Povijest matrica i determinanti

Marko Juraić, Zagreb

Počeci korištenja matrica i determinanti sežu u drugo stoljeće pr. Kr., no neki tragovi govore da su se koristile čak i u četvrtom stoljeću pr. Kr. Ipak pravi razvoj i korištenje je započelo tek u 17. st.

Matrice i determinante su nastale proučavanjem sustava linearnih jednadžbi. Babilonci su proučavali probleme koji su se mogli riješiti korištenjem takvih jednadžbi, a neki od njih su sačuvani na glinenim pločicama. Jedna takva pločica potječe iz oko 300. godina pr. Kr. i sadrži sljedeći problem:

Imamo dva polja čija je ukupna površina $1800\ \mathrm{m}^2$*. Oba polja su za proizvodnju žita, s tim da jedno daje* $\frac{2}{3}\ \mathrm{kg/m}^2$*, a drugo daje* $\frac{1}{2}\ \mathrm{kg/m}^2$*. Ukoliko je ukupan rod 1100 kg, kolika je površina svakog polja?*

Kinezi su se, između 200. i 100. godine pr. Kr., više približili matricama nego Babilonci. Za vrijeme dinastije Han izrađen je tekst pod nazivom *Nine Chapters on the Mathematical Art (Devet poglavlja matematičkog umijeća)* koji je prvi ikad nađen primjer korištenja matričnih metoda. Prvi problem je vrlo sličan Babilonskom, a glasi ovako:

Imamo tri vrste žita, od čega tri mjere prvog, dvije drugog i jedna trećeg zajedno čine 39 jedinica. Dvije mjere prvog, tri drugog i jedan trećeg čine 34 jedinica, a jedna mjera prvoga, dvije drugoga i tri trećega čine 26 jedinica. Koliko jedinica žita sadrži jedna mjera za svaki tip žita?

Ovaj problem su rješavali tako da su postavili jednadžbe, čije koeficijente su posložili u stupce pridružene nepoznanicama:

$$\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Današnja metoda rješavanja kaže nam da se koeficijenti pišu u redove, ali to sada nije bitno. U uputama za rješavanje ovog zadatka navedeno je: pomnoži srednji stupac s 3 i oduzmi desni stupac *koliko god puta možeš.* Zatim se isto napravi i s prvim stupcem (pomnoži s 3 i oduzmi se treći stupac). To daje,

$$\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Zatim se prvi stupac pomnoži s 5 i od njega se oduzme srednji stupac onoliko puta koliko je to moguće napraviti. Dobivamo,

$$\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

Odavde se može izračunati koliko je jedinica za treću vrstu žita, zatim za drugu, a onda i za prvu (uvrštavanjem). Ova metoda se naziva Gaussova metoda eliminacije i nije bila poznata sve do početka 19. st.

Godine **1545**. **Jerome Cardan**, u djelu *Ars Magna*, iznosi pravilo za rješavanje sustava dviju linearnih jednadžbi koje se naziva *majka svih pravila*. Ovo pravilo je istovjetno **Cramerovom** pravilu za rješavanje $(2,2)$ sistema, no Cardan nije napravio završni korak. Nije došao do definicije determinante, ali je bio na pravom putu.

Mnogi rezultati elementarne matrične teorije su se pojavili mnogo prije nego su matrice postale predmet matematičke analize, tako da su mnoge započete teorije bile zapravo put ka otkrivanju mnogo kompliciranijih izvoda i rezultata za koje se u to vrijeme kada su stvorene nije ni pomišljalo.

Ideja o determinanti se gotovo istovremeno pojavila u Japanu i u Europi, ali prvi ju je objavio **Seki Takakazu** (poznat kao Seki Kowa). On je **1683**. g. napisao djelo *Method of solving the dissimulated problems* (*Metoda rješavanja skrivenih problema)* koje sadrži metode rješavanja pomoću matrica ispisanih u tablicu i to na isti način kako su to radili u staroj Kini. Bez da je spomenuo i jednu riječ koja bi mogla predstavljati "determinantu", dao je općenite načine izračunavanja determinanti što se baziralo na primjerima (determinante matrica reda $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$ i $(5,5)$).

