КРАТОК ИСТОРИСКИ ОСВРТ НА ФИБОНАЧИЕВИТЕ, КАТАЛАНОВИТЕ И ПЕЛОВИТЕ БРОЕВИ

Фибиначиевите, Каталановите и Пеловите броеви имаат важно место во дискретната математика, односно во комбинаториката, па затоа во следните разгледувања накратко ќе се осврнеме на нивниот историски развој.

Едно од најинтересните поглавја во историјата на математиката е поврзано со името Леонардо од Пиза (1175-1225), познат по надимакот Фибоначи. Фибоначи во својата работа од аритметика и алгебра *Книга за абакусот* (*Liber abaci*, 1202) го глорификувал хинду-арапскиот систем на броеви. Една од неговите голема низа проблеми е Фибоначиевата низа. Фибоначи во својата подоцнежна работа, *Книга за квадратните броеви* (*Liber quadratorum*, 1225) го направил првиот исчекор на западната цивилизација во аритметиката, од времето на Диофант.

Гуљелмо, таткото на Фибоначи бил богат италијански трговец и, според некои извори, конзул во Пиза. Гуљелмо управувал со погранична таговска фирма во Буѓи, пристаниште во султанатотна династијата Алмохада во Северна Африка. Фибоначи како мал често путовал со таткото во Буѓи (денес Беџаја, Алжир), каде се стекнал со знаење за хинду-арапскиот броен систем. Тој станал свесен за супериорноста на арапските броеви (со децимален нумерички систем, позициона нотација и постоењето на цифрата нула). Затоа Леонардо путовал по медитеранскиот брег, се среќавал со бројни трговци и математичари и заедно со нив ја проучувал аритметиката, па откако ги сватил сите предности на хинду-арапскиот систем, во 1200 година се вратил во Пизу. Две години покасно, на свои 32 години, ја завршил книгата *Liber Abaci* (*Книга за абакусоту*), во која објавил се што во текот на патувањата научил. Оваа книга ги популаризирала хинду-арапските броеви во Европа и го покажала значењето на новиот систем, неговата применливост во комерцијалното сметководство, конверзији на масите во различните мерки, пресметувањата, каматите, размена на валутите и други нумерички примени. Во оваа книга, покрај другото ја опишал и нулата која во арапскиот броен систем не постоела. Во Европа книгата е примена со воодушевување меѓу образованиот свет и имала големо влијание на идната европска математичка мисла. Сепак Фибоначи денес не се споменува толку заради своите значајни работи од математиката, токуа заради следната тривијална задача наведена во книгата *Liber Abaci*.

Пар зајаци, почнувајќи од вториот месец на животот, еднаш месечно окотува по пар зајаци. Ако на почетокот на годината бил еден пар зајаци, колку парови зајаци биле на крајот од годината.

Со $f(n)$ да го означиме бројот на паровите после $n-$от месец. Јасно, $f(0)=1$ и $f(1)=2$. По истекот на $(n+2)-$от месец имаме $f(n+1)$ стари парови и онолку новородени парови, колку што биле парови на крајот од $n-$от месец, т.е. $f(n)$. Според тоа, членовите на низата $\{f(n)\}$ ја задоволуваат релацијата $f(n+2)=f(n+1)+f(n)$. Од досега изнесеното следува дека

$$\begin{aligned}
&f(2)=f(1)+f(0)=3\\
&f(3)=f(2)+f(1)=5\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f(12)=f(11)+f(10)=377,
\end{aligned}$$

што значи дека бараниот број на парови зајаци на крајот на годината ќе биде 377.

