Самоил Малчески

ЈУНИОРСКИ БАЛКАНСКИ МАТЕМАТИЧКИ ОЛИМПИЈАДИ 1997-2021

Скопје, 2021

Рецензенти

С О Д Р Ж И Н А

Предговор		5
1.	ЈБМО1997	7
2.	ЈБМО1998	10
3.	ЈБМО1999	12
4.	ЈБМО2000	15
5.	ЈБМО2001	18
6.	ЈБМО2002	22
7.	ЈБМО2003	26
8.	ЈБМО2004	31
9.	ЈБМО2005	34
10.	ЈБМО2006	38
11.	ЈБМО2007	42
12.	ЈБМО2008	46
13.	ЈБМО2009	50
14.	ЈБМО2010	54
15.	ЈБМО2011	57
16.	ЈБМО2012	61
17.	ЈБМО2013	66
18.	ЈБМО2014	71
19.	ЈБМО2015	76
20.	ЈБМО2016	81
21.	ЈБМО2017	85
22.	ЈБМО2018	91
23.	ЈБМО2019	96
24.	ЈБМО2020	100
25.	ЈБМО2021	106
	Литература	111

ПРЕДГОВОР

> Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Успехот на учениците на натпреварите по математика не е можен без решавање на соодветни задачи, меѓу кои се и задачите кои претходно биле задавани на престижните натпревари, како што е Јуниорската балканска математичка олимпијада. Затоа пристапив кон издавање на книгава која е пред вас и во која се содржани задачите и нивните решенија кои се задавани на Јуниорската балканска математичка олимпијада (ЈБМО) од нејзиниот почеток основање во 1997 година, па се до 2021 година.

На ЈБМО, покрај балканските држави Босна и Херцеговина, Србија, Романија, Молдавија, Црна Гора, Албанија, Македонија, Бугарија, Грција, Турција и Кипар, последниве години по правило учествуваат и десетина земји кои имаат статус на гости на натпреварот, но учениците од овие земји имаат рамноправен третман како и учениците од балканските држави. Сето ова доволно говори за тежината на натпреварот, особено ако се земе предвид дека меѓу учесниците на балканијадите има неколку држави кои според работата со надарените ученици се наоѓаат во самиот светски врз.

Јуниорската балканска математичка олимпијада, по правило секоја година се одржува во различна држава. Изборот на задачите кои се задаваат на Балканските математички олимпијади е според следните правила:

- земјите учеснички, освен домаќинот, испраќаат задачи до домаќинот на олимпијадата,
- домаќинот формира комисија, која од предлозите издвојува дваесетина задачи и истите ги групира во четири основни области, и тоа: алгебра, геометрија, комбинаторика и теорија на броеви,
- од избраните задачи Жирито на натпреварот, кое го сочинуваат водачите на екипите на земјите учеснички, заедно со претседателот на Жирито, кој го определува државата домаќин, врши избор на четири задачи, кои по правило се од четирите наведени области,
- за избраните задачи Жирито составува маркинг шема според која се врши прегледувањето, односно бодирањето на решенијата на учениците, при што секоја задача се вреднува по 10 бодови,
- бодирањето го врши посебна комисија формирана од земјата домаќин и бодовите се координираат со водачот и земениот водач на секоја екипа.

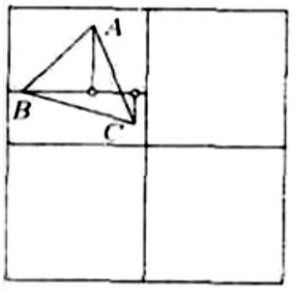
Како што рековме во книгава се дадени решенијата на сите задачи задавани на ЈБМО во разгледуваниот период. Притоа, за некои задачи се дадени по два или повеќе начини на решавање на истите.

Стандардно, книгава содржи список на користената литература. За крај, и покрај вложениот напор, свесен сум дека се можни подобрувања на оваа книга, како и дека се присутни грешки, кои за жал не го одминуваат издавањето на било кој ракопис. Затоа однапред сум благодарен на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе допринесе да се подобри книгава.

