**Регионален натпревар 1983**

**I година**

**1.** Нека за броевите $a,b$ и $c$ е точно равенството

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}.$$

Да се покаже дека е исполнет барем еден од следниве три услови: $a=-b$, $a=-c$, $b=-c$.

**Решение.** Следната низа од равенства се еквивалентни меѓу себе:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$$

$$(ab+bc+ca)(a+b+c)=abc$$

$$a^2b+a^2c+abc+ab^2+abc+b^2c+abc+ac^2+bc^2=abc$$

$$b(a^2+ac+ab+bc)+c(a^2+ac+bc+ca)=0$$

$$b[a(a+c)+b(a+c)]+c[a(a+c)+b(a+c)]=0$$

$$(a+c)[b(a+b)+c(a+b)]=0$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

Од последното равенство непосредно се добива тврдењето од задачата.

**2.** Да се докаже идентитетот

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sin\alpha}}=\frac{2\sin(15^\circ+\frac{\alpha}{2})\cos(15^\circ-\frac{\alpha}{2})}{\cos^2(45^\circ-\frac{\alpha}{2})}$$

**Решение.** Имаме:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sin\alpha}}=1+\frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{2(\frac{1}{2}+\sin\alpha)}{1+\cos(90^\circ-\alpha)}=\frac{2(\sin 30^\circ+\sin\alpha)}{2\cos^2\frac{90^\circ-\alpha}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{30^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{30^\circ-\alpha}{2}}{\cos^2(45^\circ-\frac{\alpha}{2})}=\frac{2\sin(15^\circ+\frac{\alpha}{2})\cos(15^\circ-\frac{\alpha}{2})}{\cos^2(45^\circ-\frac{\alpha}{2})}$$

**3.** Од две парчиња легура со тежина $6\text{ kg}$ и $3\text{ kg}$ со различни проценти на бакар, отсечено е по едно парче со иста тежина. Секое од отсечените парчиња е слеано со остатокот на другото парче. По тоа спојување, процентот на бакар во двете легури се изедначува. Колку тежат отсечените парчиња?

**Решение.** Да ја означиме со $A$ легурата чија тежина е $6\text{ kg}$, а со $B$ легурата чија тежина е $3\text{ kg}$. Нека во $1\text{ kg}$ од легурата $A$ има $u$ kg бакар, а во $1\text{ kg}$ од легурата $B$ има $v$ kg бакар. Од условите на задачата имаме $u\neq v$. Нека тежината на отсечените парчиња од легурите $A$ и $B$ е $x$ kg. По спојувањето на отсечените парчиња со остатоците на другите парчиња, во 1 kg од легурата $A$ ќе има $\frac{(6-x)u+xv}{6}$ kg бакар, а во 1 kg од легурата $B$ ќе има $\frac{(3-x)v+xu}{3}$ kg бакар. Бидејќи процентот на бакар во двете легури по спојувањето е ист, имаме

$$\frac{(6-x)u+xv}{6}=\frac{(3-x)v+xu}{3}.$$

Од последната равенка се добива $(u-v)(9x-18)=0$, од каде имаме $x=2$, бидејќи $u\neq v$.

**4.** Седум соработници (Марија, Искра, Лиле, Петре, Миле, Тодор и Коста) ручаат заедно во три ресторани ( $P,Q$ и $R$ ).

Марија оди во ресторан само во среда.

Искра и Миле никогаш не се во можност заедно да одат во ресторан.

Лиле не оди во ресторан ако и Марија не појде

Петре и Коста нема да одат во ист ресторан заедно ако и Искра не оди.

Миле не оди во ресторанот $Q$ .

Ако шест од соработниците ручаат заедно во среда во еден од рестораните, кој од соработниците ќе биде отсутен?

Кој е најголемиот број на соработници што можат да одат заедно на ручек во вторник?

