Регионален натпревар 2004

I година

1. Ако x е природен број, тогаш еден од броевите $\frac{2x-5}{9}$ или $\frac{x-2}{15}$ не е цел број. Докажи!

Решение. Да претпоставиме дека за x природен број, $m=\frac{2x-5}{9}$ и $n=\frac{x-2}{15}$ се цели броеви. Тогаш, од првото равенство имаме дека $2x=9m+5$, а од второто равенство $x=15n+2$, односно $2x=30n+4$. Со изедначување на десните страни се добива $9m+5=30n+4 \Rightarrow 1=30n-9m \Rightarrow 1=3\cdot(10n-3m)$. Последното равенство не е можно за ниедни цели броеви m и n, затоа што десната страна е делива со 3, а левата не. Значи, барем еден од броевите $\frac{2x-5}{9}$ или $\frac{x-2}{15}$ не е цел број.

2А. Една продавница треба да добие 1100 бомбониери. Во складот за снабдување постојат пакети од по 70, 40 и 25 бомбониери. Цената на превозот за еден пакет е еднаква на 20, 10 и 7 денари соодветно. Какви пакети и во колкави количества продавницата треба да порача, за да превозните трошоци бидат најмали? (Пакетите не смеат да се отвораат во складот.)

Решение. *I начин.* Цената на превозот на една бомбониера од првиот вид пакети е $\frac{20}{70}=\frac{2}{7}$ ден., од вториот вид е $\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$ ден., а од третиот вид е $\frac{7}{25}$ ден. Најефтин е превозот на бомбониерите од вториот вид, потоа од третиот, а најскап е од првиот. Бидејќи, $1100:40=27,5$ следи дека може да се порачаат најмногу 27 пакети од по 40 бонбониери. Но, тогаш останувaат $1100-27\cdot 40=20$ бомбониери, што не прават цел пакет од ниеден вид. Значи, треба да се порачаат помалку од 27 пакети од вториот вид. Ако се порачаат 26 пакети од вториот вид, тогаш остануваат уште $1100-26\cdot 40=60$ бомбониери, што пак не прави цел пакет или цел број пакети од ниеден вид. Ако се порачаат 25 пакети од вториот вид, тогаш остануваат уште $1100-25\cdot 40=100$ бомбониери кои прават 4 пакети од по 25 бомбониери. Значи, за да биде најефтин превозот треба да се порачаат 25 пакети од вториот вид и 4 пакети од третиот вид.

II начин. Нека x е бројот на пакети што треба да се порачаат од првиот вид, y бројот на пакети од вториот вид и z бројот на пакети од третиот вид. Тогаш, $70x+40y+25z=1100$ и вредноста на изразот $A=20x+10y+7z$ треба да е најмала. При тоа x, y и z се цели броеви такви што $0\le x\le 15$, $0\le y\le 27$ и $0\le z\le 44$. Со замена на $z=\frac{1100-70x-40y}{25}$ во изразот A, се добива $A=308+\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}y$. Бидејќи, вредноста на изразот A е цел број, следи дека треба $5\,|\,x$ и $5\,|\,y$. Значи, вредноста на A е најмала, ако за x се земе најмалата дозволена вредност делива со 5, а за y се земе најголемата дозволена вредност делива со 5, односно вредноста на A е најмала ако $x=0$ и $y=25$. Тогаш, $z=\frac{1100-70\cdot 0-40\cdot 25}{25}=4$. Значи, за да биде најефтин превозот треба да се порачаат 25 пакети од вториот вид и 4 пакети од третиот вид.

2Б. Во три садови има вода. Ако една половина од водата во првиот сад се прелие во вториот, потоа една третина од водата во вториот сад се прелие во третиот сад и најпосле една четвртина од водата во третиот сад се прелие во првиот, тогаш во секој сад ке има по 6 литри вода. По колку литри вода имало во секој сад на почетокот?

Решение. Нека на почетокот во првиот сад имало x литри вода, во вториот y литри, а во третиот z литри.