Септември 2021 Авторот
Скопје

ЈБМО 1997

1. Девет точки се распоредени во внатрешноста на единечен квадрат. Докажи дека меѓу нив постојат три точки такви што плоштината на триаголникот чии темиња се овие точки е помала или еднаква на $\frac{1}{8}$.



Решение. Да го поделиме даденият единечен квадрат на четири складни квадрати. Тогаш должината на страната на секој од овие квадрати е $\frac{1}{2}$, а од принципот на Дирихле следува дека постои квадрат во кој се наоѓаат најмалку три од дадените точки. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека тоа е горниот лев квадат и дека во него се точките A,B,C. Понатаму, да воочиме такво теме на $\triangle ABC$ што правата која го содржи и е паралелна на една од страните на квадратот ја сече спротивната страна на триаголникот. Нека, на пример, тоа е темето B и нека таа права ја сече страната AC во точката D. Тогаш

$$P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABD} + P_{\triangle BCD} = \tfrac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{AA_1} + \tfrac{1}{2}\overline{BD}\cdot\overline{CC_1} = \tfrac{1}{2}\overline{BD}\cdot(\overline{AA_1}+\overline{CC_1}),$$

каде A_1 и C_1 се соодветно подножјата на висините на триаголниците ABD и CBD повлечени од темињата A и C. Бидејќи $\overline{BD}<\frac{1}{2}$, и $\overline{AA_1}+\overline{CC_1}<\frac{1}{2}$, добиваме $P_{\triangle ABC}<\frac{1}{8}$.

2. Ако $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=k$, изрази го $\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ како функција од k.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\frac{(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2}{x^4-y^4}=k \text{, т.е. } \frac{2(x^4+y^4)}{x^4-y^4}=k,$$

од каде добиваме $(\frac{x}{y})^4=\frac{k+2}{k-2}$. Затоа:

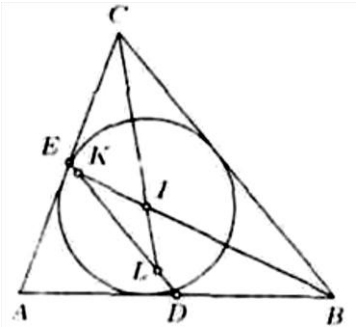
$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8}=\frac{2(x^{16}+y^{16})}{x^{16}-y^{16}}=2\frac{(\frac{x}{y})^{16}+1}{(\frac{x}{y})^{16}-1}=2\frac{(\frac{k+2}{k-2})^4+1}{(\frac{k+2}{k-2})^4-1}=\frac{k^4+24k^2+16}{4k^3+16k}.$$

3. Даден е триаголник ABC со центар на впишаната кружница I. Нека точките D и E се соодветно средини на страните AB и AC и нека K

и L се пресечните точки на правата DE соодветно со BI и CI. Докажи дека

$$\overline{AI}+\overline{BI}+\overline{CI}>\overline{BC}+\overline{KL}.$$

Решение. Бидејќи BI и CI се соодветно симетраи на аглите β и γ, добиваме $\overline{DK}=\overline{DB}=\frac{1}{2}\overline{AB}$ и $\overline{EL}=\overline{EC}=\frac{1}{2}\overline{AC}$ (цртеж десно). Според тоа,



$$\overline{AB}+\overline{AC}=2\overline{KL}+\overline{BC},$$

т.е.

$$2s=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=2\overline{KL}+2\overline{BC},$$

каде со s е означен полупериметарот на триаголник ABC. Оттука следува

$$s=\overline{KL}+\overline{BC}. \qquad (1)$$

Понатаму,

$$\overline{AI}+\overline{BI}>\overline{AB},\ \overline{BI}+\overline{CI}>\overline{BC},\ \overline{CI}+\overline{AI}>\overline{CA},$$

па затоа

$$2(\overline{AI}+\overline{BI}+\overline{CI})>\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=2s,$$

т.е.

$$\overline{AI}+\overline{BI}+\overline{CI}>s. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува бараното равенство.

