Сојузен натпревар 1974

I година

1. Во координатната рамнина графички претстави го множеството точки кое го задоволува условот

$$||x|-1|+||y|-1|\le 1.$$

Решение. Да означиме

$$A=\{(x,y)|\ ||x|-1|+||y|-1|\le 1\}.$$

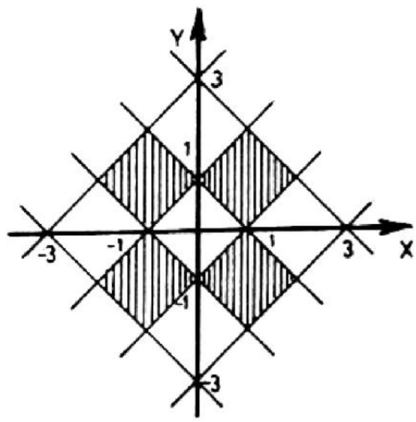
Бидејќи за секои два реални броја x,y важи

$$(x,y)\in A \Rightarrow (-x,y)\in A,$$

$$(x,y)\in A \Rightarrow (x,-y)\in A,$$

множеството A е симетрично во однос на двете координатни оски. Затоа да го разгледаме неговиот дел во првиот координатен квадрант. Тогаш дадениот услов се сведува на $|x-1|+|y-1|\le 1$, па тој определува квадрат ограничен со правите

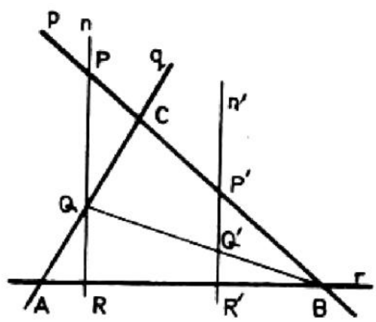
$$x+y=1,\ x+y=3,\ y=x+1,\ y=x-1.$$



Множеството A е штрафираниот дел на цртежот десно.

2. Дадени се три прави p,q,r кои се сечат во три различни точки. Конструирај права нормална на правата r таква што отсечките кои не неа ги отсекуваат правите p и q, односно q и r се еднакви (складни).

Решение. Нека претпоставиме дека правата n која ги задоволува условите на задачата е конструирана. Со P,Q,R да ги означиме редоследно нејзините пресечни точки со правите p,q,r. Понатаму, со A,B,C да ги означиме пресечните точки редоследно на правите q и r, r и p, p и q. Нека R' е произволна точка на правата r различна од B, а n' правата нормална на r која ја содржи R'. Со P' да го означиме пресекот на p и n', а со Q' пресекот на правите n' и BQ (тие пресеци постојат, цртеж десно). Од паралелноста на правите n и n' и $PQ=QR$ следува $P'Q'=Q'R'$.



Земајќи ги предвид заклуичоците од претходната анализа, конструкцијата ја реализираме на следниов начин: Избираме произволна точка R' на правата r, различна од B и конструираме нормала n' на r во точката R'. Правите n' и p не се поклопуваат (бидејќи n' не ја содржи B). Ако тие се сечат, го означуваме нивниот пресек со P' и ја определуваме средината Q' на отсечката $P'R'$. Правите BQ' и q не се совпаѓаат (бидејќи q не ја содржи B). Ако тие се сечат, да го означиме нивниот пресек со Q, а правата нормална на r која минува низ Q со n.

Ќе докажеме дека n е бараната права. По конструкција, таа е нормална на r. Бидејќи правата n' ја сече правата p, добиваме дека и на неа паралелната права n ја сече правата p и тој пресек да го означиме со P. Од паралелноста на n и n' и $P'Q'=Q'R'$ следува $PQ=QR$.

Од описот на конструкцијата следува дека задачата има едно или нема решение кога $p\perp q$ или $q\parallel BQ'$.

3. Определи шестцифрен број чии производи со броевите 2, 3, 4, 5, 6 во некој рдослед се шестцифрени броеви добиени од дадениот број со циклична замена на местата на цифрите.