**Решение.** Јасно е дека ќе биде отсутен или Миле или Искра. Ако Искра е отсутна, тогаш Петре и Коста нема заедно да бидат во ресторан, па во тој случај најмногу 5 соработници ќе ручаат заедно. Според тоа, ако во среда ручаат заедно шест соработници, отсутен ќе биде Миле.

Во вторник и Марија не оди на ручек, што значи дека и Лиле тогаш нема да оди на ручек. Бидејќи Искра и Миле никогаш не ручаат заедно, се добива дека во вторник можат да ручаат најмногу четири соработници.

**II година**

**1.** Да се најдат сите комплексни броеви $z$ за кои важи равенството

$$z^2=\bar{z}.$$

**Решение.** Нека $z=x+iy$ ( $x,y\in\mathbb{R}$ ). Од $z^2=\bar{z}$ добиваме

$$x^2-y^2=x \qquad (1)$$

$$2xy=-y \qquad (2)$$

Од равенката (2) добиваме $y=0$ или $2x+1=0$ . Ако $y=0$ , тогаш од равенката (1) се добива $x=0$ или $x=1$ . Ако $2x+1=0$ , т.е. $x=-\frac{1}{2}$ , тогаш од равенката

(1) се добива $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Според тоа, бараните комплексни броеви се $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**2.** Нека $x_1$ и $x_2$ се решенија на квадратната равенка

$$6x^2-5x+1=0.$$

Без да се решава дадената равенка, да се формира квадратната равенка по $y$ чии решенија се броевите

$$y_1=\frac{x_1+1}{x_1-1} \text{ и } y_2=\frac{x_2+1}{x_2-1}.$$

**Решение.** Од равенката (1) според Виетовите правила имаме $x_1+x_2=\frac{5}{6}$, $x_1x_2=\frac{1}{6}$. Нека $y^2-px+q=0$ е бараната равенка; тогаш пак според Виетовите правила, ќе имаме

$$p=y_1+y_2=\frac{x_1+1}{x_1-1}+\frac{x_2+1}{x_2-1}=\frac{(x_1+1)(x_2-1)+(x_2+1)(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$
$$=\frac{2x_1x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=-5$$
$$q=y_1\cdot y_2=\frac{x_1+1}{x_1-1}\cdot\frac{x_2+1}{x_2-1}=\frac{x_1x_2+(x_1+x_2)+1}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}=6.$$

Според тоа, бараната равенка е $y^2+5y+6=0$.

**3**. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се $n$ точки во рамнината. Да се покаже дека постои една и само една точка $T$ таква што

$$\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{TA_2}+...+\overrightarrow{TA_n}=\vec{0}$$

**Решение.** Нека $O$ е произволна точка во рамнината и нека точката $T$ е определена со равенството

$$\overrightarrow{OT}=\frac{1}{n}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}).$$

Тогаш имаме

$$\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{TA_2}+...+\overrightarrow{TA_n}=(\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA_2})+...+(\overrightarrow{TO}+\overrightarrow{OA_n})$$
$$=n\overrightarrow{TO}+(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n})$$
$$=n\overrightarrow{TO}+n\overrightarrow{OT}=\vec{0}$$

Ако $Q$ е точка од рамнината, таква што

$$\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{QA_2}+...+\overrightarrow{QA_n}=\vec{0}$$

тогаш

$$\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{QA_2}+...+\overrightarrow{QA_n}=\vec{0}=\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{TA_2}+...+\overrightarrow{TA_n},$$

од каде што добиваме

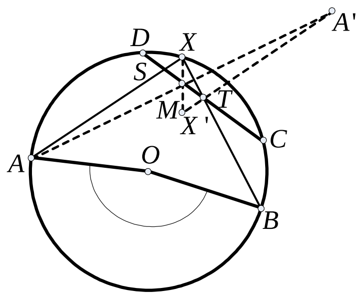
$$(\overrightarrow{TA_1}+\overrightarrow{A_1Q})+(\overrightarrow{TA_2}+\overrightarrow{A_2Q})+...+(\overrightarrow{TA_n}+\overrightarrow{A_nQ})=\vec{0}.$$

Но, $\overrightarrow{TA_k}+\overrightarrow{A_kQ}=\overrightarrow{TQ}$ за $k=1,2,3,...,n$, па последното равенство се сведува на равенството $n\overrightarrow{TQ}=\vec{0}$, т.е. $\overrightarrow{TQ}=\vec{0}$, од каде што се добива $T\equiv Q$.

