Даниел Велинов,
Градежен факултет, Скопје

ПОЛИНОМНИ РАВЕНКИ

На почеток ќе дадеме историски преглед на методите за наоѓање на решенијата на полиномните равенки. Полиномните равенки играле значајна улога во развитокот на елементарната математика. Уште во 2000 пне. математичарите од Вавилон имале развиено метод за пресметување на решенијата на кавадратните равенки, со помош на дополнување до полн квадрат. Алгоритам за наоѓање на решенија на кубна равенка не бил најден се до шеснаесети век. Методот за наоѓање на решенијата на кубна равенка бил даден од Скипионе дел Феро и Николо Фонтана од Бреша, а подоцна Лодовико Ферари дал метод за наоѓање на решенијата на произволна равенка од четврти степен. На почетокот на деветнаесетиот век, Нилс Хенрик Абел докажал дека со помош на основните аритметички операции и коренување не постои алгоритам за наоѓање на корените на равенки со пет или повисок степен. Теоријата која ја развил Е. Галоа (една од најимпресивните апстрактни теории во математиката), која дава врска помеѓу групите и полињата го потврдува истото.

Да го разгледаме проблемот: Да се најдат сите корени на полиномната равенка

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=0\,,$$

каде $a_0,a_1,a_2,\ldots,a_n$ се комплексни броеви. Од основната теорема на Алгебра знаеме дека постојат точно n комплексни броеви кои ја исполнуваат равенката. Решенијата на оваа полиномна равенка можат да се добијат и со различни апроксимативни методи. Под решавање на равенка ќе подразбираме определување на корените на равенката преку конечен број на операции: собирање, одземање, множење, делење и коренување (кореновиот показател е природен број). На тој начин може да се определат решенијата на произволна квадратна равенка. Покрај формулите за решавање на квадратна равенка, постојат и формули за решавање на кубна равенка и равенка од четврти степен. Постојат многу примери во кои коефициентите во полиномната равенка задоволуваат некои специјални услови. Таквите равенки некогаш можат да се решат без да се користи општ метод за решавање.

Доколку решенијата на полиномната равенка се рационални, тогаш може да се искористи добро познатата теорема:

Теорема 1. Ако $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ се цели броеви и $x = \frac{a}{b}$ е корен на равенката $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$, тогаш $a \mid a_0$ и $b \mid a_n$.

Пример 1. Реши ја равенката $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 0$.

Решение. Бидејќи оваа равенка во множеството на комплексни броеви има три решенија, мора барем едно решение да биде реално (ако бројот $a + ib$ е решение на равенката, тогаш и $a - ib$ е решение на истата таа равенка). Да провериме дали тоа решение е рационален број $x = \frac{a}{b}$. Од претходната теорема, мора $a \mid 5$ и $b \mid 3$. Со проверка се утврдува дека $x = \frac{1}{3}$ е решение на равенката. Па, сега равенката може да ја запишеме како

$$(x - \tfrac{1}{3})(x^2 - 2x + 5) = 0 .$$

Јасно, решенијата на равенката се $\frac{1}{3}$, $1 + 2i$, $1 - 2i$. ■

Да забележиме дека во наредниов пример, коефициентите пред непознатата x се симетрични.

Пример 2. Реши ја равенката $x^4 + 2ax^3 + bx^2 + 2ax + 1 = 0$.

Решение. Да забележиме дека

$$(x^2 + ax + 1)^2 = x^4 + 2ax^3 + (a^2 + 2)x^2 + 2ax + 1 .$$

Значи, горната равенка може да се запише како

$$(x^2 + ax + 1)^2 - (a^2 + 2 - b)x^2 = 0 .$$

Левата страна на равенката е разлика од квадрати, па

$$(x^2 + (a + \sqrt{a^2 + 2 - b})x + 1)(x^2 + (a - \sqrt{a^2 + 2 - b})x + 1) = 0 .$$

Сега проблемот на решавање на почетната равенка го сведовме на решавање на две квадратни равенки, што заради концизност ќе биде прескокнат. ■

Последниот пример е специјален случај на т.н. реципрочна равенка, т.е. равенка која има парен степен и има облик

$$a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \dots + a_0 = 0,\ a_k = a_{2n-k},\ 0 \le k \le n .$$

Со други зборови тоа е равенка чии коефициенти се читаат исто и од лево и од десно. Со смената $z = x + x^{-1}$, решавањето на реципрочната равенка се сведува на решавање на полиномна равенка со степен n (степенот се намалува за половина од степенот на почетната равенка). Сега оваа смена ќе ја примениме на горниот пример. Откако ќе поделиме со x^2, добиваме $x^2+2ax+b+2ax^{-1}+x^{-2}=0$, па кога ќе ја ставиме смената $z=x+x^{-1}$ ја добиваме равенката $z^2+2az+(b-2)=0$, чии решенија се

$$z=-a\pm\sqrt{a^2+2-b}\ .$$

Понатаму лесно можат да се најдат решенијата на почетната равенка.

