Статијата прв пат е објвена во списанието СИГМА на сојузот на математичарите на Македонија

Лилјана Грибовска-Поповиќ

КАКО СЕ РЕШАВААТ ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

Во секојдневниот живот често се наоѓаме во ситуации кога треба да разрешиме помали или поголеми логички проблеми. Затоа корисно е да го тренираме своето логичко мислење. За оваа умна гимнастика ќе ни послужи решавањето на логичките задачи. За нив е потребна вештина логички да се заклучува тргнувајќи од претпоставките дадени со условите на задачите, постепено елиминирајќи ги противречните случаи и неодржливите заклучоци.

Логичките задачи се со разновиден карактер. Низ конкретни примери ќе презентираме неколку начини за решавање на овие задачи. На голем дел од нив заедничко им е дека еден исказ е или точен или неточен, па, за решавањето на таквите задачи ќе се послужиме со математичката логика. Логиката, како основа на математиката, е суштината на овие задачи.

1. Решавање со здраворазумско размислување

Еве еден пример што можеме да го решиме со здраворазумско размислување, кое не секогаш подразбира применување на математички методи.

1. *На тениски тримеч играат играчи од Скопје, Битола и Охрид. Нивните имиња се: Марко, Владо и Илија. Прво играле Марко и играчот од Скопје, потоа Владо и играчот од Битола, додека Марко бил слободен. Да се определат градовите од каде што доаѓа секој од играчите, под претпоставка секој од нив да доаѓа од различно место на Републиката.*

Решение. Марко не е од Скопје, ниту од Битола – значи тој е од Охрид. Владо не е од Битола бидејќи игра со играч од Битола, значи Владо е од Скопје. Останува Илија да е од Битола.

2. Решавање со воведување претпоставка

1. *Три фризерки Лена, Лида и Лада на фризерски натпревар ги освоиле првите три места. Кога се вратиле во својот град изјавиле:*

Лена: Јас бев прва.

Лида: Јас не бев прва.

Лада: Јас не бев трета, а само една од моите колешки ја кажа вистината.

Лада секогаш ја зборува вистината. Кое е местото што таа го освоила?

Решение. Да претпоставиме дека Лена не зборува вистинито; значи не е прва. Според изјавата на Лада останува Лида да зборува вистинито; значи ниту таа не е прва. Останува единствено Лада да го освоила првото место.

2. *Пет коњи со броеви 1, 2, 3, 4 и 5 учествуваат во една трка. На прашањето за конечниот редослед на коњите по трката, петте судии Ацо, Борис, Васе, Горан и Диме изјавиле:*

Ацо: 3 е втор, 2 е трет.
Борис: 5 е трет, 4 е петти.
Васе: 5 е втор, 4 е прв.
Горан: 3 е втор, 1 е четврти.
Диме: 2 е прв, 1 е четврти.

Заради метежот на целта, со фото финиш е одреден редоследот на коњите во трката. Се покажало дека секој од судиите за еден коњ го тврдел точното место, а за другиот кажувал невистина.Кој коњ победил?

Решение. Ако претпоставиме дека Ацо кажал вистинито дека коњот со број 3 е втор, тогаш 5 не е втор, а затоа пак 4 е прв според Васе, па 4 не е петти, од каде што следува дека 5 е трет (според Борис). Според Горан на четвртото место не е 1, па според Диме, на прво место е 2. Добивме противречност.

Според тоа, треба да тргнеме од претпоставката дека Ацо кажал вистинито за 2 дека е трет. Тогаш 3 не е втор. Ако е ова точно, тогаш според Горан 1 е четврти. Ако е точно дека 2 е трет, тогаш според Борис 5 не е трет, па 4 е петти. Според Васе, следува дека ако 4 е петти, не може 4 да е прв. Останува 5 да е втор. Значи, 3 е прв.

3. *На прашањето колку видео касети има Крсте, трите негови пријатели Андреа, Богдан и Владо, изјавиле:*

Андреа : Има над сто.
Богдан : Нема толку.
Владо: Има барем една.