Iste godine se determinanta pojavila i u Europi. Godine **1683**. **Gottfried Wilhelm Leibniz** je pisao **l'Hospitalu** i objasnio mu da sustav jednadžbi

$$10 + 11x + 12y = 0$$
$$20 + 21x + 22y = 0$$
$$30 + 31x + 32y = 0$$

ima rješenje jer je $10\cdot 21\cdot 32+11\cdot 22\cdot 30+12\cdot 20\cdot 31 = 10\cdot 22\cdot 31+11\cdot 20\cdot 32+12\cdot 21\cdot 30$ što je zapravo uvjet da je determinanta koeficijenata matrice jednaka 0. Leibniz je u ovome primjeru koristio brojeve kao koeficijente, a oni zapravo predstavljaju znakove koje mi danas pišemo kao a_{11}, a_{12} itd., odnosno prvi od dva indeksa predstavlja u kojoj se jednadžbi nalazi koeficijent, a drugi označava nepoznanicu.

Leibniz je bio uvjeren da je ključ uspjeha u matematici pravilno označavanje koeficijenata, pa je on eksperimentirao upravo s nasumičnim odabirom pisanja. U njegovim neobjavljenim radovima nađeno je preko 50 različitih načina pisanja sistema koeficijenata koje je pisao kroz pedesetak godina počevši od **1678**. Samo na dva mjesta (**1700**. i **1710**. godine) dobiven je rezultat sistema i tada je korišten zapis koji je napisao u svom pismu l'Hospitalu.

Leibniz je za današnju "determinantu" koristio naziv "rezultanta", i dokazao je različite rezultate u ovisnosti o determinanti što poznajemo kao **Cramerovo** pravilo. Isto tako je znao da se determinanta može izračunati razvojem po bilo kojem stupcu, što se danas zove **Laplaceov** razvoj.

Tridesetih godina **18. st**. **Maclaurin** je napisao *Treatise of algebra* (objavljeno **1748**. g.) u kojemu je dokazao Cramerovo pravilo za $(2,2)$ i $(3,3)$ sisteme i pokazao kako bi se mogao rijesiti $(4,4)$ sustav. **Cramer** je odredio općenito pravilo za (n,n) sisteme u djelu *Introduction to the analysis of algebraic curves* (*Uvod u analizu algebarskih krivulja*) (**1750**. g.), te je u tom djelu izrazio želju za pronalaženjem jednadžbe ravnine koja je zadana određenim brojem točaka. Pravilo je napisao na kraju djela, ali ono nije bilo dokazano.

Proučavanje determinanata se sada počelo razvijati.

Godine **1764**. **Bezout** je otkrio metode za računanja determinanti, a isto je učinio i **Vandermonde** **1771**. g. **Laplace** je **1772**. g. tvrdio da su Cramerove i Bezoutove metode nepraktične te je napisao diskusije rješenja linearnih jednadžbi bez računanja sustava, već je samo računao determinante. Iznenađujuće je da je determinante nazivao "rezultante", jednako kao i Leibniz, a zapravo nije bio upoznat s njegovim radom.

Lagrange je **1773**. g. proučavao identitete determinanti $(3,3)$ matrica, ali njegovi svi komentari su bili nagađanja i on nije mogao naći vezu između svog rada i rada Laplacea i Vandermondea. No ipak njegovo djelo sadrži izraz za volumen tetraedra zadanog s točkama $O(0,0,0)$, $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$, $M''(x'',y'',z'')$:

$$\frac{1}{6}[z(x'y''-y'x'')+z'(yx''-xy'')+z''(xy'-yx')].$$

Izraz "determinanta" je prvi upotrijebio **Gauss** u djelu *Disquisitiones arithmeticae* (**1801**. g.) dok je opisivao kvadratične forme, a to ime je izabrao zato što determinanta određuje (eng. determines) svojstva kvadratničkog oblika. No njegov koncept nije jednak onome koji mi poznajemo. U istom djelu Gauss je ispisao koeficijente svoje kvadratične forme u oblik pravokutnika. Opisao je množenje matrica (koje je smatrao kao kompoziciju pa stoga nije dosegao koncept matrične algebre) i izračunavanje inverza matrice.

"Gaussovu eliminaciju", koja se prvi put pojavila u djelu *Nine Chapters on Mathematical Art* (*Devet poglavlja matematičkog umijeća*) 200. g. pr. Kr., Gauss je koristio pri proučavanju putanje asteroida Pallas. Korištenjem tih podataka uzetih između **1803**. i **1809**. g., sastavio je sistem od šest linearnih jednadžbi sa šest nepoznanica. Našao je sistematsku metodu za rješavanje takvih jednadžbi što se upravo i naziva Gaussova metoda eliminacije.

