ldots+a_1(a-b)}{a-b}$$

е цел број, бидејќи коефициентите a_i се цели броеви и a^i-b^i се дели со $a-b$, за секој $i\geq 1$. Меѓутоа, од исти причини и броевите $\frac{P(b)-P(c)}{b-c}$ и $\frac{P(c)-P(a)}{c-a}$ се цели броеви.

Да претпоставиме дека за полиномот $P(x)$ важи

$$P(a)=b,\ P(b)=c,\ P(c)=a,$$

каде a,b, и c се различни цели броеви. Од претходната дискусија следува дека $\frac{b-c}{a-b}$, $\frac{c-a}{b-c}$ и $\frac{a-b}{c-a}$ се цели броеви. Бидејќи $\frac{b-c}{a-b}\cdot\frac{c-a}{b-c}\cdot\frac{a-b}{c-a}=1$, секој од множителите е еднаков на 1 или -1. Ако $\frac{b-c}{a-b}=-1$, тогаш $a=c$, што е противречност.

Значи, $\frac{b-c}{a-b}=1$. Од исти причини и останатите два множители се еднакви на 1. Значи

$$b-c=a-b,$$

$$c-a=b-c,\ \text{и}$$

$$a-b=c-a.$$

Ако од првото равенство го извадиме второто добиваме $b=c$, што противречи на претпоставката. Значи, не постои полином со бараните особини. ∎

Задача 06. Полиномот $p(x)=ax^2+bx+c$ е таков што, ако $|x|<1$ тогаш $|p(x)|\leq 1$. Докажете дека, во тој случај од $|x|\leq 1$ следува дека и $|p_1(x)|\leq 2$, каде $p_1(x)=cx^2+bx+a$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a\geq 0$, бидејќи во спротивно, можеме да го разгледуваме полиномот $-p(x)=-ax^2-bx-c$. Аналогно, можеме да сметаме дека $b>0$, бидејќи во спротивно, место полиномот $p(x)$ можеме да го разгледуваме полиномот $p(-x)=ax^2-bx+c$.

Во неравенството $|p(x)|\leq 1$ заменуваме $x=1$, $x=0$ и $x=-1$ и добиваме

$$|a+b+c|\leq 1,\ |c|\leq 1 \text{ и } |a-b+c|\leq 1, \text{ т.е.}$$

$$|a+b|\leq 2,\ |c|\leq 1 \text{ и } |a-b|\leq 2.$$

Понатаму, при $c\geq 0$ добиваме, ако $|x|\leq 1$, тогаш $0\leq cx^2\leq c$, а $-b\leq bx\leq b$, па затоа

$$p_1(x)=cx^2+bx+a\leq c+b+a\leq 1$$

и

$$p_1(x)=cx^2+bx+a\geq 0+(-b)+a=a-b\geq -2,$$

од што следува дека $|p_1(x)|\leq 2$. Аналогно, при $c\leq 0$ имаме $c\leq cx^2\leq 0$ и $-b\leq bx\leq b$, па затоа

$$p_1(x)=cx^2+bx+a\leq 0+b+a=a+b\leq 2$$

и

$$p_1(x)=cx^2+bx+a\geq c+(-b)+a=a-b+c\geq -1,$$

т.е. $|p_1(x)|\leq 2$. ■

Задача 07. Докажете дека полиномот $p(x)=x^5-x+a$, каде $a\in\mathbb{Z}$ и a не се дели со 5, не може да се запише како производ на два полиноми со цели коефициенти од понизок степен.

Решение. Ќе го искористиме тврдењето, дека n^5-n се дели со 5 за секој цел број n. Ова тврдење може да се докаже, ако се искористи фактот дека секој природен број n може да се запише како $5k$, $5k\pm1$, $5k\pm2$ и ако се констатира, дека барем еден од множителите во $n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$ се дели со 5.

Да допуштиме, дека дадениот полином може да се разложи како производ на два полиноми со целобројни коефициенти и да го разгледаме случајот кога еден од полиномите во разложувањето е од прв степен, т.е.

(1) $$x^5-x+a=(a_0x+a_1)(b_0x^4+b_1x^3+b_2x^2+b_3x+b_4)$$

Ако ги изедначиме коефициентите пред x ќе добиеме $a_0b_0=1$, од што следува дека коефициентите a_0,b_0 се еднакви. Можеме да сметаме дека $a_0=b_0=1$. Ако во (1) ставиме $x=-a_1$ ќе добиеме $a_1^5-a_1+a=0$, што не е можно бидејќи $a_1^5-a_1$ се дели со 5, а a не се дели со 5.

Сега да го разгледаме случајот, кога едниот множител е од втор, а другиот трет степен. Можеме да запишеме

(2) $$x^5-x+a=(x^2-mx+q)(x^3+b_1x^2+b_2x+b_3),$$

каде m,q,b_1,b_2,b_3 се цели броеви. Ако со x_1 и x_2 ги означиме корените на равенката $x^2-mx+q=0$, тогаш во (2) заменуваме x_1,x_2 последователно и добиваме

$$x_1^5-x_1+a=0, \qquad x_2^5-x_2+a=0.$$

Собирајќи ги последните две равенства, добиваме

(3) $$x_1^5+x_2^5-(x_1+x_2)+2a=0.$$

Од $x_1+x_2=m$ и $m^5=(x_1+x_2)^5=x_1^5+x_2^5+5x_1x_2(x_1^3+x_2^3)+10x_1^2x_2^2(x_1+x_2)$ заклучуваме, дека разликата $m^5-(x_1+x_2)^5$ се дели со 5. Но тогаш од (3) ќе следува дека и m^5-m+2a се дели со 5, што не е можно, бидејќи m^5-m се дели со 5, а $2a$ не се дели со 5. ■

Задача 08. Докажете, дека ако полином од седми степен со целобројни коефициенти

$$a_0x^7+a_1x^6+\ldots+a_6x+a_7,$$

при седум цели броеви е еднаков на +1 или −1, тогаш него не можеме да го претставиме како производ на два полиноми со целобројни коефициенти.

Решение. Ако полином $P(x)$ од седми степен се разложува во производ од два полиноми $p(x)$ и $q(x)$ со целобројни коефициенти тогаш степенот на едниот од множителите е помал или еднаков на 3. Нека тоа е полиномот $p(x)$. Ако $P(x)$ при седум цели броеви прима вредност ±1, тогаш $p(x)$ при истите броеви x прима вредности ±1 (бидејќи $P(x)=p(x)q(x)$). Меѓу седум цели броеви x, при кои $p(x)$ е еднаков на ±1, постојат четири при кои $p(x)$ е еднаков на 1 или четири при кои $p(x)$ е еднаков на −1. Во првиот случај полиномот $p(x)-1$ се анулира за четири различни броеви, а во вториот случај полиномот $p(x)+1$ се анулира за четири различни броеви. Но, полиномите $p(x)\pm1$ се од трет степен, што е противречност. ■

Задача 09. За кои попарно различни цели броеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$, полиномот

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1$$

може да се запише како производ на два полиноми со цели коефициенти?

Решение. Да претпоставиме дека

(1) $$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-1=p(x)q(x)$$

каде $p(x)$ и $q(x)$ се полиноми со цели коефициенти, чиј збир на степени е n. Притоа, и за двата полиноми можеме да сметаме дека коефициентот пред највисокиот степен е еднаков на 1. Ако во (1) замениме $x=a_1$, $x=a_2$, $\dots, x=a_n$ и земеме во предвид, дека -1 може на единствен начин да се разложи како производ на два целобројни множители: $-1=1(-1)$, добиваме $p(x)=1$, $q(x)=-1$, или обратно, за $x\in\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Според тоа, збирот $p(x)+q(x)$ е еднаков на 0 при $x=a_1, x=a_2, \dots, x=a_n$. Значи, равенката

$$p(x)+q(x)=0$$

има n попарно различни целобројни корени, што не е можно бидејќи степенот на полиномот $p(x)+q(x)$ е помал од n (n е степен на (1)).

Од добиената противречност следува дека бараното разложување не е можно. ■

Задача 10. За кои попарно различни цели броеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ полиномот

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)+1$$

може да се запише како производ на два полиноми со цели коефициенти?

Решение. Да претпоставиме дека

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)+1=p(x)q(x) \tag{1}$$

каде $p(x)$ и $q(x)$ се полиноми со цели коефициенти, чиј збир на степени е n. Притоа, и за двата полиноми можеме да сметаме дека коефициентот пред највисокиот степен е еднаков на 1. Ако во (1) замениме $x=a_1$, $x=a_2, \dots,$ $x=a_n$ добиваме

$$p(x)=1,\ q(x)=1 \quad \text{или} \quad p(x)=-1,\ q(x)=-1.$$

Според тоа, $p(x)-q(x)$ се анулира за n различни вредности на x, и затоа $p(x)-q(x)\equiv 0$, т.е. $p(x)\equiv q(x)$ и бројот n е парен: $n=2k$, каде k е степенот на секој од полиномите $p(x)\equiv q(x)$. Сега да ја запишеме нашата равенка во обликот

$$(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2k})=(p(x)+1)(p(x)-1).$$

Значи производот на два полиноми $p(x)+1$ и $p(x)-1$ е еднаков на нула при $x=a_1, x=a_2, \dots, x=a_{2k}$. Според тоа, при секоја од разгледуваните вредности на x само еден од множителите е еднаков на нула, а тоа значи, дека или $p(x)+1$ или $p(x)-1$ се дели со $x-a_1$, и $p(x)+1$ или $p(x)-1$ се дели со $x-a_2$, и тн. Бидејќи полином од k-ти степен не може да има повеќе од k линеарни фактори и бидејќи коефициентот пред највисокиот степен на полиномот е еднаков на 1, добиваме дека полиномот $p(x)+1$ е производ на k од вкупно $2k$ множители на левата страна на последното равенство, а $p(x)-1$ е еднаков на производот од останатите k множители.

Да претпоставиме на пример дека

$$p(x)+1=(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{2k-1}),$$
$$p(x)-1=(x-a_2)(x-a_4)\dots(x-a_{2k}).$$

Ако од првото равенство го одземеме второто, добиваме:

$$2=(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{2k-1})-(x-a_2)(x-a_4)\dots(x-a_{2k}).$$

Сега, ставајќи, на пример, $x=a_2$, добиваме разложување на бројот 2 на k различни цели множители,

$$2=(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_{2k-1})$$

од што следува $k\leq 3$. Случајот $k=3$ не е можен од следните причини. Бројот 2 може да биде разложен на три множители на единствен начин $2=1\cdot(-1)\cdot(-2)$. Ако $k=3$, тогаш можеме да претпоставиме дека $a_1<a_3<a_5$, па добиваме $2=(a_2-a_1)(a_2-a_3)(a_2-a_5)$, каде $a_2-a_1>a_2-a_3>a_2-a_5$, па затоа $a_2-a_1=1$, $a_2-a_3=-1$, $a_2-a_5=-2$. Ако во релацијата

$$2=(x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)-(x-a_2)(x-a_4)(x-a_6)$$

ставиме $x=a_4$, добиваме друго разложување на бројот 2 на три различни множители

$$2=(a_4-a_1)(a_4-a_3)(a_4-a_5),$$

каде $a_4-a_1>a_4-a_3>a_4-a_5$, па затоа $a_2=a_4$, што противречи на условот на задачата.

Според тоа, можни случаи се $k=2$ и $k=1$.

Ако $k=1$, тогаш $2=(x-a_1)-(x-a_2)$, па затоа $a_2=a_1+2$. Ако ставиме $a_1=a$ добиваме

$$(x-a_1)(x-a_2)+1=(x-a)(x-a-2)+1=(x-a-1)^2.$$

Ако $k=2$, тогаш имаме

$$2=(x-a_1)(x-a_3)-(x-a_2)(x-a_4),$$

и можеме да сметаме дека $a_1<a_3$ и $a_2<a_4$. Ако во последното равенство ставиме $x=a_2$ и $x=a_4$ добиваме

$$2=(a_2-a_1)(a_2-a_3),\ a_2-a_1>a_2-a_3,$$
$$2=(a_4-a_1)(a_4-a_3),\ a_4-a_1>a_4-a_3.$$

Бидејќи 2 може да се разложи на два множители, кои опаѓаат само на два начини $2=2\cdot 1$ и $2=(-1)\cdot(-2)$ и како $a_2-a_1<a_4-a_1$ добиваме $a_2-a_1=-1$, $a_2-a_3=-2$, $a_4-a_1=2$, $a_4-a_3=1$. Од последните равенства при $a_1=a$ наоѓаме $a_2=a-1$, $a_3=a+1$, $a_4=a+2$ и

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)+1=\left[x^2-(2a-1)x+a^2+a-1\right]^2. \ ■$$

Задача 11. Докажете дека не постојат попарно различни цели броеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$, такви што полиномот

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$$

може да се запише како производ на два полиноми со цели коефициенти.

Решение. Аналогно на решението во претходната задача од равенството

(1) $$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1=p(x)q(x),$$

каде $p(x)$ и $q(x)$ се полиноми со цели коефициенти, чиј збир на степени е $2n$ и коефициентите пред највисоките степени се 1, добиваме дека

$$p(x)=1,\ q(x)=1 \quad \text{или} \quad p(x)=-1,\ q(x)=-1.$$

при секоја од вредностите $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_n$. Ќе докажеме, дека при секоја од вредностите $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_n$ полиномот $p(x)$ (соодветно полиномот $q(x)$) или е еднаков на 1, или е еднаков на -1.

Навистина, ако на пример, полиномот $p(x)$ за некој a_i прима вредност 1, а за $a_j\neq a_i$ прима вредност -1, тогаш при некоја вредност x меѓу a_i и a_j тој ќе биде еднаков на нула (полином е непрекината функција на множеството реални броеви, па затоа и на секое негово подмножество), што не е можно, бидејќи левата страна на равенството (1) е секогаш позитивен реален број, поголем или еднаков на 1.

Да претпоставиме дека како $p(x)$, така и $q(x)$ при $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_n$ прима вредност 1. Во тој случај бидејќи $p(x)-1$ и $q(x)-1$ се еднакви на нула при $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_n$ добиваме дека $p(x)-1$ и $q(x)-1$ се делат со $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. Бидејќи збирот на степените на полиномите $p(x)$ и $q(x)$ е еднаков на степенот на полиномот $(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2$ т.е. на $2n$, добиваме дека

$$p(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) \text{ и } q(x)-1=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n).$$

Според тоа, го добиваме равенството

$$(x-a_1)^2\dots(x-a_n)^2+1=p(x)q(x)=((x-a_1)\dots(x-a_n)+1)^2=$$
$$=(x-a_1)^2\dots(x-a_n)^2+2(x-a_1)\dots(x-a_n)+1$$

од што следува дека $(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)=0$, што е противречност. Аналогно можеме да докажеме, дека полиномите $p(x)$ и $q(x)$ не можат да примат вредност -1 при $x=a_1$, $x=a_2$, ..., $x=a_n$.

Конечно, добиваме дека изразот

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\dots(x-a_n)^2+1$$

не може да се запише како производ на два полиноми со целобројни коефициенти. ■

Задача 12. Најдете ги сите вредности на параметрите a и b за кои полиномот $x^4+(2a+1)x^3+(a-1)^2x^2+bx+4$ може да се запише како производ на два полиноми од втор степен $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, со коефициенти пред највисокиот степен 1, такви што равенката $\psi(x)=0$ има два различни корени α и β, за кои $\varphi(\alpha)=\beta$ и $\varphi(\beta)=\alpha$.

Решение. Ако полиномите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ги задоволуваат условите на задачата и $\varphi(x)=x^2+px+q$, тогаш $\alpha^2+p\alpha+q=\beta$ и $\beta^2+p\beta+q=\alpha$. Ако ги собереме и ги одземеме последните две равенства имаме

$$\alpha+\beta=-p-1,$$
$$\alpha^2+\beta^2+(\alpha+\beta)p+2q=\alpha+\beta,$$

од што следува $\alpha\beta=p+q+1$, па затоа

$$\psi(x)=x^2+(p+1)x+(p+q+1).$$

Изедначувајќи ги коефициентите во разложувањето

$$x^4+(2a+1)x^3+(a-1)^2x^2+bx+4=(x^2+px+q)(x^2+(p+1)x+(p+q+1))$$

за a, b, p и q го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 2p+1=2a+1 \\ p(p+1)+q+p+q+1=(a-1)^2 \\ p(p+q+1)+(p+1)q=b \\ q(p+q+1)=4 \end{cases}$$

од што наоѓаме $a=-1$, $b=-2$ или $a=2$, $b=-14$. ■

Задача 13. Докажете дека полиномот $x^{200}y^{200}+1$ не може да се претстави како производ $f(x)g(y)$ на два полиноми: од една променлива x и од една променлива y.

Решение. Нека полиномите $f(x)$ и $g(y)$ имаат слободни членови a_0 (т.е. $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$) и b_0. Во равенството $x^{200}y^{200}+1=f(x)g(y)$ ставаме $x=0$ и добиваме $1=f(0)g(y)$ т.е. $g(y)=\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{a_0}$. Слично, при $y=0$ имаме $f(x)=\frac{1}{g(0)}=\frac{1}{b_0}$, т.е.

$$f(x)g(y)=\frac{1}{a_0b_0}\neq x^{200}y^{200}+1,$$

што противречи на претпоставката. ■

Задача 14. Докажете, ако полиномот

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

со целобројни коефициенти, прима за четири различни вредности на променливата x вредност 7, тогаш тој не може да биде еднаков на 14 за ниеден цел број x.

Решение. Нека дадениот полином е еднаков на 7 за $x=a$, $x=b$, $x=c$ и $x=d$. Тоа значи дека $P(x)-7$ се дели со $x-a$, $x-b$, $x-c$ и $x-d$, т.е

$$P(x)-7=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)p(x),$$

каде $p(x)$ може да биде идентичен и на 1.

Да претпоставиме дека полиномот за некој $A\in\mathbb{Z}$ прима вредност 14. Ако во предходното равенство замениме $x=A$ добиваме

$$7=(A-a)(A-b)(A-c)(A-d)p(A),$$

што не е можно, бидејќи целите броеви $A-a$, $A-b$, $A-c$ и $A-d$ се попарно различни, а 7 е прост број. ■

Задача 15. Докажете, дека ако полиномот со целоброjни коефициенти

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_o,$$

прима при $x=0$ и $x=1$ непарни вредности, тогаш равенката $P(x)=0$ нема целоброjни рашенија.

Решение. Нека p и q се цели броеви, истовремено парни или непарни. Тогаш разликата $P(p)-P(q)$ е парна. Имено, изразот

$$P(p)-P(q)=a_n(p^n-q^n)+a_{n-1}(p^{n-1}-q^{n-1})+\ldots+a_1(p-q)$$

се дели со парниот броj $p-q$.

Во случаjот, ако p е парен броj, тогаш $P(p)-P(0)$ е парен броj. Но, според условот на задачата $P(0)$ е непарен броj, па затоа и $P(p)$ е непарен броj, т.е. $P(p)\neq0$. Аналогно, ако p е непарен броj, тогаш $P(p)-P(1)$ е парен броj. Но, според условот на задачата $P(1)$ е непарен броj, па затоа и $P(p)$ е непарен броj, т.е. $P(p)\neq0$.

Значи, $P(x)$ не може да биде еднаков на нула за ниеден цел броj, т.е. полиномот $P(x)$ нема целоброjни корени. ■

Задача 16. Докажете дека не постои полином со целоброjни коефициенти

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_o,$$

таков што сите броеви $P(0)$, $P(1)$,... се прости броеви.

Решение. Нека N е произволен цел броj и $P(N)=M$. Тогаш за секоj цел броj k

$$P(N+kM)-P(N)=a_n\left((N+kM)^n-N^n\right)+a_{n-1}\left((N+kM)^{n-1}-N^{n-1}\right)+$$
$$+\ldots+a_1\left((N+kM)-N\right)$$

се дели со kM, па значи и со M. Затоа $P(N+kM)$ се дели со M за секоj цел броj k.

Според тоа, ако докажеме дека меѓу вредностите $P(N+kM)$, $k=0,1,2,3,\ldots$ постоjат броеви различни од $\pm M$, ќе докажеме дека не се сите разгледувани броеви прости.

Да ги разгледаме броевите $P(N+kM)$, $k=0,1,2,\ldots,2n$. Овие $2k+1$ броеви не се сите еднакви на $+M$ или $-M$, бидеjќи во тоj случаj една од равенките $P(x)-M=0$ или $P(x)+M=0$ ќе има повеќе од n корени, што не е можно. Значи, меѓу броевите $P(N+kM)$, $k=0,1,2,\dots,2n$ има, во краен случај, еден различен од $\pm M$, кој не е прост број, што и требаше да докажеме. ■

Задача 17. Нека $Q(x)$ е ненулти полином, а k е природен број. Докажете дека полиномот $P(x)=(x-1)^kQ(x)$ има барем $k+1$ ненулти коефициенти.

Упатство. Нека претпоставиме дека најмногу k коефициенти на полиномот $P(x)$ се различни од нула. Тогаш $P(x)$ има облик

$$P(x)=(x-1)^kQ(x)=a_kx^{n_k}+a_{k-1}x^{n_{k-1}}+\dots+a_1x^{n_1},$$

каде $n_k>n_{k-1}>\dots>n_1\geq 0$ се природни броеви и $a_i\neq 0$ за $i=1,2,\dots,k$. Ако во последното равенство ставиме $x=y+1$, добиваме

$$y^kQ(y+1)=a_k(y+1)^{n_k}+a_{k-1}(y+1)^{n_{k-1}}+\dots+a_1(y+1)^{n_1}=$$
$$=b_0+b_1y+\dots+b_{n_k}y^{n_k}.$$

Бидејќи $b_0+b_1y+\dots+b_{n_k}y^{n_k}$ се дели со y^k, добиваме $b_0=\dots=b_{k-1}=0$ односно

$$\begin{aligned}
&\binom{n_1}{0}a_1+\binom{n_2}{0}a_2+\dots\binom{n_k}{0}a_k=0,\\
&\binom{n_1}{1}a_1+\binom{n_2}{1}a_2+\dots\binom{n_k}{1}a_k=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\binom{n_1}{k-1}a_1+\binom{n_2}{k-1}a_2+\dots\binom{n_k}{k-1}a_k=0,
\end{aligned}$$

од што следува, дека броевите $a_1,a_2,\dots,a_k$ се решенија на системот

$$\begin{aligned}
&\binom{n_1}{0}z_1+\binom{n_2}{0}z_2+\dots\binom{n_k}{0}z_k=0,\\
&\binom{n_1}{1}z_1+\binom{n_2}{1}z_2+\dots\binom{n_k}{1}z_k=0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\binom{n_1}{k-1}z_1+\binom{n_2}{k-1}z_2+\dots\binom{n_k}{k-1}z_k=0.
\end{aligned}$$

Ако докажеме, дека последниот систем има единствено решение

$$z_1=z_2=\dots=z_k=0,$$

тогаш ќе добиеме противречност со претпоставката, дека $Q(x)$ има ненулти коефициенти и со тоа задачата ќе биде решена. Последното тврдење можеме да го докажеме со индукција по k. ■

Задача 18. Нека P е полином со реални коефициенти, таков што за секој реален број x важи $P(\cos x)=P(\sin x)$. Докажете дека постои полином Q, таков што за секој реален број t важи $P(t)=Q(t^4-t^2)$.

