Валентина Гоговска,
Скопје

ВКУПЕН БРОЈ МОЖНОСТИ

Често пати, во секојдневниот живот, се среќаваме со потребата да најдеме вкупен број можни ситуации за некој настан. Решавањето на овие проблеми не е ниту малку едноставно, а голем е бројот на задачите кои се уште не се решени. Во следните разгледувања ќе се осврнеме на неколку елементрани проблеми од овој тип.

Ако за иницијали се земат првите букви од името, татковото име и презимето дали е можно во Тетово (град со околу 80 000 жители) да постојат двајца со исти иницијали?

Решение. Било која буква од азбуката може да биде почетна на името, татковото име и презимето. Бидејќи во македонската азбука има 31 буква $31\cdot31\cdot31=29791$ е вкупниот број на различни иницијали. Бидејќи Тетово е град со 80 000 жители тогаш во него сигурно ќе постојат барем тројца со исти иницијали (80 000>$2\cdot29791$, а од принципот на Дирихле следува дека постојат барем тројца).

Напомена. *Ако во текстот стои иницијалите да бидат составени од различни букви тогаш ќе постојат вкупно* $31\cdot30\cdot29=26\ 970$ *лу"е со различни иницијали*

Задача 1. Колку има четирицифрени броеви кои се запишуваат со помош на цифрите 1,2,3,4 а притоа ниту една од нив да не се повторува?

Решение. Било која од цифрите $\{1,2,3,4\}$ може да биде кандидат за прва цифра на четвороцифрениот број, за втора цифра можат да конкурираат сите освен првоизбраната т.е. вкупно 3 можности, а за третата цифра само две можности бидејќи бараме бројот да е со различни цифри, а на последно место ќе стои онаа што не е искористена, но таква ќе има само една.

Вкупно можности $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$, значи постојат 24 четвороцифрени броеви составени од цифрите $\{1,2,3,4\}$ без притоа некоја цифра да се повторува.

Задача 2. Во едно одделение има 20 ученици. На колку начини може да се изберат претседател, секретар и благајник?

Решение. Било кој од учениците може да се избере за претседател значи 20, сите останати освен избраниот можат да бидат кандидати за секретар т.е. 19 можности, а за благајник може да се избере било кој од останатите, а тие се 18. Значи вкупниот број на можности е $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$.

Задача 3. Телефонски број може да започне со која било од цифрите $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Колку има шестцифрени телефонски броеви во кои:

a) сите цифри се различни

b) сите цифри се непарни

Решение. а) На прво место може да застане која било од цифрите $\{0,1,2,3, 4,5,6,7,8,9\}$, на второ сите останати освен онаа искористена за првата позиција, на трето место сите освен првите две и.т.н. за последна цифра на шестцифрениот број има вкупно 5 кандидати бидејќи од вкупно десетте цифри пет се веќе искористени за првите пет места на шестцифрениот број.

Затоа $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 =$ е бројот на шестцифрени броеви.

Забелешка. Во условот на задачата пишува дека за прва цифра на шестцифрениот број може да стои било која од цифрите $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ т.е. и броевите кои започнуваат на 0 се сметаат за шестцифрени. Ако оваа напомена не стоеше во условот тогаш од горедобиениот број треба да се извадат сите оние кои почнуваат со нула бидејќи тие не се шестцифрени. Вкупниот нивен број би бил $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ т.е резултатот е $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 - 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136\ 080$.

б) На прво место може да застане која било непарна цифра т.е. која било од цифрите $\{1,3,5,7,9\}$, а бидејќи во условот не е напоменато цифрите на шестцифрениот број да бидат различни и на второ место може да стои една од цифрите $\{1,3,5,7,9\}$, како и на трето, четврто, петто, шесто место. Вкупниот број на шестцифрени броеви со непарни цифри е $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15625$

Задача 4. Фотограф сака да ги слика членовите на математичката секција од едно одделение. Ако во секцијата членуваат вкупно 10 ученици на колку различни начини може да ги нареди во редица за да ги слика?

Решение. На прво место во редицата може да застане кој било од десетте ученици, на второ место кој било од останатите 9, за третото има 8 кандидати за четврто 7 и.т.н. се до десетото место за кое останува само еден ученик кој сеуште не е нареден во редица. Вкупниот број на подредувања на десетте ученици е $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\ 628\ 800$.

Напомена. *Производот* $n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ *на* n *последователни членови во опа”ачки редослед се означува со* $n!$, *а се чита* n*-факториел.Според ова и резултатот во задача* 4 *е* $10!$.