Само еден од исказите е вистинит. Колку видео касети има Крсте?

Решение. Ако претпоставиме дека Андреа ја зборува вистината, тогаш Богдан и Владо не ја зборуваат вистината. Но, во тој случај, од изјавата на Владо се доаѓа до противречност.

Ако претпоставиме дека Владо зборува вистинито, тогаш Андреа и Богдан не ја зборуваат вистината. Противречноста е очигледна.

Ако претпоставиме дека Богдан ја зборува вистината, тогаш Андреа и Владо не ја зборуваат вистината. Значи, Крсте нема над сто видео касети и Крсте нема ниту една видео касета. Овој случај не е противречен: заклучокот е дека Крсте воопшто нема видео касети.

3. Решавање со помош на табели

1. *Во три термоси (црвен, бел и син) се наоѓаат сок, млеко и вода. Во синиот нема ниту сок, ниту млеко. Во црвениот нема сок. За сите течности да се определи бојата на термосот во којшто се наоѓаат.*

Решение. Задачата може да се реши и со здраворазумско размислување, но да се обидеме условите од задачата да ги запишеме во табела.

Според задачата сокот не е ниту во црвениот, ниту во синиот термос, што значи дека е во белиот. Во синиот нема ниту сок, ниту млеко, значи има вода. Останува млекото да е во црвениот термос.

	сок	млеко	вода
црвен	–	+	
бел	+		
син	–	–	+

2. *Антевска, Белевска, Васовска и Гоцевска се четири талентирани жени. Едната од нив е балерина, другата сликарка, третата виолинистка и четвртата писателка. За нив знаеме дека:*

(1) Антевска и Васовска не биле на концертот на виолинистката;

(2) Белевска и писателката заедно ѝ позирале на сликарката;

(3) Писателката ја напишала биографијата на Гоцевска и се подготвува да напише биографија за Антевска;

(4) Антевска никогаш не се видела со Васовска.

Определете ги професиите на секоја од четирите жени.

Решение. Според условите на задачата, Антевска не е ниту виолинистка, ниту писателка. Белевска не е ниту сликарка, ниту писателка. Васовска не е виолинистка, а Гоцевска не е писателка. Во колоната „писателка" единственото празно место е за Васовска. Според условот (2), Васовска ѝ позирала на сликарката, а според (4) Васовска не се видела со Антевска; значи Антевска не е сликарка. Во редот на Антевска единственото непотполнето поле е она за балерина. Тогаш Белевска не е балерина и единственото празно поле во нејзиниот ред е виолинистка. Тогаш, Гоцевска не е виолинистка, а бидејќи не е ниту балерина, останува да биде сликарка. Значи: Антевска е балерина, Белевска е виолинистка, Васовска писателка, а Гоцевска сликарка.

	балерина	сликарка	виолинистка	писателка
Антевска	+	–	–	–
Белевска	–	–	+	–
Васовска	–	–	–	+
Гоцевска	–	+	–	–

3. *Секоја од четирите девојки Ана, Бети, Вики и Гала знае по еден странски јазик и се занимава со по еден спорт.*

Ана игра кошарка и не знае италијански.
Бети игра одбојка и не знае германски.
Вики не игра ракомет и не знае германски.
Гала не игра тенис и не знае англиски.
Онаа која знае француски игра тенис.
Онаа која игра одбојка не знае италијански.

Да се определи кој странски јазик го знае и со кој спорт се занимава секоја од девојките.

Решение. Овде имаме три множества: девојки, јазици, спортови. Ќе треба да користиме две табели.

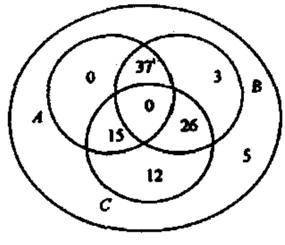
Ана игра кошарка, Бети одбојка, тенисот и ракометот останаа за Вики и Гала, но таа што игра тенис знае и француски – значи Гала не игра тенис, па според тоа, Вики игра тенис, а Гала игра ракомет. Таа што игра тенис знае француски, а тоа е Вики. Тогаш Бети знае англиски, Ана знае германски и конечно, Гала знае италијански. Од табелата сега лесно се чита која девојка со кој спорт се занимава и кој јазик го знае.