По првото преливање, во првиот сад останале $x-\frac{x}{2}=\frac{x}{2}$ литри, во вториот $y+\frac{x}{2}$ литри, а во третиот z литри. По второто прелевање, во првиот сад има $\frac{x}{2}$ литри, во вториот

$$y+\frac{x}{2}-\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})=\frac{1}{3}(2y+x)$$

литри, а во третиот

$$z+\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})=\frac{1}{6}(6z+2y+x)$$

литри. По третото прелевање, во првиот сад има

$$\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(6z+2y+x)=\frac{1}{24}(6z+2y+13x)$$

литри, во вториот $\frac{1}{3}(2y+x)$ литри, а во третиот

$$\frac{1}{6}(6z+2y+x)-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}(6z+2y+x)=\frac{1}{8}(6z+2y+x)$$

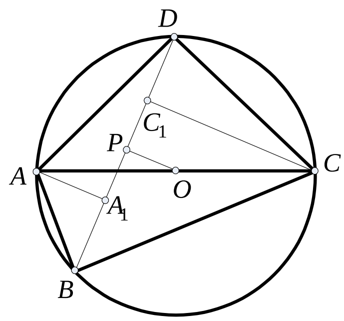
литри. Од условот на задачата, го добиваме системот

$$\frac{1}{24}(6z+2y+13x)=6\,,\ \frac{1}{3}(2y+x)=6\,,\ \frac{1}{8}(6z+2y+x)=6\,.$$

Решение на системот е $x=8$, $y=5$, $z=5$.

3. Дијагоналата AC на четириаголникот $ABCD$ впишан во кружница е дијаметар на кружницата. Докажи дека проекциите на страните AB и CD на дијагоналата BD се еднакви.

Решение. *I начин.* Нека P е подножјето на нормалата од центарот O на опишаната кружница кон дијагоналата BD, и нека A_1 и C_1 се подножјата на нормалите од A и C на BD соодветно. Тогаш, од $AA_1 \parallel OP \parallel CC_1$ и $\overline{AO}=\overline{CO}$, како радиуси на опишаната кружница,следува



дека $\overline{A_1P}=\overline{PC_1}$. Користејќи дека $\overline{BP}=\overline{PD}$, (затоа што $OP\perp BD$ и O е центар на кружницата, па затоа P е средина на тетивата BD), се добива $\overline{BA_1}=\overline{BP}-\overline{A_1P}$ $=\overline{DP}-\overline{PC_1}=\overline{C_1D}$, што требаше да се докаже.

II начин. Нека A_1 и C_1 се подножјата на нормалите од A и C на BD соодветно. Тогаш, $\triangle ABA_1\sim\triangle ACD$ ($\measuredangle AA_1B=\measuredangle ADC=90^\circ$ и $\measuredangle ABA_1=\measuredangle ACD$, како периферни агли над ист кружен лак), од каде $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$. Од $\triangle CDC_1\sim\triangle CAB$ ($\measuredangle CC_1D=\measuredangle CBA=90^\circ$ и $\measuredangle CDC_1=\measuredangle CAB$, како периферни агли над ист кружен лак), следува дека $\frac{\overline{DC_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$. Со изедначување на левите страни од равенствата се добива $\frac{\overline{BA_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DC_1}}{\overline{AB}}$, од каде $\overline{BA_1}=\overline{DC_1}$, што требаше да се докаже.

4А. Ако за позитивните реални броеви $a_1,a_2,\dots,a_{2004},b_1,b_2,\dots,b_{2004},p,q$ важи

$$a_1^2+a_2^2+\dots+a_{2004}^2=p^2,$$
$$b_1^2+b_2^2+\dots+b_{2004}^2=q^2,$$
$$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_{2004}b_{2004}=pq,$$

тогаш $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_{2004}}{b_{2004}}=\frac{p}{q}$. Докажи!

Р**ешение.** Ако првото равенство го помножиме со q^2, второто со p^2 и третото со $-2pq$, се добиваат равенствата

$$q^2a_1^2+q^2a_2^2+\dots+q^2a_{2004}^2=q^2p^2,$$
$$p^2b_1^2+p^2b_2^2+\dots+p^2b_{2004}^2=p^2q^2$$
$$-2pqa_1b_1-2pqa_2b_2-\dots-2pqa_{2004}b_{2004}=-2p^2q^2$$

Со собирање на последните три равенства добиваме

$$(qa_1-pb_1)^2+(qa_2-pb_2)^2+...+(qa_{2004}-pb_{2004})^2=0,$$

од каде заклучуваме дека

$$qa_1-pb_1=qa_2-pb_2=...=qa_{2004}-pb_{2004}=0,$$

односно дека

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_{2004}}{b_{2004}}=\frac{p}{q},$$

што требаше и да се докаже.