Задача 5. На колку различни начини фотографот може да ги нареди десетте членови на математичката секција во редица за да ги слика ако во неа членуваат двајца близнаци кои сакаат да бидат заедно т.е.-еден до друг?

Решение. Бидејќи двајца од учениците сакаат да бидат еден до друг нив ги сметаме за еден т.е. наместо десет исто е како да имаме девет ученици. Нив може да ги сликаме на 9! начини. Но и близнаците бидејќи се двајца може да се распоредат на 2!=2 начини , па вкупниот број можности за распоредување на учениците е $9!\cdot 2!=725760$.

Задача 6. Да се определи колку решенија во множеството на природни броеви има равенката $x_1+x_2=100$.

Решение. Променливата x_1 може да прими произволна вредност од множеството $\{1,2,...,98,99\}$ вкупно 99 можности, а втората променливата $x_2=100-x_1$ т.е таа не може да прима произволни вредности туку тие се веќе определени со горната релација. Значи постојат вкупно 99 решенија (x_1,x_2) на равенката во множеството на природни броеви.

Задача 7. На колку различни начини 15 сватови можат да седнат на тркалезна маса? (Подредувањата се различни кога некој има барем еден различен сосед)

Решение. Најнапред да ги наредиме сватовите во редица нумерирани со редните броеви 1,2,3,...14,15. Ако првиот застане последен добиваме нова редица т.е. 2,3,...14,15,1. Ако ја повториме истата постапка добиваме 3,...14,15,1,2. И ако ова го повторуваме ќе добиеме 15 различни редици, при што последната ќе биде 15,1,2,3,...14. Ме”утоа ако сватовите седнат на округла маса тогаш сите овие 15 подредувања би биле едно подредување, бидејќи во сите случаи секој сват има исти соседи. Поради ова за да се добие бројот на различни подредувања на округла маса доволно е да се определи бројот на различни подредувања на сватовите во редица и тој број да се подели со 15-бројот на различни подредувања во редица кои претставуваат едно исто подредување околу масата. Затоа

$$\frac{15!}{15}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{15}=14!$$

е вкупниот број на различни подредувања на 15 сватови околу округла маса.

Задача 8. На една кружница се избрани 8 различни точки.

а) Колку различни отсечки можат да се образуваат ако дадените точки се крајни точки на отсечката?

б) Колку различни триаголници со темиња во дадените точки можат да се образуваат?

в) Колку различни четириаголници со темиња во дадените точки можат да се образуваат?

Решение. Да ги означиме точките со *A,B,C,D.E.F,G,H*.

а) Две точки може да избереме на $8\cdot 7=56$ начини, но на овој начин ние ги броиме отсечките и *AB* и *BA*, т.е. секоја отсечка е броена два пати. Затоа бројот на различни отсечки е 56:2=28.

б) Триаголници со темиња во дадените точки има $8\cdot 7\cdot 6=336$, бидејќи било кои три точки формираат триаголник. Но на овој начин триаголикот на пример *A,B,C* е броен 6-пати бидејќи трите точки можат да се подредат на 3! начини. Слетствено бројот на различни триаголници е 336:3!=336:6=56

в) Четириаголници со темиња во дадените точки има $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=1680$, бидејќи било кои четири точки формираат четириаголник, но овој број мора да се подели со 4! (Секој четириаголник е броен 4! пати, бидејќи четири точки можат да се наредат на 4! различни начини но сите тие формираат еден ист четириаголник). Значи постојат $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5:4!=70$ четириаголници.

Задача 9. Да се определи бројот на различни делители на бројот 1000?

Решение: $1000=10^3=2^3\cdot 5^3$. Секој делител на бројот 1000 е од облик $2^k\cdot 5^l$, каде $k\in\{0,1,2,3\}$ и $l\in\{0,1,2,3\}$. Бројот на различни делители на 1000 е еднаков на $4\times 4=16$.

Задачи за самостојна работа

1. На колку различни начини може да се пополни лото ливче 6 од 39?

2. Колку има парни петоцифрени броеви со различни цифри?

3. На колку начини n лица може да се распоредат на округла маса?

4. На една кружница се избрани 10 различни точки.

а) Колку различни отсечки можат да се образуваат ако дадените точки се крајни точки на отсечката?

б) Колку различни петаголници со темиња во дадените точки можат да се образуваат?

в) Колку различни шестаголници со темиња во дадените точки можат да се образуваат?

г) Колку различни седумаголници со темиња во дадените точки можат да се образуваат?

5. Колку различни регистарски таблички можат да постојат во Македонија ако е познато дека на регистарската табличка стојат два пара по две букви од абецедата (азбука со 26 букви) и трицифрен број .

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