**4.** На кружница $k$ дадени се четири точки $A,B,C,D$ а на тетивата $CD$ една точка $M$ . На кружницата $k$ да се најде точка $X$ , така што правите $AX$ и $BX$ отсекуваат на тетивата $CD$ отсечка $ST$ чија средина е точката $M$ .

**Решение.** Да претпоставиме дека задачата е решена (види цртеж). Тогаш имаме $\sigma_M(S)=T$ . Нека $\sigma_M(A)=A'$, $\sigma_M(X)=X'$ . Правите $A'X'$ и $AX$ се паралелни, па имаме

$$\measuredangle X'TB=\measuredangle AXB=\tfrac{1}{2}\measuredangle AOB.$$




Од анализата следува следнава конструкција.

1) Ја конструираме точката $A'=\sigma_M(A)$;

2) го конструираме геометриското место $\Gamma$ на точки од кои отсечката $A'B$ се гледа под агол $\pi-\frac{1}{2}\measuredangle AOB$;

3) точката $T\in\Gamma\cap CD$. Со тоа задачата е решена.

**III година**

**1.** Да се докаже неравенството

$$\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\log_4 5\cdot...\log_{1981}1982\cdot\log_{1982}1983<11.$$

**Решение.** За произволен број $c>0$ важи равенството

$$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b},$$

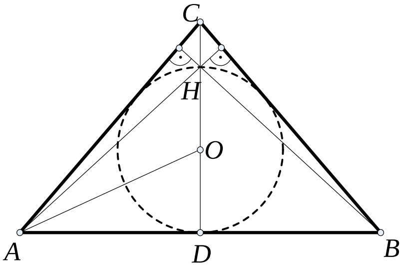
па за $c=10$, за изразот $A$ добиваме

$$A=\frac{\log 3}{\log 2}\cdot\frac{\log 4}{\log 3}\cdot...\cdot\frac{\log 1982}{\log 1981}\cdot\frac{\log 1983}{\log 1982}=\frac{\log 1983}{\log 2}=\log_2 1983.$$

Нека $\log_2 1983=x$; тогаш $2^x=1983$. За $x=11$ имаме $2^{11}=2048$, па значи,

$$1983<2^{11},\text{ т.е. }\log_2 1983<11.$$

**2.** Нека ортоцентарот $H$ на рамнокракиот триаголник $ABC$ лежи на впишаната кружница. Да се најде косинусот на аголот $\alpha$ при основата $AB$ на тој триаголник.




**Решение.** Нека $O$ е центарот на впишаната кружница во рамнокракиот триаголник $ABC$ (види цртеж). Тогаш имаме $\measuredangle OAD = \frac{\alpha}{2}$, $\measuredangle AHD = \alpha$. Од правоаголните триаголници $AHD$ и $AOD$ добиваме $\overline{HD} = \overline{AD}\operatorname{ctg}\alpha$ и $\overline{OD} = \overline{AD}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ . Бидејќи $\overline{HD} = 2\overline{OD}$, добиваме $\operatorname{ctg}\alpha = 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, од каде што, пак, добиваме $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

**3.** Нека $a,b$ и $c$ се должините на страните на еден триаголник и нека $\alpha,\beta$ и $\gamma$ се неговите внатрешни агли (аголот $\alpha$ лежи спроти страната $a$, а $\beta$ и $\gamma$ -спроти $b$ и $c$ соодветно). Да се докаже дека