Решение. Со N да го означиме бараниот број. Бидејќи $6N$ исто така е шестцифрен број, првата цифра на N е 1. Цифрата 1 е последна цифра на некој од броевите $2N, 3N, 4N, 5N$ и $6N$. Јасно, броевите $2N, 4N, 5N$ и $6N$ не може да имаат цифра на единиците 1, па затоа тоа е бројот $3N$. Бројот $3N$ има цифра на единиците 1, ако и само ако цифрата на единиците на бројот N е 7. Според тоа:

$$N= \ 1\_\,\_\,\_\,\_\,7$$
$$3N=\_\,\_\,\_\,\_\,71$$

Ако понатаму, го продолжиме ова множење: со множење на претпоследната цифра на бројот N со 3 треба да добиеме број кој завршува на 5 (за да со додавање на преносот 2 добиеме претпоследна цифра 7 на бројот $3N$) – тоа е можно само ако тоа е цифрата 5, па затоа цифрата 5 е третата цифра на бројот $3N$. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме $N=142857$ и $3N=428571$. Ни останува уште да провериме дали навистина броевите $2N, 4N, 5N, 6N$ во овој случај се добиваат од бројот N со циклична замена на цифрите, што му го препуштаме на читателот.

4. На кружница се распоредени 1974 деца кои играат игра на испаѓање на следниов начин: првото дете останува на кружницатта, второто испаѓа, третото останува, четвртото испаѓа итн. додека на кружницата не остане само едно дете. Определи кое дете останува.

Решение. Во првиот круг отпаѓаат децата со парни редни броеви – остануваат само оние со броеви од видот $2k+1$, при што најмалиот од тие броеви е 1, а најголемиот е 1973. Во вториот круг остануваат децата со броеви. такви што разликата на соседните броеви е еднаква на 4; најмалиот од тие броеви е 1, а најголемиот е 1973. Продолжуваме со ваквото заклучување и ја добиваме табелата:

Круг	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Најмал бр.	1	1	5	13	13	45	109	109	365	877
Разлика	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
Најголем бр.	1973	1973	1973	1965	1965	1965	1901	1901	1901	1901

Во последниот, единаесеттиот круг испаѓа детето со реден број 877 дете, а останува детете со реден број 1901.

II година

1. Нека m и n се позитивни броеви. Докажи дека со

$$x_1 = x_3 = x_5 = ... = x_{99} = m,$$
$$x_2 = x_4 = x_6 = ... = x_{100} = n,$$

е дадено единственото решение на системот равенки

$$nx_1 = x_2x_3 = x_4x_5 = ... = x_{98}x_{99} = mx_{100},$$
$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = ... = x_{99} + x_{100} = m+n$$

кај кое сите броеви $x_1, x_2, ..., x_{100}$ се позитивни.

Решение. Нека $(x_1, x_2, ..., x_{100})$ е произволно решение на дадениот систем кај кое сите броеви $x_1, x_2, ..., x_{100}$ се позитивни. Ќе докажеме дека $x_1 = m$.

Нека претпоставиме дека $x_1 > m$. Тогаш од $nx_1 = mx_{100}$ следува дека $x_{100} > n$, а од $x_1 + x_2 = m+n$ следува дека $x_2 < n$. Продолжувајќи со вакво заклучување добиваме $x_{99} > m$ и $x_{100} < n$, што противречи на веќе добиеното $x_{100} > n$. Според тоа, не може да биде $x_1 > m$.

На сличен начин се докажува дека не може да биде $0 < x_1 < m$. Значи, $x_1 = m$. Сега, од дадениот систем лесно се добива дека

$$x_1 = x_3 = x_5 = ... = x_{99} = m,$$
$$x_2 = x_4 = x_6 = ... = x_{100} = n,$$

Дека $(m, n, m, n..., m, n)$ е решение на системот се проверува непосредно.

2. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

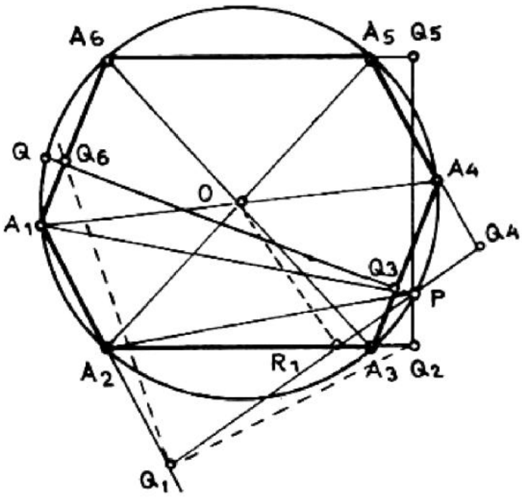
$$(x+y)^2 = xy(xy+1).$$

Производ на два последователни цели броја е квадрат на цел броја као и само ако тие броеви се $-1, 0$ или $0, 1$. Значи, мора да важи $xy = -1$ или $xy = 0$ и во двата случаја $x+y=0$. Решавајќи ги соодветните системи лесно добиваме дека единствени можни решенија на дадената равенка се: $(0,0),(1,-1),(-1,1)$. Дека тоа навистина се решенија на равенката се уверуваме со непосредна проверка.

3. Темињата на конвексниот шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ се крајни точки на дијаметрите A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 на кружница k. Точката P припаѓа на k и не се совпаѓа со ниту едно теме на шестаголникот. Нека Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,Q_5,Q_6 се нормалните проекции на точката P соодветно на правите $A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,A_4A_5$, A_5A_6,A_6A_1.

а) Докажи дека правите определени со произволни две соседни страни на шестаголникот $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ формираат прав агол.

б) Докажи дека точката P, центарот O на k и средините R_1,R_2,R_3 на отсечките Q_1Q_4,Q_2Q_5,Q_3Q_6 се концикилични.



Решение. а) Четириаголникот $A_1Q_1PQ_6$ има два спротивни прави агли (кај Q_1 и Q_6) па затоа е тетивен. Затоа важи $\measuredangle A_1Q_1Q_6=\measuredangle A_1PQ_6$. Правата PQ_6 има заедничка точка P со кружницата k и не е нормална на радиусот OP, па затоа ја сече кружницата во уште една точка, да кажеме Q. Нека претпоставиме дека точката Q_6 е меѓу точките P и Q, цртеж десно, (останатите случаи се разгледуваат аналогно). Тогаш важи $\measuredangle A_1PQ=\measuredangle A_1Q_1Q_6$. Точките Q и A_1 се симетрични на точките P и A_3 во однос на симетралата на тетивата PQ на кружницата k, па затоа лакот A_3P на оваа кружница е складен на лакот A_1Q. Тоа значи дека $\measuredangle PA_2A_3=\measuredangle A_1PQ=\measuredangle A_1Q_1Q_6$. Понатаму, четириаголникот $A_2Q_1Q_2P$ е тетивен (аглите A_2Q_1P и A_2Q_2P се прави), па затоа

$$\measuredangle PQ_1Q_2=\measuredangle PA_2Q_2=\measuredangle PA_2A_3=\measuredangle A_1Q_1Q_6.$$

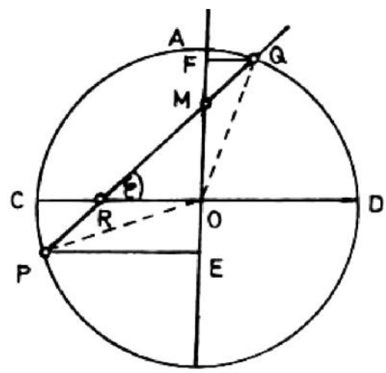
Од последното равенство и распоредот на полуправите $Q_1A_1,Q_1Q_6,Q_1P,Q_1Q_2$, кој следува од претпоставената распределба на точките Q,Q_6 и P, добиваме дека

$$\measuredangle Q_6Q_1Q_2=\measuredangle A_1Q_1P=90^\circ.$$

На сличен начин се докажува нормалноста и на останатите парови прави определени со последователните страни на шестаголникот $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$.

б) Средината R_1 на отсечката Q_1Q_4 е подножје на нормалата од точката O на правата Q_1Q_4, бидејќи правите A_1A_2 и A_5A_4, а со нив и точките Q_1 и Q_4 се симетрични во однос на таа нормала. Затоа $\measuredangle OR_1P$ е прав, па точката R_1 припаѓа на кружницата со дијаметар OP. СЛично важи и за точките R_2 и R_3.