При решавањето на задачата на Фибоначи добивме низа за која првите два члена се дадени, а секој следен член е функција од претходните два, кои ги нарекуваме *Фибоначиеви броеви*. Видовме дека со последователни пресметувања може да се најде секој член на вака зададената низа. Меѓутоа, логично е да се запрашаме дали општиот член на низата може експлицитно да се изрази. Проблемите од ваков вид се тема на проучување на *теоријата на диференциите (рекурентните) равенки.*

Повеќе од шест века ниту овој проблем ниту неговото решение воопшто не привлекувале внимание. Но, на почетокот на деветнаесеттиот век францускот математичар Е. Лика (Lucas) почнал со проучување на овие броеви кои ги нарекол Фибоначиеви броеви. По првите проучувања на Фибоначиевите броеви драстични почнал да се зголемува бројот на трудовите поврзани со иситe. Ова довело во 1963 година да се формира часописот *Fibonacci Quarterly* во кој се објавуваат трудови исклучиво со најновите достигнавања на Фибонаиевите броеви. Како што видовме погоре ако со f_n го означиме $n-$тиот Фибоначиев број, тогаш $f_1 = f_2 = 1$ и

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \text{ за } n \geq 1. \tag{1}$$

Иако едноставна релацијата (1)не дава применлив алгоритам за пресметување на партикуларните Фибоначиеви броеви. Но, формулата

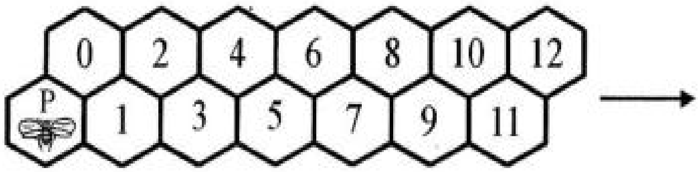
$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{2}$$

дава таков алгоритам. Овде ќе спомeнеме и два алгоритми со голема ефикасност за пресметување на Фибоначиевите броеви за големо n кои може да се најдат во книгата на Доналд Кнут The Art of Computer Programming, Vol. II: Siminumerical Algoritfhms (Reading Massachusetts 1969).

Според Р. Вебстер, професор на универзитетот во Шефилд, една од најпривлечните карактеристики на Фибоначиевите броеви е можност за откривање на многу убави својства за оваа низа.

Фибоначиевите броеви се среќаваат на најнеочекувани места. На долниот цртеж се прикажани шестаголни клетки по кои се движи пчелата.

Претпоставуваме дека клетките се простираат на десно доволно долго. Пчелата е во клетката P и преминува во соседна клетка одејчи надесно (горе-право-долу). Лесно се гледа дека бројот на патиштата со ознака n е еднаков на f_{n+2}.



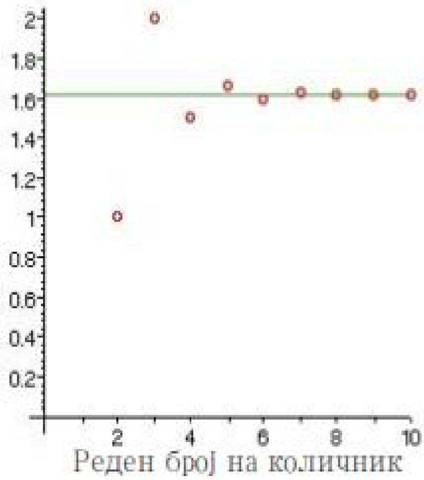
Друг пример на појавување на Фибоначиевите броеви е таканаречениот златен пресек. Ако го разгледаме количникот фибоначиев број со неговиот претходник, ќе ги добиеме следниве броеви:

$$\frac{1}{1}=1,\ \frac{2}{1}=2,\ \frac{3}{2}=1{,}5,\ \frac{5}{3}=1{,}66\ldots\ ,\frac{8}{5}=1{,}6,\ 8\frac{13}{1}=1{,}625\ \ \frac{21}{13}=1{,}61538$$