	фра.	гер.	итал.	анг.	кош.	тенис.	рак.	одб.
Ана		+	–	–	+			
Бети	–	–	–	+				+
Вики	+	–	–	–		+	–	
Гала	–	–	+	–		–	+	

4. Решавање со Венови дијаграми

1. *На еден натпревар учествувале 98 ученика. Имале за решавање три задачи. Никој од нив не ги решил сите три задачи, 5 не решиле ниту една, 3 ја решиле само втората, 37 ја решиле првата и втората, додека 15 ја решиле* *првата и третата задача. На крајот е констатирано дека првата задача ја решиле вкупно 52, втората 66 и третата 53 ученика. Колку ученика ја решиле само првата или само третата задача?*

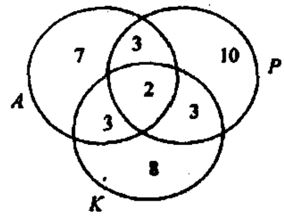
Решение. Нека со A, B, C ги означиме множествата на ученици што ја решиле првата, втората и третата задача, соодветно. Бидејќи од 98 ученика 5 не решиле ниедна задача, следува дека 93 ученика решиле барем една задача. Од условот на задачата добиваме дека $A \cap B \cap C = \emptyset$, а $A \cap B$ содржи 37 елементи, додека $A \cap C$ содржи 15 елементи. Бидејќи втората задача ја решиле вкупно 66 ученика, следува дека $B \cap C$ содржи 66–(37+3)=26 елементи. Првата задача ја решиле 52 ученика и бидејќи 52=37+15, секој од нив решил уште по една задача: втората или третата. Третата задача ја решиле 53 ученици, а бидејќи 15 ја решиле и првата, а 26 и втората, се заклучува дека само третата задача ја решиле 53–(15+26)=12 ученика. Значи, само првата или само третата задача ја решиле вкупно 12 ученика (сл. 1).



Сл. 1

2. *Сите ученици на еден клас членуваат во некоја од трите спортски секции во училиштето: атлетска, ракометна и кошаркарска. Два ученика се членови на сите три секции. Девет ученика се членови на по две секции. Притоа, атлетика и кошарка спортуваат 5 ученика, а исто толку кошарка и ракомет. Само во по една секција членуваат 25 ученика. Само во ракометната се 10 ученика, само во кошаркарската се 8 ученика. Колку ученици има во класот?*

Решение. Од условите на задачата се гледа дека $A \cap P \cap K$ има само два елемента, $A \cap K$ има 5 елементи, $P \cap K$ исто има 5 елементи. Значи $A \cap P$ мора да има исто 5 елементи. Бидејќи 25 ученика се само во по една секција (18=10+8 во ракометната и кошаркарската секција; значи: 25-18=7 во атлетската), следува дека унијата $A \cup P \cup K$ има вкупно 36 елементи. Значи, толку ученици има во класот.



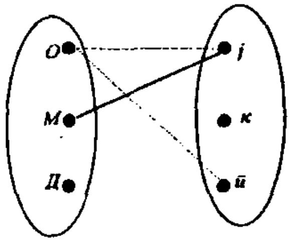
Сл. 2

5. Решавање со помош на графови

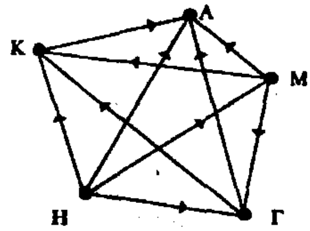
1. *Олга, Мила и Драга имаат на располагање три овошки: јаболко, круша и портокал. Олга не јаде портокали ниту јаболка, Мила јаде само јаболка. Да се определи омиленото овошје на секоја од девојките.*

Решение. Нека множеството од девојки е $\{O, M, Д\}$, а множеството од овошки е $\{ј, к, п\}$ (означени со првата буква од нивните имиња). Ако некоја од девојките сака некаква овошка, тогаш соодветните елементи од двете множества ќе ги поврземе со полна линија. Ако, пак, некоја од девојките не сака специфична овошка, соодветните елементи ги поврзуваме со прекината линија.