4. Дадени се два заемно нормални дијаметри AB и CD на кружница со центар O и радиус r. На отсечката OA е избрана точка M таква што $OM=\frac{r}{\sqrt{3}}$. Права која минува низ M ги сече правата CD во точка R и дадената кружница во точките P и Q така што точките P и R се од иста страна на точката M. Докажи дека $\frac{1}{MQ}=\frac{1}{MP}+\frac{1}{MR}$.



Решение. Ако дадената права е нормална на правата CD, релацијата $\frac{1}{MQ}=\frac{1}{MP}+\frac{1}{MR}$ се проверува со непосредни пресметувања. Нека претпоставиме дека тоа не е случај и со φ да го означиме остриот агол меѓу тие прави, а со E и F нормалните проекции, соодветно, на точките P и Q на правата AB, цртеж десно. Тогаш

$MR=\frac{r}{\sqrt{3}\sin\varphi}$, $ME=MP\sin\varphi$, $MF=MQ\sin\varphi$.

Со примена на Питагоровата теорема добиваме

$$\begin{aligned}MP^2&=ME^2+PE^2=ME^2+OP^2-OE^2\\&=ME^2+r^2-(ME-\tfrac{r}{\sqrt{3}})^2\\&=\tfrac{2}{3}r^2+\tfrac{2r}{\sqrt{3}}MP\sin\varphi.\end{aligned}$$

Едното решение на последната квадратна равенка е негативно, па затоа

$$MP=r(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{2+\sin^2\varphi}{3}}).$$

На сличен начин се добива

$$MQ=r(-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{2+\sin^2\varphi}{3}}).$$

Сега лесно се проверува дека $\frac{1}{MQ}=\frac{1}{MP}+\frac{1}{MR}$.

III година

1. Реши ја равенката
$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}.$$

Решение. Од дадената равенка со квадрирања следува равенката
$$(x-\tfrac{1}{x})^2+2\sqrt{(x^2+x)(1+\tfrac{1}{x^2})}=0.$$
Оттука следува $x-\frac{1}{x}=0$, односно $x=1$ или $x=-1$. Со непосредна проверка добиваме дека $x=1$ не е решение на почетната равенка, а $x=-1$ е нејзино решение.

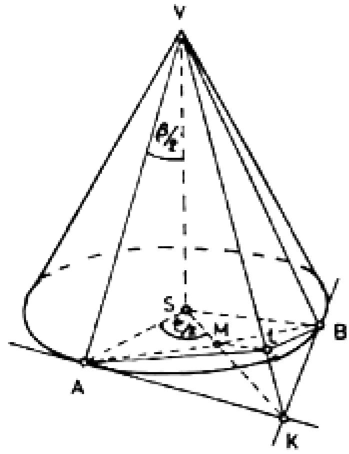
2. Определи го аголот α ако
$$\operatorname{ctg}\alpha=2+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},\ \operatorname{ctg}2\alpha=2+\sqrt{a},$$
каде a,b,c се природни броеви кои не се деливи со 4, а $\sqrt{a},\sqrt{bc}$ се ирационални броеви.

Решение. Од дадените претпоставки следува
$$2+\sqrt{a}=\operatorname{ctg}2\alpha=\tfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=\tfrac{(2+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-1}{2(2+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})},$$
од каде по средувањето добиваме
$$4\sqrt{a}-2\sqrt{bc}=b+c-a-5.$$
Десната страна на последната релација е цел број, да го означиме со d. Од $4\sqrt{a}-2\sqrt{bc}=d$ следува $4d\sqrt{bc}=4bc+d^2-16a$, па како по претпоставка бројот $\sqrt{bc}$ е ирационален, единствена можност е $d=0$. Понатаму, добиваме $4a=bc$ и $a+5=b+c$. Броевите b и c не се деливи со 4, па од $4a=bc$ следува дека $b=2b'$ и $c=2c'$, каде b',c' се непарни цели броеви. Сега добиваме $a=b'c'$ и $a+5=2(b'+c')$, од каде со елиминација на a добиваме $c'(b'-2)=2b'-5$. Но, b' е непарен, па затоа $b'\neq 2$ и од последното равенство следува $c'=2-\frac{1}{b'-2}$. За да c' е цел број потребно и доволно е $b'=1$ или $b'=3$. Лесно се проверува дека во овие случаи соодветните тројки се $a=3,b=6,c=2$, односно $a=3,b=2,c=6$, кои ги задоволуваат условите на задачата.