4Б. Ако за реалните броеви a, b и c важи $a^2+b^2=(a+b-c)^2$, $a+b\neq c$ и $b\neq c$, докажи дека $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}$.

Решение. Од условот на задачата имаме

$$a^2 = (a+b-c)^2 - b^2 = (a-c)(a+2b-c)\,,$$

$$b^2 = (a+b-c)^2 - a^2 = (b-c)(2a+b-c)\,.$$

Ако последните равенства ги замениме во левата страна на равенството што треба да се добие, имаме

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2} = \frac{(a-c)(a+2b-c)+(a-c)^2}{(b-c)(2a+b-c)+(b-c)^2} = \frac{(a-c)(a+2b-c+a-c)}{(b-c)(2a+b-c+b-c)} = \frac{2(a-c)(a+b-c)}{2(b-c)(a+b-c)} = \frac{a-c}{b-c}\,.$$

II година

1. Дадени се равенките

$$x^2 - ax + b - 4 = 0 \text{ и } y^2 - by + a - \tfrac{1}{4} = 0\,,\ a,b \in \mathbb{R}\,.$$

За кои вредности на a и b, корените не втората равенка се реципрочни вредности од корените на првата равенка?

Решение. Нека $x > 0$ и β се корени на првата равенка. Според условите на задачата $\alpha,\ \beta \neq 0$. Од Виетовите равенства, за првата равенка имаме: $\alpha + \beta = a$ и $\alpha\beta = b - 4$, а за втората: $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = b$ и $\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = a - \frac{1}{4}$. Тогаш, со замена на првите две равенки во вторите две се добива: $a = b(b-4)$ и $1 = (b-4)(a - \frac{1}{4})$. Од последните две равенки добиваме $(b-4)(b(b-4) - \frac{1}{4}) = 1$, односно ја добиваме равенката $b^3 - 8b^2 + \frac{63}{4}b = 0$. Нејзини решенија се: $b_1 = 0$, $b_2 = \frac{7}{2}$, $b_3 = \frac{9}{2}$ а соодветните вредности за a се $a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{7}{4}$, $a_3 = \frac{9}{4}$.

2. Реши го во $\mathbb{R}$ системот равенки

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy}(x^2 - xy + y^2) = 12 \\ \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

од каде што $x^2 - xy + y^2 = 36$, односно $(x+y)^2 - 3xy = 36$.

Нека $z = x + y$. Тогаш, $xy = 3z$ односно последната равенка е еквивалентна со

$$z^2 - 9z - 36 = 0\,.$$

Нејзини решенија се $z_1 = 12$ и $z_2 = -3$. Значи ги добиваме системите:

$$\begin{cases} x+y=12 \\ xy=36 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-9 \end{cases}$$

кои се еквивалентни со квадратните равенки

$$t^2 - 12t + 36 = 0 \text{ и } t^2 + 3t - 9 = 0,$$

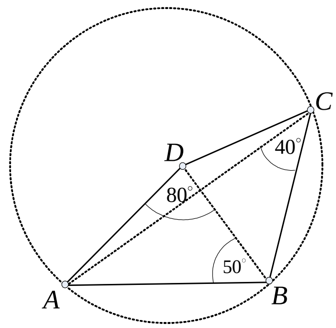
соодветно. Значи множеството решенија на дадениот систем е

$$M = \{(6,6), (\tfrac{-3+3\sqrt{3}}{2}, \tfrac{-3-3\sqrt{3}}{2}),\ (\tfrac{-3-3\sqrt{3}}{2}, \tfrac{-3+3\sqrt{3}}{2})\}.$$

3А. За комплексниот ненулти број z, важи $z^3 = \overline{z}$. Пресметај го z^{2004}.

Решение. Од $z^3 = \overline{z}$ следува $\overline{z}^3 = z$. Со множење на двете равенства добиваме $z^3\overline{z}^3 = \overline{z}z$, односно $|z|^6 = |z|^2$. Бидејќи $z \neq 0$, имаме $|z|^4 = 1$ од каде што $|z| = 1$. Тогаш $z^4 = \overline{z}\ \ z = |z|^2 = 1$ па $z^{2004} = (z^4)^{501} = 1$.