Пример 3. Реши ја равенката

$$x^4+2x^3+7x^2+6x+8=0\,.$$

Решение. Равенката може да се запише како

$$(x^2+x)^2+6(x^2+x)+8=0\,.$$

Ставајќи смена $t=x^2+x$, таа се сведува на квадратна равенка, од каде со решавање добиваме дека $t_1=-4$ и $t_2=-2$. Оттука,

$$(x^2+x+4)(x^2+x+2)=0\,.$$

Конечно, множеството на решенија на почетната равенка е

$$\{\tfrac{-1\pm i\sqrt{15}}{2},\tfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}\}\,.\ \blacksquare$$

Друг вид на полиномни равенки се оние чии корени се специфични решенија на тригонометриски функции. Полином на $2n$ од n-ти степен е полиномот $T_n(x)=\cos(n\cos^{-1}x)$. За полиномите $T_0(x),T_1(x),T_2(x),\ldots$ важи

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)\,,\ T_0(x)=1\,,\ T_1(x)=x\,.$$

Корените на равенката $T_n(x)=0$ се дадени со $x=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k=1,2,\ldots n$.

Пример 4. (Предлог за IMO 1991) Докажи дека нулите на полиномот $P(x)=x^8-92x^6+134x^4-28x^2+1$ се $x=\operatorname{tg}\frac{r\pi}{15}$, $1\le r<15$ и $\text{NZD}(r,15)=1$.

Решение. Доволно е да провериме дека единствениот полином чии нули се осумте броеви дадени во условот е $x^8-92x^6+134x^4-28x^2+1$. Да забележиме дека ако $\theta=\frac{r\pi}{15}$ за некој $1\le r<15$ и $(r,15)=1$, тогаш

$$\operatorname{tg}^2 5\theta=3 \text{ и } \operatorname{tg}^2\theta\neq 3 \qquad (*)$$

Вредностите на $\operatorname{tg}\frac{r\pi}{15}$ за $r=1,2,4,7,8,11,13,14$ се сите различни и го задоволуваат условот (*). Затоа, доволно е да најдеме равенка чии корени се $x=\operatorname{tg}\theta$, при што важи (*). Ако $x=\operatorname{tg}\theta$, тогаш

$$\operatorname{tg}5\theta = \frac{\operatorname{Im}(1+ix)^5}{\operatorname{Im}(1+ix)^5} = \frac{x(x^4-10x^2+5)}{5x^4-10x^2+1}, \text{ т.е. } \operatorname{tg}^2 5\theta = \frac{x^2(x^4-10x^2+5)^2}{(5x^4-10x^2+1)^2} = 3,$$

од каде добиваме

$$x^2(x^8-20x^6+110x^4-100x^2+25) = 3(25x^8-100x^6+110x^4-20x^2+1),$$

односно

$$x^{10}-95x^8+410x^6-430x^4+85x^2-3=0.$$

Со делење на последната равенка со x^2-3 добиваме дека

$$P(x) = x^8-92x^6+134x^4-28x^2+1$$

е полиномот чии нули се $x=\operatorname{tg}\frac{r\pi}{15}$ за $1\le r<15$ и $\mathrm{NZD}(r,15)=1$. ■

Во продолжение ќе ги дадеме методите за решавање на произволна равенка од трет и четврти степен. Нека е дадена кубната равенка

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0,\ a_3\neq 0$$

Ако поделиме со a_3 и ставиме смена $z=x+\frac{a_2}{3a_3}$, ќе добиеме равенка од облик $z^3+pz+q=0$. Без губење на општоста, врз основа на претходното, ќе дадеме метод за решевање на кубна равенка од облик $x^3+px+q=0$. За да ја решиме оваа равенка, ставаме смена $x=u+v$, па добиваме

$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0.$$

Ставаме $uv=-\frac{p}{3}$. Тогаш u^3 и v^3 се корени на равенката $z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$. Решавајќи ја оваа равенка добиваме дека $u^3,v^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{R}$, каде $R=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3$. Сега ги избираме третите корени $A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}}$ и $B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}}$ така да важи $AB=-\frac{p}{3}$. Тогаш $u=A$ и $v=B$ ги задоволуваат условите од погоре, па $x_1=A+B$ е едно решение на равенката. Нека $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\varepsilon^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ се трети комплексни корени на единицата. Останатите две решенија на кубната равенка се $x_2=\varepsilon A+\varepsilon^2 B$ и $x_3=\varepsilon^2 A+\varepsilon B$.