Решение. Нека е $P(t)=Q(t)(t^4-t^2)+at^3+bt^2+ct+d$. Од последното равенство и од условот на задачата следува дека за секој реален број x важи

$$(1)\qquad \begin{aligned}0=\sin^2 x\cdot\cos^2 x\left[Q_1(\cos x)-Q_1(\sin x)\right]+\\ +(\sin x-\cos x)\left[a\cdot\sin x\cdot\cos x+b(\sin x+\cos x)+a+c\right]\end{aligned}$$

Од равенството (1) за $x=0$ добиваме $a+b+c=0$, а за $x=\pi$ добиваме $a-b+c=0$, од што следува дека $a+c=0$ и $b=0$. Според тоа, равенството (1) можеме да го запишеме во обликот

$$(2)\quad \sin^2 x\cos^2 x\left[Q_1(\sin x)-Q_1(\cos x)\right]=a(\sin x-\cos x)\sin x\cdot\cos x$$

Бидејќи равенството (2) важи за секој реален број x, а функциите $\sin x$, $\cos x$ и $Q_1(t)$ се непрекинати, и равенството

$$(3)\quad \sin x\cdot\cos x\left[Q_1(\sin x)-Q_1(\cos x)\right]=a(\sin x-\cos x)$$

важи за секој реален број x. Од (3) за $x=0$ добиваме $a=0$, па како $a+c=0$ имаме $c=0$. Според тоа,

$$P(t)=Q_1(t)(t^4-t^2)+d,$$

и од (3) следува дека за секој реален број x важи

$$Q_1(\sin x)=Q_1(\cos x).$$

Сега тврдењето на задачата лесно се докажува со математичка индукција по степените на полиномот P. ■

Задача 19. Одредете ги сите полиноми со целобројни коефициенти од облик

$$P_n(x)=n!x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+(-1)^n n(n+1),$$

за чии корени $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ важи $x_k\in[k,k+1]$, $k=1,2,\ldots,n$.

Решение. За $n=1$ единствен полином од бараниот облик е $P_1(x)=x-2$ и тој ги задоволува условите на задачата.

За $n=2$ треба да најдеме цел број a_1, таков што

$$P_2(x)=2x^2+a_1x+6$$

ги задоволува условите на задачата. Тогаш за корените на овој полином важи

$$1\le x_1\le 2\le x_2\le 3,\ \ x_1+x_2=-\frac{a_1}{2},\ \ x_1x_2=3.$$

Од овие равенства добиваме $0\le x_2-x_1\le 2$, па затоа

$$0\le (x_2-x_1)^2=(x_2+x_1)^2-4x_2x_1=\frac{1}{4}a_1^2-12\le 4 \text{ т.е. } 48\le a_1^2\le 64,$$

а исто така и $a_1<0$. Бидејќи a_1 е цел број добиваме $a_1=-7$ или $a_1=-8$. И за двете вредности условите на задачата се исполнети.

Ќе докажеме дека, за $n\ge 3$ не постои полином за кој се исполнети условите на задачата. Нека е

$$P_n(x)=n!\,x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+(-1)^n n(n+1)=$$
$$=n!\,(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Тогаш $(-1)^n n(n+1)=n!\,(-1)^n x_1x_2\ldots x_n$, па од $x_k\in[k,k+1]$ за $k=1,2,\ldots,n$ следува $n!\le x_1x_2\ldots x_n=\frac{n+1}{(n-1)!}\le\frac{n+1}{2}<n<n!$.

Значи, бараните полиноми се $x-2$, $2x^2-7x+6$ и $2x^2-8x+6$. ■

Задача 20. Одредете ги сите полиноми $p(x)$, со целобројни коефициенти, такви што

$$16p(x^2)=[p(x)]^2,\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Решение. Нека $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_o$, $(a_n\ne 0)$ е бараниот полином. Ако во даденото равенство ставиме $x=0$, добиваме $16a_o=a_o^2$ од што следува $a_o=0$ или $a_o=16$. Од друга страна, ако ги изедначиме коефициентите пред x^{2n} во даденото равенство, тогаш ја добиваме релацијата

$$16a_n=2^{2n}a_n^2.$$

Бидејќи $a_n\ne 0$, мора да е $a_n=16/4^n$, а како a_n е цел број добиваме $n=0$ или $n=1$ или $n=2$.

За $n=0$ полиномите се $p(x)=0$ и $p(x)=16$.

За $n=1$ можни полиноми ќе $p(x)=4x$ и $p(x)=4x+16$. Притоа, само $p(x)=4x$ ги задоволува условите на задачата.

За $n=2$ можни полиноми се $p(x)=x^2+a_1x$ и $p(x)=x^2+a_1x+16$. Со директна проверка се добива $a_1=0$ и само $p(x)=x^2$ ги задоволува условите на задачата.

Значи бараните полиноми се 0, 16, $4x$ и x^2. ■

Задача 21. Најдете ги сите полиноми кои го задоволуваат условот $p(x^2-2x)=(p(x-2))^2$.

Решение. Очигледно, ако степенот на полиномот е $n=0$, тогаш единствени полиноми, кои го задоволуваат условот на задачата, се константите 0 и 1.

Нека $p(x)$ е бараниот полином и $n\geq 1$. Ставаме $x-1=y$ и добиваме $p(y^2-1)=(p(y-1))^2$. Со $q(y)$ го означуваме полиномот $p(y-1)$ Тогаш полиномот $q(y)$ ја задоволува равенката $q(y^2)=(q(y))^2$. Ќе докажеме, дека $q(y)=y^n$. Нека

$$q(y)=a_o y^n+a_1 y^{n-1}+\ldots+a_n,\ a_o\neq 0.$$

Нека претпоставиме дека $a_n\neq 0$ и со k да го означиме најголемиот природен број, за кој $k<n$ и $a_k\neq 0$. Добиваме,

$$q(y^2)=a_o y^{2n}+a_1 y^{2n-2}+\ldots+a_k y^{2(n-k)}+a_n$$

и

$$(q(y))^2=a_o^2 y^{2n}+\ldots+2a_k a_n y^{n-k}+a_n^2,$$

што не е можно, бидејќи при $k<n$ имаме $2(n-k)>n-k$. Значи $a_n=0$ и

$$q(y)=a_o y^n+a_1 y^{n-1}+\ldots+a_k y^{n-k},\ a_k\neq 0.$$

Ако $k>0$, тогаш $q(y)=y^k r(y)$, каде $r(y)$ е полином со ненулти степен и ненулти слободен член кој ја задоволува равенката $r(y^2)=(r(y))^2$, што не е можно. Според тоа, $q(y)=a_o y^n$ и повторно од условот $q(y^2)=(q(y))^2$ добиване $q(y)=y^n$. Конечно,

$$p(x)=q(x+1)=(x+1)^n.\ ■$$

Задача 22. Одредете ги сите полиноми од обликот

$$a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_o,$$

каде $a_j\in\{-1,1\}$, $(j=0,1,2,\ldots,n)$ кои имаат само реални нули.

Решение. Да ги одредиме полиномите со наведената особина за кои $a_n=1$. Останатите полиноми ги добиваме ако најдените ги помножиме со -1.

За $n=1$ такви полиноми се $x-1$ и $x+1$.

Нека претпоставиме дека $n\geq 2$ и $x_1,x_2,\ldots,x_n$ се реалните нули на бараниот полином. Од Виетовите правила имаме

$$(x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^2 = a_o^2 = 1$$

и

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - 2\sum_{i \ne j} x_i x_j = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} = 1 - 2a_{n-2}.$$

Но $a_{n-2} \in \{1,-1\}$, па затоа $a_{n-2} = -1$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3$. Ако го примениме неравенството меѓу аритметичкта и геометриската средина добиваме

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge \left(x_1^2 x_2^2 \cdot \ldots \cdot x_n^2\right)^{1/n} = 1,$$

од што следува $n \le 3$.

За $n=2$ лесно се добива дека бараните полиноми се

$$\pm(x^2+x-1);\ \pm(x^2-x-1).$$

За $n=3$ само полиномите $\pm(x^3+x^2-x-1)$ и $\pm(x^3-x^2-x+1)$ имаат реални нули, додека полиномите $\pm(x^3+x^2-x+1)$ и $\pm(x^3-x^2-x-1)$ имаат по пар комплексни нули.

Значи сите полиноми кои ги задоволуваат условите на задачата се $\pm(x-1)$; $\pm(x+1)$; $\pm(x^2+x-1)$; $\pm(x^2-x-1)$; $\pm(x^3+x^2-x-1)$ и $\pm(x^3-x^2-x+1)$. ∎

Задача 23. Нека $P(x)$ е полином со реални коефициенти, таков што за секој реален x важи $P(x) \ge 0$. Докажете дека постојат полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ со реални коефициенти такви што за секој реален x важи

$$P(x) = Q^2(x) + R^2(x).$$

Решение. Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ се сите различни реални нули на полиномот $P(x)$, а $z_1, z_2, \ldots, z_m$ се сите комплексни нули на полиномот $P(x)$ со позитивен имагинарен дел, при што секоја нула е запишана онолку пати колку што е нејзината кратност. Бидејќи полиномот $P(x)$ не го менува знакот на множеството реални броеви, добиваме дека кратноста на секоја реална нула е парен број. Затоа полиномот $P(x)$ можеме да го запишеме во обликот

$$P(x) = Q_1^2(x)(x-z_1)(x-z_2)\cdot \ldots (x-z_m)(x-\overline{z_1})(x-\overline{z_2})\cdot \ldots (x-\overline{z_m}) =$$
$$= Q_1^2(x)(u+iv)(u-iv) = Q_1^2(x)(u^2+v^2) = (uQ_1)^2 + (vQ_1)^2. \ ∎$$

Задача 24. Најдете полином $P(x)$ за кој важи

$$xP(x-1)=(x-1990)P(x).$$

Решение. Полиномот $(x-1990)P(x)$ е делив со x, па мора $P(x)$ да се дели со x, т.е. постои полином $P_1(x)$ таков што $P(x)=xP_1(x)$. Заменувајќи го ова во даденото равенство добиваме

$$x(x-1)P_1(x-1)=(x-1990)xP_1(x), \text{ т.е}$$

$$(x-1)P_1(x-1)=(x-1990)P_1(x).$$

Аналогно како претходно, ќе постои полином $P_2(x)$ таков што

$$P_1(x)=(x-1)P_2(x)$$

и ако тоа се замени добиваме

$$(x-1)(x-2)P_2(x-1)=(x-1990)(x-1)P_2(x), \text{ т.е.}$$

$$(x-2)P_2(x-1)=(x-1990)P_2(x).$$

Ако оваа постапка ја продолжиме ги добиваме полиномите

$$P_3(x),\ P_4(x),\ \dots,\ P_{1990}(x),$$

и за последниот полином важи

$$(x-1990)P_{1990}(x-1)=(x-1990)P_{1990}(x), \text{ т.е.}$$

$$P_{1990}(x-1)=P_{1990}(x).$$

Од овде следува дека полиномот $P_{1990}(x)-P_{1990}(0)$ прима вредност 0 за секој цел број, а тоа е можно ако и само ако

$$P_{1990}(x)-P_{1990}(0)$$

е нулти полином. Нека $P_{1990}(0)=c$. Тогаш

$$P(x)=xP_1(x)=x(x-1)P_2(x)=x(x-1)(x-2)P_3(x)=\dots=$$
$$=x(x-1)(x-2)\dots(x-1989)P_{1990}(x)=cx(x-1)\dots(x-1989). \blacksquare$$

Задача 25. Најдете полином од трет степен $p(x)$, кој ја задоволува релацијата $p(x)-p(x-1)=x^2$, а потоа користејќи го истиот најдете го збирот на квадратите на првите n природни броеви.

Решение. Нека $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Тогаш

$$p(x)-p(x-1)=3ax^2-(2b-3a)x+a-b+c.$$

Од $p(x)-p(x-1)=x^2$ добиваме

$$3ax^2-(2b-3a)x+a-b+c=x^2$$

односно

$$\begin{cases} 3a=1 \\ 2b-3a=0 \\ a-b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/3 \\ b=1/2. \\ c=1/6 \end{cases}$$

Значи,

$$p(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}+d=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}+d.$$

За $k=1,2,3,\ldots,n$ добиваме

$$p(1)-p(0)=1^2$$
$$p(2)-p(1)=2^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p(n)-p(n-1)=n^2$$

Ако ги собереме последните равенства добиваме

$$p(n)-p(0)=1^2+2^2+\ldots+n^2.$$

Бидеjќи $p(n)-p(0)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ добиваме

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \blacksquare$$

Задача 26. Полиномот $P(x,y)$ го нарекуваме *хомоген полином од n-ти* степен ако за секои $t,x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$P(tx,ty)=t^n\cdot P(x,y),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Наjдете ги сите хомогени полиноми, од n-ти степен, од две променливи кои ги задоволуваат условите

(i) За секои три реални броеви a,b,c важи

$$P(a+b,c)+P(b+c,a)+P(c+a,b)=0.$$

(ii) $P(1,0)=1$.

Решение. Да го разгледаме полиномот $Q(t)$ дефиниран со

$$Q(t)=P\left(\frac{2+t}{3},\frac{1-t}{3}\right).$$

Полиномот Q го задоволува равенството $Q(-2t)=-2Q(t)$. Навистина, ако во (i) ставиме $a=b=\frac{1-t}{3}$ и $c=\frac{1+2t}{3}$ добиваме

$$P\left(\frac{2-2t}{3},\frac{1+2t}{3}\right)+P\left(\frac{2+t}{3},\frac{1-t}{3}\right)+P\left(\frac{2+t}{3},\frac{1-t}{3}\right)=0,$$

односно $Q(-2t)+Q(t)+Q(t)=0$.

Ако jа искористиме релациjата $Q(-2t)=-2Q(t)$ и равенството

$$Q(1)=P(1,0)=1$$

со математичка индукциjа можеме да докажеме дека

$$Q((-2)^n)=(-2)^n,\text{ за } n=0,1,2,3,\ldots .$$

Полиномите $Q(t)$ и t се еднакви за бесконечно многу вредности на t, т.е. тие се идентични. Значи $Q(t)=t$. За $t=\frac{x-2y}{x+y}$ добиваме

$$Q\left(\frac{x-2y}{x+y}\right)=\frac{x-2y}{x+y} \text{ т.е. } P\left(\frac{x}{x+y}, \frac{x}{x+y}\right)=\frac{x-2y}{x+y}.$$

Според тоа,

$$P(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}.$$

Второ решение. Ако во (i) ставиме $a=b=c=y$ добиваме $P(2y,y)=0$. Од тука заклучуваме $P(x,y)=P(x,y)-P(2y,y)$ т.е. полиномот $P(x,y)$ е делив со $x-2y$.

Нека $n>1$. Ако во (i) ставиме $a=b=y$, $c=-2y$ и го искористиме условот за хомогеност, добиваме

$$(-2)^n P(-y,y)+2P(-y,y)=0$$

од што следува дека $P(-y,y)=0$, па значи полиномот $P(x,y)$ се дели со $x+y$. Нека е $Q(x,y)=\frac{P(x,y)}{x+y}$. Ова е хомоген полином со степен $n-1$ кој го задоволува условот (i). (Проверете!).

Со математичка индукција, лесно се докажува дека полиномот $P(x,y)$ е делив со полиномот $(x+y)^{n-1}$.

Бидејќи полиномот $P(x,y)$ е полином од n-ти степен кој е делив со $x-2y$ и $(x+y)^{n-1}$, истиот можеме да го запишеме во обликот

$$P(x,y)=K(x-2y)(x+y)^{n-1}.$$

Ако го искористиме условот (ii) добиваме дека $K=1$, т.е.

$$P(x,y)=(x-2y)(x+y)^{n-1}. \blacksquare$$

Задача 27. Нека $P_1(x)=x^2-2$ и $P_k(x)=P_1(P_{k-1}(x))$, $k=2,3,\ldots$ се дадени полиноми. Докажете дека за секој $n\in\mathbb{N}$, сите корени на равенката $P_n(x)=x$ се реални и меѓусебно различни.

Решение. Од рекурентната формула следува дека степенот на полиномот P_k е двапати поголем од степенот на полиномот P_{k-1}, а P_1 има степен 2. Значи степенот на полиномот P_k е 2^k. Ќе докажеме дека равенката $P_n(x)=x$ има 2^n различни реални корени.

Прво ќе ја докажеме следната лема.

Лема. За секој природен број k постојат броеви

(1) $$-2=a_0<a_1<a_2<\ldots<a_{2^k-1}<a_{2^k}=2,$$

такви што $P_k(a_j)=(-1)^j\cdot 2$, за $j=0,1,2,\ldots,2^k$.

Доказ. За $k=1$ непосредно се проверува дека броевите -2, 0,2 го задоволуваат тврдењето на лемата.

Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $k=n$, т.е. дека постојат броеви

(2) $$-2=\alpha_0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{2^n-1}<\alpha_{2^n}=2,$$

такви што $P_n(\alpha_j)=(-1)^j\cdot 2$, за $j=0,1,2,\ldots,2^n$. Меѓу секои два членови на низата (2) P_n има по еден корен (вкупно 2^n корени), бидејќи $P_n(\alpha_j)$ и $P_n(\alpha_{j+1})$ се различни по знак за $j=0,1,\ldots,2^n-1$ Членовите на низата (2) и корените на полиномот P_n формираат нова низа

$$-2=\beta_0<\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_{2^{n+1}}=2,$$

таква што $P_n(\beta_j)=0$ за j непарно и $|P_n(\beta_j)|=2$ за j парно. Тогаш имаме

$$P_{n+1}(\beta_j)=P_1(P_n(\beta_j))=P_1(0)=-2 \text{ за } j \text{ непарно и}$$

$$P_{n+1}(\beta_j)=P_1(P_n(\beta_j))=P_1(\pm 2)=2 \text{ за } j \text{ парно.}$$

Со тоа доказот на лемата е завршен. ■

Од докажаната лема следува дека полиномот $P_k(x)-x$ има за $x=a_0,a_2,\ldots,a_{2^{k-1}}$ позитивна вредност, а за $x=a_1,a_3,\ldots,a_{2^k-1}$ негативна вредност, што значи дека меѓу секои два членови на низата (1) равенката $P_k(x)-x=0$ има по едно реално решение, освен можеби меѓу a_{2^k-1} и a_{2^k}. Значи равенката чиј степен е 2^k има 2^k-1 реални решенија, па мора да има и 2^k реални решенија. Имено, ако 2^k-то решение е комплексно, тогаш и куњугираниот на него број е решение на дадената равенка, па таа би имала 2^k+1 решение, што не е можно.

Второ решение. Ставаме $x=2\cos\alpha$ и добиваме

$$P_1(x)=4\cos^2\alpha-2=2\cos 2\alpha.$$

Сега од рекурентната врска лесно се гледа дека $P_n(x)=2\cos 2^n\alpha$.

Да ја разгледаме равенката $P_n(x)=x$, т.е.

(3) $$\cos 2^n\alpha=\cos\alpha.$$

Нејзините решенија се добиваат од

(4) $$2^n\alpha-\alpha=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

или од

(5) $$2^n\alpha+\alpha=2\ell\pi,\ \ \ell\in\mathbb{Z}.$$

Да разгледаме 2^{n-1} решенија од (4)

(6) $$0,\frac{2\pi}{2^n-1},\frac{4\pi}{2^n-1},\dots,\frac{2(2^n-1)\pi}{2^n-1},$$

и 2^{n-1} решенија од (5)

(7) $$0,\frac{2\pi}{2^n+1},\frac{4\pi}{2^n+1},\dots,\frac{2\cdot 2^{n-1}\pi}{2^n+1}$$

За овие решенија важи:

(а) Ако α е еднаков на некое од нив, тогаш α е решение на равенката (3), па $x=2\cos\alpha$ е решение на равенката $P_n(x)=x$.

(б) Секои два броја од (6) и (7) се меѓусебно различни и ниеден број од (6) не се појавува во (7) и обратно.

(в) Сите броеви од (6) и (7) се ненегативни и помали од π

Од (б) и (в) следува дека косинусите на овие броеви се различни, а од (а) следува дека равенката $P_n(x)=x$ има 2^n различни корени. ■

Задача 28. Броевите $a, a_2, \dots, a_{n-2}, b$ се реални, $ab\neq 0$ и такви што, сите корени на полиномот

$$ax^n+ax^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-2}x^2-n^2bx+b=0$$

се реални и позитивни. Докажете дека сите корени на равенката се еднакви меѓу себе.

Решение. Од Виетовите формули имаме

$$x_1+x_2+\dots+x_n=1,$$
$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}=n^2.$$

Значи
$$\left(x_1+x_2+\dots+x_n\right)\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)=n^2.$$

Но, во познатото неравенство
$$\left(x_1+x_2+\dots+x_n\right)\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2.$$

имаме равенство само ако $x_1=x_2=\dots=x_n$. ■

Задача 29. Нека $p(x)$ е неконстантен полином со целобројни коефициенти и n и k се фиксирани природни броеви. Докажете дека постојат n последователни природни броеви $a, a+1, \dots, a+n-1$, за кои броевите $p(a), p(a+1), \dots, p(a+n-1)$ имаат барем k прости множители. (За бројот $m=p_1^{t_1}p_2^{t_2}\dots p_s^{t_s}$ ќе велиме дека има $t_1+t_2+\dots+t_s$ прости множители.)

Решение. Најпрво да забележиме дека ако

$$h(x)=b_ox^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_s$$

е полином со реални коефициенти и $b_o>0$, тогаш постои $x_o\in\mathbb{R}$, таков што $h(x)$ строго монотоно расте на интервалот $[x_o,\infty)$.

Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека коефициентот пред највисокиот степен на $p(x)$ е позитивен (во спротивен случај ќе го разгледуваме полиномот $-p(x)$). Задачата ќе биде решена ако го докажеме следното тврдење:

Постои таков природен број a, што $p(x)$ строго монотоно расте на интервалот $[a,\infty)$, $p(a)>0$ и секој од броевите $p(a)$, $p(a+1), \dots, p(a+n-1)$ има барем k прости множители.