4А. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ за кој важи: $\measuredangle ABD = 50^\circ$, $\measuredangle ADB = 80^\circ$, $\measuredangle ACB = 40^\circ$ и $\measuredangle DBC = \measuredangle BDC + 30^\circ$. Најди го $\measuredangle DBC$.



Решение. Според условите на задачата добиваме дека $\measuredangle BAD = 50^\circ$, односно триаголникот ABD е рамнокрак. Нека k е кружницата со центар D и радиус $\overline{DA}$. Јасно е дека $B \in k$. Бидејќи $\measuredangle ADB = 80^\circ$, $\measuredangle ACB = 40^\circ$ и притоа $\measuredangle ADB$ е централен агол над лакот AB, следува дека $C \in k$. Значи и триаголникот BCD е рамнокрак. Од условите на задачата имаме:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \measuredangle DBC + \measuredangle DCB + \measuredangle BDC \\ &= \measuredangle BDC + 30^\circ + \measuredangle BDC + 30^\circ + \measuredangle BDC \end{aligned},$$

од каде што $\measuredangle BDC = 40^\circ$, односно $\measuredangle DBC = 70^\circ$.

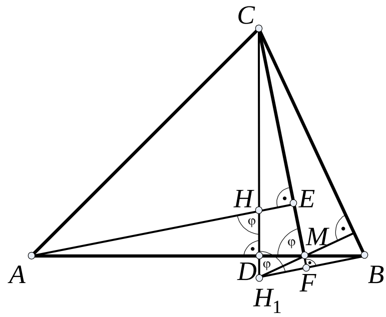
3Б. Пресметај $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$, ако $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{2}{5}$.

Решение. Нека $A = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$. Тогаш

$$A^2 = (\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x})^2 = \frac{1 + 2\sin x \cdot \cos x}{1 - 2\sin x \cdot \cos x} = \frac{1+2\cdot\frac{2}{5}}{1-2\cdot\frac{2}{5}} = 9, \text{ од каде } A = \pm 3.$$

4Б. Нека M е точка од страната AB на триаголникот ABC. Изрази го растојанието меѓу ортоцентрите на триаголниците AMC и BMC преку $\overline{AB}=c$ и $\measuredangle CMA=\varphi$.

Решение. Нека H и H_1 се ортоцентрите на триаголниците AMC и BMC, соодветно (цртеж). Од сличноста на правоаголните триаголници ADH и AEM, следува дека $\measuredangle AHD=\measuredangle AME=\varphi$. Затоа $\overline{HD}=\overline{AD}\cdot\operatorname{ctg}\varphi$. Од сличноста на правоаголните триаголници BFM и BDH_1, следува дека $\measuredangle BH_1D=\varphi$, односно $\overline{DH_1}=\overline{DB}\cdot\operatorname{ctg}\varphi$. Значи:
$\overline{HH_1}=\overline{HD}+\overline{DH_1}=(\overline{AD}+\overline{DB})\operatorname{ctg}\varphi=c\cdot\operatorname{ctg}\varphi$.



III година

1А. Нека α и β се остри агли во триаголник. Третиот агол γ е тап ако и само ако $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta<1$.

Решение. Нека $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta<1$. $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, па $\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{tg}\beta>0$. Тогаш

$$\operatorname{tg}\alpha<\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2}-\beta).$$

Функцијата $f(x)=\operatorname{tg}x$ е растечка функција на интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$, од каде мора $\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta$, односно $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. Конечно, $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)>\frac{\pi}{2}$ е тап агол.

Обратно, нека γ е тап агол. Тогаш $\operatorname{tg}\gamma<0$. Имаме

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\pi-\gamma)=-\operatorname{tg}\gamma>0.$$

Односно

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}>0 \text{ и } \operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{tg}\beta>0,$$

од каде мора $1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta>0$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta<1$.