Во двата случаја $\operatorname{ctg}2\alpha=2+\sqrt{3}$, од каде се добива $\alpha=\frac{\pi}{24}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

3. Даден е прав кружен конус со врв V, со средина на основата S и агол при врвот на оскиниот пресек β. Две тангентни рамнини на конусот го допираат конусот по изводниците VA и VB, каде точките A и B припаѓаат на основата. Ако аголот меѓу овие рамнини е еднаков на α определи го $\measuredangle ASB$.

Решение. Дадените тангентни рамнини на конусот ја сечат рамнината на основата по прави кои се тангенти на кружницата на основата во точките A и B. Со K да го означиме пресекот на овие тангенти. Триаголниците AKV и BKV имаат прави агли во A и B, соодветно, заедничка хипотенуза KV и еднакви катети AK и BK, па затоа се складни. Нека L е заедничкото подножје на висината која соодветствува на хипотенузата на тие триаголници. Тогаш $\measuredangle ALB = \alpha$ и $\measuredangle AVS = \frac{\beta}{2}$. Да означиме $\measuredangle ASB = \varphi$, радиусот на основата со r и средината на отсечката AB со M (види цртеж). Користејќи ги правоаголните триаголници ASM, AML, ASV, AKS добиваме:



$$AM = r\sin\frac{\varphi}{2},\ AL = \frac{r\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ AV = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}},\ AK = r\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}.$$

Во правоаголниот триаголник AKV важи

$$AV \cdot AK = AL\sqrt{AK^2 + AV^2}\ ,$$

па со замена на претходните изрази добиваме равенка за определување на непознатиот агол φ, од каде по средувањето се добива

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

4. Определи го максималниот производ на природните броеви чиј збир е еднаков на даден природен број n.

Решение. Бараниот максимален производ да го означиме со P. За $n=1$, очигледно $P=1$. Нека претпоставиме дека $n>1$. Јасно е дека ниту еден од множителите на производот P не е еднаков на 1. Ќе докажеме дека сите негови множители се помали или еднакви на 4. Навистина, ако некој негов множител е поголем или еднаков на 5, тогаш бидејќи $2(a-2)>a$ производот кој наместо a има множители 2 и $a-2$ ќе биде поголем од P, а соодветниот збир ќе биде еднаков на n. Понатаму, секоја четворка може да ја замениме со две двојки и во збирот и во производот, па заклучуваме дека производот е од видот $2^a 3^b$. Најпосле бидејќи $2^3 < 3^2$, а $2+2+2=3+3$, заклучуваме дека може да има најмногу две двојки.

Од претходно изнесеното следува дека:

$$P=\begin{cases}3^k, & n=3k,\, k\in\mathbb{N},\\ 2^2 3^{k-1}, & n=3k+1,\, k\in\mathbb{N},\\ 2\cdot 3^k, & n=3k+2,\, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.\end{cases}$$

IV година

1. Определи чиста периодична дропка, која е поголема од $\frac{1}{4}$ и помала од $\frac{1}{3}$, а збирот на цифрите на периодата е за 12 поголем од квадратот на бројот на тие цифри.

Решение. Со n да го означиме бројот на цифрите на периодот на бројот x. Од $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$ следува дека првата цифра на периодот е 2 или 3. Ако таа е 3, тогаш следната цифра не може да е поголема од 3. Но, тогаш, според условите на задачата, мора да важи

$$3+3+9(n-2)\geq n^2+12,$$

што лесно се гледа дека не е можно. Според тоа, првата цифра на периодот на бројот x е еднаква на 2. Сега, слично како погоре, мора да важи неравенството

$$2+9(n-1)\geq n^2+12.$$

Единствени природни броеви за кои ова неравенство важи се $n=4$ и $n=5$.

Во случајот $n=4$ треба да определиме три декадни цифри чиј збир е еднаков на $4^2+12-2=26$. Тоа може да се само цифрите 9, 9 и 8 (земени во било кој редослед). Во случајот $n=5$ треба да определиме четири декадни цифри со збир $5^2+12-2=35$. Тоа се цифрите 9, 9, 9 и 8 (земени во било кој редослед). Броевите

0,(2998); 0,(2989); 0,(2899); 0,(29998); 0,(2,9989); 0,(29899), 0,(28999)

ги задоволуваат условите на здачата.