Доказот на последното тврдење ќе го спроведеме со математичка индукција.

За $k=1$ ова тврдење е исполнето. Имено, доволно е да избереме таков природен број a, да за $x\geq a$, $p(x)>1$ и $p(x)$ е строго растечка функција во интервалот $[a,\infty)$. Можноста за избор на бројот следува од $\lim\limits_{x\to\infty} p(x)=\infty$ и претходно направената забелешка.

Нека $k\geq 2$ е природен број. Да претпоставиме дека постои природен број a, за кој $p(x)$ е строго растечка функција во $[a,\infty)$, $p(a)>0$ и секој од броевите $m_i=p(a+i)$, $i=0,1,2,\dots,n-1$ има барем k прости множители. Ставаме $M=m_o m_1\dots m_{n-1}$ и $a'=a+M$. Ќе докажеме дека секој од броевите $p(a'+i)$, $i=0,1,2,\dots,n-1$ има барем $k+1$ прост множител. За таа цел да забележиме дека за произволни x и y важи равенството

(1) $\qquad p(x+y)=p(x)+y\cdot g(x+y)$

каде $g(x,y)$ е полином од x и y со целобројни коефициенти. Тогаш за секој $i=0,1,2,\dots,n-1$ добиваме

$$p(a'+i)=p(a+M+i)=p(a+i)+M\cdot g(a+i,M)=m_i+M\cdot g(a_{i+1},M)=$$
$$=m_i\left[1+m_0m_1\dots m_{i-1}m_{i+1}\dots m_{n-1}g(a_{i+1},M)\right].$$
Според претпоставката m_{i_0} има барем k прости множители, па затоа доволно е да се провери дека бројот
$$q=1+m_0m_1\dots m_{i-1}m_{i+1}\dots m_{n-1}g(a_{i+1},M)$$
има барем еден прост множител. Бидејќи $p(a'+i)>p(a)>0$, последното тврдење ќе следува ако докажеме дека $g(a+i,M)\neq0$. Да го претпоставиме спротивното. Тогаш од (1) ќе следува дека
$$p(a+i+M)=p(a+i),$$
што противречи на претпоставката, дека $p(x)$ строго монотоно расте на интервалот $[a,\infty)$. Од друга страна $p(a')=p(a+M)>p(a)>0$ и $p(x)$ е растечка функција во $[a',\infty)$, со што индуктивниот доказ е завршен. ■

Задача 30. Нека $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$, $n\geq3$ е полином со реални коефициенти и n реални корени, за кои $\frac{a_{n-1}}{a_n}>n+1$. Докажете дека, ако $a_{n-2}=0$, тогаш барем еден од корените на $f(x)$ е во интервалот $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{n+1}\right)$.

Решение. Да ги означиме со $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n$ корените на f. Ако некои од корените се нула, тогаш задачата е решена. Ако $\alpha_i\neq0$, за секој $i=1,2,\dots,n$ тогаш ставаме $\beta_i=\frac{1}{\alpha_i}$, $i=1,2,\dots,n$.
Од Виетовите формули и од условот на задачата следува
$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\beta_i\beta_j=\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{\alpha_i\alpha_j}=\frac{a_{n-2}}{a_n}=0,$$
$$\sum_{i=n}^{n}\beta_i=\sum_{i=n}^{n}\frac{1}{\alpha_i}=-\frac{a_{n-1}}{a_n}<-(n+1).$$

Сега решението на задачата следува од тврдењето: Ако x_1, $x_2,\dots,x_n$, $n\geq3$ се реални броеви различни од нула, за кои важи
$$\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j=0 \text{ и } \sum_{i=n}^{n}x_i=S<0,$$
тогаш најмалиот од броевите $x_1,x_2,\dots,x_n$ е помал или еднаков на $\frac{2S}{n}$.

Доказот на претходното тврдење го оставаме како вежба за читателот.

Да се вратиме на решението на задачата. Ако претходното тврдење го примениме на броевите $\beta_i=\frac{1}{\alpha_i}$, $i=1,2,\dots,n$, добиваме дека за секој $i=1,2,\dots,n$ се исполнети неравенствата

$$\beta_i \le \frac{2S}{n} < -\frac{2(n+1)}{n} < 0.$$

Тогаш $0>\alpha_i > \frac{1}{\beta_i} > -\frac{n}{2(n+1)} > -\frac{1}{2}$, со што задачата е решена. Уште повеќе докажавме дека разгледуваниот полином има корен во интервалот $\left[-\frac{n}{2(n+1)},0\right]$. ∎

Задача 31. Најдете ги сите неконстантни полиноми $p(x)$, кои ја задоволуваат равенката $p(x^3+1)=(p(x+1))^3$.

Прво решение. Нека полиномот $p(x)$ е решение на задачата и нека $f(x)=p(x+1)$. Тогаш

$$f(x^3)=p(x^3+1)=(p(x+1))^3=(f(x))^3.$$

Нека $f(x)=x^k f_1(x)$, каде $k\ge 0$ и $f_1(0)\ne 0$. Тогаш од равенството

$$x^{3k}f_1(x^3)=x^{3k}(f_1(x))^3$$

добиваме дека $f_1(x^3)=(f_1(x))^3$. Ќе докажеме дека $f_1(x)$ е константен полином. Навистина, ако

$$f_1(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n,\ a_n\ne 0,\ a_0\ne 0 \text{ и } n>1,$$

тогаш постои коефициент

$$a_{n-s}\ne 0,\ a_{n-s+1}=a_{n-s+2}=\dots=a_{n-1}=0$$

за некој $s\ge 1$. Во равенството $f_1(x^3)=(f_1(x))^3$ ги изедначуваме коефициентите пред x^s. На десната страна тој коефициент е $3a_{n-s}a_n^2$, а на левата тој е нула, што е противречност. Значи $f_1(x)$ е константен полином и очигледно $f_1(x)=\pm 1$. Според тоа $f_1(x)=\pm x^k$ и $p(x)=\pm(x-1)^k$. Со непосредна проверка се убедуваме дека овој полином е решение на задачата.

Второ решение. Нека $p(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_{k-1}x+a_k$. Ставаме $x=3^{3^n}$ и наоѓаме дека $p(3^{3^{n+1}}+1)=(p(3^{3^n}+1))^3=\dots=(p(4))^{3^n}$. Добиваме

$$1=\lim_{n\to\infty}\frac{p(3^{3^n}+1)}{a_o(3^{3^n}+1)^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{p(3^{3^n}+1)}{a_o(3^{3^n})^k}=\frac{1}{a_o}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{p(4)}{3^k}\right)^{3^n}$$

или $a_o=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{p(4)}{3^k}\right)^{3^n}$, од што следува $a_o=\pm1$, $p(a)=a_o3^k=\pm3^k$.

Од равенствата $p(3^{3^{n+1}}+1)=(p(4))^{3^n}=(a_o3^k)^{3^n}=a_o(3^{3^n})^k$ добиваме дека $p(3^{3^{n+1}}+1)=a_o(3^{3^n}+1-1)^k$, за $n=1,2,3,\ldots$ Според тоа, полиномите $p(x)$ и $\pm(x-1)^k$ примаат еднакви вредности за бесконечно многу различни вредности на x, па значи тие се идентични. Да забележиме, дека користејќи ја аналогната постапка можеме да ги определиме сите полиноми $p(x)$ за кои $p(x^t+1)=(p(x+1))^t$, при $t\in\mathbb{N}$, $t>1$. ■

Задача 32. Нека $p>1$ е природен број и $f(x)=x^p-x+p$. Докажете дека

а) секој корен α на полиномот $f(x)$ го задоволува неравенството $|\alpha|<p^{\frac{1}{p-1}}$.

б) ако p е прост број, тогаш $f(x)$ не може да се разложи во производ на два неконстантни полиноми со цели коефициенти.

Решение. а) Да претпоставиме дека дадениот полином има корен α за кој важи $|\alpha|>p^{\frac{1}{p-1}}$. Од равенството $\alpha^p-\alpha+p=0$ следува дека $|\alpha-p|=|\alpha^p|=|\alpha|^{p-1}|\alpha|>p\cdot|\alpha|$. Значи $p\cdot|\alpha|\le|\alpha-p|\le|\alpha|+p$, од што наоѓаме $|\alpha|\le\frac{p}{p-1}$. Тогаш $p^{\frac{1}{p-1}}\le1+\frac{1}{p-1}$ и $p\le\left(1+\frac{1}{p-1}\right)^{p-1}$. Но, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$, за секој природен број n, па затоа $p<3$, т.е. $p=2$. Во тој случај имаме $\alpha=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$ и $|\alpha|=\sqrt{2}<2=2^{\frac{1}{2-1}}$, што е противречност.

б) Да допуштиме, дека $f(x)=g(x)h(x)$, каде $g(x)$ и $h(x)$ се неконстантни полиноми со целобројни коефициенти. Бидејќи производот на коефициентите пред највисоките степени на $h(x)$ и

$g(x)$ е еднаков на 1, а производот на слободните членови е еднаков на p, можеме да сметаме дека коефициентите пред највисоките степени се 1, а слободниот член на $g(x)$ е $\pm p$, а на $h(x)$ е ± 1. Нека k е степенот на полиномот $g(x)$, $0<k<p$, а α_1, $\alpha_2,\dots,\alpha_k$ се неговите корени. Бидејќи секој α_i е корен и на полиномот $f(x)$, добиваме $|\alpha_i|<p^{\frac{1}{p-1}}$, $i=1,2,\dots,k$. Тогаш од Виетовите формули имаме $\alpha_1\alpha_2\cdot\dots\cdot\alpha_k=(-1)^k(\pm p)$, што значи дека $p=|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\cdot\dots\cdot|\alpha_k|=p^{\frac{k}{p-1}}$, од што следува дека $k>p-1$, т.е. $k=p$, што е противречност. ■

Задача 33. Квадратниот трином $p(x)=ax^2+bx+c$ е таков што равенката $p(x)=x$ нема реални решенија. Докажете дека и равенката $p(p(x))=x$ исто така нема реални решенија.

Решение. Бидејќи квадратната равенка $ax^2+bx+c=x$ нема реални корени, квадратниот трином $p(x)-x\equiv ax^2+(b-1)x+c$ при секој $x\in\mathbb{R}$ прима само вредности со ист знак, да кажеме $p(x)-x>0$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Ставаме $y=p(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ и добиваме $p(y)-y>0$. Според тоа $p(p(x))-p(x)>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, односно $p(p(x))>p(x)>x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Значи, $p(p(x))-x>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, од што следува дека равенката $p(p(x))=x$ исто така нема реални решенија. ■

Задача 34. Дадени се полиномите со комплексни коефициенти

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n,\text{ со нули } x_1,x_2,\dots,x_n,$$

$$Q(x)=x^n+b_1x^{n-1}+\dots+b_n,\text{ со нули } x_1^2,x_2^2,\dots,x_n^2.$$

Ако се $a_1+a_3+a_5+\dots$ и $a_2+a_4+a_6+\dots$ реални броеви, докажете дека и $b_1+b_2+b_3+\dots+b_n$ исто така е реален број.

Решение. Бидејќи

$$P(1)=1+a_1+\dots+a_n \text{ и } P(-1)=(-1)^n+a_1(-1)^{n-1}+\dots+a_n,$$

и $a_1+a_3+a_5+\dots$ и $a_2+a_4+a_6+\dots$ се реални броеви, добиваме дека $P(1)$ и $P(-1)$ се реални броеви. Понатаму,

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \text{ и } Q(x)=(x-x_1^2)(x-x_2^2)\dots(x-x_n^2),$$

од што следува

$$1+b_1+b_2+b_3+\dots+b_n=Q(1)=(1-x_1^2)(1-x_2^2)\dots(1-x_n^2)=$$

$$=(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)=(-1)^n P(1)P(-1).$$

Значи, $Q(1)$ е реален број, па затоа и $b_1+b_2+b_3+\dots+b_n=Q(1)-1$ е реален број. ■

Задача 35. Познато е, дека равенката

$$x^4+ax^3+2x^2+bx+1=0$$

има реален корен. Докажете, дека

$$a^2+b^2\geq 8.$$

Задача 36. Даден е полиномот $p(x)=x^n+5x^{n-1}+3$, каде што $n>1$. Докажете дека $p(x)$ не може да се запише како производ на два полиноми, секој од кои е со степен не помал од 1 и чии коефициенти се цели броеви.

ФУНКЦИЈАТА $[x]$ И НЕЈЗИНАТА ПРИМЕНА ВО ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. ФУНКЦИИТЕ $[x]$ И $\{x\}$

Дефиниција 1. Функцијата *цел дел од* x, во ознака $[x]$, ја определуваме на следниот начин: ако x е меѓу последователните цели броеви k и $k+1$, т.е $k\leq x<k+1$, тогаш по дефиниција ставаме $[x]=k$.

Дефиниција 2. Функцијата *дробен дел од* x, во ознака $\{x\}$, ја определуваме со $\{x\}=x-[x]$.

Теорема 1. Нека x и y се реални броеви. Тогаш

(а) $[x]\leq x<[x]+1$, $x-1<[x]\leq x$, $0\leq x-[x]<1$.

(б) $[x]+[-x]=\begin{cases} 0, & \text{ако } x \text{ е цел број} \\ -1, & \text{ако } x \text{ не е цел број.}\end{cases}$

(в) $[x+m]=[x]+m$, ако m е цел број.

(г) $[x]+[y]\leq[x+y]\leq[x]+[y]+1$.

(д) $[x-y]\leq[x]-[y]\leq[x-y]+1$.

(ѓ) $[x][y]\leq[xy]\leq[x][y]+[x]+[y]$, ако $x,y\geq 0$.

(е) $\left[\dfrac{[x]}{m}\right]=\left[\dfrac{x}{m}\right]$, ако m е природен број.

(ж) $\left[\sqrt{[x]}\right]=\left[\sqrt{x}\right]$, ако $x\geq 0$.

Доказ. (а) Секој дел од тврдењето следува од дефиниција 1

(б) Ако x е цел број, тогаш $[-x]=-[x]$. Ако x не е цел број, тогаш од $[-x]=y$ следува $-y-1\leq x<-y$ или $[x]=-y-1$ и $[-x]=-[x]-1$.

(в) Од (а) следува дека $x+m-1<[x+m]\leq x+m$ и $x+m-1<[x]+m\leq x+m$ Бидејќи $[x+m]$ и $[x]+m$ се цели броеви, од претходните две неравенства следува дека тие се еднакви.

(г) Нека $x=n+\alpha$, $y=m+\beta$, каде $m,n\in\mathbb{Z}$ и $0\leq\alpha<1$, $0\leq\beta<1$. Тогаш

$$[x]+[y]=m+n\leq[n+\alpha+m+\beta]=[x+y]=m+n+[\alpha+\beta]\leq n+m+1=[x]+[y]+1.$$

(д) Според (г) имаме

$$[x-y]+[y]\leq[(x-y)+y]\leq[x-y]+[y]+1$$

т.е.

$$[x-y]\leq[x]-[y]\leq[x-y]+1.$$

(ѓ) Според (а) имаме $[x][y]\leq xy<([x]+1)([y]+1)$. Значи,

$$[x][y]\leq[xy]\leq([x]+1)([y]+1)-1=[x][y]+[x]+[y].$$

(е) Нека $x=n+\alpha$, $n=qm+r$, $0\leq\alpha<1$, $0\leq r<m-1$. Според тоа добиваме $\left[\frac{x}{m}\right]=\left[\frac{qm+r+\alpha}{m}\right]=q+\left[\frac{r+\alpha}{m}\right]=q$. Од друга страна, бидејќи $0\leq r+\alpha<m$, добиваме $\left[\frac{[x]}{m}\right]=\left[\frac{n}{m}\right]=\left[q+\frac{r}{m}\right]=q$. Конечно, $\left[\frac{[x]}{m}\right]=\left[\frac{x}{m}\right]$.

(ж) Бидејќи $x\geq0$, x може да се запише во облик $x=n^2+r+\{x\}$, каде n и r се ненагитивни цели броеви, $0\leq r\leq 2n$. Тогаш,

$$\left[\sqrt{[x]}\right]=\left[\sqrt{n^2+r}\right]=\left[\sqrt{n^2+r}-n+n\right]=n+\left[\sqrt{n^2+r}-n\right]=n+\left[\frac{r}{\sqrt{n^2+r}+n}\right]=n.$$

Слично,

$$\left[\sqrt{x}\right]=\left[\sqrt{n^2+r+\{x\}}-n+n\right]=n+\left[\sqrt{n^2+r+\{x\}}-n\right]=n+\left[\frac{r+\{x\}}{\sqrt{n^2+r+\{x\}}+n}\right]=n,$$

бидејќи $0\leq r+\{x\}<2n<\sqrt{n^2+r+\{x\}}+n$. Значи, $\left[\sqrt{[x]}\right]=\left[\sqrt{x}\right]$. ■

Теорема 2. Ако се x и y ненегативни броеви, тогаш

$$[2x]+[2y]\geq[x+y]+[x]+[y].$$

Доказ. Нека е $x=[x]+\alpha$, $y=[y]+\beta$, каде $0\leq\alpha,\beta<1$. Ако е $\alpha+\beta<1$ тогаш $[x]+[y]=[x+y]$, па $[2x]+[2y]\geq2[x]+2[y]=[x+y]+[x]+[y]$. Ако $\alpha+\beta\geq1$, тогаш $2\alpha\geq1$ или $2\beta\geq1$. Нека $2\alpha\geq1$. Тогаш $[x]+[y]=[x+y]-1$ и $[2x]=2[x]+1$, па затоа

$$[2x]+[2y]=2[x]+1+[2y]\geq2[x]+1+2[y]=[x+y]+[x]+[y].\ ■$$

Теорема 3. Ако $n\in\mathbb{N}$ и $x\geq 0$, тогаш постојат точно $\left[\frac{x}{n}\right]$ природни броеви помали или еднакви на x, деливи со n.

Доказ. Броеви деливи со n се: $n; 2n, 3n, \ldots$. Нека има j природни броеви помали или еднакви на x, деливи со n. Тогаш е $jn\leq x<(j+1)n$ т.е. $j\leq\frac{x}{n}<j+1$. Според тоа, $j\leq\left[\frac{x}{n}\right]<j+1$, односно $j=\left[\frac{x}{n}\right]$. ■

Теорема 4. Нека p е прост број, n е природен број и a е најголемиот степен на бројот p таков што $p^a|n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Тогаш, $a=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\ldots$.

Доказ. Во низата $1,2,\ldots,n$ има $\left[\frac{n}{p}\right]$ броеви деливи со p, па затоа е $n!=p\cdot 2p\cdot\ldots\cdot\left[\frac{n}{p}\right]p\cdot M_1=p^{[n/p]}\cdot\left[\frac{n}{p}\right]!\cdot M_1$ и M_1 е природен број кој не е делив со p.

Ако претходното размислување го примениме на низата $1,2,\ldots,\left[\frac{n}{p}\right]$ и ако земеме во предвид дека $\left[\frac{[n/p]}{p}\right]=\left[\frac{n}{p^2}\right]$, добиваме дека $n!=p^{[n/p]+[n/p^2]}\cdot\left[\frac{n}{p^2}\right]!\cdot M_2$ и M_2 е природен број кој не е делив со p.

Продолжувајќи ја постапката добиваме дека

$$n!=M\cdot p^{[n/p]+[n/p^2]+[n/p^3]+\ldots},$$

каде M е природен број кој не е делив со p. Значи,

$$a=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\ldots\ . \ ■$$

Забелешка. Постапката во претходниот доказ ќе заврши после конечен број чекори, бидејќи простиот број p е конечен број пати е делител на природниот број $n!$.

Пример 01. На колку нули завршува бројот 1993! ?

Решение. Ако N е бараниот број нули, тогаш е $1993!=10^N M$,

N е природен број кој не е делив со 10. Бидејќи $10=2\cdot5$ добиваме $N=\min\{N_1,N_2\}$, каде

$$N_1=\left[\frac{1993}{5}\right]+\left[\frac{1993}{5^2}\right]+\ldots+\left[\frac{1993}{5^5}\right]+\ldots=495, \text{ и}$$

$$N_2=\left[\frac{1993}{2}\right]+\left[\frac{1993}{2^2}\right]+\ldots+\left[\frac{1993}{2^{11}}\right]+\ldots=1986.$$

Значи, $N=495$, т.е. бројот 1993! завршува на 495 нули. ■

3. ЗАДАЧИ

Задача 01. Докажете дека $\cos 3=-\cos\{\pi\}$.

Решение. $\cos 3=\cos[\pi]=-\cos(\pi-[\pi])=-\cos\{\pi\}$. ■

Задача 02. Докажете дека $e^2>8\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\right)$, ако се знае дека $e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$.

Решение. Бидејќи $[e]=2$, $\{e\}=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$ и $e=[e]+\{e\}>2\sqrt{[e]\{e\}}$ добиваме $e^2>4[e]\{e\}=8\left(\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots\right)$. ■

Задача 03. Докажете, дека за произволни природни броеви x и n важи неравенството $x+\left[\frac{n}{x}\right]\geq2[\sqrt{n}]$.

Решение. Од очигледното неравенство $x+\frac{n}{x}\geq2\sqrt{n}$ следува

$$x+\left[\frac{n}{x}\right]=\left[x+\frac{n}{x}\right]\geq[2\sqrt{n}]\geq2[\sqrt{n}].\ ■$$

Задача 04. Најдете функција $Q_n(x)$, еднаква на бројот на n-тите степени на природните броеви, кои не го надминуваат реалниот број $x>0$.

Решение. $Q_n(x)$ всушност е бројот на броевите од облик m^n, $m=1,2,\ldots$ кои го задоволуваат условот $1\leq m^n\leq x$. Значи, $1\leq m\leq\sqrt[n]{x}$ и $Q_n(x)=[\sqrt[n]{x}]$.

Забелешка. Условот, кој треба да го задоволува бројот m, можеме да го запишеме во облик $m^n\leq x<(m+1)^n$ или $m\leq\sqrt[n]{x}<m+1$. Зна-

чи, $m=[\sqrt[n]{x}]$ или $Q_n(x)=[\sqrt[n]{x}]$. ■

Задача 05. Докажете дека за секој позитивен број x важи
$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right].$$

Решение. Од $[\sqrt{x}]\le\sqrt{x}$ добиваме $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]\le\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]$. Нека за некој $x>0$ важи $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]<\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]$, т.е. постои природен број n таков што
$$\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]=n \text{ и } \left[\sqrt{\sqrt{x}}\right]\ge n+1.$$
Тогаш $n\le\sqrt{[\sqrt{x}]}<n+1\le\sqrt{\sqrt{x}}$, т.е. $[\sqrt{x}]<(n+1)^2\le\sqrt{x}$, што не е можно бидејќи од $(n+1)^2\le\sqrt{x}$ следува $(n+1)^2\le[\sqrt{x}]$. ■

Задача 06. Докажете, дека $\left[\frac{a}{4}\right]+\left[\frac{2a}{4}\right]+\left[\frac{3a}{4}\right]=\frac{3a-3}{2}$, ако a и 4 се заемно прости броеви.