Пример 5. Реши ја равенката

$$x^3-3x+1=0.$$

Решение. Со смена $x=u+v$ каде $uv=1$, ја добиваме равенката $u^6+u^3+1=0$. Оттука, $u^3=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, па затоа $u=A$, $v=B$, каде

$$A=\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9} \text{ и } B=\cos\frac{2\pi}{9}-i\sin\frac{2\pi}{9}.$$

Следува дека $x=A+B=2\cos\frac{2\pi}{9}$ е едно решение на равенката

$$x^3-3x+1=0.$$

Запишувајќи ги $x_2=\varepsilon A+\varepsilon^2 B$ и $x_3=\varepsilon^2 A+\varepsilon B$ во тригонометриска форма, добиваме дека останатите две решенија се $x_2=2\cos\frac{4\pi}{9}$ и $x_3=2\cos\frac{8\pi}{9}$. ■

Корените на произволна равенка од четврти степен може да се најдат на повеќе начини. Во секој од методите, равенката од четврти степен се сведува на равенка од трети степен, која се нарекува кубна резолвента. Во методот на Ферари, равенката треба да биде од облик

$$x^4+2ax^3+bx^2+2cx+d=0.$$

Последната равенка може да ја запишеме како

$$x^4+2ax^3=-bx^2-2cx-d,$$

а со додавање на двете страни $2rx^2+(ax+r)^2$, левата страна ќе биде еднаква на $(x^2+ax+r)^2$. Ако r е избрано така да ја направи десната страна точен квадрат, тогаш решенијата на равенката може лесно да се најдат. Нека тоа не е задоволено. Тогаш десната страна е

$$(2r+a^2-b)x^2+2(ar-c)x+(r^2-d).$$

Наша цел е десната страна да ја направиме полн квадрат. За да го направиме тоа потребно е дискриминантата да биде нула, односно потребно е

$$(ar-c)^2-(2r+a^2-b)(r^2-d)=0,$$

што е еквивалентно со

$$2r^3-br^2+2(ac-d)r+(bd-a^2d-c^2)=0.$$

Последната равенка се нарекува кубна резолвента. Претпоставувајќи дека a,b,c,d се реални броеви, тогаш секогаш постои реален број кој ја задоволува кубната резолвента.

Пример 6. Реши ја равенката

$$x^4-26x^2+72x-11=0.$$

Решение. Во овој пример, $a=0$, $b=-26$, $c=36$ и $d=-11$. Кубната резолвента,

$$(-36)^2-(2r+26)(r^2+11)=0$$

има едно решение $r=5$. Додавајќи $10x^2+25$ на двете страни на равенката $x^4=26x^2-72x+11$ се добива: $(x^2+5)^2=(6x-6)^2$. Па, почетната равенка од четврти степен може да се запише како

$$(x^2-6x+11)(x^2+6x-1)=0.$$

Множеството на решенија на равенката е $\{3\pm i\sqrt{2},-3\pm\sqrt{10}\}$. ■

Задачи за самостојна работа

1. Реши ги равенките:

   а) $x^4-2x^3+3x^2-2x-3=0$ б) $x^4-5x^2-6x-5=0$

   в) $(x^2-4x)^2+(x-2)^2=10$ г) $(x^2-3x)(x-1)(x-2)=3$

   д) $8x^3+12x-7=0$
2. Равенката $x^5-209x+56=0$ има две решенија чиј производ е 1. Најди ги тие решенија.
3. Најди ги сите вредности на параметарот a така да сите решенија на равенката $x^6+3x^5+(6-a)x^4+(7-2a)x^3+(7-2a)x^2+3x+a=0$ се реални.
4. Докажи дека еден од корените на равенката $x^3+ax^2+bx+c=0$ е аритметичка средина од останатите два ако и само ако $2a^3-9ab+27c=0$.

Литература

1. E. Beklekamp, T. Rodgers, Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992.
2. A. Engel, Problem_solving Strategies, Springer-Verlag, New York, Inc., 1998.
3. E. Lozansky, C. Rouseau, Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996.
4. D. Wells, Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005.
5. Р. Малчески, За рационалните корени на полином од $n-$ ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992