4. Определи ги аглите на $\triangle ABC$ за кој важи $R(b+c)=a\sqrt{bc}$, каде a,b,c се должините на страните на $\triangle ABC$, а R радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$\frac{a}{2R}=\frac{\frac{b+c}{2}}{\sqrt{bc}}. \qquad (1)$$

Бидејќи $\frac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}$, т.е. $\frac{b+c}{2}:\sqrt{bc}\geq 1$, а од друга страна $\frac{a}{2R}\leq 1$ (страна на триаголник не може да биде подолга од дијаметарот на кружницата опишана околу него), заклучуваме дека равенството (1) е можно ако и само ако $\frac{a}{2R}=1$ и $\frac{\frac{b+c}{2}}{\sqrt{bc}}=1$, односно ако и само ако $b=c$ и $R=\frac{a}{2}$. Според тоа, $\triangle ABC$ е рамнокрак правоаголен и неговите агли се $90^\circ,45^\circ,45^\circ$.

5. Ако $n_1, n_2, ..., n_{1998}$ се природни броеви такви што

$$n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{1997}^2 = n_{1998}^2,$$

докажи дека барем два од овие броеви се парни.

Решение. Не може само бројот n_{1998} да биде парен, бидејќи тогаш збир на непарен број непарни броеви би бил парен број, што е противречност. Исто така, не може само еден од првите 1997 броеви да е парен, на пример n_1, бидејќи тогаш

$$n_1^2 = n_{1998}^2 - n_2^2 - ... - n_{1997}^2,$$

па левата страна е парен, а десната страна е непарен број. Сега ќе покажеме дека сите дадени броеви не може да се непарни. Имено, ако сите броеви се непарни, тогаш бидејќи $k(k-1) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$ за секој $k \in \mathbb{N}$ добиваме дека за секој непарен број $2k-1$ важи

$$(2k-1)^2 = 4k(k-1) + 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8).$$

Последното значи дека

$$n_1^2 + n_2^2 + ... + n_{1997}^2 \equiv 1997 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8) \text{ и } n_{1998}^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8),$$

што е противречност.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека најмалку два од дадените броеви се парни.

ЈБМО 1998

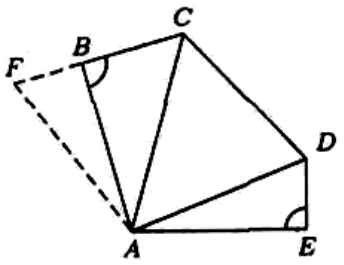
1. Докажи дека бројот $\underbrace{11...11}_{1997}\underbrace{22...225}_{1998}$ е точен квадрат.

   Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}\underbrace{11...11}_{1997}\underbrace{22...225}_{1998} &= \underbrace{11...11}_{1997}\cdot 10^{1999} + \underbrace{22...22}_{1998}\cdot 10 + 5 \\ &= \tfrac{10^{1997}-1}{9}\cdot 10^{1999} + 2\cdot\tfrac{10^{1998}-1}{9}\cdot 10 + 5 \\ &= \tfrac{1}{9}(10^{3996} - 10^{1999} + 2\cdot 10^{1999} - 20 + 45) \\ &= \tfrac{1}{9}(10^{3996} + 2\cdot 5\cdot 10^{1998} + 25) = \tfrac{1}{9}(10^{1998}+5)^2 \\ &= (\tfrac{10^{1998}+5}{3})^2 = (\underbrace{33...335}_{1997})^2.\end{aligned}$$

2. Даден е конвексен петаголник $ABCDE$ таков што $\overline{AB}=\overline{AE}=\overline{CD}=1$, $\measuredangle ABC=\measuredangle DEA=90^\circ$ и $\overline{BC}+\overline{DE}=1$. Определи ја плоштината на петаголникот $ABCDE$.

   Решение. На продолжението на страната BC преку точката B конструираме точка F таква што $\overline{BF}=\overline{DE}$. Тоа значи, $\triangle AED\cong\triangle ABF$, па затоа плоштината на петаголникот $ABCDE$ е еднаква на плоштината на четириаголникот $ADCF$. Понатаму,



$$\overline{CD}=1=\overline{CB}+\overline{BF}=\overline{CF},\ \overline{AD}=\overline{AF}\ \text{ и }\ \overline{AD}=\overline{AD},$$

   па затоа $\triangle ADC\cong\triangle AFC$. Сега, бидејќи $P_{\triangle AFC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CF}}{2}=\frac{1}{2}$, заклучуваме дека $P_{ABCDE}=P_{ADCF}=2P_{\triangle AFC}=1$.