Augustin Louis Cauchy je **1812**. g. prvi koristio determinantu u modernom smislu. Cauchyjev rad je najkompletniji rad o determinantama ikad urađen. On je dokazao prethodne rezultate i dao nove na temelju minora i adjunkta. Godine **1812**. dokazao je teorem o množenju determinanti po prvi put.

Godine **1826**. Cauchy je napisao dijagonalizaciju matrice. Isto tako je uveo ideju o simetričnim matricama i pokazao da one imaju realne svojstvene vrijednosti. Poslije je dokazao i da se svaka realna simetrična kvadratna matrica može dijagonalizirati.

Zanimljivo je da niti Cauchy niti Sturm nisu našli općenite relacije za ideje koje su iznijeli, već su ih koristili i vidjeli samo u kontekstu onoga čime su se oni bavili. **Jacobi** (**1830**. g.), a zatim i **Kronecker** i **Weierstrass** (**1850**. i **1860**. g.), bavili su se matričnim rezultatima ali također ne općenito već u smislu linearne transformacije. Jacobi je objavio tri rada o determinantama **1841**. g. koji su bitni zato što je po prvi puta definicija determinante bila napisana preko algoritma, pa su rezultati bili točni bilo da se radilo samo o brojevima ili funkcijama. Nakon ovih radova ideja determinanti postala je poznatom cijelom svijetu.

Cayley je također **1841**. g. objavio prvi engleski članak o teoriji determinanti. Na svom papiru je koristio dvije vertikalne linije na lijevoj i desnoj strani redova čime je označavao determinante, a takvo označavanje je ostalo i do danas.

Ime "matrica" prvi je koristio **Sylvester 1850**. g. On je definirao matricu kao *pravilnu skupinu vrijednosti* i gledao ju kao nešto što ima ulogu odrediti determinantu vrijednosti koju sadržava. Nakon povratka iz Amerike u Englesku **1851**. g., Sylvester je postao odvjetnik i upoznao **Cayleya**, odvjetnika kojeg je matematika također zanimala. Kada je Cayley vidio važnost matrica, **1853**. g. objavio je članak u kojem se po prvi put pojavio inverz matrice.

Cayley je objavio *Memoir on the theory of matrices* koja po prvi puta sadrži apstraktnu definiciju matrice **1858**. g. Pokazao je da su sustavi koeficijenata za kvadratične forme i linearne transformacije zapravo specijalni slučajevi njegovog općenitog koncepta. Cayley je pokazao definicije zbrajanja, množenja i inverza matrica. Također je dokazao da, u slučaju $(2, 2)$ matrice, matrica poništava svoj svojstveni polinom. **Hamilton** je nakon toga dokazao specijalni slučaj za $(4, 4)$ matrice i stoga se to otkriće danas naziva Cayley-Hamiltonov teorem.

Godine **1870**. **Jordan** je u djelu *Treatise on substitutions and algebraic equations* objavio nešto što se danas naziva "Jordanova forma matrice". To je dijagonalna blok-matrica na čijoj se dijagonali nalaze tzv. "Jordanovi blokovi" (kvadratna matrica specijalnog oblika).

Frobenius je **1878**. g. napisao vrlo važan rad *On linear substitutions and bilinear forms* (*O linearnim supstitucijama i bilinearnim formama*) s tim da nije bio upoznat s Cayleyvim radom. Nakon toga je, pročitavši Cayleya, dokazao Cayley-Hamiltonov teorem za općeniti slučaj (**1896**), i izveo definiciju za rang matrice.

Pozitivnost kvadratne matrice je **1884**. g. dao **Sylvester**. Došao je do zaključka da je kvadratna forma pozitivna ako i samo ako su glavne minore odgovarajuće matrice pozitivne.

Glavni ljudi koji su počeli ozbiljno promovirati teoriju matrica i determinanti bili su **Weierstrass** (objavio je rad *On determinant theory* (*O teoriji determinante*)) koji je objavljen 1903. nakon njegove smrti) i **Kronecker** (njegovi radovi su također objavljeni nakon njegove smrti). Teoriju determinanti su matematičari odmah prihvatili, dok je za teoriju matrica trebalo nešto više vremena. Rad koji je pridonio potpunom shvaćanju teorije matrica bio je *Introduction to higher algebra* (*Uvod u višu algebru*) od **Bochera 1907**. g. **Turnball** i **Aitken** su napisali vrlo utjecajne radove **1930**. godine, a nakon rada **Mirskya 1955**. (*An introduction to linear algebra (Uvod u linearnu algebru)*), linearna algebra je zauzela mjesto jedne od najvažnijih grana matematike.