Решение. Од условот на задачата имаме $a=4q+1$ или $a=4q+3$. Во првиот случај $\left[\frac{a}{4}\right]+\left[\frac{2a}{4}\right]+\left[\frac{3a}{4}\right]=q+2q+3q=6q=\frac{3a-3}{2}$. Во вториот случај $\left[\frac{a}{4}\right]+\left[\frac{2a}{4}\right]+\left[\frac{3a}{4}\right]=q+(2q+1)+(3q+2)=6q+3=\frac{3a-3}{2}$. ■

Задача 07. Докажете дека $\left[\frac{4}{p}\right]+\left[\frac{6}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{2(p-1)}{p}\right]=\left[\frac{p+1}{4}\right]$, каде p е непарен прост број.

Решение. За $p=3$ точноста на тврдењето е очигледна. Ако $p>3$, тогаш $p=4n+1$ или $p=4n+3$. Бидејќи
$$\left[\frac{4}{p}\right]=0 \text{ и } \left[\frac{2(p-1)}{p}\right]=\left[1+\frac{p-2}{p}\right]=1$$
добиваме дека во збирот од левата страна имаме само нули и единици, при што собираме $\frac{p-1}{2}$ собирци.

За да го определиме бројот на нулите во збирот од левата страна доволно е во собирокот од облик $\left[\frac{2\cdot 2x}{p}\right]=\left[\frac{4x}{p}\right]$ да ставиме $4x<p$ или $x<\frac{p}{4}$. Значи $x=\left[\frac{p}{4}\right]$. Според тоа, бројот на собраните единици е $\frac{p-1}{2}-\left[\frac{p}{4}\right]$, т.е. n ако $p=4n+1$ или $n+1$ ако $p=4n+3$. Но, $\left[\frac{p+1}{4}\right]$ е еднаков на n ако $p=4n+1$ или $n+1$ за $p=4n+3$. ■

Задача 08. Докажете, дека

$$\left[\frac{a}{m}\right]+\left[\frac{2a}{m}\right]+\ldots+\left[\frac{(m-1)a}{m}\right]=\frac{(m-1)(a-1)}{2},$$

ако $m\geq 2$, $a\geq 2$ и a и m се заемно прости.

Решение. Нека $a=mq+r$, $0\leq r<m$ и $(r,m)=1$. Бидеjќи $(r,m)=1$ за секоj $m\geq 2$ добиваме дека $r=1$. Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{m-1}\left[i\left(q+\frac{1}{m}\right)\right]=q\sum_{i=1}^{m-1}i=\frac{a-1}{m}\cdot\frac{m(m-1)}{2}=\frac{(m-1)(a-1)}{2}.\ ■$$

Задача 09. Кои членови на низата $a_n=\left[\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}\right]$ се деливи со 7?

Решение. Ако под знакот на коренот го помножиме првиот со четвртиот, а вториот со третиот множител и изразот n^2+6n го означиме со k, добиваме

$$\sqrt{(n^2+6n)(n^2+6n+8)}=\sqrt{k(k+8)}.$$

Бидеjќи $k^2+6k+9<k^2+8k<k^2+8k+16$, добиваме $\left[\sqrt{k(k+8)}\right]=k+3$ и затоа $a_n=(n+3)^2-6$.

Значи, a_n се дели со 7 ако и само ако $(n+3)^2$ при делење со 7 дава остаток 6. Меѓутоа, остатоците од квадратите на природните броеви при делење со 7 се 0, 1, 2 и 4, па затоа ниеден член на разгледуваната низа не се дели со 7. ■

Задача 10. Докажете дека важи $\left[a\left[na\right]\right]+1=\left[na^2\right]$, ако $n\in\mathbb{N}$ и $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение. За бројот a важи $a^2=a+1$, па затоа треба да докажеме дека $\left[a\left[na\right]\right]=\left[na\right]+n-1$, односно дека важат неравенствата

$$(1)\qquad \left[na\right]+n-1<a\left[na\right]<\left[na\right]+n.$$

(i) Од неравенството $a<2$ имаме $na+n-a-na+1>n-1$, т.е. $n(a+1)-a-na+1>n-1$ или $na^2-a-na+1>n-1$. Последното неравенство можеме да го запишеме во облик $(a-1)(na-1)>n-1$. Од $\left[na\right]>na-1>0$

добиваме $(a-1)[na]>(a-1)(na-1)>n-1$ т.е. $[na]+n-1<a[na]$. Значи левото неравенство во (1) важи.

(ii) Имаме $na>[na]$ т.е. $(a-1)[na]<(a-1)na=n(a^2-a)=n$. Значи, $a[na]-[na]<n$ т.е. $a[na]<[na]+n$. Со тоа е докажано десното неравенство во (1). ■

Задача 11. Пресметајте $\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right)\right]$

Решение. Од неравенството $4n(n+1)<4n^2+4n+1$ добиваме

$$2\sqrt{n(n+1)}<2n+1 \text{ т.е. } 2(\sqrt{n(n+1)}-n)<1,$$

или

(1) $$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Аналогно, можеме да го докажеме неравенството

(2) $$2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})>\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ако ги искористиме неравенствата (1) и (2) добиваме

$$2(\sqrt{2}-\sqrt{1})<\frac{1}{\sqrt{1}}<2(\sqrt{1}-\sqrt{0})$$

$$2(\sqrt{3}-\sqrt{2})<\frac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-\sqrt{1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}).$$

Ги собираме последните неравенства и добиваме

$$2(\sqrt{n+1}-1)<S_n<2\sqrt{n},$$

каде $$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

При $n=10000$ добиваме

$$2(\sqrt{10001}-1)<S_{10000}<200.$$

Според тоа, $99<\frac{1}{2}S_{10000}<100$, па значи $\left[\frac{1}{2}S_{10000}\right]=99$. ■

Задача 12. Докажете дека $\sum_{k=0}^{n-1}\left[x+\frac{k}{n}\right]=[nx]$.

Решение. Бидејќи $0\le\{x\}<1$, постои природен број j, $0\le j\le n$, таков што $\frac{j-1}{n}\le\{x\}<\frac{j}{n}$. Тогаш,

$$[x]=\left[x+\frac{1}{n}\right]=\ldots=\left[x+\frac{n-j}{n}\right], \text{ и}$$

$$\left[x+\frac{n-j+1}{n}\right]=\left[x+\frac{n-j+2}{n}\right]=\dots\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[x]+1.$$

Според тоа,
$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[x+\frac{k}{n}\right]=n[x]+j-1=[nx]. \blacksquare$$

Задача 13. Докажете дека $\sum_{k=1}^{n^2-1}\left[\sqrt{k}\right]=\frac{1}{6}(n-1)n(4n+1)$.

Решение. Прво да забележиме, дека ако k е природен број, тогаш
$$\left[\sqrt{k^2}\right]=\left[\sqrt{k^2+1}\right]=\dots=\left[\sqrt{k^2+2k}\right]=k,$$
и освен тоа низата $k^2, k^2+1, \dots, k^2+2k$ содржи $2k+1$ членови. Значи,
$$\left[\sqrt{k^2}\right]+\left[\sqrt{k^2+1}\right]+\dots+\left[\sqrt{k^2+2k}\right]=k(2k+1).$$

Од тука следува дека
$$\sum_{k=1}^{n^2-1}\left[\sqrt{k}\right]=\sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)=2\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n-1}k=$$
$$=\frac{2n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{6}(n-1)n(4n+1). \blacksquare$$

Задача 14. Докажете дека, ако n е природен број поголем од 1, за кој важи
$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\dots+\left[\frac{n}{n}\right]=2+\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\dots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right],$$
тогаш n е прост број.

Решение. Бидејќи $\left[\frac{n}{1}\right]=n$, $\left[\frac{n}{n}\right]=1$ и $\left[\frac{n-1}{1}\right]=n-1$, од даденото равенство добиваме
$$\left[\frac{n}{2}\right]+\dots+\left[\frac{n}{n-1}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]+\dots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right].$$
Бидејќи за секој $k\in\{2,3,\dots,n-1\}$ важи $\left[\frac{n}{k}\right]\geq\left[\frac{n-1}{k}\right]$, добиваме дека за секој $k\in\{2,3,\dots,n-1\}$ важи $\left[\frac{n}{k}\right]=\left[\frac{n-1}{k}\right]$.

Ако n е сложен број, тогаш за некој $k\in\{2,3,\dots,n\}$ бројот $\frac{n}{k}$ е цел број, па ќе важи $\left[\frac{n}{k}\right]>\left[\frac{n-1}{k}\right]=\left[\frac{n}{k}\right]-1$. Значи, и мора да е прост број. $\blacksquare$

Задача 15.$^{\bullet}$ Докажете го равенството

$$\left[\sqrt{n}\right]+\left[\sqrt[3]{n}\right]+\ldots+\left[\sqrt[n]{n}\right]=\left[\log_2 n\right]+\left[\log_3 n\right]+\ldots+\left[\log_n n\right],\quad n>1$$

Решение. Нека A и B се левата и десната страна на равенството. Бројот $\left[\sqrt[k]{n}\right]-1$ е еднаков на бројот на целите броеви y, за кои $2\le y\le\sqrt[k]{n}$ или $y^k\le n$. Тогаш $A-n+1$ е бројот на сите подредени парови (x,y), $x>1$, $y>1$; $x,y\in\mathbb{N}$ за кои $y^x\le n$. Аналогно, бројот $\left[\log_m n\right]-1$ е еднаков на бројот на сите цели броеви x, за кои $x\le\log_m n$ или $m^x\le n$. Тогаш $B-n+1$ е бројот на сите подредени парови (x,y), $x>1$, $y>1$; $x,y\in\mathbb{N}$ за кои $y^x\le n$, а тоа е точно $A-n+1$. Значи $A=B$. ■

Задача 16. Пресметајте ги збировите

(а) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2+2n} k\left[\sqrt{k}\right]$ (б) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n-\left[\sqrt{k-1}\right]}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$

Решение. (а) Имаме,

$$\sum_{k=1}^{n^2+2n} k\left[\sqrt{k}\right]=\sum_{k=1}^{n} k(k^2+(k^2+1)+\ldots+(k^2+2k))=$$
$$=\sum_{k=1}^{n} k^2(k+1)(2k+1)=\frac{1}{20}n(n+1)(8n^3+27n^2+23n+2)$$

(б) Од неравенствата $m^2+1\le k\le(m+1)^2$ следува $\left[\sqrt{k-1}\right]=m$. Освен тоа,

$$\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)=1.$$

Значи,

$$\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n-\left[\sqrt{k-1}\right]}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2}\frac{n-\left[\sqrt{k-1}\right]}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=$$
$$=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2}\frac{n-m}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)\sum_{k=m^2+1}^{(m+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=$$
$$=\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)=\frac{n(n+1)}{2}.\ ■$$

Задача 17. Нека $0 \le x < 1$. Докажете дека

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[2^k x]}}{2^k} = 1-2x.$$

Решение. Бројот x ќе го запишеме во бинарен броен систем. Нека $x = \sum_{k=1} \frac{a_k}{2^k}$, $a_k \in \{0,1\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогаш,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[2^k x]}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{a_k}}{2^k}.$$

Ако $a_k=1$, тогаш $\frac{(-1)^{a_k}}{2^k} = -\frac{a_k}{2^k}$, а ако $a_k=0$, тогаш

$$\frac{(-1)^{a_k}}{2^k} = -\frac{a_k}{2^k} + \frac{1}{2^k}.$$

Според тоа,

$$\frac{(-1)^{a_k}}{2^k} = -\frac{a_k}{2^k} + (1-a_k)\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k} - 2\frac{a_k}{2^k}.$$

Значи,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{a_k}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} = 1-2x. \ \blacksquare$$

Задача 18. Пресметајте $\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots$, $n \in \mathbb{N}$

Решение. Разгледувајќи ги случаите $x-[x] < \frac{1}{2}$ и $x-[x] > \frac{1}{2}$ лесно можеме да докажеме дека за секој реален број x важи релацијата $\left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x]-[x]$.

Ако во последното равенство замениме $x = \frac{n}{2^{k+1}}$, $k=0,1,\ldots,m$ и ги собереме добиените равенства добиваме

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^m}{2^{m+1}}\right] = [n] - \left[\frac{n}{2^m}\right].$$

Од очигледното равенство $\lim\limits_{m\to\infty}\left[\frac{n}{2^m}\right] = 0$ следува

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + \left[\frac{n+2}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right] + \ldots = [n] = n.$$

Второ решение. Нека $n=\overline{x_m x_{m-1}\dots x_1 x_0}=\sum_{i=0}^{m} 2^i x_i$, $x_i\in\{0,1\}$ е бинарниот запис на бројот n. Разгледувајќи ги случаите $x_k=0$, $x_k=1$ лесно се проверува дека

$$\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=\begin{cases} \overline{x_m x_{m-1}\dots x_{k+1}}+x_k, & k<m \\ x_m, & k=m \\ 0, & k>m \end{cases}$$

Значи, бараниот збир е

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]=(\overline{x_m x_{m-1}\dots x_1}+x_0)+(\overline{x_m x_{m-1}\dots x_2}+x_1)+\dots+(x_m+x_{m-1})+x_m=$$
$$=x_m(2^{m-1}+2^{m-2}+\dots+2^0+1)+x_{m-1}(2^{m-2}+\dots+2^0+1)+\dots+x_1(2^0+1)+x_0=$$
$$=2^m x_m+2^{m-1}x_{m-1}+\dots+2x_1+x_0=n.\ ■$$

Задача 19. Докажете дека сите броеви $\{10^n\cdot\sqrt{2}\}$, $n=0,1,\dots$ се меѓусебно различни.

Решение. Нека

$$\{10^p\cdot\sqrt{2}\}=\{10^q\cdot\sqrt{2}\},\ p\neq q$$

и нека е $\sqrt{2}=1,d_1d_2\dots$ децималниот запис на $\sqrt{2}$. Од претходното равенство следува $d_{n+p}=d_{n+q}$, за $n=1,2,3,\dots$ Според тоа $\sqrt{2}$ има мешовит периодичен децимален запис со периода $|p-q|$, што не е можно, бидејќи $\sqrt{2}$ е ирационален број. ■

Задача 20. Низата $\{a_n\}$, $n=1,2,\dots$ е дефинирана со: n-тиот член на оваа низа е последната цифра на бројот $\left[\sqrt{10^n}\right]$, за $n=1,2,\dots$. Дали низата е периодична?

Решение. Нека $c_0,c_1c_2c_3\dots$ е десетичниот запис на бројот $\sqrt{10}$.

Од $\sqrt{10^{2k}}=10^k$ добиваме $a_{2k}=0$.

Понатаму, од $\left[\sqrt{10^{2k+1}}\right]=\left[10^k\cdot\sqrt{10}\right]$ следува $a_{2k+1}=c_k$, $k=0,1,2,\dots$.

Според тоа, низата $\{a_n\}$, $n=1,2,\dots$ гласи $c_0,0,c_1,0,c_2,\dots$ и истата не е периодична бидејќи $\sqrt{10}$ е ирационален број, чиј десетичен запис е непериодичен децимален број. ■

Задача 21. Пресметајте колку цифри се потребни за да се запишат сите природни броеви од N до M, $(N<M)$, вклучувајќи ги N и M.

Решение. Броевите N и M имаат, соодветно $n=\left[\log_{10}N\right]+1$ и $m=\left[\log_{10}M\right]+1$ цифри. За да се запишат сите броеви од 1 до N, потребни се $s=9\sum_{k=1}^{n-1}k\cdot 10^{k-1}+n(N+1-10^{n-1})=n(N+1)-\frac{1}{9}(10^{n}-1)$ цифри.

Слично, за да се запишат сите броеви од 1 до M потребни се $S=m(M+1)-\frac{1}{9}(10^{m}-1)$, цифри.

Значи, бараниот број цифри е

$$S-s+n=m(M+1)-nN-\frac{10^{n}}{9}(10^{m-n}-1).\ \blacksquare$$

Задача 22. Определете го збирот на сите природни броеви помали или еднакви на даден природен број N, кои завршуваат на барем две еднакви цифри, различни од нула.

Упатство. (i) Тие броеви се $a_k=11k+\left[\frac{k-1}{9}\right]$

(ii) Вкупно ги има $n=\left[\dfrac{N-\left[\frac{N}{100}\right]}{11}\right]$.

(iii) Бараниот збир е

$$s=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{11n(n+1)}{2}+\left[\frac{n-1}{9}\right]\left(n-\frac{9}{2}\left(\left[\frac{n-1}{9}\right]+1\right)\right).\ \blacksquare$$

Задача 23. Дадени се првите N природни броеви. Колку броеви, најмалку треба да се изберат на произволен начин, така што меѓу избраните броеви постојат барем два од кои едниот е делив со другиот?

Решение. Произволно да избереме $\left[\frac{N+1}{2}\right]+1$ броеви. Сите парни броеви кои се наоѓаат меѓу избраните (постои барем еден бидејќи непарни броеви има $\left[\frac{N+1}{2}\right]$) ги делиме со таков степен на двојката, да количникот биде непарен број. Вака добиените количници, заедно со избраните непарни броеви се сите помали или еднакви на N и ги има $\left[\frac{N+1}{2}\right]+1$ на број. Според принципот на Дирихле, меѓу нив има барем два еднакви. Значи постојат два избрани броеви, од кои едниот е делив со другиот.

Броеви $\left[\frac{N+1}{2}\right]$, $\left[\frac{N+1}{2}\right]+1$, ..., $2\left[\frac{N+1}{2}\right]-1$ има $\left[\frac{N+1}{2}\right]$. Ниеден од овие броеви не е делив со друг бидејќи

$$1<\frac{\left[\frac{N+1}{2}\right]+k}{\left[\frac{N+1}{2}\right]+\ell}<2, \text{ за } \left[\frac{N+1}{2}\right]\le\ell<k\le 2\left[\frac{N+1}{2}\right]-1.$$

Значи, $\left[\frac{N+1}{2}\right]+1$ е најмалиот број кој ги исполнува условите на задачата. ∎

Задача 24. Докажете дека за секој природен број $k\ge2$ постои реален број $x\ne0$ таков што $k=\frac{[x]\{x\}}{x}$.

Решение. Јасно е дека $x<0$, бидејќи ако претпоставиме дека $x>0$ од неравенствата $\{x\}[x]<[x]\le x$ следува $k=\frac{[x]\{x\}}{x}<1$, што противречи на $k\ge2$.

Нека $[x]=-p$, $p>0$. Тогаш бараме p таков што $0\le\{x\}=\frac{kp}{k+p}<1$. Првото неравенство е точно за секој p, а второто е точно за $p<\frac{k}{k-1}$. Но, p е природен број и затоа $p=1$, т.е. $[x]=-1$. Тогаш, $\{x\}=\frac{k}{k+1}$ или $x=-\frac{1}{k+1}$. ∎

Задача 25. Низите $\{u_n: n=1,2,\dots\}$ и $\{v_n: n=1,2,\dots\}$ се определени на следниот начин

$$u_0=3,\ v_0=2,\ u_{n+1}=3u_n+4v_n,\ v_{n+1}=2u_n+3v_n,\ \text{за } n\ge0.$$

Нека $x_n=u_n+v_n$ и $y_n=u_n+2v_n$. Докажете дека $y_n=\left[x_n\sqrt{2}\right]$.

Решение. Лесно се гледа дека

$$y_n^2-2x_n^2=2v_n^2-u_n^2=2v_{n-1}^2-u_{n-1}^2=\dots=2v_0^2-u_0^2=-1.$$

Затоа $\left[x_n\sqrt{2}\right]=\left[\sqrt{y_n^2+1}\right]=y_n$. ∎

Задача 26. Нека $\{a_n: n=1,2,\dots\}$ е низа природни броеви, за која $0\le a_{m+n}-a_m-a_n\le1$. Докажете, дека постои реален број α, таков што $a_n=[\alpha n]$, за секој $n\ge1$.

Решение. Лесно се проверува, дека $na_1\le a_n\le na_1+n-1$, т.е. $a_1=\left[\frac{a_n}{n}\right]$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Сега доволно е да избереме $\alpha\in(a_1,a_1+1)$ и тогаш очигледно $a_n=[\alpha n]$. ∎

Задача 27. Низата $\{a_n,\ n=1,2,\dots\}$ е дефинирана со:

$$a_1=2,\ a_{n+1}=\left[\frac{3}{2}a_n\right],\ \text{за } n=1,2,3,\dots$$

Докажете дека во низата $\{a_n,\ n=1,2,\dots\}$ има бесконечно многу непарни и бесконечно многу парни броеви.

Решение. (а) Да претпоставиме дека во низата $\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ има конечно многу непарни броеви. Тогаш постои индекс m, таков што a_n е парен број за секој $n\geq m$. Нека е $a_m=2k_0$, $k_0\in\mathbb{N}$. Тогаш,

$$a_{m+1}=\left[\frac{3}{2}a_m\right]=\left[\frac{3}{2}2k_0\right]=3k_0.$$

Бидејќи a_{m+1} е парен број, добиваме $k_0=2k_1$, $k_1\in\mathbb{N}$. Понатаму

$$a_{m+2}=\left[\frac{3}{2}a_{m+1}\right]=\left[\frac{3}{2}3k_0\right]=3^2k_1.$$

Бидејќи a_{m+2} е парен број, добиваме $k_1=2k_2$, $k_2\in\mathbb{N}$ и $k_0=2^2k_2$. Продолжувајќи ја опишаната постапка добиваме дека за секој $s\in\mathbb{N}$ постои $k_s\in\mathbb{N}$, таков што $k_0=2^sk_s$. Ова противречи на фактот дека степенот на бројот 2 во каноничниот запис на бројот k_0 е конечен број.

(б) Да претпоставиме дека во низата $\{a_n, n\in\mathbb{N}\}$ има конечно многу парни броеви. Тогаш постои индекс m, таков што a_n е непарен број за секој $n\geq m$. Нека е $a_m=2k_0+1$, $k_0\in\mathbb{N}$. Тогаш,

$$a_{m+1}=\left[\frac{3}{2}a_m\right]=\left[\frac{3}{2}(2k_0+1)\right]=3k_0+1.$$

Бидејќи a_{m+1} е непарен број, добиваме $k_0=2k_1$, $k_1\in\mathbb{N}$. Понатака, како и во случајот под (а), претпоставката доведува до противречност. ∎

Задача 28. Решете ги равенките

(а) $[x^2]=2$; (б) $[3x^2-x]=x+1$; $[x]=\frac{3}{4}x$; (г) $[x^2]=x$.