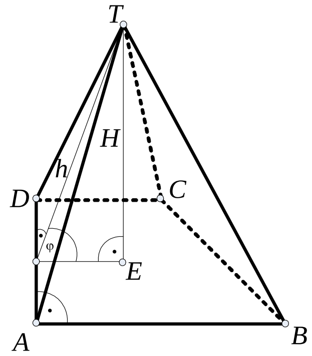
2. Основата на една пирамида е правоаголен трапез со агол 30° и подолг крак со должина 12. Бочните ѕидови на пирамидата зафаќаат еднакви агли со основата. Определи ја висината на пирамидата, ако збирот на плоштините на бочните ѕидови е 90.

Решение. Нека $ABCD$ е основата на пирамидата со врв T, при што $AB\parallel CD$, $\overline{BC}=12$, $\measuredangle BAD=90^\circ$, $\measuredangle ABC=30^\circ$. Веднаш се добива дека $\overline{AD}=\overline{BC}\sin 30^\circ=6$. Нека H е висината на пирамидата спуштена од темето T, а E нејзината подножна точка. Ако аголот што секој од ѕидовите го зафаќа со основата е φ, тогаш $\triangle ABT, \triangle BCT, \triangle CDT, \triangle DAT$ имаат еднакви висини спуштени од темето T, $h = \frac{H}{\sin\varphi}$. Од условот на задачата

$$P_{ABT} + P_{BCT} + P_{CDT} + P_{DAT} = 90,$$

следува

$$\tfrac{h}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) = 90.$$



Од друга страна, растојанието на точката E до секоја од страните на $ABCD$ изнесува $r = H\operatorname{ctg}\varphi$, па $ABCD$ е тангентен трапез со центар на впишана кружница E. Тогаш $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{DA} = 18$. Со замена во горното равенство се добива $h = 5$ и уште заклучуваме дека $r = \frac{\overline{AD}}{2} = 3$. Конечно,

$$H = \sqrt{h^2 - r^2} = 4.$$

3А. Реши ја неравенката $\log_{x^2}(3-2x) > 1$.

Решение. Прво да забележиме дека мора $x \neq 0$ и $3 - 2x > 0$. Неравенката е еквивалентна со $\log_{x^2}(3-2x) > \log_{x^2} x^2$. Ќе разгледаме два случаи:

1) $0 < x^2 < 1$ т.е. $x \in (-1,1) \setminus \{0\}$

Неравенката се сведува на системот

$$\begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ x^2 > 3 - 2x \end{cases}$$

кој на горниот интервал нема решение.

2) $x^2 > 1$ т.е. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Неравенката се сведува на системот

$$\begin{cases} 3 - 2x > 0 \\ x^2 < 3 - 2x \end{cases}$$

кој земајќи го предвид горниот интервал го има за решение интервалот $(-3,-1)$. Конечно, решението на почетната неравенка е интервалот $(-3,-1)$.

3Б. Реши ја равенката $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$.

Решение. Дефиниционата област D на равенката е определена со $x > 0$, $x \neq 1$. Дадената равенка е еквивалентна со

$$\log_x 2 - \frac{1}{\log_x 2^2} + \frac{7}{6} = 0,$$

односно со

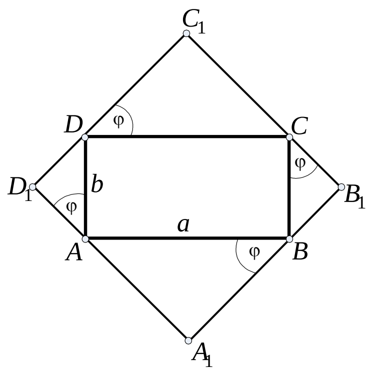
$$\log_x 2 - \frac{1}{2\log_x 2} + \frac{7}{6} = 0 .$$

Воведуваме смена $\log_x 2 = t$, со што последната равенка се трансформира во $6t^2 + 7t - 3 = 0$, со решенија $t_1 = \frac{1}{3}$ и $t_2 = -\frac{3}{2}$.

Конечно, враќајќи се во смената, добиваме $x = 8$ и $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$, вредности кои припаѓаат на дефиниционата област на појдовната равенка, па се и нејзини решенија.

4А. Околу даден правоаголник со страни a и b, опишан е друг правоаголник чија плоштина е m^2. За какви вредности на параметарот m задачата има решение?