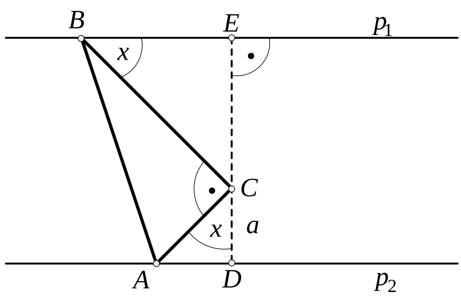
$$A = (\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\cos\alpha + (\frac{c}{a}+\frac{a}{c})\cos\beta + (\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\cos\gamma = 3$$

**Решение.** Со примена на косинусна теорема, за изразот $A$ имаме

$$A = (\frac{b}{c}+\frac{c}{b})\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + (\frac{c}{a}+\frac{a}{c})\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + (\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$
$$= \frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2b^2c^2} + \frac{(a^2+c^2)(a^2+c^2-b^2)}{2a^2c^2} + \frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2}$$

од каде што, по средувањето, ќе добиеме $A = 3$.

**4.** Дадени се две паралелни прави $p_1$ и $p_2$ и една точка $C$ меѓу нив. Да се одреди правоаголен триаголник $ABC$, со прав агол во дадената точка $C$ и другите две темиња $A$ и $B$ кои лежат на правите $p_1$ и $p_2$ соодветно, така што неговата плоштина да биде најмала.




**Решение.** Нека $d$ е растојанието меѓу правите $p_1$ и $p_2$ и нека $a$ е растојанието од точката $C$ до правата $p_2$ (види цртеж). Положбата на триаголникот $ABC$ наполно е определена со аголот $x$ што катетата $AC$ го зафаќа со нормалата $ED$ на правите $p_1$ и $p_2$. Бидејќи $\measuredangle CBE = \measuredangle ACD = x$ (како агли со заемно нормални краци), од правоаголните триаголници $ACD$ и $CEB$, имаме $\overline{AC} = \frac{a}{\cos x}$ I $\overline{BC} = \frac{d-a}{\sin x}$, па плоштината на триаголникот $ABC$ ќе биде

$$P=\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{2}\frac{a}{\cos x}\cdot\frac{d-a}{\sin x}=\frac{a(d-a)}{\sin 2x}.$$

Според тоа, плоштината $P$ ќе биде најмала ако е $\sin 2x$ најголемо, т.е. ако $\sin 2x=1$, од каде што добиваме $x=\frac{\pi}{4}$.

**IV година**

**1.** Нека $A$ и $B$ се две дадени точки, а $m$ е даден позитивен број. Да се најде геометриското место на точките $M$ такви што $\overline{AM}=m\cdot\overline{BM}$.

**Решение.** Со $O$ да ја означиме онаа точка од отсечката $AB$ за која е $\overline{AO}:\overline{OB}=m$. Ако ставиме $\overline{OB}=a$ и ако поставиме правоаголен координатен сsстем со координатен почеток во точката $O$ и апсцисна оска-правата $AB$, тогаш ќе имаме $A(-ma,0)$ и $B(a,0)$. Ако $M(x,y)$ е точка од бараното геометриско место точки, од условот $\overline{AM}=m\cdot\overline{BM}$ добиваме

$$(x+ma)^2+y^2=m^2[(a-x)^2+y^2]$$

која по средувањето , се трансформира во облик

$$(m-1)x^2+(m-1)y^2=2max.$$

Со последната равенка дадено е геометриското место на точки и од неа се гледа дека при $m=1$ тоа геометриско место е правата $x=0$, додека при $m\neq 1$ геометриското место е кружницата

$$\left(x-\frac{ma}{m-1}\right)^2+y^2=\frac{m^2a^2}{(m-1)^2}.$$

**2.** Во правоаголниот триаголник $ABC$ дадени се катетата $\overline{CA}=b$ и аголот $\alpha=60^\circ$ при темето $A$. Од темето $C$ спуштена е нормал $CD$ на хипотенузата $AB$. Од точката $D$ спуштена е нормала $DC_1$ на катетата $BC$. Од точката $C_1$ спуштена е нормал $C_1D_1$ на хипотенузата $AB$ итн. Да се пресмета збирот на должините на така добиените нормали, кога нивниот број неограничено се зголемува.