2. Определи ги сите природни броеви n такви што некои три последователни коефициенти на развојот $(a+b)^n$ формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека за природните броеви n и k, $k<n$ важи равенството

$$2\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k+1},$$

кое заради

$$\binom{n}{k-1}=\frac{k}{n-k+1}\binom{n}{k} \text{ и } \binom{n}{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$$

е еквивалентно со равенството

$$2=\frac{k}{n-k+1}+\frac{n-k}{k+1},$$

односно со равенството

$$(n-2k)^2=n+2. \qquad (1)$$

Значи, бројот n мора да е од видот m^2-2 за некој природен број $m \geq 2$. За $m=2$ се добива $n=2$, што не е решение на задачата, бидејќи не важи

$$2\binom{2}{1}=\binom{2}{0}+\binom{2}{2}.$$

За $m>2$ и $n=m^2-2$ се добива $k=\frac{m(m-1)}{2}-1$. Овој број е природен и лесно се проверува дека е помал од n и го задоволува условот (1).

Конечно, бараните броеви се $n=m^2-2$, $m=3,4,5,\ldots$.

3. Определи ја онаа тангента на елипсата $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ чиј отсечок меѓу оските на елипсата е најмал.

Решение. Бидејќи елипсата е симетрична во однос на координатните оски, доволно е да се определи тангентата која ја допира елипсата во точката (x_0,y_0) која припаѓа на првиот квадрант. Равенката на тангентата е

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$$

па сегментите кои таа ги отсекува на координатните оски се еднакви на $\frac{a^2}{x_0}$ и $\frac{b^2}{y_0}$, а квадратот на должината на делот на тангентата меѓу оските е еднаков на

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{a^4}{x_0^2}+\frac{b^4}{y_0^2}=\frac{a^4}{x_0^2}+\frac{a^2b^2}{a^2-x_0^2} \\ &= a^2+b^2+\frac{a^2(a^2-x_0^2)}{x_0^2}+\frac{b^2x_0^2}{a^2-x_0^2} \\ &\geq a^2+b^2+2\sqrt{\frac{a^2(a^2-x_0^2)}{x_0^2}\cdot\frac{b^2x_0^2}{a^2-x_0^2}} \\ &= (a+b)^2, \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{y_0}{x_0}=(\frac{b}{a})^{\frac{3}{2}}$. Значи, бараната тангента (во првиот квадрант) е таа чија допирна точка (x_0,y_0) го задоволува наведениот услов. Нејзината равенка е

$$y=-\sqrt{\frac{b}{a}}x+\sqrt{ab+b^2}.$$

4. На шаховска табла 8×8 на првиот и осмиот ред се наоѓаат 8 бели и 8 црни жетони соодветно. Белиот ја почнува играта. Играчите наизменично поместуваат по еден жетон за едно или повеќе полиња по неговата колона во било која насока, но најмногу до работ на таблата или до противничкиот жетон. Играта ја губи играчот кој не може да направи потез. Докажи дека црниот играч има победничка стратегија.

Решение. Да ја поделиме таблата на четири дела со по две колони во секој дел. Ќе докажеме дека црниот, на потез на белиот во еден дел, секогаш може да одговори со потез во истиот дел. Тоа значи дека ако црниот може да го оневозможи белиот да направи потез во било кој дел, тој може тоа да го направи и на целата табла, т.е. тој победува во играта. Значи, доволно е да се опише победничка стратегија на црниот под претпоставка дека играта се одвива во рамките на две фиксирани колони.

Таа стратегија е следнава: ако белиот го помести жетонот за k полиња напред, црниот ќе го помести својот жетон во другата колона исто така за k полиња напред; ако белиот (во некој потез) го помести својот жетон за k полиња назад, црниот ќе го помести својот жетон во истата колона за k полиња напред. Тогаш, по секој потез на двајцата, растојанијата на жетоните во колоните на тој дел ќе бидат меѓусебно еднакви. Тоа значи дека на секој потез на белиот црниот има одговор, па тој не може да изгуби. Меѓутоа, црниот стално игра напред, па затоа играта ќе заврши по конечен број потези. Последното, според опишаната стратегија, значи дека црниот победува.