Бидејќи Олга не јаде ниту портокали ниту јаболка, таа ќе ја земе крушата. Мила јаде јаболка (на сликата поврзани со полна линија). Очигледно, за Драга ќе остане портокалот (сл. 3).



Сл. 3



Сл. 4

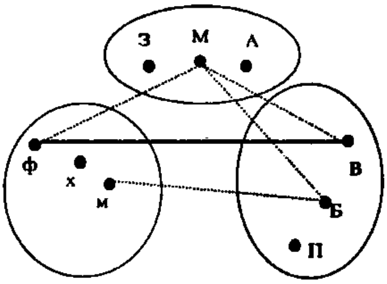
2. *Коста, Ане, Марко, Гоце и Никола се другари. Марко е повисок од Гоце, Ане и Коста, но не е највисок. Ане е најнизок и по висина е по Коста. Никола е повисок за глава од Коста и барем за 5 cm повисок од секој од останатите. Наредете ги по висина.*

Решение. На сл. 4 секоја точка означува по еден од другарите и е претставена релацијата " ...е повисок од..." . Според задачата, ако Марко не е највисок (а е повисок од Гоце, Ане и Коста), тогаш Никола е повисок од него. Бидејќи Ане е најнизок сите стрелки одат кон него. По него е Коста, па од Никола и Гоце ќе одат стрелки кон Коста, додека стрелката кон него од Марко веќе беше поставена според условите на задачата. Бидејќи Никола е повисок од сите други останува да поставиме стрелка уште од Никола кон Гоце. Од графот може да се заклучи дека најнизок е оној кон кој одат најмногу стрелки. Значи најнизок е Ане, па Коста, потоа Гоце, па Марко, а Никола е највисок од сите.

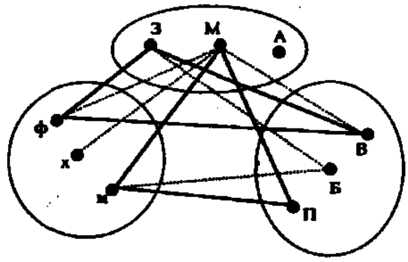
3. *Три другарки од детството: Зора, Мара и Ана станале професорки по различни предмети: хемија, физика и математика. Тие работат во три различни градови: Прилеп, Велес и Битола. Познато е следново: Зора не работи во Битола, Мара не работи во Велес. Потоа се знае дека професорката од Битола не предава математика. Онаа која работи во Велес предава физика. Мара не предава хемија. Кој предмет и во кој град предава секоја од професорките?*

Решение. Овде имаме три множества: имиња $\{З, М, А\}$, предмети {х, ф, м} и градови $\{П, В, Б\}$. На секој елемент од едното множество одговара точно по еден елемент од другото множество. Ако елементите се во релација, ќе бидат поврзани со триаголник нацртан со полна линија (сл. 5 и 6).

Според условите на задачата, бидејќи врската *МВ* е со испрекината линија, не постои триаголник ф*ВМ* со полна линија, затоа на втората слика ф*М* ќе биде испрекината. Бидејќи *М*ф и *М*х се испрекинати, мора *М*м да биде со полна линија. Заради испрекинатите линии *Б*м и *ВМ* триаголник со полна линија може да се формира само меѓу *М*м и *П*. Сега останува да се заклучи дека единствената полна линија од *З* е кон *В* (*БЗ* е испрекинато, *П* отпаѓа), па преостанува да се поврзе со полна линија уште *З* и ф (*В*ф е веќе, според условите, нацртан со полна линија). Така го добиваме триаголникот *ЗфВ* со полна линија. Значи, имаме дека Мара е математичарка во Прилеп, Зора е физичарка во Велес и конечно, Ана е хемичарка во Битола.