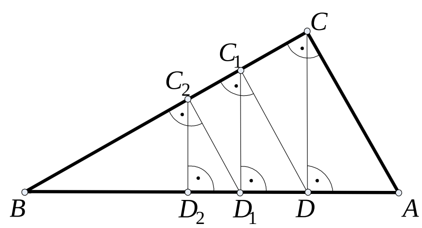
**Решение.** Аглите $\measuredangle CAD, \measuredangle DCC_1, \measuredangle C_1DD_1,\dots$ се еднакви меѓу себе и се по $60^\circ$, бидејќи тоа се агли со заемно нормални краци (види цртеж). Од правоаголните триаголници $ACD, DCC_1, DD_1C_1,\dots$ добиваме

$\overline{CD}=b\sin 60^\circ$, $\quad \overline{C_1D}=\overline{CD}\cdot\sin 60^\circ$,

$\overline{C_1D_1}=\overline{C_1D}\cdot\sin 60^\circ$, … $\overline{CD}=b\sin 60^\circ$,

$\overline{C_1D}=b\cdot\sin^2 60^\circ$, $\quad \overline{C_1D_1}=b\cdot\sin^3 60^\circ$,

…



Збирот на овие отсечки (кога нивниот број неограничено се зголемува) формира еден бесконечен геометриски ред со прв член $a_1 = b\sin 60^\circ$ и количник

$$q = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 .$$

Според тоа, збирот $S$ на овој ред ќе биде

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{b \cdot \sin 60^\circ}{1-\sin 60^\circ} = b\sqrt{3}(2+\sqrt{3}) .$$

**3.** Нека $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ е аритметичка прогресија и нека $a_n \neq 0$ за $n = 1, 2, 3, ...$. Да се докаже дека

$$S = \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}} .$$

**Решение.** Нека $d = a_{k+1} - a_k$ ( $k = 1, 2, 3, 4, ...., n, ...$) е разликата на аритметичката прогресија; тогаш имаме:

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{d} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n-1} (\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})$$

$$= \frac{1}{d}(\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}) = \frac{1}{d} \frac{a_n - a_1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}} = \frac{1}{d} \frac{(n-1)d}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_1}} .$$

**4.** Од природните броеви ги формираме множествата

$A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2,3,4\}$, $A_3 = \{3,4,5,6,7\}$, $A_4 = \{4,5,6,7,8,9,10\}$ ,...

Со помош на математичка индукција да се докаже дека збирот на броевите во секое множество $A_n$, $n = 1, 2, 3, 4, ...$ е квадрат на некој непарен број.

**Решение.** Нека $S_n$ е збирот на броевите во множеството

$$A_n = \{n, n+1, n+2, n+3, ..., 3n-2\} ;$$

тогаш имаме:

$$S_1 = 1 = 1^2 = (2 \cdot 1 - 1)^2$$

$$S_2 = 2 + 3 + 4 = 9 = 3^2 = (2 \cdot 2 - 1)^2$$

$$S_3 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25 = 5^2 = (2 \cdot 3 - 1)^2 \text{, итн.}$$

Да претпоставиме дека $S_k = (2 \cdot k - 1)^2$ . За $S_{k+1}$ ќе имаме:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (k+1) + (k+2) + ... + 3(k+1) - 3 + 3(k+1) - 2 \\ &= S_k - k + 3k - 1 + 3k + 3k + 1 = S_k + b_k \\ &= (2k-1)^2 + 8k = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2 \\ &= [2(k+1) - 1]^2 . \end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција $S_n = (2n-1)^2$ за секој природен број $n \in \mathbb{N}$ .