Решение. (а) Имаме $2\leq x^2<3$ или $\sqrt{2}\leq|x|<\sqrt{3}$, од што следува $\sqrt{2}\leq x<\sqrt{3}$ и $-\sqrt{3}<x\leq-\sqrt{2}$.

(б) Потребно е вредноста на изразот $x+1$, па според тоа, и вредноста на x, да биде цел број. Но, притоа и изразот $3x^2-x$ е целоброен, и дадената равенка е еквивалентна на алгебарската равенка $3x^2-x=x+1$, чии решенија ги бараме во множеството $\mathbb{Z}$. Значи $x=1$.

(в) Дадената равенка има решенија за $x\in[0,4)$, при кои $\frac{3}{4}x$ прима целобројни вредности. Значи $x=0; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}$.

(г) Јасно, x мора да биде цел број. Според тоа, $x^2=x$ т.е. $x=0$ и $x=1$. ■

Задача 29. Решете ја равенката $[x]-2\left[\frac{x}{2}\right]=1$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик

$$[x]-1=2\left[\frac{x}{2}\right].$$

Ставаме $[x]=y$ и добиваме

$$\begin{cases} y=[x] \\ \frac{y-1}{2}=\left[\frac{x}{2}\right]. \end{cases}$$

Ставаме $\frac{y-1}{2}=m$ и добиваме

$$\begin{cases} 2m+1=[x] \\ m=\left[\frac{x}{2}\right] \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2m+1\le x<2m+2 \\ 2m\le x<2m+2 \end{cases}$$

т.е. $2m+1\le x<2m+2$, за $m=0,\pm1,\pm2,\dots$ ■

Задача 30. Решете ја равенката

$$\left[\frac{x}{m}\right]=\left[\frac{x}{m-1}\right],\ m=2,3,\dots$$

Решение. Ставаме $\left[\frac{x}{m}\right]=\left[\frac{x}{m-1}\right]=y$ и добиваме

$$y\le\frac{x}{m}<\frac{x}{m-1}<y+1, \text{ т.е.}$$
$$my\le x<(m-1)(y+1).$$

За да постојат такви вредности x потребно и доволно е да

$$my<(m-1)(y+1) \text{ или } y<m-1.$$

Значи, решение на задачата е

$$my\le x<(m-1)(y+1), \text{ каде } y\in\mathbb{Z} \text{ и } y<m-1. \ ■$$

Задача 31. Определете ги сите решенија на равенката

$$\left[\frac{5+6x}{2}\right]=\frac{15x-7}{5}.$$

Решение. Нека е $\left[\frac{5+6x}{2}\right]=\frac{15x-7}{5}=y$, $y\in\mathbb{Z}$. Од $y\le\frac{5+6x}{2}<y+1$ и $x=\frac{5y+7}{15}$ добиваме

$$y\le\frac{5+6\cdot\frac{5y+7}{15}}{8}<y+1,$$

односно $40y\le10y+39<40y+40$. Значи $y\le\frac{39}{30}$ и $y>\frac{-1}{30}$ и како $y\in\mathbb{Z}$

имаме $y=1$ или $y=0$.

Ако е $y=0$, тогаш $\frac{15x-7}{5}=0$ т.е. $x=\frac{7}{15}$.

Ако е $y=1$, тогаш $\frac{15x-7}{5}=1$ т.е. $x=\frac{12}{15}$. ■

Задача 32. Одредете ги сите природни броеви n за кои важи равенството

$$\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{n}\right]=2n.$$

Решение. Прво да забележиме дека

$$\left[\sqrt[3]{n}\right]=1, \text{ за } 1\le n\le 7$$
$$\left[\sqrt[3]{n}\right]=2, \text{ за } 8\le n\le 26$$
$$\left[\sqrt[3]{n}\right]=3, \text{ за } 27\le n\le 63$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ако ставиме $f(n)=\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{n}\right]$ добиваме

$$f(n)=n, \qquad 1\le n\le 7$$
$$f(n)=2n-7, \qquad 8\le n\le 26$$
$$f(n)=3n-33, \qquad 27\le n\le 63$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Според тоа, за $n\le 26$ задачата нема решение. За $27\le n\le 63$ од равенката $3n-33=2n$ добиваме $n=33$. Ако $n\ge 64$, тогаш $f(n)$ се зголемува за 4, а $2n$ се зголемува за 2, кога n се зголемува за 1, па затоа во овој случај задачата нема решение.

Според тоа, единствено решение е $n=33$. ■

Задача 33. Во множеството природни броеви решете ја равенката

$$\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{x^3-1}\right]=400.$$

Решение. Да забележиме дека ако n е природен број, тогаш

$$\left[\sqrt[3]{n^3}\right]=\left[\sqrt[3]{n^3+1}\right]=\ldots=\left[\sqrt[3]{(n+1)^3-1}\right]$$

и освен тоа низата $n^3, n^3+1, \ldots, (n+1)^3-1$ има

$$(n+1)^3-1+n^3+1=3n^2+3n+1$$

членови. Затоа,

$$\left[\sqrt[3]{n^3}\right]+\left[\sqrt[3]{n^3+1}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{(n+1)^3-1}\right]=n(3n^2+3n+1)=3n^3+3n^2+n.$$

Според тоа,

$$\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{x^3-1}\right]=\left[\sqrt[3]{1}\right]+\left[\sqrt[3]{2}\right]+\ldots+\left[\sqrt[3]{((x-1)+1)^3-1}\right]=$$

$$=\sum_{n=1}^{x-1}(3n^3+3n^2+n)=\sum_{n=1}^{x-1}3n^3+\sum_{n=1}^{x-1}3n^2+\sum_{n=1}^{x-1}n=$$

$$=\frac{x^2(x-1)(3x+1)}{4}.$$

Значи, задачата се сведува на наоѓање на решението на равенката $\frac{x^2(x-1)(3x+1)}{4}=400$, во множеството на природни броеви.

Ако поединечно ги разгледаме случаите $x=2k$ и $x=2k+1$ наоѓаме $x=5$. ■

Задача 34. Решете ја равенката $[x]+\frac{1}{[x]}=\{x\}+\frac{1}{\{x\}}$.

Решение. Бидејќи $[x]\neq0$ и $\{x\}\neq0$, равенката можеме да ја запишеме во обликот

$$([x]-\{x\})(1-\frac{1}{[x]\{x\}})=0.$$

Забележуваме дека од равенството $[x]=\{x\}$ следува $\{x\}\in\mathbb{Z}$, т.е. $\{x\}=0$, што не е можно.

Значи, равенката има облик $[x]\{x\}=1$, и од тука имаме дека $[x]>0$, т.е. $x>0$. Ако $[x]=n$, тогаш при $n>1$, $\{x\}=\frac{1}{n}$. Конечно,

$$x=[x]+\{x\}=n+\frac{1}{n},\quad n\in\mathbb{N},\ n\geq2$$

се решенија на дадената равенка. ■

Задача 35. Решете ја равенката $\operatorname{tg}[x]\cdot\operatorname{tg}\{x\}=1$.

Решение. Дадената равенка ќе ја запишеме во обликот

$$\operatorname{tg}[x]\cdot\operatorname{tg}\{x\}=1,$$

$$\sin[x]\cdot\sin\{x\}=\cos[x]\cdot\cos\{x\},$$

$$\cos([x]+\{x\})=0 \text{ т.е. } \cos x=0.$$

Значи $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. ■

Задача 36. Даден е природен број n. Најдете го бројот на решенијата на равенката $x^2-[x^2]=(x-[x])^2$, за кои $1\leq x\leq n$.

Решение. Нека $x=k+\alpha$, каде $k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$, $0\leq\alpha<1$. Дадената равенка можеме да ја запишеме во облик $k^2+2k\alpha=\left[k^2+2k\alpha+\alpha^2\right]$. Бројот $x=k+\alpha$, каде k е фиксиран број и $0\le\alpha<1$, е решение на оваа равенка ако и само ако $2k\alpha$ е цел број, т.е. ако и само ако $\alpha\in\left\{0,\frac{1}{2k},\frac{2}{2k},\dots,\frac{2k-1}{2k}\right\}$ Според тоа, бројот на решенијата на интервалот $[k,k+1)$ е еднаков на $2k$. Бидејќи $x=n$ е решение на дадената равенка, оваа равенка има вкупно

$$1+2\left[1+2+\dots+(n-1)\right]=n^2-n+1,$$

решенија кои го задоволуваат условот $1\le x\le n$. ■

Задача 37. При кои услови постои решение на равенката

$$\left[ax^2+bx+c\right]=d,\text{ каде } a\ne0 \text{ и } d\in\mathbb{Z}.$$

Решение. Функцијата ax^2+bx+c, па според тоа, и функцијата $\left[ax^2+bx+c\right]$ е ограничена од долу ако $a>0$ и е ограничена од горе ако $a<0$. Во двата случаи точната граница на функцијата е бројот $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}\right]$. Затоа, при $a>0$ дадената равенка има решение ако и само ако $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}\right]\le d$, а при $a<0$ тој услов е $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}\right]\ge d$. ■

Задача 38. Докажете дека равенката

$$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$$

нема решение во множеството рационални броеви.

Решение. Нека рационалниот број $x=\frac{m}{n}$, каде што m и n се ненулти заемно прости цели броеви, е решение на дадената равенка. Тогаш од

$$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1\,,$$

добиваме

$$x-[x]+\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=1\,,$$

од каде што е јасно дека $x+\frac{1}{x}$ е цел број. Да го означиме тој цел број со k, т.е. нека $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=k$. Од овде добиваме

$$m^2+n^2=kmn\,,$$

од каде што следува дека m е делител на n^2 и n е делител на m^2, а бидејќи m и n се заемно прости тоа е можно само ако $|m|=|n|=1$, т.е. само за $x=\pm1$. Но, за $x=\pm1$ важи

$$\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=0\,.$$

Значи, дадената равенка нема решение во множеството рационални броеви. ■

Задача 39. Пресметајте ја вредноста на изразот

$$\left[\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3\right].$$

Решение. Нека $x_0=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$, т.е. x_0 е корен на равенката $x^3=6x+6$. Лесно се гледа, дека функцијата $f(x)=x^3-6x-6$ се анулира само за една реална вредност на x и таа е таква, што $2<x<3$. Тогаш $x_0^3=6(x_0+1)<24$ т.е. $x_0<\sqrt[3]{24}$. Од друга страна $f\left(\sqrt[3]{24}\right)>0$, а $f\left(\sqrt[3]{23}\right)<0$. Значи $\sqrt[3]{23}<x_0<\sqrt[3]{24}$, т.е.

$$\left[\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)^3\right]=23. \ ■$$

Задача 40. Дали постои природен број n таков што дробниот дел на бројот $(2+\sqrt{2})^n$ е поголем од 0,999999?

Решение. Од Њутновата биномна формула имаме

$$(2+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2} \text{ и } (2-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$$

т.е. $(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n$ е цел број. Бидејќи $(2-\sqrt{2})^n<1$, добиваме

$$\left[(2+\sqrt{2})^n\right]=(2+\sqrt{2})^n+(2-\sqrt{2})^n-1$$

и затоа

$$(2+\sqrt{2})^n-\left[(2+\sqrt{2})^n\right]=1-(2-\sqrt{2})^n.$$

Бидејќи $2-\sqrt{2}<1$, може да се избере доволно голем n таков што $(2-\sqrt{2})^n<0{,}000001$. За вака избраниот n имаме

$$(2+\sqrt{2})^n-\left[(2+\sqrt{2})^n\right]>0{,}999999. \ ■$$

Задача 41. Докажете дека за секој природен број n, бројот $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ е непарен природен број.

Решение. Бидејќи $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$ е природен број и $(2-\sqrt{3})^n<1$ добиваме дека

$$\left[(2+\sqrt{3})^n\right]=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n-1.$$

Од Њутновата биномна формула имаме $(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3}$ и $(2-\sqrt{3})^n=a_n-b_n\sqrt{3}$, па затоа $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]=2a_n-1$, т.е. $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ е непарен природен број. ■

Задача 42. Докажете, дека за секој природен број $n>4$ броевите

$$\text{(а)}\quad \left[\frac{(n-1)!}{n}\right], \qquad\qquad \text{(б)}\quad \left[\frac{(n-1)!}{n(n+1)}\right]$$

се парни.

Решение. (а) Ако n е сложен број, тогаш тврдењето е очигледно. Нека $n=p$ е прост број. Тогаш, според теоремата на Вилсон $(p-1)!+1$ се дели со p. Имаме,

$$\left[\frac{(p-1)!}{p}\right]=\left[\frac{(p-1)!+1}{p}-\frac{1}{p}\right]=\frac{(p-1)!+1}{p}-1$$

и бидејќи $(p-1)!+1$ е непарен број, следува дека и $\frac{(p-1)!+1}{p}$ е непарен, т.е $\frac{(p-1)!+1}{p}-1$ е парен број.

(б) Ако n и $n+1$ се сложени броеви и $n>4$, бројот

$$A=\frac{(n-1)!}{n(n+1)}=\frac{(n-1)!}{n}+\frac{n!}{n+1}-(n-1)!$$

е парен број.

Нека $n=p$ е прост број. Според теоремата на Вилсон имаме $p|(p-1)!+p+1$ и бидејќи $\frac{(p-1)!}{p+1}$ е парен број, добиваме дека $\frac{(p-1)!+p+1}{p+1}$ е непарен. Тогаш и бројот $\frac{(p-1)!+p+1}{p(p+1)}=A+\frac{1}{p}$ е непарен (значи и цел број). Според тоа, $\left[A+\frac{1}{p}\right]=A+\frac{1}{p}$, т.е. $[A]=\left[A+\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\right]=\left[A+\frac{1}{p}\right]-1$ е парен број.

Ако $n+1=p$ е прост број, тогаш $p|(p-1)!+1$ и $\frac{(p-2)!}{p-1}$ е парен број. Како во претходниот случај $A+\frac{1}{p}$ е непарен број, т.е. $[A]$ е парен број. ■

Задача 43. Докажете, дека за секој реален број $\alpha>0$ постојат бесконечно многу природни броеви n, такви што $n^2+1|[\alpha n]$.

Решение. Нека $n=2k^2$. Тогаш имаме

$$n^2+1=4k^4+1=(2k^2+2k+1)(2k^2-2k+1).$$

Ставаме $P(k)=2k^2+2k+1$ и $Q(k)=2k^2-2k+1$. Бидејќи полиномите P и Q неограничено растат со нараснувањето на k, постои цел број c, за кој $p=P(c)>\frac{5}{\alpha}$ и $q=Q(c)>\frac{5}{\alpha}$. Освен тоа, за секој цел број ℓ имаме $p|P(c+\ell pq)$ и $q|Q(c+\ell pq)$. Нека $P(c+\ell pq)=pr$, $Q(c+\ell pq)=qs$ и $k=\ell pq+c$. Тогаш $n^2+1=P(k)Q(k)=pqrs$.

Ќе докажеме дека секој од броевите p,q,r и s може да се ограничи од горе со $\frac{\alpha n}{4}$. Лесно се проверува, дека при $k\geq5$ важат неравенствата $r=\frac{P(k)}{p}<\frac{P(k)}{5/\alpha}<\frac{\alpha n}{4}$ и $s<\frac{\alpha n}{4}$. Бидејќи p и q зависат само од c, а n зависи и од ℓ, ℓ е произволен природен број, добиваме дека може да се избере ℓ таков, што $p<\frac{\alpha n}{4}$ и $q<\frac{\alpha n}{4}$.

Да ги разгледаме броевите

$$1,2,3,\ldots,\left[\frac{\alpha n}{4}\right],\ldots,2\left[\frac{\alpha n}{4}\right],\ldots,3\left[\frac{\alpha n}{4}\right],\ldots,[\alpha n],$$

каде $[\alpha n]\geq4\left[\frac{\alpha n}{4}\right]$. Меѓу овие броеви има 4 различни, кои се делат со p,q,r,s. Конечно, конструиравме бесконечно множество од природни броеви n, за кои $n^2+1\mid[\alpha n]$, за секој $\alpha>0$. ■

Задача 44. Нека k е произволен природен број. Докажете дека постои реален број $r>1$, кој не е цел број и $k\mid[r^n]$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека $r>1$ не е цел број и $\{u_n:n=1,2,3,\ldots\}$ е низа природни броеви, за кои $u_n-1<r^n<u_n$, т.е. $[r^n]=u_n-1$. Ставаме $u_n=r^n+s^n$, каде $0<s<1$. Останува да избереме r и s такви што r^n+s^n да биде цел број за секој n и $k\mid(r^n+s^n-1)$. Броевите r и s ќе ги избереме како корени на квадратната равенка $x^2+px+q=0$, чии коефициенти зависат од k. Тогаш $p=-(r+s)$, $q=rs$ и бидејќи u_1 и u_2 се цели броеви, добиваме дека p и q се цели броеви. Од друга страна сакаме $k\mid(r+s-1)$, па значи $r+s=mk+1$, $m\in\mathbb{N}$. Но треба да е $k\mid(r^2+s^2-1)$, а тоа значи

$$k\mid-2rs,\ \text{т.е.}\ k\mid-2r(mk+1-2r).$$

Ставаме $m=2$ и $r(2k+1-r)=k$. Добиваме

$$r=k+\frac{1}{2}+\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\ \text{ и }\ s=k+\frac{1}{2}-\sqrt{k^2+\frac{1}{4}},$$

(како корени на равенката $x^2-(2k+1)x+k=0$). Сега треба да провериме дека за така избраните r и s бројот u_n е цел број и $k\mid u_n-1$. Лесно се проверува дека

$$u_{n+2}=(2k+1)u_{n+1}-ku_n,\ \text{каде}\ u_0=2,\ u_1=2k+1.$$

Значи, $u_n\in\mathbb{Z}$. Од рекурентната равенка следува

$$u_{n+2} \equiv u_{n+1} \text{ (мод } k\text{) т.е. } u_{n+2}-1 \equiv u_{n+1}-1 \text{ (мод } k\text{)}.$$

Бидејќи $u_2-1\equiv 0$ (мод k) добиваме $u_n-1\equiv 0$ (мод k), $\forall n\in\mathbb{N}$. ■

Задача 45. Нека $f(x)=x^2+x+p$, $p\in\mathbb{N}$. Докажете дека ако сите броеви $f(0), f(1), \dots f\left(\left[\sqrt{p/3}\right]\right)$ се прости, тогаш прости се и сите броеви $f(0), f(1), \dots, f(p-2)$.

Решение. Според условот на задачата $p=f(0)$ е прост број, па значи $p\geq 2$. Јасно, меѓу вредностите на полиномот f има сложени броеви. Тоа е на пример $f(p)$. Да го избереме најмалиот природен број y, за кој $f(y)$ е сложен број и да го означиме со q најмалиот прост делител на $f(y)$. Нека претпоставиме дека $y\leq p-2$. Тогаш $q\leq\sqrt{f(y)}\leq\sqrt{(p-2)^2+(p-2)+p}<p$.

Да ја разгледаме разликата $f(y)-f(x)=(y-x)(x+y+1)$. Ако x ги прима вредностите $0,1,\dots,y-1$ тогаш $y-x$ ги прима вредностите $1,2,\dots,y$, а $x+y+1$ вредностите $y+1,\dots,2y$. Затоа, ако $q\leq 2y$ постои x, $0\leq x<y$ за кој $f(y)-f(x)$ се дели со q и значи $q|f(x)$. Но, според изборот на y бројот $f(x)$ е прост, па значи $f(x)=q$, што не е можно, бидејќи $q<p\leq x^2+x+p=f(x)$. Значи, $q>2y$ или $q\geq 2y+1$.

Бидејќи q е најмалиот прост делител на $f(y)$ добиваме $f(y)\geq q^2$ и затоа $y^2+y+p\geq 4y^2+4y+1$ т.е. $3y^2\leq p-3y-1$ и $y<\sqrt{p/3}$. Но тогаш според условот на задачата $f(y)$ е прост број, а тоа е противречност.

Добиената противречност покажува дека при $y\leq p-2$ бројот $f(y)$ не може да биде сложен број. ■

Задача 46. Нека a, b и c се такви реални броеви, што

$$[an]+[bn]=[cn], \text{ за секој } n\in\mathbb{N}.$$

Докажете, дека барем еден од броевите a и b е цел број.

Решение. Прво ќе докажеме дека $a+b=c$. Од неравенството $0\leq an-[an]<1$ следува

$$\left|\frac{[an]}{n}-a\right|<\frac{1}{n}, \text{ т.е. } \lim_{n\to\infty}\frac{[an]}{n}=a.$$

Од равенството

$$\frac{[an]}{n}+\frac{[bn]}{n}=\frac{[cn]}{n}$$

кога $n\to\infty$ добиваме $a+b=c$.

Ставаме $\alpha=a-[a]$, $\beta=b-[b]$, каде $0\le\alpha<1$, $0\le\beta<1$ и добиваме

$$[an]+[bn]=[([a]+\alpha)n]+[([b]+\beta)n]=[a]n+[b]n+[\alpha n]+[\beta n].$$

Од друга страна, $[(a+b)n]=[a]n+[b]n+[(\alpha+\beta)n]$.

Значи, задачата е еквивалентна на следната задача: Нека a, $(0\le a<1)$ и b, $(0\le b<1)$ се такви реални броеви што

$$[an]+[bn]=[(a+b)n], \text{ за секоj } n\in\mathbb{N}.$$

Докажете, дека барем еден од броевите a и b е еднаков на нула.

Да претпоставиме дека $a\ne0$ и $b\ne0$. Ќе докажеме, дека постои таков n, за коj равенството $[an]+[bn]=[(a+b)n]$ не важи. За таа цел да претпоставиме дека $a+b<1$, бидеjќи во спротивно равенството ќе биде нарушено при $n=1$.

Нека се a и b рационални броеви. Тогаш постоjат цели броеви A, B и N, за кои $0<A<N$; $0<B<N$ и $a=\frac{A}{N}$, $b=\frac{B}{N}$. Имаме,

$$[(N-1)a]=[Na-a]=[A-a]=A-1,\quad [(N-1)b]=B-1 \text{ и } [(N-1)(a+b)]=A+B-1$$

што противречи на условот на задачата.

Нека сега барем еден од броевите a и b е ирационален и за определеност да претпоставиме дека тоа е броjот a.