Сл. 5



Сл. 6

6. Решавање со користење неравенства

Оваа метода на решавање логички задачи се применува обично кога се бара одредување на редослед при комбинирање на помал број елементи.

1. *Три шахисти Каспаров, Петросјан, Тиман играат тримеч. Не чекајќи да ги завршат прекинатите партии, новинарот ѝ јавил на својата редакција дека Тиман е прв, Каспаров не е прв, а Петросјан нема да биде последен. По завршувањето на прекинатите партии се покажало дека новинарот го погодил успехот само на еден шахист. Каков е конечниот редослед на шахистите?*

Решение. Нека со 1, 2 и 3 се означени местата што ги освоиле шахистите. Според условите на задачата, т.е. според прогнозата на новинарот, имаме: $T = 1$, $2 \le K \le 3$ и $1 \le П \le 2$. Изборот $T = 1$ не е возможен, бидејќи новинарот го погодил успехот само на еден шахист, па негацијата на $2 \le K \le 3$ значи $K = 1$. Ако точната информација е $2 \le K \le 3$, тогаш $1 \le П \le 2$ е неточно. Затоа мора $П = 3$, а потоа и $K = 2$. Тогаш мора $T = 1$, што не е можно, бидејќи и оваа информација мора да е неточна од условот на задачата. Останува точна да е третата информација, т.е. $1 \le П \le 2$. Од неточноста на $2 \le K \le 3$, следува дека мора $П = 2$, $K = 1$ и $T = 3$. Значи Каспаров е прв, Петросјан втор и Тиман трет.

2. *На турнирот во пинг-понг учествуваат учениците: Аце, Бранко, Цветан, Диме и Емил. По завршувањето на турнирот може да се утврди дека: Аце е три места пред Бранко, а Диме е три места по Цветан, при што Бранко не е меѓу Цветан и Диме. Која е конечната состојба на ранг-листата по натпреварот?*

Решение. Нека a, b, c, d и e се редните броеви на учениците: Аце, Бранко, Цветан, Диме и Емил. Од условите на задачата ги добиваме неравенствата $a \le 2$; $4 \le b \le 5$; $c \le 2$; $4 \le d \le 5$ и $b > d$. Последниот услов ($b > d$) го добиваме од тоа што $c < d$, а Бранко не е меѓу Цветан и Диме. Бидејќи $4 \le b \le 5$ и $4 \le d \le 5$ ($d < b$) имаме дека $d = 4$, $b = 5$. Понатаму добиваме $a = 2$, додека $c = 1$ и $e = 3$. Значи, редоследот на учесниците на турнирот е: Цветан, Аце, Емил, Диме и Бранко последен.

3. *Другарите Ване, Иво и Јоцо навиваат за три различни клуба: Вардар, Силекс и Пелистер. На прашањето за кој клуб навиваат ги дале следниве одговори.*

Иво: Јас не навивам за Пелистер.

Ване: Јас не навивам за Силекс.

Јоцо: Јас навивам за Пелистер.

Двајца од другарите, за кои е познато дека лажат, и овој пат излажале. Одреди кој за кој клуб навива.

Решение. Нека со броеви 1, 2 и 3 ги означиме клубовите Пелистер, Вардар и Силекс, а со $И$, $В$ и J другарите Иво, Ване и Јоцо, соодветно. Тогаш, според изјавите, би имале $2 \leq И \leq 3$, $1 \leq В \leq 2$, $J = 1$. Само една изјава е точна. Проверувајќи како и во задача 1, ќе утврдиме дека е точно дека $1 \leq В \leq 2$, значи Иво и Јоцо лажат, па затоа мора $И = 1$. Останува $В = 2$, додека $J = 3$. Според тоа, Ване навива за Вардар, Иво за Пелистер, а Јоцо за Силекс.