Решение. Нека φ е аголот меѓу страните на правоаголниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. За должините на страните на опишаниот правоаголник $A_1B_1C_1D_1$ имаме:



$$\overline{A_1D_1} = \overline{AA_1} + \overline{AD_1} = a\sin\varphi + b\cos\varphi ,$$

$$\overline{A_1B_1} = \overline{BA_1} + \overline{BB_1} = a\cos\varphi + b\sin\varphi .$$

Од условот за плоштината имаме:

$$m^2 = (a\sin\varphi + b\cos\varphi)(a\cos\varphi + b\sin\varphi) ,$$

а со средување на изразот се добива

$$\sin\varphi\cos\varphi = \frac{m^2 - ab}{a^2 + b^2} ,$$

односно

$$\sin 2\varphi = \frac{2(m^2 - ab)}{a^2 + b^2} .$$

Тогаш услов задачата да има решение ќе биде $0 \le \sin 2\varphi \le 1$, односно решавајќи ја неравенката, го добиваме бараниот услов $\sqrt{ab} \le m \le \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

4B. Даден е триаголник ΔABC и точка P во внатрешноста. Нека

$$AP \cap BC = \{A_1\},\ BP \cap AC = \{B_1\},\ CP \cap AB = \{C_1\} .$$

Докажи дека

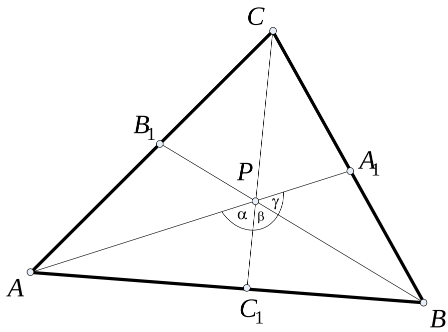
$$P_{\Delta AC_1P} \cdot P_{\Delta BA_1P} \cdot P_{\Delta CB_1P} = P_{\Delta BC_1P} \cdot P_{\Delta CA_1P} \cdot P_{\Delta AB_1P} .$$

Решение. Нека е даден триаголникот како на цртежот. Тогаш

$$P_{\Delta AC_1P} = \overline{PA} \cdot \overline{PC_1} \cdot \sin\alpha ,$$

$$P_{\Delta BA_1P} = \overline{PB}\cdot\overline{PA_1}\cdot\sin\gamma\,,$$

$$P_{\Delta CB_1P} = \overline{PC}\cdot\overline{PB_1}\cdot\sin\beta\,.$$



Уште и

$$P_{\Delta BC_1P} = \overline{PB}\cdot\overline{PC_1}\cdot\sin\beta\,,$$

$$P_{\Delta CA_1P} = \overline{PC}\cdot\overline{PA_1}\cdot\sin\alpha\,,$$

$$P_{\Delta AB_1P} = \overline{PA}\cdot\overline{PB_1}\cdot\sin\gamma\,,$$

па равенството што требаше да се докаже е еквивалентно на

$$\overline{PA}\cdot\overline{PC_1}\cdot\sin\alpha\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PA_1}\cdot\sin\gamma\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PB_1}\cdot\sin\beta =$$
$$=\overline{PB}\cdot\overline{PC_1}\cdot\sin\beta\cdot\overline{PC}\cdot\overline{PA_1}\cdot\sin\alpha\cdot\overline{PA}\cdot\overline{\overline{PB_1}}\cdot\sin\gamma$$

што е точно.

IV година

1. Најди го членот кој не го содржи x во развојот (според биномната формула) на $(2x+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x})^n$ ако збирот на сите биномни коефициенти во тој развој е 256.

Решение. Збирот на сите биномни коефициенти е

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n\,,$$

па $2^n=256=2^8$. Според тоа $n=8$. Натаму, $k+1-$ от член во развојот е

$$\binom{8}{k}(2x)^{8-k}(x^{\frac{2}{3}-1})^k=\binom{8}{k}2^{8-k}x^{8-k-\frac{k}{3}}\,,$$

па не го содржи x ако и само ако $8-k-\frac{k}{3}=0$. Оттука добиваме дека $k=6$. Значи бараниот член е седмиот и е еднаков на $\binom{8}{6}2^{8-2}=112$.

2. Во низите (a_n) и (b_n) секој член почнувајќи од третиот е еднаков на збирот на претходните два. Најди го пресекот на множествата $A=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ и $B=\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, ако $a_1=1, a_2=2, b_1=2$ и $b_2=1$.