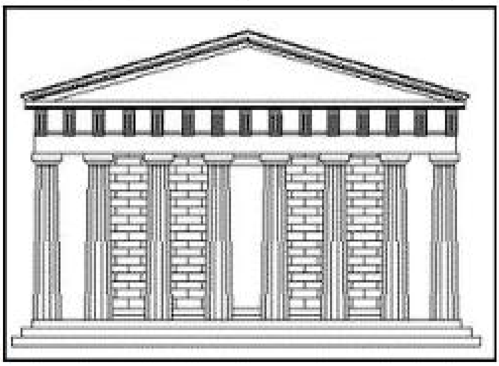
За подобра претстава точките ги претставуваме графички: и забележуваме дека тие количници се доближуваат до еден број наречен златен број ϕ. Значи ако a и b се два соседни фибоначиеви броеви тогаш $\frac{b}{a}\approx\phi$ и $\frac{b}{a}\approx\frac{a+b}{b}$

од каде $\frac{b}{a}\approx\frac{a}{b}+1$ односно $\phi=\frac{1}{\phi}+1=0$ или $\phi^2-\phi-1=0$. Со решавањето на равенката се добива

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6.$$



Нашата претстава за правоаголник се однесува на правоаголникот кај кој односот на поголемата со помалата страна е приближно 1,6; затоа што тој правоаголник изгледа најсовршено. Ова било искористено и од архитектите од античкиот период. На цртежот е претставен храмот на Партенон во Атина каде должините на страните се во дадениот соодност.



Други интересни броеви се таканаречените Каталанови броеви. Каталановите броеви се едни од броевите кои често се појавуваат во математиката. Името го добиле по белгискиот математичар Eugène Charles Catalan (1814-1894), иако тој прв не ги открил. Каталановите броеви први ги согледале Leonhard Euler (1703-1783) и Johann Andreas von Segner (1704-1777), скоро еден век пред Catalan. Проучувајќи го проблемот на триангулации на конвексен n – аголник, Segner нашол рекурзивна релација, а Euler прв успешно ја решил и во 1760 година нашол општ израз за бројот на триагулации. Сепак, во чест на Catalan, кој нашол и докажал многу својства и идентитети на овие броеви, тие денес се нарекуваат според неговото име. Малку е познато дека овие броеви потполно независно во 1730 година ги открил кинескиот математичар Ming An-Tu (1692-1763), но неговите откритија останале непознати на западната цивилизација се до 1839 година.

Меѓутоа, добивањето на резултатите за Каталановите броеви не било така едноставно. Имено, според историските податоци во 1751 година, Леонард Ојлер добил затворена формула за каталановите броеви, но тој го загубил листот со формулата и нејзиниот доказ. Истиот повторно го добил со асистенција на Кристијан Голдбах, и со поголемо учество на Јохан Сегнер. До 1759 година, е добиен целосен доказ. Но како тоасе случило. На 4 септември 1751 година, Ојлер му напиша писмо на Голдбах во кое меѓу другото пишувал за откривањето на каталановите броеви. Ојлер во тоа време бил во Берлин (Прусија), додека неговиот пријател, односно поранешниот ментор Голдбах бил во Санкт Петербург (Империјална Русија). Тие првпат се сретнале кога Ојлер пристигнал во Санкт Петербург во 1727 година како млад човек и започнал доживотно пријателство. Доказот на Ојлер бил со помож на генераторни функции за низата

$$C_{n-2} = \frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4n-10)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-1)} \tag{3}$$

,која ја добил решавајќи ја функционалната равенка

$$1 + xA(x) = A(x)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Јохан Сегнер бил уште еден чест дописник на Ојлер. Иако Сегнер бил постар, Ојлер побрзо напредувал и во 1755 година му помогнална Сегнер да добие позиција на Универзитетот во Хале. Се чини, дека имало мала натпреварувачка тензија меѓу нив. Имено, Сегнер за Каталановите броеви ја добил рекурзијата

$$C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + C_2C_{n-3} + ... + C_{n-3}C_2 + C_{n-2}C_1 + C_{n-1}C_0 , \quad (5)$$

но со неа успеал да пресмета само помали каталанови броеви, нешто што подоцна Ојлер го надополнил со својата работа.