Jасно, постои $k\in\mathbb{Z}$, $k\ge1$, таков што $a+kb<1$ и $a+(k+1)b\ge1$. Лесно се гледа дека постоjат $m,n\in\mathbb{Z}^+$, такви што $a+kb<na-ma<1$. Притоа важи $m=[an]$, т.е. $a+kb<an+[an]<1$. Нека сега $nb-[bn]\ge b$. Тогаш, $[(a+b)n]=[an]+[bn]+1$, што не е можно. Ако $nb-[bn]<b$, тогаш $-b\le(n-1)b-[bn]<b$, што покажува дека $[b(n-1)]=[bn]-1$, т.е. $1-b\le(n-1)b-[b(n-1)]<1$. Од друга страна, $kb<(n-1)a-[an]<1-a$, од што добиваме $[(n-1)a]=[an]$. Значи,

$$(n-1)a+(n-1)b-[(n-1)a]-[(n-1)b]>1-b+kb=1+(k-1)b\ge1,$$

што значи дека даденото равенство повторно е нарушено.

Конечно, разгледани се сите можни случаи, т.е. задачата е решена. ■

Задача 47. Коj е степеновиот показател на простиот броj p во каноничното разложување на $p^n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot p^n$?

Решение. Имаме,

$$\left[\frac{p^n}{p}\right]+\left[\frac{p^n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{p^n}{p^{n-1}}\right]+\left[\frac{p^n}{p^n}\right]+\left[\frac{p^n}{p^{n+1}}\right]+\ldots=$$

$$=p^{n-1}+p^{n-2}+\ldots+p+1+0\ldots=\frac{p^n-1}{p-1}$$

е бараниот степенов показател. ■

Задача 48. Нека m е природен број и A_m е степенот на бројот 2 во каноничното разложување на $m!$. Докажете, дека во низата со општ член $a_n=\left[\frac{m}{2^n}\right]$ има точно $2\left[\frac{m}{2}\right]-A_m$ непарни членови

Решение. Јасно е дека

$$a_n-2\left[\frac{a_n}{2}\right]=\begin{cases}1, & \text{кога } a_n \text{ е непарен број}\\ 0, & \text{кога } a_n \text{ е парен број}\end{cases}$$

Затоа бројот на непарните членови во низата $\{a_n : n=1,2,3,\ldots\}$ е еднаков на

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i-2\left[\frac{a_i}{2}\right]\right)=\left[\frac{m}{2}\right]-\left[\frac{m}{2^2}\right]-\left[\frac{m}{2^3}\right]-\ldots-\left[\frac{m}{2^i}\right]-\ldots$$

и бидејќи $A_m=\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{m}{2^2}\right]+\left[\frac{m}{2^3}\right]+\ldots+\left[\frac{m}{2^i}\right]+\ldots$ горниот збир е еднаков на $2\left[\frac{m}{2}\right]-A_m$. ■

Задача 49. Со $(2m)!!$ го означуваме производот на сите парни броеви помали или еднакви на $2m$, а со $(2m+1)!!$ производот на сите непарни броеви помали или еднакви на $2m+1$, соодветно.

Најдете го степеновиот показател на простиот број p во каноничното разложување на бројот

(а) $(2m)!!$ (б) $(2m+1)!!$.

Решение. (а) $(2m)!!=m!\cdot 2^m$, па затоа при $p=2$ бараниот степенов показател е еднаков на $m+\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{m}{2^i}\right]$, каде $2^k\le m<2^{k+1}$.

Ако $p>2$, тогаш степеновиот показател е $\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{m}{p^i}\right]$, каде $p^k\le m<p^{k+1}$.

(б) $(2m+1)!!=\frac{(2m+1)!}{(2m)!!}=\frac{(2m+!)!}{m!\cdot 2^m}$. При $p>2$ имаме

$$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{2m+1}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{m}{p^i}\right], \text{ каде } p^k\le 2m+1<p^{k+1}.$$

При $p=2$ степеновиот показател е 0. ■

Задача 50. Докажете дека $\dfrac{n!}{a!b!\dots k!}$ е природен број, ако е $a+b+\dots+k=n$; $n,a,b,\dots,k\in\mathbb{N}$.

Решение. Простиот број p учествува во каноничното разложување на броевите $n!,a!,b!,\dots,k!$ соодветно со експоненти

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\dots$$
$$\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{a}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{a}{p^k}\right]+\dots$$
$$\left[\frac{b}{p}\right]+\left[\frac{b}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{b}{p^k}\right]+\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{k}{p^k}\right]+\dots\ .$$

Според тоа, експонентот во каноничното разложување на именителот, на секој прост број p е

$$\left(\left[\frac{a}{p}\right]+\left[\frac{b}{p}\right]+\dots+\left[\frac{k}{p}\right]\right)+\left(\left[\frac{a}{p^2}\right]+\left[\frac{b}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{k}{p^2}\right]\right)+\dots$$
$$\le\left[\frac{a}{p}+\frac{b}{p}+\dots+\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{a}{p^2}+\frac{b}{p^2}+\dots+\frac{k}{p^2}\right]+\dots$$
$$=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\dots$$

т.е. експонентот на простиот број p во каноничното разложување на именителот е помал или еднаков од експонентот на простиот број p во каноничното разложување на броителот. Ова важи за секој прост број, па затоа

$$\frac{n!}{a!b!\dots k!}=\frac{p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}}{p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_t^{\beta_t}}=p_1^{\alpha_1-\beta_1}p_2^{\alpha_2-\beta_2}\dots p_t^{\alpha_t-\beta_t},$$

каде $0\le\beta_i\le\alpha_i$, за $i=1,2,\dots,t$. ■

Задача 51.* Докажете дека $\dfrac{(ab)!}{a!(b!)^a}$ е природен број, за секои $a,b\in\mathbb{N}$.

Решение. Доволно е да докажеме

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{ab}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{a}{p^i}\right]-a\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{b}{p^i}\right]\geq 0, \text{ за секоj прост броj } p.$$

Нека r и s се такви природни броеви што $p^r\leq a<p^{r+1}$, $p^s\leq b<p^{s+1}$.

Тогаш, имаме

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{ab}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{a}{p^i}\right]-a\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{b}{p^i}\right]\\
&=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{ab}{p^i}\right]+\sum_{i=s+1}^{r+s}\left[\frac{ab}{p^i}\right]+\sum_{i=r+s+1}^{\infty}\left[\frac{ab}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{a}{p^i}\right]-\sum_{i=1}^{s}a\left[\frac{b}{p^i}\right]\\
&=\sum_{i=1}^{s}\left(\left[\frac{ab}{p^i}\right]-a\left[\frac{b}{p^i}\right]\right)+\sum_{i=1}^{r}\left(\left[\frac{ab}{p^{s+i}}\right]-\left[\frac{a}{p^i}\right]\right)+\sum_{i=r+s+1}^{\infty}\left[\frac{ab}{p^i}\right]\\
&\geq\sum_{i=1}^{s}\left(\left[\frac{ab}{p^i}\right]-a\left[\frac{b}{p^i}\right]\right)+\sum_{i=1}^{r}\left(\left[\frac{ap^s}{p^{s+i}}\right]-\left[\frac{a}{p^i}\right]\right)\\
&=\sum_{i=1}^{s}\left(\left[\frac{ab}{p^i}\right]-a\left[\frac{b}{p^i}\right]\right)\geq\sum_{i=1}^{s}\left(\left[\frac{ab}{p^i}\right]-\left[\frac{ab}{p^i}\right]\right)=0. \blacksquare
\end{aligned}$$

Задача 52.• (а) Нека функциjата $f(x)$ е непрекината и ненегативна на интервалот $[a,b]$. Докажете дека има

$$\sum_{k=[a]+1}^{[b]}[f(k)]$$

точки со целоброjни координати во областа $a<x\leq b$, $0<y\leq f(x)$.

(б) Нека p и q се непарни заемно прости природни броеви. Докажете дека

$$\sum_{k=1}^{[q/2]}\left[\frac{p}{q}k\right]+\sum_{k=1}^{[p/2]}\left[\frac{q}{p}k\right]=\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}.$$

(в) Докажете дека

$$\sum_{k=1}^{n^2}\left[\frac{n}{\sqrt{k}}\right]-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]\geq n^2-n.$$

(г) Нека $r>0$ и N е броjот на точките со целоброjни координати во областа $x^2+y^2\leq r^2$. Докажете дека

$$N=1+4[r]+8\sum_{k=1}^{[q/\sqrt{2}]}\left[\sqrt{r^2-k^2}\right]-4\left[\frac{r}{\sqrt{2}}\right]^2.$$

Решение. (а) Ако (x_0, y_0) е точка со целобројни координати од областа $a<x\le b$, $0<y\le f(x)$, тогаш x_0 е еден од броевите $[a]+1$, $[a]+2, \dots, [b]$, а y_0 е еден од броевите $1, 2, \dots, [f(x_0)]$.

(б) Равенството следува од N_1+N_2, каде N_1, N_2, N се броевите на точките со целобројни координати во областите

$$0<x\le\frac{q}{2},\ 0<y\le\frac{px}{q};$$
$$0<y\le\frac{p}{2},\ 0<x\le\frac{qy}{p};$$
$$0<x<\frac{q}{2},\ 0<y\le\frac{p}{2}.$$

(в) Неравенството следува од $M-N=N_1+N_2+N_3\ge N_3$, каде со M, N N_1, N_2, N_3 се означени броевите на точките со целобројни координати од областите

$$0<x\le n^2,\ 0<y\le\frac{n}{\sqrt{x}};$$
$$0<x\le n,\quad 0<y\le\frac{n}{\sqrt{x}};$$
$$0<x\le n,\ \frac{n}{x}<y\le\frac{n}{\sqrt{x}};$$
$$n<x\le n^2,\ 1<y\le\frac{n}{\sqrt{x}};$$
$$n<x\le n^2,\ 0<y\le 1.$$

(г) $N=1+4(N_1+N_2+N_3-N_4)$, каде со N_1, N_2, N_3, N_4 се означени броевите на точките со целобројни координати во областите

$$x=0,\qquad 0<y\le r;$$
$$0<x\le\frac{r}{\sqrt{2}},\ 0<y\le\sqrt{r^2-x^2};$$
$$0<y\le\frac{r}{\sqrt{2}},\ 0<x\le\sqrt{r^2-y^2};$$
$$0<x\le\frac{r}{\sqrt{2}},\ 0<y\le\frac{r}{\sqrt{2}}.\ \blacksquare$$

Задача 53. Најдете го бројот на Фибоначиевите броеви, кои не се поголеми од даден природен број n.

Решение. За k-от Фибоначиев број F_k имаме

$$F_k=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\right],$$

т.е. F_k е најблискиот цел број до $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$.

Тогаш од $F_k \le n$ следува

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k < n+\frac{1}{2},$$

од што добиваме

$$k<\log_{(1+\sqrt{5})/2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}, \quad \text{т.е.} \quad k=\left[\log_{(1+\sqrt{5})/2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}\right]. \blacksquare$$

Задача 54. Нека $\alpha>1$ е реален број и $m>1$, $n>1$ се природни броеви. Докажете го неравенството

$$\sum_{k=1}^{n^m-1}\alpha^k\left[\sqrt[m]{k}\right]\le(n-1)\frac{\alpha^{n^m}-\alpha^{(n/2)^m}}{\alpha-1}.$$

Решение. Имаме,

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n^m-1}\alpha^k\left[\sqrt[m]{k}\right]=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j^m}^{(j+1)^m-1}\alpha^k=\sum_{j=1}^{n-1}j\frac{\alpha^{(j+1)^m}-\alpha^{j^m}}{\alpha-1}=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\left((n-1)\alpha^{n^m}-\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{k^m}\right).$$

Нека $f(x)=\alpha^{(n-x)^m}+\alpha^{x^m}$, каде $1\le x\le n-1$. Бидејќи $f'(n/2)=0$ и $f''(x)>0$, добиваме $f(x)\ge2\alpha^{(n/2)^m}$. Значи, $\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{k^m}\ge(n-1)\alpha^{(n/2)^m}$ и ако замениме во (1) го добиваме бараното неравенство.

Забелешка. Задачата е решавана со помош на изводи. За функцијата $f(x)$ точката $x_0=\frac{n}{2}$ е точка на минимум на интервалот $[1,n-1]$, па затоа $f(x)\ge f(x_0)=2\alpha^{(n/2)^m}$, $\forall x\in[1,n-1]$. $\blacksquare$

ДОДАТОК: ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОД РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

Во овој додаток ќе разгледаме неколку задачи од реалните функции. Пред да преминеме на разгледување на задачите ќе дадеме краток преглед на потребните дефиниции и теореми, но притоа нема да ги презентираме доказите на теоремите, бидејќи истите можат да се најдат во повеќето книги од математичка анализа, на пример во книгата: Математичка анализа I, Д-р Н.Ивановски, Универзитет "Кирил и Методиј"-Скопје, 1991 *во која истите се презентирани со детални докази и примери во видоизменета форма. Во оваа книга може да се најде и доказот на следното тврдење:* Секој реален број е граница на монотоно растечка низа од рационални броеви, *кое се користи во неколку од разгледуваните задачи, а исто така книгата ги содржи и потребните знаења за низи реални броеви.*

На помладите читатели, кои не се сретнале со поимот непрекинатост им препорачуваме најпрво добро да ги обработат задачите кои не се означени со •, а потоа и останатите задачи. Да напоменеме дека при решавањето на задачите кои се означени со • неопходно е повеќе да се консултира презентираната теорија, а по можност и горенаведената книга од д-р Н.Иваноски.

1. ОГРАНИЧЕНИ МНОЖЕСТВА. СУПРЕМУМ И ИНФИМУМ НА МНОЖЕСТВО

Дефиниција 1. Множеството $A\subset\mathbb{R}$ го нарекуваме *ограничено од горе*, ако постои $M\in\mathbb{R}$ таков што $a\le M$ за секој $a\in A$.

Бројот M го нарекуваме *горна граница* на множеството A. Горната граница $M^{\bullet}$ на множеството A ја нарекуваме *супремум*, и ја означуваме $M^{\bullet}=\sup A$, ако секоја друга горна граница на множеството A не е помала од $M^{\bullet}$.

Во множеството реални броеви е исполнета следната аксиома, позната како аксиома за комплетност.

Аксиома 1. Секое непразно, ограничено од горе множество $A \subset \mathbb{R}$ има еден и само еден супремум.

Дефиниција 2. Множеството $A \subset \mathbb{R}$ го нарекуваме *ограничено од долу*, ако постои $m \in \mathbb{R}$ таков, што за секој $a \in A$ важи $m \le a$.

Бројот m го нарекуваме *долна граница* на множеството A. Долната граница m^{*} на множесвото A ја нарекуваме *инфимум* на множеството A, ако секоја друга долна граница m на множеството A е помала или еднаква на m^{*}. Инфимумот на множеството A го означуваме со $\inf A$.

Лема 1. Секое ограничено од долу множество A има инфимум и $\inf A = -\sup(-A)$, каде $-A = \{-x : x \in A\}$.

2. ДЕФИНИЦИЈА НА РЕАЛНА ФУНКЦИЈА. ПЕРИОДИЧНИ ФУНКЦИИ

Дефиниција 3. Нека $A \subseteq \mathbb{R}$. Секое пресликување $f: A \to \mathbb{R}$ ќе го нарекуваме *реална функција* со дефинициона област $A = D_f$.

Дефиниција 4. Нека $A = D_f$ е *симетрично множество* во однос на координатниот почеток, т.е. $x \in A \Rightarrow -x \in A$.

За функцијата f ќе велиме дека е *парна* ако е исполнет условот $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

За функцијата f ќе велиме дека е *непарна* ако е исполнет условот $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Дефиниција 5. За функцијата f, со дефинициона област $\mathbb{R}$, ќе велиме дека е *периодична* ако постои реален број $\omega \ne 0$ таков што $f(x+\omega) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Најмалиот позитивен број ω со особина $f(x+\omega) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ќе го нарекуваме *основна периода* на функцијата f.

3. ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА

Дефиниција 6. За точката $a\in A\subseteq\mathbb{R}$ ќе велиме дека е *точка на натрупување* на множеството A ако за секој $\delta>0$ важи

$$A\cap((a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\})\neq\emptyset.$$

Точката $x\in A$, која не е точка на натрупување на множеството A ја нарекуваме *изолирана* точка на множеството A.

Дефиниција 7. Нека $x_o\in\mathbb{R}$ е точка на натрупување за множеството A и $f:A\to\mathbb{R}$. Бројот $p\in\mathbb{R}$ го нарекуваме *граница* на функцијата f во точката x_o, ако

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ таков што $\forall x\in A\cap(x_o-\delta,x_o+\delta)\setminus\{x_o\}$ важи $|f(x)-p|<\varepsilon$.
Притоа ја користиме ознаката $p=\lim\limits_{x\to x_o}f(x)$.

Дефиниција 8. Нека $x_o\in\mathbb{R}$ е точка на натрупување за множеството A и $f:A\to\mathbb{R}$. Бројот $p\in\mathbb{R}$ го нарекуваме *граница* на функцијата f во точката x_o, ако за секоја низа $\{x_n:n\geq1\}$, која ги исполнува условите

(i) $\forall n\geq1$, $x_n\in A$ и $x_n\neq x_o$,

(ii) $x_n\to x_o$, $n\to\infty$,

важи $f(x_n)\to p$, $n\to\infty$.

Теорема 1. Дефинициите 5 и 6 за граница на функција се еквивалентни.

Теорема 2. (а) Ако $f(x)\to p_1$ и $f(x)\to p_2$, $x\to x_o$ тогаш $p_1=p_2$.

(б) Нека x_o е точка на натрупување за множеството A, $f:A\to\mathbb{R}$, $g:A\to\mathbb{R}$. Да претпоставиме дека постојат

$$\lim_{x\to x_o}f(x)=p\in\mathbb{R} \text{ и } \lim_{x\to x_o}g(x)=q\in\mathbb{R}.$$

Тогаш

(*i*) $\forall C\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to x_o}(Cf(x))=C\cdot\lim\limits_{x\to x_o}f(x)$,

(*ii*) $\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to x_o}f(x)+\lim\limits_{x\to x_o}g(x)$,

(*iii*) $\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)g(x))=\lim\limits_{x\to x_o}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_o}g(x)$,

(*iv*) ако дополнително претпоставиме $q\neq0$, тогаш

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

4. ЕДНОСТРАНИ ГРАНИЦИ. ЕГЗИСТЕНЦИЈА НА ГРАНИЦА НА ФУНКЦИЈА ВО ТОЧКА

Нека $A\subset\mathbb{R}$ и $x_0\in\mathbb{R}$ се такви што $\exists\gamma>0$ таков што $(x_0-\gamma,x_0)\subset A$. Притоа x_0 е точка на натрупување за множеството A.

Дефиниција 9. Бројот $p\in\mathbb{R}$ го нарекуваме ***граница од лево*** на функцијата f во точката x_0, ако $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ таков што

$$\forall x\in(x_0-\delta,x_0) \text{ важи } |f(x)-p|<\varepsilon.$$

Притоа означуваме:

$$p=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0^-).$$

Нека $A\subset\mathbb{R}$ и $x_0\in\mathbb{R}$ се такви што $\exists\gamma>0$ таков што $(x_0,x_0+\gamma)\subset A$. Притоа x_0 е точка на натрупување за множеството A.

Дефиниција 10. Бројот $p\in\mathbb{R}$ го нарекуваме ***граница од десно*** на функцијата f во точката x_0, ако $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ таков што

$$\forall x\in(x_0,x_0+\delta) \text{ важи } |f(x)-p|<\varepsilon.$$

Притоа означуваме:

$$p=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0^+).$$

Дефиниција 11. Функцијата $f:A\to\mathbb{R}$ ја нарекуваме ***монотоно неопаѓачка*** на A (***монотоно нерастечка*** на A), ако

$\forall x_1,x_2\in A$ такви што $x_1<x_2$ важи $f(x_1)\le f(x_2)$, ($f(x_1)\ge f(x_2)$).

Функцијата $f:A\to\mathbb{R}$ ја нарекуваме ***строго растечка*** на A (***строго опаѓачка*** на A), ако

$\forall x_1,x_2\in A$ такви што $x_1<x_2$ важи $f(x_1)<f(x_2)$, ($f(x_1)>f(x_2)$).

Дефиниција 12. Функцијата $f:A\to\mathbb{R}$ ја нарекуваме ***ограничена*** на множеството A, ако $\exists C\in\mathbb{R}$ таков што $\forall x\in A$ важи $|f(x)|\le C$.

Теорема 3. Нека $f: A \to \mathbb{R}$ и $\exists\delta>0$ таков што $(x_o-\delta, x_o) \subset A$. Ако

(i) функцијата f е ограничена на A, и

(ii) функцијата f монотоно не опаѓа на A,

тогаш постои $\lim_{x \to x_o^-} f(x)=f(x_o^-)$.

Теорема 4. Нека x_o е точка на натрупување на множеството A и $f: A \to \mathbb{R}$. Граница на функцијата f во точката x_o постои ако и само ако $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ таков што $\forall x, y \in A \cap (x_o-\delta, x_o+\delta) \setminus \{x_o\}$ важи $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

5. НЕПРЕКИНАТИ ФУНКЦИИ

Дефиниција 13. Нека $A \subset \mathbb{R}$, x_o е точка на натрупување на множеството A, при што $x_o \in A$ и $f: A \to \mathbb{R}$. Функцијата f ја нарекуваме непрекината во точката x_o, ако $\lim_{x \to x_o} f(x)=f(x_o)=f\left(\lim_{x \to x_o} x\right)$.

Според дефинициите 7 и 8, за функција непрекината во точка, ги добиваме следните две дефиниции, кои се еквивалентни на дефиниција 13.

Дефиниција 14. Нека $A \subset \mathbb{R}$, x_o е точка на натрупување на A при што $x_o \in A$ и $f: A \to \mathbb{R}$. Функцијата f е *непрекината во точката* x_o, ако

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ таков што $\forall x \in A \cap (x_o-\delta, x_o+\delta)$ важи $|f(x)-f(x_o)| \le \varepsilon$.

Дефиниција 15. Нека $A \subset \mathbb{R}$, x_o' е точка на натрупување на A при што $x_o \in A$ и $f: A \to \mathbb{R}$. Функцијата f е *непрекината во точката* x_o, ако за секоја низа $\{x_n\}$ која ги задоволува условите

(i) $x_n \in A$, $\forall n \ge 1$, и

(ii) $x_n \to x_o$, $n \to \infty$,

важи $f(x_n) \to f(x_o)$, $n \to \infty$.

Дефиниција 16. Функцијата f ја нарекуваме *непрекината на множеството* A, ако f е непрекината во секоја точка од A. Означуваме $f \in C(A)$.