7. Решавање со формулирање на погодно прашање

1. *Туристот се нашол пред еден камп за кој не знае дали е Градиште или не. На влезот имало само неколку деца кои или секогаш зборуваат вистина или секогаш лажат и одговараат на прашање само со Да или Не. Како туристот ќе дознае дали е пред Градиште од првото дете на кое ќе му се обрати?*

Решение. Тој треба да му го постави прашањето: *Ако те прашам дали е ова кампот Градиште, што би ми одговорил?* Доколку добие одговор *Да*, тогаш е пред Градиште и може да влезе во кампот. Ако добие одговор *Не*, треба да продолжи понатаму.

Зошто е тоа така? Ако детето зборува само вистина одговорот *Да* посочува дека навистина е пред кампот Градиште. Ако детето е од оние што само лажат, ќе одговори со *Да*, бидејќи ќе излаже дека ќе одговори со *Не* на поставеното прашање, а лагата од *Не* е *Да*.

2. *Одејќи кон рекатa патникот дошол до една раскрсница, каде живеат два брата: Лазо (кој секогаш лаже) и Ристо (кој секогаш зборува вистина). Знаејќи го тоа и незнаејќи кој од браќата го сретнал, му поставува едно прашање. Место одговор на патникот му е покажан левиот пат. Тој тргнал по десниот пат и стигнал до реката. Како гласи прашањето што го поставил патникот ?*

Решение. Патникот го поставил прашањето: *Кога би го прашал твојот брат кој пат води кон реката, каде тој би ме упатил?*

Сеедно е кој брат ќе го сретне, секогаш ќе му биде посочен погрешниот пат. Ако го сретнал Ристо, тој зборува вистина и ќе покаже дека Лазо ќе го упати кон погрешниот пат. Ако го сретнал Лазо, тој ќе го излаже покажувајќи му го погрешниот пат, место вистинскиот што би му го покажал Ристо.

3. *Пред себе ги имаме Л(ажго), В(истинко) и К(олебливко). Со три прашања, на кои ќе одговараат со Да или Не, ние можеме да погодиме кој е кој. Кои се тие прашања ?*

Решение. Ако знаеме кој е $К$, лесно би одредиле кој е $Л$ од останатите двајца, поставувајќи му го прашањето *Дали е $1+1=2$?*. Ако прашаниот биде $Л$, тој би одговорил *Не*, па би констатирале дека тој е лажгото. Ако прашаниот е *В*, тој би одговорил со *Да*, па лажгото би бил преостанатиот од тројцата. Значи, со две прашања треба да дознаеме кој е *К*. Да ги означиме со *М*, *Н* и *П* трите лица (секој си ја знае буквата). На лицето *М* би му го поставиле прашањето: *Ако те прашам дали лицето Н е К(олебливко), што би ми одговорил?* Ако добиеме одговор *Да*, тогаш постојат две можности:

(1) Лицето *Н* е *К*(олебливко), па тогаш *М* е *Л*(ажго) или *М* е *В*(истинко). Според задача 1. двајцата би одговориле со *Да*.

(2) Лицето *М* е *К*(олебливко) и бидејќи некогаш лаже, а некогаш зборува вистина, одговорил со *Да*. Во секој случај сигурно е дека лицето *П* не е *К*(олебливко).

На ист начин од одговорот *Не* заклучуваме дека *Н* не може да биде *К*(олебливко).

Другото прашање би било: *Ако те прашам дали лицето М е К(олебливко), што би ми одговорил?* Ако одговорот на првото прашање бил *Да*, прашањето е поставено на лицето *П*, а ако одговорот бил *Не*, прашањето е поставено на лицето *Н*. Сега, ако одговорот на второто прашање е *Да*, тогаш *К*(олебливко) е лицето *М*, а ако одговорот е *Не*, тогаш *К*(олебливко) е лицето кое не било прашано (но не *М*).

Дознавајќи кој е *К*(олебливко), би го поставиле прашањето од почетокот на решението на задачава и, според одговорот, конечно би дознале кој е кој.

