Методи Главче, Скопје

КАДЕ Е ГРЕШКАТА?

I

Како се „докажува“ дека $2=3$?

Ако во очигледното равенство

$$4-10=9-15 \tag{1}$$

на двете страни додадеме $(\frac{5}{2})^2$, последователно дбиваме

$$4-10+(\tfrac{5}{2})^2=9-15+(\tfrac{5}{2})^2, \tag{2}$$

$$2^2-2\cdot 2\cdot \tfrac{5}{2}+(\tfrac{5}{2})^2=3^2-2\cdot 3\cdot \tfrac{5}{2}+(\tfrac{5}{2})^2, \tag{3}$$

$$(2-\tfrac{5}{2})^2=(3-\tfrac{5}{2})^2. \tag{4}$$

Ако во последното равенствоземеме квадратен корен на левиот и десниот израз, добиваме

$$2-\tfrac{5}{2}=3-\tfrac{5}{2}, \tag{5}$$

односно

$$2=3.$$

Но, знаеме дека $2<3$, што значи дека последното равенство не е точно. Па како е можно, тргнувајќи од точно равенство да добиеме грешен резултат. Сигурно во горните пресметувања сме направиле некоја грешка, па затоа ќе ги провериме пресметувањата во секој чекор.

Равенството (1) е точно, а точни се и равенствата (2) и (3), а додека (4) е исто што и (3). Преостанува уште равенството (5), кое го добивме со вадење на квадратен корен на левата и десната страна на (4). Дали ова е точно? Не, бидејќи како што знаеме $\sqrt{a^2}=|a|$, па затоа наместо равенството (5) треба да добиеме

$$|2-\tfrac{5}{2}|=|3-\tfrac{5}{2}|,$$

т.е. $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, кое е точно равенство.

II

Како се „докажува“ дека $2=5$?

Ако во очигледното равество

$$4-14=25-35$$

на двете страни додадеме $(\frac{7}{2})^2$, тогаш на потполно идентичен начин како погоре го добиваме точното равенство

$$(2-\frac{7}{2})^2=(5-\frac{7}{2})^2.$$

Сега, земаме квадратен корен на левата и десната страна, т.е. ја правиме истата грешка како погоре и сме „докажале“ дека $2=5$.

III

Како се „докажува“ дека $2=1$?

Равенството

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

е точно за секои реални броеви a и b, па тоа е точно и за $a=b=1$. Во овој случај имаме

$$(1-1)(1+1)=1^2-1^2,$$
$$(1-1)(1+1)=1-1,$$

па ако двете страни на последното равенство ги поделиме со $(1-1)$ добиваме

$$1+1=1,$$

т.е. $2=1$. Јасно, последното равенство не е точно и грешката во расудувањето е во тоа што со бројот $(1-1)$, кој всушност е еднаков на 0, нема смисла да се дели. Според тоа, со погрешно користење на делењето, добивме парадоксален „резултат“ дека $2=1$.

IV

Нека $a=b$. Тогаш последователно добиваме

$$a^2=ab,$$
$$a^2-b^2=ab-b^2,$$
$$(a-b)(a+b)=b(a-b).$$

Ако левата и десната страна ги поделиме со $a-b$, добиваме

$$a+b=b,$$
$$a=0.$$

Според тоа, „докажавме“ дека $a=0$. Каде во овој случај погрешно заклучувавме? Грешката ја направивме со тоа што левата и десната страна на равенството

$$(a-b)(a+b)=b(a-b) \tag{6}$$

ја поделивме со $a-b$, иако според претпоставката $a-b$ е еднаков на нула, а со нула делењето нема смисла.

V

Ева како се „докажува“ дека секои два броја се еднакви меѓу себе.

Нека a и b се два различни броја и нека $a-b=c$. Тогаш

$$(a-b)^2=(a-b)c$$

$$a^2-2ab+b^2=ac-bc,$$

$$a^2-ab-ac=ab-b^2-bc,$$

$$a(a-b-c)=b(a-b-c)\,. \tag{7}$$

Ако левата и десната стрна на (7) ги поделиме со $a-b-c$ добиваме

$$a=b\,,$$

што значи дека се еднакви броевите чија разлика е еднаква на c, што е апсурд. Како и во претходните два случаи и овде грешката е во тоа што делевме со изразот $a-b-c$ кој е еднаков на 0.

VI

Нека $a>3$. Ако двете страни ги помножиме со 3, добиваме $3a>9$. Сега ако на двете страни во последното неравенство додадеме a^2, добиваме

$$3a-a^2>9-a^2,$$

$$a(3-a)>(3-a)(3+a).$$

Последното неравенство го делиме со $3-a$ и го добиваме неравенството $a>3+a$, а оттука го добиваме неравенството $0>3$, кое не е точно. На читателот му оставаме да открие каде во горните расудувања е направена грешка.