   Забелешка. Задачата може да се реши со примена на Питагоровата теорема. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

3. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^y = y^{x-y}.$$

   Решение. Бидејќи x и y се природни броеви, заклучуваме дека $x^y=y^{x-y}$ е природен број. Затоа $x-y\geq 0$. Ако $x=y$, тогаш

$x^x = y^0 = 1$, па затоа $x = y = 1$. Ако $x > y$, тогаш $x \geq y+1$, па затоа $\frac{x^y}{y} = y^{x-y-1} \in \mathbb{N}$. Според тоа, $y \mid x$, односно $x = ky, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Оттука добиваме $(ky)^y = y^{ky-y} = (y^{k-1})^y$, па затоа $ky = y^{k-1}$, т.е. $k = y^{k-2}$ и оттука $x = ky = y^{k-1}$. Според тоа, можни се следниве случаи:

1) $k = 2$, па затоа $k = y^{k-2} = 1$, што не е можно,
2) $k = 3$, па затоа $3 = y^{3-2} = y$ и $x = y^{k-1} = 9$,
3) $k = 4$, па затоа $4 = y^{4-2} = y^2$, т.е. $y = 2$ и $x = y^{k-1} = 8$,
4) $k \geq 5$, па затоа $k = y^{k-2}$, па е $y \geq 2$. Бидејќи за $k \geq 5$ важи $2^{k-2} \geq k$ заклучуваме дека равенката нема други решенија.

Значи, $(x, y) \in \{(1,1), (8,2), (9,3)\}$.

4. Дали е можно користејќи само три цифри да се запишат 16 трицифрени броеви такви што меѓу нив да нема два броја кои при делење со 16 даваат ист остаток.

Решение. Да претпоставиме дека може да запишеме 16 такви броеви. Јасно, осум од обие броеви мора да се парни, а преостанатите мора да се непарни. Оттука следува дека цифрите не може сите да бидат парни или сите да бидат непарни. Ќе го разгледаме случајот кога дадените цифри се две парни и една непарна. Случајот две непарни и една парна цифра се разгледува аналогно. Со дадените цифри можеме да запишеме девет непарни трицифрени броеви $\overline{a_1 k}, \overline{a_2 k}, ..., \overline{a_9 k}$, при што $a_1, a_2, ..., a_9$ се двоцифрени броеви и k е дадената непарна цифра. Јасно, разликата $\overline{a_i k} - \overline{a_k k}$ е делива со 16 ако и само ако разликата $a_i - a_j$ е делива со 8. Меѓутоа, постојат само три двоцифрени непарни броеви, па затоа нема доволно (четири) различни непарни двоцифрени броеви кои би дале трицифрени броеви со различни остатои при делење со 16. Значи, не можеме да запишеме такви 16 трицифрени броеви.

ЈБМО 1999

1. Нека a,b,c се различни реални броеви за кои постојат реални броево x и y такви што

$$a^3+ax+y=0, b^3+bx+y=0, c^3+cx+y=0.$$

Докажи, дека

$$a+b+c=0.$$

Решение. Ако од првото равенство го одземеме второто добиваме

$$\begin{aligned}0&=a^3+ax+y-b^3-bx-y\\&=a^3-b^3+x(a-b)\\&=(a-b)(a^2+ab+b^2+x),\end{aligned}$$

па бидејќи $a\neq b$, добиваме дека важи

$$a^2+ab+b^2+x=0.$$

Аналогно, ако од првото равенство го одземеме третото добиваме

$$a^2+ac+c^2+x=0.$$

Сега, со одземање на последните две равенства наоѓаме

$$0=ab+b^2-ac-c^2=(b-c)(b+c)+a(b-c)=(b-c)(a+b+c).$$

Конечно, бидејќи $b\neq c$, од последното равенство следува

$$a+b+c=0.$$

2. Нека $A_n=2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}$, за $n=0,1,2,...,1999$. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $A_0,A_1,...,A_{1999}$.