8. Решавање со примена на математичка логика

1. *Три другарки Ана, Биле и Вера се јавиле кај училишниот лекар пред писмената по математика и изјавиле:*

Ана: Ако јас и Вера имаме грип, тогаш и Биле има грип.

Биле: Ако јас имам грип, тогаш и Ана има грип.

Вера: Ако јас и Биле имаме грип, тогаш и Ана има грип.

Кога ги прегледал лекарот, се констатирало дека само две ученички имале грип, а познато е дека ученичките не лажеле. Која од трите другарки нема грип?

Решение. Задачата ќе ја решиме користејќи само дел од вистинитосна таблица за три искази, следејќи ги условите на задачата.

Нека со $а$, $б$ и $в$ ги означиме исказите: *Ана има грип, Биле има грип* и *Вера има грип.*

Знаеме дека две ученички имаат грип, а само едната нема грип, затоа:

Ученичките не лажеле, само првиот ред ќе одговара на ситуацијата, т.е. сите три изјави ($а \wedge в \Rightarrow б$, $б \Rightarrow а$, $в \wedge б \Rightarrow а$) се вистинити доколку $\tau(а) = \top$, $\tau(б) = \top$ и $\tau(в) = \perp$, односно Ана и Биле се болни од грип, а Вера не е болна.

$а$	$б$	$в$	$а \wedge в \Rightarrow б$	$б \Rightarrow а$	$в \wedge б \Rightarrow а$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$

2. *На прашањето кој од петте ученика A, B, C, D, E игра шах, дадени се пет одговори:*

1. Ако A игра шах, тогаш и B игра шах;

2. Барем еден од учениците D и E игра шах;

3. Само еден од учениците B и C игра шах;

4. Учениците C и D или двајцата играат шах, или и двајцата не играат шах;

5. Ако E игра шах, тогаш A и D исто така играат шах.

Секој од овие одговори е вистинит. Одреди кој од овие пет ученика игра шах.

Решение. Според одговорите имаме: (1) $\tau(A \Rightarrow B) = \top$, (2) $\tau(D \vee E) = \top$, (3) $\tau[(B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)] = \top$, (4) $\tau[(C \wedge D) \vee (\neg C \wedge \neg D)] = \top$ и (5) $\tau[E \Rightarrow (A \wedge D)] = \top$. Имајќи ги предвид вистинитосните таблици на логичките операции и логичките закони, (1) и (5) би можеле да ги претставиме на следниот начин: (1) $\tau(\neg A \vee B) = \top$, (5) $\tau[\neg E \vee (A \wedge D)] = \top$. Сега ќе формираме конјункција на сите дисјункции и ќе добиеме:

$$(\neg A \vee B) \wedge (D \vee E) \wedge [(B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)] \wedge [(C \wedge D) \vee (\neg C \wedge \neg D)] \wedge [\neg E \vee (A \wedge D)].$$

По средувањето на оваа сложена формула ќе остане конјункцијата

$$\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D \wedge \neg E$$

чија вистинитосна вредност е $\top$ (точно), па значи, шах играат учениците C и D.

3. *Бранко, Васко, Драган и Миле имаат црна, кафена, црвена и жолта коса. Бидејќи ние не знаеме кој каква коса има, по прашувањето, ни се дадени следниве изјави по телефон:*

Бранко: Васко има црвена коса, а Драган жолта.

Васко: Драган има црвена коса, а Бранко има кафена коса.

Миле: Јас имам црвена коса, а Бранко жолта.

По средбата може да се забележи дека во изјавите на секое момче точно еден податок е точен, а другиот не. Кој каква коса има, ако се знае дека не постојат две момчиња со иста боја на косата?

Решение. Нека ознака за црна коса е 1, за кафена 2, за црвена 3 и за жолта 4 и нека момчињата се означени со почетната буква од името. Тогаш, на пример, $Б_3$ ќе означува исказ дека Бранко има коса од тип 3 (црвена). Според изјавите, имаме:

$$Б: \tau(В_3 \veebar Д_4) = \top; \quad В: \tau(Д_3 \veebar Б_2) = \top; \quad М: \tau(М_3 \veebar Б_4) = \top.$$

Бидејќи конјункција од две вистини е вистина, $\tau[(В_3 \veebar Д_4) \wedge (Д_3 \veebar Б_2)] = \top$.