Следниот важен период во проучувањет на каталановите броеви го обележале Котелникот у Фус. Семон Кирилович Котелников (1723-1806) бил руски математичар со скромно потекло кој цел живот живеел во Санкт Петерсбург. Во 1766 година, Ојлер се вратил во Санкт Петерсбург. Истата година, Котелников пишува труд елаборирајќи ги каталановите броеви. Иако тој тврдеше дека има друг начин да ја докаже формулата (3). Ларкомб забележува дека тој прави малку повеќе од играње со формулата со оваа.

Николас Фус (1755-1826) бил швајцарски математичар кој се преселил во Санкт Петербург да стане помошник на Ојлер во 1773 година. Тој се оженил со внуката на Ојлер, станал добро познат математичар сам по себе и останал во Русија до смртта. Во својот труд од 1795 година, како одговор на прашањето на Пфаф за бројот на поделби n-аголник во k-аголници, Фус го воведува таканаречените Фус-каталанови броеви и дава генерализација на формулата на Сегнер. На каталановите броеви работеле и многу други математичари, како Жозеф Луивил, Жак Бинет и Габриел Ламе. Така денес се познати над 90 проблеми кои се решаваат со помош на оваа интересна низа броеви. Сепа, може да се каже дека каталановите броеви ниту оддалеку не ја достигнале пополарноста на фибоначиевите броеви, па затоа истите им се подетално познати само на специјалистите по комбинаторика.

Следна интересна класа броеви на чија историја многу кратко ќе се осврнеме се таканарешените Пелови броеви.

Во математиката, Пеловите броеви се бесконечна низа од цели броеви, познати уште од античко време (Вавилонската цивилизација), кои ги сочинуваат именители на најблиските рационални приближувања до квадратниот корен од 2. Оваа низа од приближувања започнува со $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}$ и $\frac{17}{12}$, што значи дека првите четири броја на низата Пелови броеви се 1, 2, 5 и 12. Броителите на истата низа приближувања се половина од придружните Пел броеви или Пел-Лукасовите броеви; овие броеви формираат втора бесконечна низа која започнува со 2, 6, 14 и 34. Двете низи броеви (Пеловите и Пел-Лукасовите) може да се пресметаат со помош на рекурентна релација слична на онаа за броевите Фибоначи. Освен што се користат за приближување на квадратниот корен од два, Пеловите броеви се користат во врска со таканаречените риаголни броеви, во теоријата на апроксимации и за решавање на одредени комбинаторни задачи со набројување. Рекурзијата со чија помош сенаоѓаат Пеловите броеви е

$$P_0 = 0, P_1 = 1 \text{ и } P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \tag{6}$$

а додека формулата во затворен облик е

$$P_n = \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}. \tag{7}$$

Понатаму, Пеловите броеви се поврзани со Питагоровите тројки, односно тројките од видот $(2P_nP_{n+1}, P_{n+1}^2 - P_n^2, P_{n+1}^2 + P_n^2)$ се Питагорови тројки. Првите неколку Питагорови тројки од овој вид се

$$(4,3,5), (20,21,29), (120,119,169), (696,697,985).$$

Од друга страна Пел-Лукасовите броеви се задаваат со рекурзијата

$$Q_0 = 2, Q_1 = 2 \text{ и } Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, \tag{8}$$

а додека формулата во затворен облик е

$$Q_n = (1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n. \tag{9}$$

Иако Пеловите броеви биле познати од настаро време, сепак името го добиле според англискиот математичат Јон Пел (1611-1685), кој на свои 13 години запишал студии по математиа на универзитетот во Кембриџ на кој во 1630 година магистритрал. Откривањето на овие броеви на Пел погрешно му го препишал Леонард Ојлер. Имено, по грешка Ојлер објавил дека Пел е првиот математичар кој се занимавал со нетривијалните решенија на равенката на Пел, која е од видот

$$x^2 - dy^2 = \pm 1 \tag{10}$$

и која равенка има непосредна врска со Пеловите броеви.

Во горните разгледувања се осврнавме на три важни класи броеви кои имаат посебно место во комбинаториката, со тоа што Пеловите броеви играат важна улога и во теоријата на броеви, но и во криптографијата, каде равенката на Пел завзема посебно место.

Д-р Икс