Мала олимпијада

1. Даден е ирационален број a.

а) Докажи дека за секој позитивен број ε постои барем еден цел број $q\neq 0$ таков што $aq-[aq]<\varepsilon$.

б) Докажи дека за секој $\varepsilon>0$ постојат бесконечно многу рационални броеви $\frac{p}{q}$ такви што $q>0$ и $|a-\frac{p}{q}|<\frac{\varepsilon}{q}$.

Решение. а) За даден позитивен број ε избираме природен број n таков што $\frac{1}{n}\leq\varepsilon$. Интервалов $[0,1)$ го делиме на n интервали

$$[0,\tfrac{1}{n}),\ [\tfrac{1}{n},\tfrac{2}{n}),\ ...,\ [\tfrac{n-1}{n},1). \qquad (1)$$

Да разгледаме $n+1$ броеви од видот $aq-[aq],\ q=0,1,2,...,n$, кои припаѓаат на интервалот $[0,1)$. Од принципот на Дирихле следува дека постојат два од овие броеви кои припаѓаат на еден ист од интервалите (1). Нека се тоа броевите $aq_1-[aq_1]$ и $aq_2-[aq_2]$ и нека на пример $aq_1-[aq_1]\geq aq_2-[aq_2]$. Тогаш важи

$$\varepsilon\geq\frac{1}{n}>(aq_1-[aq_1])-aq_2-[aq_2]=a(q_1-q_2)-([aq_1]-[aq_2])\geq 0.$$

Понатаму, од својствата на функцијата цел дел следува дека

$$[aq_1]-[aq_2]=[a(q_1-q_2)],$$

па ако земеме $q=q_1-q_2$, тогаш q е цел број различен од нула и притоа важи $aq-[aq]<\varepsilon$.

б) Бидејќи a е ирационален број, за секој цел број $q\neq 0$ важи $aq-[aq]\neq 0$. Да конструираме низа броеви од видот $aq_n-[aq_n],\ n=1,2,3,...$ на следниов начин:

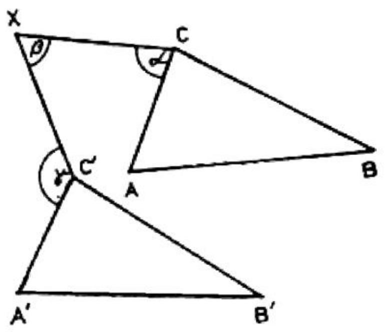
за даден $\varepsilon > 0$, според а) постои цел број $q_1 \neq 0$ таков што $0 < aq_1 - [aq_1] < \varepsilon$; ако броевите $q_1, q_2, ..., q_n$ се веќе избрани, земаме позитивен број ε_n кој е строго помал од сите броеви $aq_i - [aq_i], i = 1, 2, 3, ..., n$, а потоа повторно користејќи го а) избираме цел број $q_{n+1} \neq 0$ таков шѓто $0 < aq_{n+1} - [aq_{n+1}] < \varepsilon_n$. По конструкција добиените броеви $aq_n - [aq_n], n = 1, 2, 3, ...$ се сите различни меѓу себе и важи $0 < aq_n - [aq_n] < \varepsilon$. Ако означиме $p_n = [aq_n]$, од претходното неравенство добиваме

$$| a - \frac{p_n}{q_n} | < \frac{\varepsilon}{|q_n|}, \text{ за } n = 1, 2, 3, ...$$

Заменувајќи, во случај на потреба, p_n и q_n со $-p_n$ и $-q_n$ го добиваме бараниот резултат.

2. Во рамнината се дадени два директно складни триаголници ABC и $A'B'C'$ такви што кружниците (C, CA) и $(C', C'A')$ се сечат. Движењето кое триаголникот ABC го пресликува во триаголникот $A'B'C'$ прикажи го како композиција на најмногу три ротации, такви што триаголникот ABC со ротација околу некое свое теме преминува во триаголник $A_1B_1C_1$, овој триаголник со ротација околу некое свое теме преминува во триаголник $A_2B_2C_2$, а овој триаголник со ротација околу некое свое теме преминува во триаголникот $A'B'C'$.