Од овде имаме: $\tau[(В_3 \wedge Д_3) \veebar (В_3 \wedge Б_2) \veebar (Д_4 \wedge Д_3) \veebar (Д_4 \wedge Б_2)] = \top$.

Првата и третата конјункција се со вистинитосна вредност $\perp$ (бидејќи не може и Васко и Драган да имаат црвена коса, односно Драган да има и жолта и црвена коса). Останува, значи: $\tau[(В_3 \wedge Б_2) \veebar (Д_4 \wedge Б_2)] = \top$.

Сега формираме нова конјункција $[(В_3 \wedge Б_2) \veebar (Д_4 \wedge Б_2)] \wedge (М_3 \veebar Б_4)$ со преостанатата изјава на Миле, при што имаме: $\tau\{[(В_3 \wedge Б_2) \veebar (Д_4 \wedge Б_2)] \wedge (М_3 \veebar Б_4)\} = \top$. Од овде имаме: $\tau[(В_3 \wedge Б_2 \wedge М_3) \veebar (В_3 \wedge Б_2 \wedge Б_4) \veebar (Д_4 \wedge Б_2 \wedge М_3) \veebar (Д_4 \wedge Б_2 \wedge Б_4)] = \top$.

Во горната дисјункција, првата конјункција не може да е вистинита, бидејќи Васко и Миле не може да имаат иста боја на коса, додека втората и четвртата се невистинити бидејќи Бранко не може да има две природни бои на коса. Точна е, значи, само третата конјункција, од каде заклучуваме дека Диме има жолта коса, Бранко – кафена, Миле – црвена, а Васко има црна коса.

* * *

Драги ученици, сами можевте да забележите дека некои од задачите можеа да бидат решени и на повеќе начини . За некои од нив можеби сте имале и друга идеја за да ги решите.

Во подолу дадените задачи имате слобода да примените некој од претходно посочените начини за решавање или да решите задача на некој вам близок и нов начин.

Задачи за самостојна работа

1. Вера, Нада и Љуба се претседатели на математичката, хемиската и спортската секција во своите класови. Спортистката е најмлада и нема ниту брат, ниту сестра во училиштето. Нада, која седи во клупа со Љубиниот брат, постара е од членката на хемиската секција. Одредете ги имињата на претседателите на математичката, хемиската и спортската секција.

2. На еден натпревар има пет ученици A, B, C, D, E. Да се одреди нивниот редослед ако е познато: A е две места пред E, C е две места пред D, B е после A, E не е меѓу C и D.

3. Томе, Диме и Ристо се ожениле со Дана, Маре и Соња (не се знае кој со која). Секој пар има по едно дете. Имињата на децата се Ема, Марко и Аце. Одреди ги членовите на секое семејство, ако се знае дека: а) децата на Маре и Ристо играат фудбал; б) Аце не му е син на Томе; в) Соња не му е жена на Диме.

4. Сотир секогаш зборува вистина. Кое прашање треба да му се постави двапати, така што тој да даде различни одговори?

5. Орце, Боро и Владе живеат во три различни града: Охрид, Битола и Велес. Нивни девојки се: Гордана, Доста и Елена. Знаеме дека: 1) Боро не ја сака Елена; 2) Владо не е од Велес, а Боро не е од Битола; 3) Гордана е заљубена во Битолчанецот; 4) Велешанецот не ја сака Доста. Одреди ги заљубените парови и местата во кои живеат.

6. Сашо, Мишо и Глишо читаат: *Нова Македонија*, *Вечер* и *Дневник*, секој само еден весник. Секретарката во нивната установа изјавила: *Сашо чита Нова Македонија, Мишо не чита Вечер, а Глишо не чита Нова Македонија.* Се покажало дека сеќавањето не ја служи добро и дека само еден одговор е точен. Кој весник од кого е читан?