Теорема 5. Ако функциите $f\colon A\to\mathbb{R}$ и $g\colon A\to\mathbb{R}$ се непрекинати во точката $x_o\in A$, тогаш

(i) $\forall c\in\mathbb{R}$ функцијата cf е непрекината во x_o,

(ii) $f+g$ е непрекината во точката x_o,

(iii) fg е непрекината во точката x_o,

(iv) ако $g(x_o)\neq 0$, тогаш $\dfrac{f}{g}$ е непрекината во x_o.

Теорема 6. (i) Нека f е непрекината во точката x_o и $p\in\mathbb{R}$ е таква што $f(x_o)<p$. Тогаш $\exists\delta>0, \forall x\in A\cap(x_o-\delta, x_o+\delta)$ важи $f(x)<p$.

(ii) Ако x_o е точка на натрупување на множеството $A\subset\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$, постои $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=p\in\mathbb{R}$ и ако функцијата

$$g\colon B\to\mathbb{R},\ \ B\supset\{f(x)\mid x\in A\}\cup\{p\}$$

е непрекината во точката p, тогаш

$$\lim_{x\to x_o} g(f(x))=g(f(x_o)).$$

(iii) Нека функцијата $f\colon A\to\mathbb{R}$ е непрекината во точката $x_o\in A$, $B\supset\{f(x)\mid x\in A\}$ и функцијата $g\colon B\to\mathbb{R}$ е непрекината во точката $f(x_o)$. Тогаш функцијата $h(x)=g(f(x))$, $x\in A$ е непрекината во точката x_o.

6. ФУНКЦИИ НЕПРЕКИНАТИ НА ИНТЕРВАЛ

Теорема 7. Нека $f\colon (a,b)\to\mathbb{R}$. Да претпоставиме, дека функцијата f ги задоволува условите:

(i) f строго расте на (a,b),

(ii) $f\in C((a,b))$.

Означуваме $c=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ и $d=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$, при што $-\infty\leq c<d\leq+\infty$.

Тогаш постои една и само една функција $g\colon (c,d)\to(a,b)$ која ги задоволува условите

(а) g строго расте на (c,d)

(б) $g\in C((c,d))$

(в) $\forall x\in(a,b)$ важи $g(f(x))=x$

$$\forall y\in(c,d) \text{ важи } f(g(y))=y.$$

Теорема 8. Функцијата $f \in C([a,b])$, $-\infty<a<b<+\infty$ е ограничена на интервалот $[a,b]$.

Дефиниција 17. Нека $f:A\to\mathbb{R}$. Функцијата f прима во точката $x_o\in A$ максимална (минимална) вредност, ако $\forall x\in A$ важи $f(x)\le f(x_o)$ $(f(x)\ge f(x_o))$.

Означуваме $f(x_o)=\max\limits_A f$, $(f(x_o)=\min\limits_A f)$.

Теорема 9. Функцијата $f\in C([a,b])$ прима најголема и најмала вредност на $[a,b]$, т.е.

$\exists x_\bullet\in[a,b]$ таков што $\forall x\in[a,b]$ важи $f(x_\bullet)\le f(x)$, и

$\exists x^\bullet\in[a,b]$ таков што $\forall x\in[a,b]$ важи $f(x^\bullet)\ge f(x)$.

Теорема 10. Нека претпоставиме, дека функцијата $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ги задоволува условите

(*i*) $f\in C([a,b])$, и

(*ii*) или $f(a)<0<f(b)$ или $f(a)>0>f(b)$.

Тогаш $\exists x_o\in[a,b]$ таков што $f(x_o)=0$.

Теорема 11. Нека $f\in C([a,b])$. Тогаш за секој реален број L од интервалот чии крајни точки се $f(a)$ и $f(b)$ постои $x_o\in[a,b]$ таков што $f(x_o)=L$.

7. ЗАДАЧИ

Задача 01. Најдете ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи

(а) $f(x)\cdot f(y)=f(x-y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

(б) $f(1993)=1$.

Решение. Ако постои $y\in\mathbb{R}$, таков што $f(y)=0$, тогаш според условот (а) $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, што противречи на условот (б).

Нека $f(y)\ne0$, за секој $y\in\mathbb{R}$. Ако земеме $x=2y$, имаме $f(2y)\cdot f(y)=f(y)$, па е $f(2y)=1$, за секој $y\in\mathbb{R}$. Значи $f(x)\equiv1$. ■

Задача 02. За функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ важи

(а) $f(x)\le x$, $\forall x\in\mathbb{R}$

(б) $f(x+y)\le f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Докажете дека $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Решение. Од $f(0+0)\leq f(0)+f(0)$ следува $2f(0)\geq f(0)$ т.е. $f(0)\geq 0$. Понатаму, од

$$f(x+(-x))\leq f(x)+f(-x)$$

добиваме

$$f(x)\geq f(0)-f(-x)\geq 0-f(-x)\geq -(-x)=x,$$

од што заедно со условот (а) следува $f(x)=x$. ■

Задача 03. Непразното множество G, функции од $\mathbb{R}$ во $\mathbb{R}$ од облик $f(x)=ax+b;\ a,b\in\mathbb{R}$ и $a\neq 0$, ги задоволува следните услови

(а) ако $f,g\in G$, тогаш $g\circ f\in G$, каде $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, и

(б) ако $f\in G$, $f(x)=ax+b$, тогаш инверзната функција $f^{-1}\in G$, каде $f^{-1}(x)=\dfrac{x-b}{a}$.

(в) За секој $f\in G$ постои x_f, таков што $f(x_f)=x_f$.

Докажете дека сите функции на множеството G поминуваат низ една точка.

Решение. Да забележиме дека, според условот (б) важи: $b=0$ ако и само ако функцијата $f(x)=1\cdot x+b$ припаѓа на G. Тогаш, за секој $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=x$. Затоа можеме да сметаме дека множеството содржи барем две функции $f_1(x)=a_1x+b_1$ и $f_2(x)=a_2x+b_2$, за кои важи $a_1\neq 0$ и $a_2\neq 0$. Тогаш

$$x_{f_1}=\frac{b_1}{1-a_1} \text{ и } x_{f_2}=\frac{b_2}{1-a_2}.$$

Од (а) и (б) следува $g=f_1\circ f_2\in G$, $h=f_2\circ f_1\in G$ и $g\circ h^{-1}\in G$. Според тоа имаме

$$g(x)=a_1(a_2x+b_2)+b_1,$$
$$h(x)=a_2(a_1x+b_1)+b_2,$$
$$h^{-1}(x)=\frac{x-a_2b_1-b_2}{a_1a_2},\quad a_1a_2\neq 0.$$
$$(g\circ h^{-1})(x)=x+\left[(a_1b_2+b_1)-(a_2b_1+b_2)\right].$$

Бидејќи $g\circ h^{-1}\in G$ и коефициентот пред x е 1, добиваме дека

$$(a_1b_2+b_1)-(a_2b_1+b_2)=0,$$

т.е.

$$x_{f_1}=\frac{b_1}{1-a_1}=\frac{b_2}{1-a_2}=x_{f_2},$$

што и требаше да докажеме. ■

Задача 04. Нека f и g се реални функции, дефинирани за секој реален број, такви што
$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y),\ \text{за секои } x,y\in\mathbb{R}.$$
Докажете дека: ако функцијата f не е идентички еднаква на нула и ако е $|f(x)|\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, тогаш $|g(y)|\le 1,\ \forall y\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека $M=\sup|f(x)|$, т.е. нека M е најмалиот од сите броеви K за кои важи $|f(x)|\le K,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Бројот M постои, бидејќи $|f(x)|\le 1$ и $M\ne 0$, бидејќи функцијата не е идентички еднаква на нула. Тогаш
$$|2f(x)g(y)|=|f(x+y)+f(x-y)|\le|f(x+y)|+|f(x-y)|\le 2M,$$
т.е.
$$|f(x)|\cdot|g(y)|\le M,\ \text{за секои } x,y\in\mathbb{R}.$$
Нека за некој y_0 важи $|g(y_0)|>1$. Тогаш, за секој $x\in\mathbb{R}$ имаме $|f(x)|\le\frac{M}{|g(y_0)|}<M$, па M не е супремум за $|f(x)|$, што противречи на претпоставката. ∎

Задача 05. Одредете ги сите функции f кои го пресликуваат множеството позитивни реални броеви во самото себе и кои ги задоволуваат следните услови

(а) $f(x\cdot f(y))=y\cdot f(x),\quad \forall x,y>0$

(б) $f(x)\to 0$, кога $x\to\infty$.

Решение. Ако во дадената релација ставиме $y=x$, добиваме дека постојат позитивни реални броеви z, за кои $f(z)=z$, имено таков број е секој број од обликот $x\cdot f(x)$. Ако z е произволен таков број, тогаш
$$f(z^2)=f(z\cdot f(z))=z\cdot f(z)=z^2.$$
Од последното равенство со помош на математичка индукција добиваме
$$f(z^n)=z^n,\ \forall n\in\mathbb{N}. \tag{1}$$
Понатаму, од $z=f(z)=f(1\cdot f(z))=z\cdot f(1)$, бидејќи $z\ne 0$ имаме $f(1)=1$, а од
$$z\cdot f\left(\frac{1}{z}\right)=f\left(\frac{1}{z}f(z)\right)=f\left(\frac{1}{z}z\right)=f(1)=1$$
следува $f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z}$. Од последното равенство со помош на математичка индукција добиваме

$$f\left(\frac{1}{z^n}\right)=\frac{1}{z^n},\quad \forall n\in\mathbb{N}. \qquad (2)$$

При $z>1$, од (б) и (1) добиваме противречност, а ако $z<1$, тогаш од (б) и (2) добиваме противречност. Според тоа, единствениот број со особина $f(z)=z$ е бројот $z=1$ и како оваа особина ја има секој број од обликот $x\cdot f(x)$ добиваме дека

$$f(x)=\frac{1}{x},\quad \forall x>0.$$

Очигледно, оваа функција ги задоволува условите (а) и (б) на задачата. ■

Задача 06. Докажете, дека ако периодична функција f при некој $k\neq\pm1,0$, го задоволува условот $f(kx)=k\cdot f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ тогаш таа нема најмала периода.

Решение. Нека $T>0$ е периода на функцијата и $|k|>1$. Тогаш

$$f(kx+T)=k\cdot f(x) \text{ и } f(kx+T)=f(k(x+\frac{T}{k}))=k\cdot f(x+\frac{T}{k})$$

и затоа

$$f(x)=f(x+\frac{T}{k}),\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

т.е. $\frac{T}{|k|}$ исто така е периода на функцијата. Значи, секој број од видот $\frac{T}{|k|^n}$, $n\in\mathbb{N}$ е периода за функцијата f, па затоа f нема најмала периода.

При $|k|<1$ од равенствата

$$f(kT+x)=f(k(T+\frac{x}{k}))=k\cdot f(T+\frac{x}{k})=k\cdot f(\frac{x}{k})=f(x)$$

следува дека $|k|T$ е периода, па значи и сите броеви од облик $|k|^nT$ се периоди на функцијата f. Според тоа, и во овој случај f нема најмала периода. ■

Задача 07. Функциите f и g ги имаат следните својства

(1) $\qquad f(x)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right)+f\left(\frac{x-y}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right)$

(2) $\qquad f$ е непарна, а g е парна функција.

Докажете дека важи

$$\left[f(x)\right]^2-\left[f(y)\right]^2=f(x+y)f(x-y).$$

Решение. Ако во (1) ги замениме местата на x и y добиваме

$$f(y)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{y-x}{2}\right)+f\left(\frac{y-x}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Бидејќи f е непарна, а g е парна функција имаме

$$f\left(\frac{y-x}{2}\right)=-f\left(\frac{x-y}{2}\right) \text{ и } g\left(\frac{y-x}{2}\right)=g\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

односно

(3) $$f(y)=f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right)-f\left(\frac{x-y}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Од (1) и (3) добиваме

(4) $$\left[f(x)\right]^2-\left[f(y)\right]^2=4f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{x-y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2}\right)g\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

За $y=0$ од (1) добиваме $f(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)g\left(\frac{x}{2}\right)$ т.е.

(5) $$f(x\pm y)=2f\left(\frac{x\pm y}{2}\right)g\left(\frac{x\pm y}{2}\right).$$

Од (4) и (5) следува

$$\left[f(x)\right]^2-\left[f(y)\right]^2=f(x+y)f(x-y). \ \blacksquare$$

Задача 08. Нека $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ е функција за која важи

(1) $$f(0)=f(1)=0$$

(2) $$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le f(x)+f(y),\ \ \forall x,y\in[0,1].$$

Докажете дека $f(x)\ge 0$, $\forall x\in[0,1]$ и дека $f(x)$ има бесконечно многу нули.

Решение. Ако во (2) ставиме $x=y$ добиваме

$$f(x)=f\left(\frac{x+x}{2}\right)\le f(x)+f(x)=2f(x), \text{ т.е. } f(x)\ge 0,\ \forall x\in[0,1].$$

Понатаму важи,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1+0}{2}\right)\le f(1)+f(0)=0$$

и како $f(x)\ge 0$, $\forall x\in[0,1]$ добиваме дека $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

Продолжувајќи ја постапката, со помош на математичка индукција лесно се докажува дека

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=0,\ f\left(\frac{1}{8}\right)=0,\dots,f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0,\dots$$

т.е. функцијата има бесконечно многу нули. ■

Задача 09. Најдете ги сите функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои ги задоволуваат условите

а) $f(x+f(y))=f(x+y)+1$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$; и

б) f е строго монотоно растечка.

Решение. Од условот а) следува дека за сите реални броеви x и y важи

(1) $$f(x+f(y))=f(x+y)+1=f(y+x)+1=f(y+f(x)).$$

Бидејќи строго монотоно растечка функција f е инјективна (докажете!) од (1) добиваме дека $x+f(y)=y+f(x)$. Ако во последното равенство ставиме $y=0$ добиваме дека за секоj $x\in\mathbb{R}$ важи

(2) $$f(x)=x+f(0).$$

Ако повторно го искористиме условот а) добиваме

$$x+f(y)+f(0)=x+y+f(0)+1$$

т.е.

$$f(y)=y+1,\ \forall y\in\mathbb{R}.\ \blacksquare$$

Задача 10. Дадена е функциjата $f\colon [0,1]\to[0,1]$, таква што $0,1\in f\left([0,1]\right)$ и за секои $x,y\in[0,1]$ важи

(1) $$|f(x)-f(y)|\le\frac{|x-f(x)|+|y-f(y)|}{2}$$

Докажете дека постои точно еден броj $x\in[0,1]$ таков што $f(x)=x$.

Решение. Според претпоставката, постоjат броеви $a,b\in[0,1]$ такви што $f(a)=0$ и $f(b)=1$. Со замена во (1) добиваме

$$2=2\cdot|f(a)-f(b)|\le|a-0|+|b-1|,$$

од што следува $a=1$ и $b=0$, т.е. $f(1)=0$ и $f(0)=1$.

Ќе докажеме дека $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Да претпоставиме $f\left(\frac{1}{2}\right)\ne\frac{1}{2}$. Притоа од $f\left(\frac{1}{2}\right)\ne\frac{1}{2}$ следува $f\left(\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2}$ или $f\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}$.

Ако $f\left(\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{2}$, тогаш при $x=\frac{1}{2}$ и $y=1$ од (1) следува

$$2\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-0\right|\le\left|\frac{1}{2}-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+1,\ \text{т.е.}\ f\left(\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{2}.$$

Аналогно, ако $f\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}$, тогаш при $x=\frac{1}{2}$ и $y=0$ од (1) добиваме $f\left(\frac{1}{2}\right)\ge\frac{1}{2}$.

Докажавме дека постои $x_0\in[0,1]$ таква што $f(x_0)=x_0$. Останува да докажеме дека точката x_0 е единствена. Ќе докажеме дека за $x\ne\frac{1}{2}$ не важи $f(x)=x$. Ако за $x\ne\frac{1}{2}$ важи $f(x)=x$, тогаш

$$0<2\left|x-\frac{1}{2}\right|=2\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|\le|x-f(x)|+\left|\frac{1}{2}-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|=0$$

што не е можно. $\blacksquare$

Задача 11. Одредете ги сите реални функции f, дефинирани на ненегативните реални броеви, кои примаат ненегативни реални вредности и за кои важи

(i) $f(x\cdot f(y))\cdot f(y)=f(x+y),\ \forall x,y\ge0$

(ii) $f(2)=0$, и

(iii) $f(x)\ne0$, за $0\le x<2$.

Решение. Нека $f\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$ ги задоволува условите на задачата.

Ако во (i) ставиме $y=2$, $x\geq 0$, според (ii) добиваме

$$f(x+2)=f(x\cdot f(2))\cdot f(2)=f(x\cdot 0)\cdot 0=0.$$

Значи $f(x)=0$, $\forall x\geq 2$.

Ако во (i) ставиме $y=z$, $x=2-z$, за $0\leq z<2$, добиваме

$$0=f(2)=f((2-z)f(z))\cdot f(z).$$

Бидејќи $f(z)\neq 0$ (според (iii)) следува дека $f((2-z)f(z))=0$, од каде што, користејќи го повторно (iii), добиваме $(2-z)f(z)\geq 2$, т.е. $f(z)\geq\frac{2}{2-z}$.

Ако во (i) ставиме $x=\frac{2}{f(z)}$ и $y=z$, при $0\leq z<2$, добиваме

$$0=f(2)\cdot f(z)=f\left(\frac{2}{f(z)}f(z)\right)\cdot f(z)=f\left(\frac{2}{f(z)}+z\right)$$

и ако го искористеме условот (iii) и фактот дека $f(z)\neq 0$ добиваме дека $\frac{2}{f(z)}+z\geq 2$, т.е. $f(z)\leq\frac{2}{2-z}$.

Според тоа, единствена можна функција која може да ги исполни условите на задачата е функцијата

$$(1)\qquad f(x)=\begin{cases}\frac{2}{2-x}, & 0\leq x<2\\ 0, & x\geq 2\end{cases}$$

Од дефиницијата на f следува дека таа ги задоволува условите (ii) и (iii); и го задоволува условот (i) за $y\geq 2$. Ако $0\leq y<2$, тогаш $f(y)=\frac{2}{2-y}$, па значи $x+y\geq 2$ ако и само ако $x\cdot f(y)\geq 2$. Според тоа, ако $x+y\geq 2$, тогаш $f(x\cdot f(y))=0=f(x+y)$, а ако $0\leq x+y<2$, тогаш $f(x\cdot f(y))\cdot f(y)=\frac{2}{2-x\cdot\frac{2}{2-y}}\cdot\frac{2}{2-y}=\frac{2}{2-(x+y)}=f(x+y)$.

Според тоа, функцијата (1) го задоволува и условот (1), т.е. тоа е бараната функција. ∎

Задача 12. Определете ги сите функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$(1)\qquad f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2,\text{ за секои } x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. Ставаме $f(0)=c$. Тогаш од (1) добиваме

$$(2)\qquad f(f(y))=f(0^2+f(y))=y+(f(0))^2=y+c^2,\text{ за секој } y\in\mathbb{R}.$$

Ќе докажеме дека $c=0$.

Ако двапати ја примениме релацијата (2), добиваме

(3) $$f(f(x^2+f(f(y))))=x^2+f(f(y))+c^2=x^2+y+2c^2.$$

Ако ги искористиме релациите (1) и (2) добиваме

(4) $$f(f(x^2+f(f(y)))=f(f(y)+(f(x))^2)=y+(f(f(x)))^2=$$
$$=y+(x+c^2)^2=x^2+2c^2x+c^4+y.$$

Од (3) и (4), имаме

$$x^2+2c^2x+c^4+y=x^2+y+2c^2,\text{ т.е. } 2c^2x+c^4=2c^2$$

за секој $x\in\mathbb{R}$, што е можно само за $c=0$.

Сега релацијата (2) го добива обликот

(5) $$f(f(y))=y,\text{ за секој } y\in\mathbb{R},$$

а од (1) при $y=0$ добиваме

(6) $$f(x^2)=(f(x))^2.$$

Според (6), имаме $f(t)\geq 0$, за секој $t\geq 0$.

Ќе докажеме, дека f е непарна функција, за што доволно е да провериме, дека $f(-x^2)=-f(x^2)$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Последното следува од равенствата

$$0=f(0)=f(x^2-x^2)=f(x^2+f(f(-x^2)))=f(-x^2)+(f(x))^2=f(-x^2)+f(x^2),$$

кои се исполнети заради точноста на (1) и (5).

Ќе докажеме дека $f(x^2)=x^2$, за секој $x\in\mathbb{R}$, од што заради непарноста на функцијата f ќе следува $f(y)=y$, за секој $y\in\mathbb{R}$.

Да претпоставиме дека $f(x^2)\leq x^2$, за некој $x\in\mathbb{R}$. Тогаш $x^2-f(x^2)\geq 0$, па од (6) имаме $f(x^2-(f(x))^2)\geq 0$. Но f е непарна функција, па затоа од (1) и (6) имаме

$$0\leq f(x^2-f(x^2))=f(x^2+f(-x^2))=-x^2+f(x^2)$$

т.е. $f(x^2)\geq x^2$. Од неравенствата $f(x^2)\geq x^2$ и $f(x^2)\leq x^2$ следува дека $f(x^2)=x^2$.

Аналогно се разгледува и случајот $f(x^2)\geq x^2$.

Конечно, можеме да тврдиме, дека $f(y)=y$, за секој $y\in\mathbb{R}$ и тоа е единствено решение на задачата. ■

Задача 13.* Дадени се функциите

$$f_n(x)=\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}.$$

а) Докажете дека за секој $n\in\mathbb{N}$ постои $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x)=f_n$.

б) Најдете ја врската меѓу f_n и f_{n-1}.

в) Пресметајте го f_n.

Решение. а) Да забележиме дека $f_1(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$ и дека за $n>1$ важи

$$f_n(x)=\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}=\frac{1-\cos nx}{x^2}+f_{n-1}(x)\cos nx=$$
$$=\frac{n^2}{2}\left(\frac{\sin(nx/2)}{nx/2}\right)^2+f_{n-1}(x)\cos nx.$$

Според тоа,

$$f_1=\lim_{x\to 0} f_1(x)=\frac{1}{2},\quad f_n=\lim_{x\to 0} f_n(x)=\frac{n^2}{2}+\lim_{x\to 0} f_{n-1}(x),\text{ ако е } n>1.$$

Од принципот на математичка индукција следува дека за секој природен број n постои $\lim_{x\to 0} f_n(x)$.

б) Од решението под а) следува дека $f_n=\frac{n^2}{2}+f_{n-1}$.