Решение. Нека X е заедничка точка на кружницата со центар C и радиус CA и кружницата со центар C' и радиус $C'A'$, цртеж десно. Со ρ_α да ја означиме ротацијата околу точката C која точката A ја пресликува во точката X, со ρ_β ротацијата околу точката X која точката C ја пресликува во точката C' и со ρ_γ ротацијата околу точката C' која точката X ја пресликува во точката A'. (Такви ротации постојат бидејќи $CA = CX = XC' = C'A'$.) За пресликувањето $\rho = \rho_\gamma \circ \rho_\beta \circ \rho_\alpha$ важи



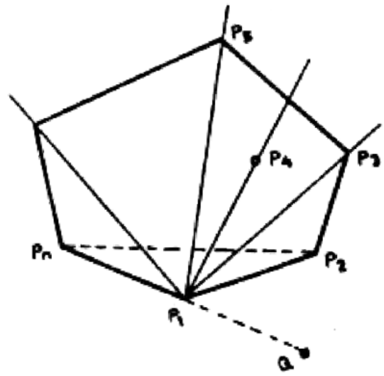
$$\rho(A) = \rho_\gamma(\rho_\beta(\rho_\alpha(A))) = \rho_\gamma(\rho_\beta(X)) = \rho_\gamma(X) = A',$$
$$\rho(C) = \rho_\gamma(\rho_\beta(\rho_\alpha(C))) = \rho_\gamma(\rho_\beta(C)) = \rho_\gamma(C') = C',$$

и како триаголониците ABC и $A'B'C'$ се директно складни важи $\rho(B) = B'$.

3. Нека S е произволно множество од n точки $P_1, P_2, ..., P_n$ во рамнината такви што никои три не се колинеарни и нека α е најмалиот од аглите $P_iP_jP_k$ каде

$i \neq j \neq k \neq i$ и $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$. Определи го $\max\limits_S \alpha$ и најди ги оние множества S за кои таа максимална вредност на аголот α се достигнува.

Решение. Со T ја означиме конвексната обвивка на дадените точки $P_1, P_2, ..., P_n$, т.е. најмалиот конвексен многуаголник, таков што сите точки се наоѓаат во него или на неговата граница. Може да претпоставиме дека дадените точки се нумерирани така што $\measuredangle P_n P_1 P_2$ е агол на полигонот T и дека полуправите $P_1P_2, P_1P_3, ..., P_1P_n$ се распоредени во наведениот редослед, цртеж десно. Нека Q е произволна точка на правата P_1P_n таква што P_1 е меѓу P_n и Q. Тогаш



$$
\begin{aligned}
180^\circ &= \measuredangle QP_1P_2 + \measuredangle P_2P_1P_n \\
&= \measuredangle P_1P_2P_n + \measuredangle P_2P_nP_1 + \measuredangle P_2P_1P_3 + \measuredangle P_3P_1P_4 + ... + \measuredangle P_{n-1}P_1P_n
\end{aligned}
$$

Во последниот збир има точно n агли, па како ниту еден од нив не е помал од α, добиваме дека $n\alpha \leq 180^\circ$, т.е. $\alpha \leq \frac{180^\circ}{n}$. Затоа $\max\limits_S \alpha \leq \frac{180^\circ}{n}$.

Ќе докажеме дека $\max\limits_S \alpha = \frac{180^\circ}{n}$ и дека оваа вредност за α се достигнува ако и само ако точките $P_1, P_2, ..., P_n$ на множеството S се темиња на правилен $n-$аголник. Навистина, ако важи равенството $n\alpha = 180^\circ$, тогаш се исполнети следниве услови (и тоа во секое теме на полигонот T):

1) $\measuredangle P_1P_2P_n = \measuredangle P_2P_nP_1 = \alpha$, т.е. $P_1P_2 = P_nP_1$, што значи дека сите страни на полигонот T се еднакви.
2) $\measuredangle P_2P_1P_n = \measuredangle P_2P_1P_3 + \measuredangle P_3P_1P_4 + ... + \measuredangle P_{n-1}P_1P_n = (n-2)\alpha$, што значи дека сите агли на полигонот T се еднакви.

Значи, равенството $n\alpha = 180^\circ$ е можно само ако $P_1, P_2, ..., P_n$ се темиња на правилен многуаголник. Обратното тврдење е очигледно.