Решение. Прво $a_3=b_3=3$, па $\{1,2,3\}\subseteq A\cap B$.

Ќе докажеме, со помош на принципот на математичка индукција, дека

$$a_{n-1}<b_n<a_n\,,\text{ за } n\geq 4 \qquad (1)$$

За $n=4$ и $n=5$ важи $a_3=3<4=b_4<5=a_4$ и $a_4=5<7=b_5<8=a_5$, па (1) е точно. Да претпоставиме дека (1) е точно за $n=k$ и $n=k+1$, т.е. $a_{k-1}<b_k<a_k$ и $a_k<b_{k+1}<a_{k+1}$. Ако ги собереме последниве две неравества добиваме

$$a_{k-1}+a_k<b_k+b_{k+1}<a_k+a_{k+1}\text{, т.е. } a_{k+1}<b_{k+2}<a_{k+2}.$$

Значи (1) важи и за $n=k+2$. Од принципот на математичка индукција заклучуваме дека (1) важи за секој $n\geq 4$.

Сега, да претпоставиме дека $a_k=b_s$ за некои $k,s\geq 4$

1) Ако $k<s$, тогаш од (1) имаме

$$a_k<a_{k+1}<b_{k+2}<a_{k+2}<b_{k+3}<...<a_{s-1}<b_s,$$

па добиваме контрадикција;

2) За $k>s$ добиваме

$$b_s<b_{s+1}<a_{s+1}<a_{s+2}<b_{s+3}<a_{s+3}<...<b_{k-1}<a_{k-1}<b_k,$$

па повторно добиваме контрадикција;

3) За $k=s$ од (1) следува $b_k<a_k$, па повторно не е можно $a_k=b_k$.

Според тоа освен првите три никои други броеви не се сретнуваат во двете низи истовремено, па $\{1,2,3\}=A\cap B$.

3 А. Нека $k,n\in\mathbb{N}$. Најди ги сите аритметички прогресии такви што односот на збирот на првите n членови и збирот на следните kn членови не зависи од n.

Решение. Нека

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+kn}}=c \tag{1}$$

и нека d е разликата на прогресијата.

Ако $d=0$, тогаш сите членови на прогресијата се еднакви, па

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{n+kn}}=\frac{na_1}{kna_{n+1}}=\frac{1}{k}.$$

Значи бараниот однос не зависи од n за секој $k\in\mathbb{N}$.

Затоа нека $d\neq 0$. Применувајќи ја формулата за сума на n и kn членови на аритметичката прогресија, од (1) добиваме: $\frac{n}{2}(a_1+a_n)=k\frac{n}{2}(a_{n+1}+a_{n+kn})c$, т.е.

$$a_1+a_1+(n-1)d=ck(a_1+nd+a_1+(n+kn-1)d).$$

Оттука

$$2a_1-2a_1kc-d+ckd+n(d-cdk^2-2cdk)=0.$$

Последново равенство е еквивалентно со (1) и од условот на задачата следува дека е исполнето за секој $n\in\mathbb{N}$. Тоа е можно ако и само ако

$$2a_1-2a_1kc-d+ckd=0 \text{ и } d-cdk^2-2cdk=0. \tag{2}$$

Првото равенство од (2) е еквивалентно со

$$(2a_1-d)(1-ck)=0.$$

Делејќи го второто равенство со $d \neq 0$ добиваме $c = \frac{1}{k(k+2)}$, па заменувајќи во $(2a_1 - d)(1 - ck) = 0$ имаме

$$1 - ck = 1 - k\frac{1}{k(k+2)} = \frac{k}{k+2} \neq 0,$$

па $d = 2a_1$. Според тоа (1) е исполнето само за прогресијата $a, 3a, 5a, \ldots$.

Обратно, за прогресијата $a, 3a, 5a, \ldots$ имаме

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+kn}} = \frac{\frac{n}{2}\left(2a + (n-1)2a\right)}{k\frac{n}{2}\left(a + 2an + a + (n + kn - 1)2a\right)} = \frac{1}{k(k+2)},$$

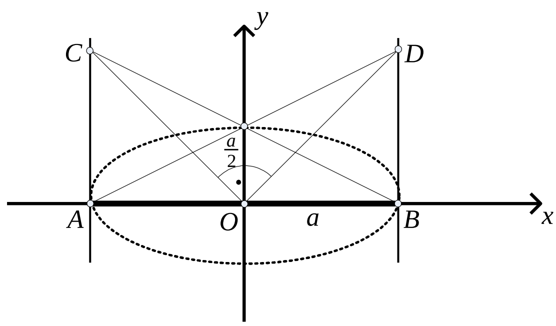
па бараниот однос не зависи од n.