Решение. Бидејќи $A_0=2^0+3^2+5^2=35$, заклучуваме дека најголемиот заеднички делтел може да биде 35,7,5 или 1.

За $n=1$ имаме $A_1=2^3+3^8+5^8=397194$ и како овој број не е делив со 5, заклучувамедека броевите 5 и 35 не може да бидат бараниот најголем заеднички делител. Значи, останува да се провери деливоста со бројот 7. Бидејќи

$$A_n=2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2}=8^n+9\cdot 27^{2n}+25\cdot 125^{2n}$$

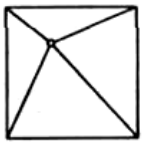
и $8\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$, $27\equiv -1(\mathrm{mod}\,7)$ и $125\equiv -1(\mathrm{mod}\,7)$, добиваме

$$A_n\equiv 1^n+9\cdot(-1)^{2n}+25\cdot(-1)^{2n}=1+9+25=35\equiv 0(\mathrm{mod}\,7).$$

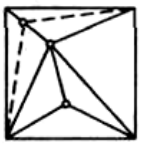
Според тоа, $(A_0,A_1,...,A_{1999})=7$.

3. Даден е квадрат S со должина на страна 20. Нека M е множество чии елементи се четирите темиња на квадратот S и 1999 произволни внатрешни точки на квадратот S. Докажи дека постои триаголник со темиња во множеството M чија плоштина е помала или еднаква на $\frac{1}{10}$.

Решение. Ќедокажеме дека квадратот може да се раздели на триаголници со темиња од множеството M и ќе го определиме бројот на тие триаголници. Тоа ќе го направиме со додавање една по една на 1999-те внатрешни точки.


Цртеж 1

Цртеж 2


Цртеж 3

Првата точка го дел квадратот на четири триаголници (цртеж 1). Секоја нова точка припаѓа на внатрешноста на опредлен триаголник (цртеж 2) или припаѓа на некои два соседни претходно определени триаголници (цртеж 3). Во првиот случај со додавање на нова точка бројот на триаголниците се зголемува за 2 (еден стра триаголник се заменува со 3 нови), а во вториот случај со додавање на нова точка повторно бројот на триаголниците се зголемува за 2 (два стари се заменуваат со 4 нови). Затоа со додавање на последната 1999-та точка квадратот ќе биде поделен на $4+1998\cdot 2=4000$ триаголници. Бидејќи плоштината на квадратот е $20\cdot 20=400$, добиваме дека барем еден од делбените триаголници има плоштина помала или еднаква на $\frac{400}{4000}=\frac{1}{10}$.

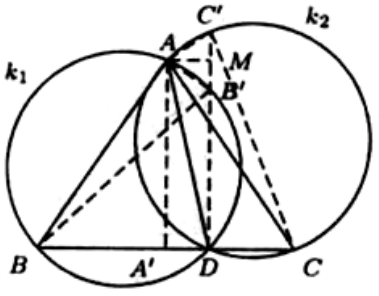
4. Даден е рамнокрак триаголник ABC, $\overline{AB}=\overline{AC}$. Нека D е произволна точка на отсечката BC таква што $\overline{BC}>\overline{BD}>\overline{DC}>0$. Нека k_1 и k_2 се опишаните кружници соодветно околу триаголниците ABD и ADC. Нека BB' и CC' се соодветно дијаметри на кружниците k_1 и k_2, и M е средина на отсечката $B'C'$. Докажи дека плоштината на триаголникот MBC е константна, односно дека не зависи од положбата на точката D.