в) Собирајќи ги равенствата $f_k-f_{k-1}=\frac{k^2}{2}$, за $k=2,3,\ldots,n$ добиваме $f_n=f_1+\frac{1}{2}(2^2+3^2+\ldots+n^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$. ∎

Задача 14.$^\bullet$ Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е непрекината функција и

(1) $$f(x+y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Докажете дека $f(x)=f(1)x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Решение. Ако во (1) замениме $x=1$, $y=0$ добиваме

$$f(1)=f(1)+f(0)$$

од што следува $f(0)=0$.

Ако во (1) ставиме $y=-x$ добиваме

$$f(0)=f(x)+f(-x)$$

од што следува

(2) $$f(-x)=-f(x).$$

Од (1) со индукција добиваме $f(nx)=nf(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, што заедно со $f(0)=0$ и (2) дава

(3) $$f(nx)=nf(x),\ \forall n\in\mathbb{Z},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Ако $p,q\in\mathbb{Z}$ и $q\neq 0$, тогаш од (3) добиваме

(4) $$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}\left(qf\left(\frac{p}{q}\right)\right)=\frac{1}{q}f\left(q\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}f(p)=\frac{p}{q}f(1),$$

т.е.

(5) $$f(r)=rf(1),\ \forall r\in\mathbb{Q}.$$

Нека сега x е произволен реален број и $\{r_n\}$ е низа рационални броеви која конвергира кон x. Од непрекинатоста на функцијата $f(x)$ и од (5) добиваме

(6) $$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty} r_n f(1)=xf(1),\ \forall x\in\mathbb{R},$$

што и требаше да докажеме. ■

Задача 15. Најдете ги сите непрекинати функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи

$$f(x+f(y))=f(x)+y. \tag{1}$$

Решение. Ако во (1) ставиме $x=0$ добиваме

$$f(f(y))=f(0)+y. \tag{2}$$

Ако во (1) ги замениме местата на x и y и ставиме $x=0$ добиваме

$$f(y)=f(y+f(0)). \tag{3}$$

Од (2) и (3) добиваме

$$f(y)=f(y+f(0))=f(f(f(y)))=f(0)+f(y).$$

па значи $f(0)=0$ и според (2) имаме $f(f(x))=x$.

Понатаму,

$$f(x+y)=f(x+f(f(y)))=f(x)+f(y). \tag{4}$$

Според задача 14 решението на функционалната равенка (4) е $f(x)=x\cdot f(1)$.

Ако ставиме $f(1)=A$, тогаш $f(x)=Ax$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Со замена во (1) добиваме $A(x+Ay)=Ax+y$, односно $A^2y=y$, т.е. $A=\pm1$.

Значи, бараните функции се $f(x)=x$ и $f(x)=-x$. ■

Задача 16. Ако $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е непрекината функција таква што $f(f(x))=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, тогаш f има *фиксна точка*, т.е. постои точка x_o, таква што $f(x_o)=x_o$.

Решение. Функцијата f е инјективна. Имено, ако $f(x)=f(y)$, тогаш $x=f(f(x))=f(f(y))=y$.

Бидејќи f е непрекината функција и е инјективна, следува дека е монотона, на пример растечка.

Да претпоставиме дека за секој $x\in\mathbb{R}$ важи $x<f(x)$. Тогаш

$$f(x)<f(f(x))=x,$$

што е противречност. Значи, постои $x_o\in\mathbb{R}$ таков што $f(x_o)\geq x_o$. Но сега имаме $x_o=f(f(x_o))\geq f(x_o)$, па значи $x_o=f(x_o)$. ■

Задача 17. Најдете ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои ја задоволуваат равенката

$$x\cdot f(y)+y\cdot f(x)=(x+y)\cdot f(x)\cdot f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Докажете дека само две од овие функции се непрекинати.

Решение. Во дадената равенка ставаме $x=y$ и добиваме

$$2xf(x)=2x(f(x))^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Од последното равенство наоѓаме

$$f(x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R},\ \text{и}$$

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{за } x\neq 0\\ a, & \text{за } x=0, a\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Меѓу овие решенија само функциите $f(x)\equiv 0$ и $f(x)\equiv 1$ се непрекинати.

Со елементарна проверка се докажува дека добиените функции се решенија на дадената равенка. ■

Задача 18.* Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е непрекината функција и

(1) $$f(x+y)=f(x)f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Докажете дека $f(x)=a^x$ или $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Решение. Ако во (1) ставиме $x=y=0$ добиваме $f(0)=(f(0))^2$, од што следува

(2) $$f(0)=1$$

или

(3) $$f(0)=0.$$

Да го разгледаме случајот (2). Ако во (1) ставиме $y=-x$ добиваме $f(0)=f(x)f(-x)$, при што од (2) добиваме

(4) $$f(x)\neq 0 \text{ и } f(-x)=\left[f(x)\right]^{-1},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Со замена во (1) за $x=y=\frac{t}{2}$ добиваме $f(t)=\left[f\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2\geq 0$ и според (4) добиваме $f(t)>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Според тоа, функцијата $g(x)=\lg f(x)$ е добро дефинирана и непрекината функција како композиција на непрекинати функции. Притоа важи

$$g(x+y)=\lg f(x+y)=\lg f(x)f(y)=\lg f(x)+\lg f(y)=g(x)+g(y).$$

Од задача 14 следува $g(x)=\alpha x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, што значи

$$f(x)=10^{g(x)}=10^{\alpha x}=(10^{\alpha})^x=a^x,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

каде $10^{\alpha}=a$. Според тоа, кога $f(0)=1$, тогаш $f(x)=a^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Во случајот (3) од (1) следува $f(x)=f(x+0)=f(0)f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, што и требаше да докажеме. ■

Задача 19. Најдете ги непрекинатите функции $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, за кои е исполнето равенството

$$f(xy)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. Ставаме

(1) $$g(x)=f(10^x),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Тогаш

(2) $$g(x+y)=f(10^{x+y})=f(10^x 10^y)=f(10^x)+f(10^y)=g(x)+g(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

и како функцијата g е непрекината од задача 14 следува дека постои $\alpha\in\mathbb{R}$, таков што $g(x)=\alpha x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Од (1) добиваме $f(10^x)=\alpha x$ $\forall x\in\mathbb{R}$ и ако ставиме $10^x=t$ добиваме $x=\lg t$ т.е.

(3) $$f(t)=\alpha\cdot\lg t,\ t>0.$$

Според тоа, секоја непрекината функција $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, за која важи $f(xy)=f(x)+f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ има облик

$$f(x)=\alpha\cdot\lg x,\ x>0,\ \alpha\in\mathbb{R}.\ ■$$

Задача 20. Најдете ги сите непрекинати функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи

(1) $$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. Ако во (1) ставиме $y=0$ добиваме $2f\left(\frac{x}{2}\right)=f(x)+a$, каде $a=f(0)$. Ставаме $f(x)=g(x)+a$. Ако го искористиме (1) добиваме

$$g(x)+g(y)+2a=(g(x)+a)+(g(y)+a)=f(x)+f(y)=$$
$$=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x+y)+a=g(x+y)+2a.$$

Според тоа, решението на равенката (1) има облик $f(x)=g(x)+a$, каде $g(x)$ е решение на равенката

(2) $$g(x+y)=g(x)+g(y),\ g \text{ е непрекината функција.}$$

Од задача 14 добиваме $g(x)=g(1)x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Ако ставиме $f(1)=b$, добиваме $g(1)=f(1)-a=b-a$, па значи

$$f(x)=g(x)+a=g(1)x+a=(b-a)x+a,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

е решението на равенката (1). ■

Задача 21. Најдете ги непрекинатите функции $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, за кои е исполнето равенството

(1) $$f(xy)=f(x)f(y),\ \ \forall x,y\in(0,\infty).$$

Решение. Ако во (1) ставиме $x=y=1$ добиваме $f(1)=(f(1))^2$, од што следува

(2) $$f(1)=1$$

или

(3) $$f(1)=0.$$

Да го разгледаме случајот (2). Ако во (1) ставиме $y=\frac{1}{x}$ добиваме $f(1)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$, при што од (2) добиваме

(4) $$f(x)\neq 0 \text{ и } f\left(\frac{1}{x}\right)=(f(x))^{-1},\ \ \forall x\in(0,\infty).$$

Со замена во (1) за $x=\sqrt{t}$ и $y=\sqrt{t}$ добиваме $f(t)=(f(\sqrt{t}))^2\geq 0$ и според (4) имаме $f(t)>0$, $\forall t\in(0,\infty)$. Според тоа, функцијата $g(x)=\lg f(x)$ е добро дефинирана функција и таа е непрекината, како композиција на непрекинати функции. Притоа важи

$$g(xy)=\lg f(xy)=\lg f(x)f(y)=\lg f(x)+\lg f(y)=g(x)+g(y).$$

Од задача 19 следува дека $g(x)=\alpha\lg x$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $x\in(0,\infty)$, од што добиваме

$$\lg f(x)=g(x)=\alpha\lg x=\lg x^{\alpha},\ \ \forall x\in(0,\infty).$$

односно $f(x)=x^{\alpha}, \forall x\in(0,\infty)$.

Во случајот (3) од (1) следува $f(x)=f(1\cdot x)=f(1)f(x)=0$.

Конечно бараните функции се $f(x)\equiv 0$ или $f(x)=x^{\alpha}$. ■

Задача 22. Најдете ги непрекинатите функции $f:A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}$ за кои важи

(1) $$yf(x+y)f(x)-(x^2+xy)(f(x+y)-f(x))=0,\ \ \forall x,y\in A \text{ т.ш. } (x+y)\in A.$$

Решение. Ако во (1) ставиме $y=1-x$ добиваме

$$(1-x)f(1)f(x)-x(f(1)-f(x))=0,$$

и ако ставиме $f(1)=c$ добиваме

(2) $$(x(1-c)+c)f(x)=cx.$$

Можни се три случаи, и тоа

(i) $c=0$, од што следува $xf(x)=0$, односно $f(x)=0$ за $x\neq 0$ и $f(x)$ произволен реален број за $x=0$. Но, како f е непрекината функција добиваме дека $f(x)=0$ за $x\in\mathbb{R}\equiv A$ и $f(x)=0$ за $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\equiv A$.

(ii) $c=1$, од што добиваме $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}\equiv A$.

(iii) $c\neq 0$ и $c\neq 1$, од што следува

$$f(x)=\frac{cx}{x(1-c)+c} \text{ и } A\equiv\left(-\infty,\frac{c}{c-1}\right)\cup\left(\frac{c}{c-1},\infty\right). \ ■$$

Задача 23. Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е непрекината функција во $x=0$, $f(0)=1$ и $f(x)-f\left(\frac{2}{3}x\right)=x$. Одредете ја функцијата $f(x)$.

Решение. Имаме

$$f(x)=x+f\left(\frac{2}{3}x\right)=x+\frac{2}{3}x+f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2x\right)=x+\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2x+f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3x\right)=$$

$$=x\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)+f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^nx\right)=$$

$$=\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}x+f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^nx\right).$$

Кога $n\to\infty$, имаме $f(x)=3x+f(0)=3x+1$.

Решение 2. Ставаме $f(x)=g(x)+3x$. Тогаш од

$$f(x)-f\left(\frac{2}{3}x\right)=x$$

добиваме

(1) $$g(x)=g\left(\frac{2}{3}x\right).$$

Со последователна примена на (1) добиваме

$$g(x)=g\left(\left(\frac{2}{3}\right)^nx\right),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Но $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$, кога $n\to\infty$, па бидејќи g е непрекината во 0, следува $g(x)=g(0)=1$. Според тоа, $f(x)=3x+1$. ■

Задача 24. Нека функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е непрекината во точката 0 и

(1) $$f(x)+f\left(\frac{2}{3}x\right)=x,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Докажете дека $f(x)=\frac{3}{5}x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Решение. Од (1) при $x=0$ добиваме $2f(0)=0$ т.е. $f(0)=0$.

Од $f(xy)+f\left(\frac{2}{3}xy\right)=xy=y\left[f(x)+f\left(\frac{2}{3}x\right)\right]$ наоѓаме

(2) $$f(xy)-yf(x)=-\left[f\left(\frac{2}{3}xy\right)-yf\left(\frac{2}{3}x\right)\right],\ \forall x\in\mathbb{R} \text{ и } \forall y\in\mathbb{R}.$$

Во (2) ставаме $x_1=t$, $x_2=\frac{2}{3}t,\ldots,x_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}t$, и наоѓаме

$$f(ty)-yf(t)=-\left[f\left(\frac{2}{3}ty\right)-yf\left(\frac{2}{3}t\right)\right],$$

$$f\left[\frac{2}{3}ty\right]-yf\left[\frac{2}{3}t\right]=-\left[f\left[\frac{4}{9}ty\right]-yf\left[\frac{4}{9}t\right]\right],$$

. . . .

$$f\left[\frac{2^n}{3^n}ty\right]-yf\left[\frac{2^n}{3^n}t\right]=-\left[f\left[\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}ty\right]-yf\left[\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}t\right]\right],\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Според тоа,

$$f(ty)-yf(t)=(-1)^{n+1}\left[f\left[\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}ty\right]-yf\left[\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}t\right]\right],\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Од $\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}yt\to 0$ и $\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}t\to 0$, $\forall y,t\in\mathbb{R}$ и непрекинатоста на f во точката 0 добиваме $f(ty)-yf(t)=0$, т.е. $f(ty)=yf(t)$, $\forall y,t\in\mathbb{R}$. Ако $y\in\mathbb{R}$ и $t=1$ добиваме $f(y)=yf(1)$.

Останува да го определиме $f(1)$. Од $f(x)=f(1)x$ и (1) добиваме $f(1)x+f(1)\frac{2}{3}x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, т.е. $f(1)\frac{5}{3}x=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ од што следува $f(1)=\frac{3}{5}$.

Конечно $f(x)=\frac{3}{5}x$, $\forall x\in\mathbb{R}$, што и требаше да докажеме. ■

Задача 25. Најдете ги непрекинатите функции $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи

(1) $$f(x+y)=g(x)+h(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. Ако во (1) ставиме $y=0$ добиваме $g(x)=f(x)+a$, каде $a=-h(0)$. За $x=0$ добиваме $h(y)=f(y)+b$, каде $b=-g(0)$. Со замена во (1) добиваме

$$f(x+y)=f(x)+a+f(y)+b$$

односно

$$f(x+y)+a+b=(f(x)+a+b)+(f(y)+a+b).$$

Ставаме $F(x)=f(x)+a+b$ и добиваме

(2) $$F(x+y)=F(x)+F(y),$$

па од задача 14 следува $F(x)=\alpha x$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Според тоа,

$$f(x)=F(x)-a-b=\alpha x-a-b;\ g(x)=\alpha x-b \text{ и } h(x)=\alpha x-a;\quad \alpha,a,b\in\mathbb{R}.\ ■$$

Задача 26. Нека $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ е и $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ се непрекинати функции такви што $f(a)<g(a)$ и $f(b)>g(b)$. Докажете дека постои $c\in[a,b]$ таков што $f(c)=g(c)$.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $h(x)=f(x)-g(x)$. За оваа функција важи

$$h(a)=f(a)-g(a)<0<f(b)-g(b)=h(b).$$

Бидејќи функцијата h е непрекината на интервалот $[a,b]$ постои $c\in[a,b]$ таков што $h(c)=0$, односно $f(c)=g(c)$. ■

Задача 27. Нека $a>1$. Докажете дека равенката $xa^x=1$ има барем еден позитивен корен помал од 1.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=xa^x-1$ на интервалот $[0,1]$. За функцијата f важи $f(0)=-1<0<a-1=f(1)$. Бидејќи f е непрекината на интервалот и $[0,1]$ постои $x_o\in[0,1]$ таков што $f(x_o)=0$ т.е. равенката $xa^x=1$ има барем еден позитивен корен помал од 1. ■

Задача 28. Докажете дека равенката $x=e^{1/x}$ има барем еден корен поголем од 1, а помал од 2.

Решение. Да ја разгледаме функцијата $f(x)=e^{1/x}-x$ на интервалот $[1,2]$. За функција f важи $f(1)=e-1>0>e^{1/2}-2=f(2)$. Бидејќи f е непрекината на интервалот $[1,2]$, постои $x_o\in[1,2]$ таков што $f(x_o)=0$ т.е. равенката $x=e^{1/x}$ има корен поголем од 1, а помал од 2. ■

√ **Задача 29.** Нека $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е непрекината функција за која важи $0\le f(x)\le 1989$, $x\in\mathbb{R}$.

Докажете дека во интервалот $[0,2]$ постои реален број a, таков што $f(a)=a^{11}$.

Решение. Да ја разгледаме непрекинатата функција

$$g(x)=x^{11}-f(x).$$

За функцијата $g(x)$ важи

$$g(0)=-f(0)\le 0 \text{ и } g(2)=2^{11}-f(2)\ge 2^{11}-1989\ge 0.$$

Значи, постои $a\in[0,2]$ т.ш. $g(a)=0$, односно $f(a)=a^{11}$. ■

Задача 30.* Дали постои непрекината функција, определена на множеството $\mathbb{R}$, која секоја своја вредност ја прима точно два пати?

Решение. Нека $f(a)=f(b)$ и $a<b$. На интервалот $[a,b]$ непрекинатата функција $f(x)$ ги достигнува својата најмала и најголема вредност и притоа барем едната од нив се разликува од

$f(a)$. Нека тоа е најголемата вредност, која е еднаква на M и истата се добива за некој $c\in[a,b]$.

Според условите на задачата постои $d\neq c$ таков што $f(d)=M$. На почетокот да претпоставиме, дека $d\in[a,b]$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $c<d$. Сите вредности $f(x)$ на интервалот $[c,d]$ не се поголеми од M, и затоа најмалата вредност m, на функцијата $f(x)$ на интервалот $[c,d]$ е помала од $f(c)$ и истата се достигнува за некој $e\in[c,d]$. Но, тоа значи дека на секој од интервалите

$$[a,c],\quad [c,e] \text{ и } [e,d]$$

функцијата ја прима секоја вредност меѓу m и M, што противречи на условот на задачата.

Ако пак $d\notin[a,b]$, $b<d$, тогаш функцијата $f(x)$ на секој од интервалите $[a,c]$, $[c,b]$ и $[b,d]$ ја прима секоја вредност меѓу $f(a)$ и M, што повторно противречи на условот на задачата.

Аналогно, ако $d\notin[a,b]$, $d<a$, тогаш функцијата $f(x)$ на секој од интервалите $[d,a]$, $[a,c]$ и $[c,b]$ ја прима секоја вредност меѓу $f(a)$ и M, што противречи на условот на задачата.

Значи, функција со бараната особина не постои. ■

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н.Ивановски: Математичка анализа I, Универзитет "Св.Кирил и Методиј"-Скопје, 1991

[2] Ѓ.Чупона: Алгебарски структури и реални броеви, Просветно дело-Скопје, 1976

[3] V.Devide: Zadaci iz apstraktne algebre, Naučna knjiga-Beograd, 1979

[4] Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов. И.М.Яглом: Избраны задачи и теоремы элементарноы математики, Наука-Москва, 1976

[5] Z.Kadelburg, P.Mladenović: Savezna takmičenja iz matematike, DM Srbije-Beograd, 1990 god

[6] M.Ašić i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije-Beograd, 1986 god

[7] П.Кендеров, Й.Табов: Българоки олимпиади по математика, "Народна просвета"-София, 1990 год

[8] R.Đurković, Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DM Srbije-Beograd, 1991 god

[9] Регионални натпревари по математика за учениците во средните училишта во СР Македонија, Библиотека Математичка школа бр.10, Скопје 1988

[10] Републички натпревари по математика за учениците во средните училишта во СР Македонија, Библиотека Математичка школа бр.8, Скопје 1977

[11] Републички натпревари по математика за учениците во средните училишта во СР Македонија, Библиотека Математичка школа бр.9, Скопје 1988

[12] Натпревари по математика за учениците од средните училишта во СФР Југославија во 1989год, Библиотека Математичка школа бр. 12, Скопје 1989

[13] Г.А.Кудреватов: Сборник задач по теории чисел, Просвещение-Москва, 1970

ПРЕДГОВОР

I МНОЖЕСТВА И ПРЕСЛИКУВАЊА

1. За поимот множество........................ 1
2. Операции со множества...................... 3
3. Пресликувања............................... 5
4. Еквивалентни множества.....................
5. Задачи..................................... 9

II АЛГЕБРА НА ПОЛИНОМИ

1. Основна теорема на алгебрата............... 35
2. Факторизација на полиноми. Нули на полиноми........ 36
3. Нули на реален полином..................... 41
4. Виетови формули............................ 42
5. Најголем заеднички делител................. 43
6. Задачи..................................... 45

III ФУНКЦИЈАТА $[x]$ И НЕЈЗИНАТА ПРИМЕНА ВО ТЕОРИЈАТА НА БРОЕВИ

1. Функциите $[x]$ и $\{x\}$.......................... 73
2. Примена на функцијата $[x]$ во теоријата на броеви... 75
3. Задачи..................................... 76

ДОДАТОК: ИЗБРАНИ ЗАДАЧИ ОД РЕАЛНИ ФУНКЦИИ

1. Ограничени множества.Супремум и инфимум на множество 10.
2. Дефиниција на реална функција. Периодични функции... 102
3. Граница на функција........................ 103
4. Еднострани граници.Егзистенција на граница на функција во точка....... 104
5. Непрекинати функции........................ 105
6. Функции непрекинати на интервал............ 106
7. Задачи..................................... 107

ЛИТЕРАТУРА.................................... 124

Од рецензентите...

Книгата пред се е наменета за учениците од средното образование, кои се подготвуваат за учество на државните натпревари по математика, за балканските и меѓународните математички олимпијади и турнирот на градовите, но истата можат да ја користат и поширок круг на читатели, на пример, професорите по математика и студентите на Институтот за математика при Природно-математичкиот факултет.

Оваа книга е од посебен интерес за учесниците на математичките натпревари од нашата земја, бидејќи во нашата литература материјалот содржан во истата или е малку застапен или воопшто не е разгледуван...

За авторите...

Ристо Малчески е асистент по математика на Технолошко-металуршкиот факултет во Скопје. Како ученик успешно учествувал на натпреварите по математика за средното образование. Активно учествува во организацијата и спроведувањето на натпреварите по математика за учениците од средните училишта, во сите степени на натпреварувања. Уредник е на списанието СИГМА и активно работи со надарените ученици за математика.

Алекса Малчески е асистент по математика на Машинскиот факултет во Скопје. Учествувал во организирањето на натпреварите по математика за учениците од средното образование и е активен соработник на математичкото списание СИГМА.