Значи бараните прогресии се $a, a, a, \ldots$ и $a, 3a, 5a, \ldots$.

4А. Нека AB е дадена отсечка со должина $2a$ и средина O. Точките C и D се движат по нормалите на AB повлечени во точките A и B така што аголот COD е прав. Одреди го геометриското место на пресечните точки на правите AD и BC.

Решение. Да воведеме координатен систем со центар во O и $x-$оска правата AB. Тогаш $A(-a, 0)$ и $B(a, 0)$. Нека $C(-a, r)$ и $D(a, s)$. Тогаш правата AD има равенка $y = \frac{s}{2a}(x + a)$, а правата BC има равенка $y = -\frac{r}{2a}(x - a)$. Оттука

$$y^2 = -\frac{rs}{4a^2}(x^2 - a^2) \qquad (1)$$



Правите CO и DO имаат равенки $y = -\frac{r}{a}x$ и $y = \frac{s}{a}x$, соодветно. Уште тие се нормални, па $rs = a^2$. Заменувајќи $rs = a^2$ во (1) добиваме

$$y^2 = -\frac{1}{4}(x^2 - a^2),$$

па бараното геометриско место на точки е елипсата

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(\frac{a}{2})^2} = 1.$$

3Б. Во геометриската прогресија $a_1, a_2, \ldots$ дадени се членовите $A = a_{m+n}$ и $B = a_{m-n}$. Најди ги a_m и a_n.

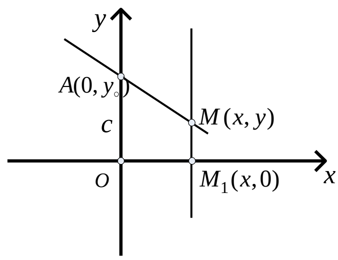
Решение. Нека q е количникот на прогресијата. Тогаш $A = a_{m+n} = a_1 q^{m+n-1}$ и $B = a_{m-n} = a_1 q^{m-n-1}$. Оттука $q^{2n} = \frac{A}{B}$, па $q = \sqrt[2n]{\frac{A}{B}}$. Според тоа

$$a_m = a_1 q^{m-1} = a_1 q^{m-n-1} q^n = a_{m-n} q^n = B(\sqrt[2n]{\tfrac{A}{B}})^n = \sqrt{AB} \text{ и}$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = a_1 q^{m+n-1} q^{-m} = a_{m+n} q^{-m} = A(\tfrac{A}{B})^{-\frac{m}{2n}} = A^{1-\frac{m}{2n}} B^{\frac{m}{2n}}.$$

4Б. Најди го геометриското место на точки во рамнина за кои што разликата од квадратите на растојанијата од дадена точка и од дадена права е постојано и еднакво на c.

Решение. Нека A е дадената точка и нека таа не лежи на дадената права l. Избираме координатен систем со $x-$ оска дадената права, а $y-$ оска нормалата на дадената права што минува низ A. Тогаш $A(0, y_0)$.



Нека $M(x, y)$ е произволна точка од бараното геометриско место и $M_1(x, 0)$ е проекцијата на M на $x-$оската. Тогаш $\overline{AM}^2 + \overline{M_1M}^2 = c$, т.е.

$$x^2 + (y - y_0)^2 - y^2 = c.$$

Оттука

$$2yy_0 = x^2 + y_0^2 - c.$$

1) Ако $y_0 \neq 0$, т.е. A не лежи на l, бараното геометриско место е параболата $y = \frac{1}{2y_0} x^2 + \frac{y_0^2 - c}{2y_0}$.

2) Ако $y_0 = 0$, т.е. A лежи на l, добиваме $x^2 = c$, па бараното геометриско место се правите $x = \sqrt{c}$ и $x = -\sqrt{c}$ за $c \geq 0$, а празно множество за $c < 0$.