Решение. Нека O_1 и O_2 се соодветно центрите на кружниците k_1 и k_2. Бидејќи $\measuredangle CAD<\measuredangle BAD$, добиваме $\measuredangle CAD<90^\circ$. Затоа точките O_2 и A

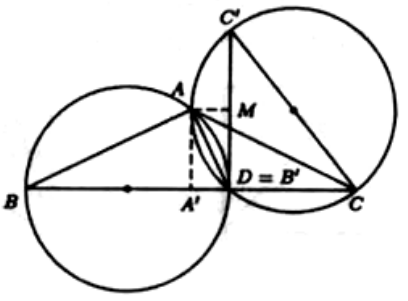
се на иста страна од отсечката CD, па затоа и точките C' и A се од иста страна на отсечката CD.

а) Нека $\measuredangle BAD < 90^\circ$ (цртеж 1). Тогаш точките O_1 и A со од иста страна на отсечката BD, па затоа и точките B' и A се од иста страна на отсечката BD.

1) Бидејќи BB' е дијаметар на k_1, важи $\measuredangle BDB' = 90^\circ$. Слично, CC' е дијаметар на k_2, па затоа $\measuredangle CDC' = 90^\circ$. Според тоа, $B'D \perp BC$ и $C'D \perp BC$, па затоа точките B', D и C' се колинеарни.
2) Нека $\measuredangle ABB' = \varphi$. Тогаш $\measuredangle ADB' = \varphi$ како периферискиагол на ист лак AB' на кружницата k_1. Ако $\measuredangle ADB' = \measuredangle ADC' = \varphi$, тогаш имаме $\measuredangle ACC' = \varphi$ како периферискиагол на ист лак AC' на кружницата k_2.
3) Триаголниците ABB' и ACC' се складни, бидејќи и двата се правоаголни ($\measuredangle BAB' = 90^\circ = \measuredangle CAC'$), $\overline{AB} = \overline{AC}$ и $\measuredangle ABB' = \measuredangle ACC' = \varphi$. Од складноста на овие триаголници следува $\overline{AB'} = \overline{AC'}$, што значи дека триаголникот $AB'C'$ е рамнокрак.
4) Бидејќи $\overline{MB'} = \overline{MC'}$, добиваме $AM \perp B'C'$, па затоа $AM \parallel BC$. Тогаш $P_{\triangle BMC} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{DM}}{2} = \frac{\overline{BC}\cdot\overline{AA'}}{2} = P_{\triangle ABC}$. Значи, плоштината на триаголникот MBC е константна, односно дека не зависи од положбата на точката D.



Цртеж 1



Цртеж 2

б) Ако $\measuredangle BAD = 90^\circ$ или $\measuredangle BAD > 90^\circ$, тогаш распоредот на точките не е ист како во случајот а), но тврдењето на задачата е точно. Решението на задачата во овој случај го оставаме на читателот за вежба.

ЈБМО 2000

1. Нека x и y се реални броеви такви што

$$x^3+y^3+(x+y)^3+30xy=2000.$$

Докажи дека

$$x+y=10.$$

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно на равенствата

$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+(x+y)^3+30xy-3x^2y-3xy^2=2000,$$

$$2((x+y)^3-1000)-3xy(x+y-10)=0,$$

$$2(x+y-10)((x+y)^2+10(x+y)+100)+3xy(x+y-10)=0,$$

$$(x+y-10)(2x^2+2y^2+20x+20y+xy)=0,$$

$$(x+y-10)((x+10)^2+(y+10)^2+(x+\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3}{4}y^2)=0.$$

Бидејќи

$$(x+10)^2+(y+10)^2+(x+\tfrac{y}{2})^2+\tfrac{3}{4}y^2>0,$$

од последното равенство следува $x+y=10$.

2. Определи ги сите природни броеви n за кои n^2+3^n е квадрат на природен број.

Решение. Нека $n^2+3^n=m^2, m\in\mathbb{N}$. Тогаш $(m-n)(m+n)=3^n$, па затоа можни се следниве случаи:

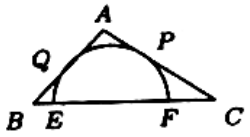
1) $m+n=3^n, m-n=1$, од каде добиваме $2n=3^n-1$. За функцијата $f(n)=3^n-2n-1$ важи $f(1)=0, f(2)=2, f(3)=20,...$ и $f(n)>0$ за $n\geq 2$. Оттука следува дека едно решение е $n=1$. (Неравенството $f(n)>0$ за $n\geq 2$ може да се докаже со индукција).

2) $m+n=3^{n-1}, m-n=3$, од каде добиваме $2n=3^{n-1}-3$. За функцијата $g(n)=3^{n-1}-2n-3$ важи $g(1)=-4, g(2)=-4, g(3)=0, g(4)=16,....$ и $g(n)>0$ за $n\geq 4$. Оттука следува дека едно решение е $n=3$. (Неравенството $g(n)>0$ за $n\geq 4$ може да се докаже со математичка индукција.)

3) $m+n=3^{n-k}, m-n=3^k$ и $k<n-k$, т.е. $n>2k$, односно $n-2k\geq 1$.

Оттука добиваме $2n = 3^{n-k} - 3^k$. Нека $h(n) = 3^{n-k} - 3^k - 2n$. Тогаш $h(n) > 3^{n-k} - 3^{\frac{n}{2}} - 2n$, т.е. $h(n) > 3^{\frac{n}{2}}(3^{\frac{n}{2}-k} - 1) - 2n$. Бидејќи $n \geq 4$, добиваме $3^{\frac{n}{2}-k} - 1 > 1$ и $3^{\frac{n}{2}}(3^{\frac{n}{2}-k} - 1) > 3^{\frac{n}{2}}$, па затоа $h(n) > 3^{\frac{n}{2}} - 2n$. Сега лесно се докажува дека за $n \geq 4$ важи $h(n) > 0$, па затоа не постојат други природни броеви n кои се решение на задачата.

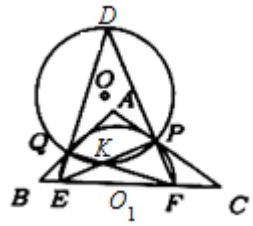
3. Полукруг чиј дијаметар EF лежи на страната BC на триаголникот ABC ги допира страните AB и AC во точките Q и P, соодветно, како што е прикажано на цртежот десно. Докажи дека пресечната точка K на отсечките EP и FQ припаѓа на висината на триаголникот ABC повлечена од темето A.



Решение. Нека $EQ \cap EP = D$, $EP \cap FQ = K$ и O_1 е центар на дадената полукружница. Да означиме $\sphericalangle PEF = x, \sphericalangle QFE = y$. Бидејќи

$$\sphericalangle EQF = \sphericalangle EPF = 90^\circ,$$

како агли над дијаметарот EF, четириаголникот $DQKP$ е тетивен. Нека O е центарот на кружницата опишана околу четириаголникот $DQKP$. Тогаш $\overline{DO} = \overline{OK}$, $O \in DK$ и $\sphericalangle QOP = 2\sphericalangle QDP$, т.е. $\sphericalangle QOP = 2(\sphericalangle QDK + \sphericalangle KDP)$. Точката K е ортоцентар на триаголникот EFD, па затоа $\sphericalangle QOP = \sphericalangle EFQ = y$, $\sphericalangle KDP = \sphericalangle PEF = x$ (агли со нормални краци), што значи $\sphericalangle QOP = 2(x + y)$. Понатаму, четириаголникот AQO_1P исто така е тетивен, бидејќи $O_1P \perp AC$ и $O_1Q \perp AB$ (AC и AB се тангенти). Оттука следува дека



$$\begin{aligned}\sphericalangle QAP &= 180^\circ - \sphericalangle QO_1P = 180^\circ - (180^\circ - \sphericalangle EO_1Q - \sphericalangle FO_1P) \\ &= \sphericalangle EO_1Q + \sphericalangle FO_1P = 2(\sphericalangle EFQ + \sphericalangle FFP) = 2(x + y).\end{aligned}$$

Бидејќи $\overline{AQ} = \overline{AP}$ (тангентни отсечки од точката A), заклучуваме дека точките O и A се совпаѓаат, па како $A \in DK$ и $DK \perp EF$, важи $AK \perp EF$, што и требаше да се докаже.

4. На тениски турнир учествувале два пати повеќе момчиња од девојчиња.

Секој пар учесници одиграл точно еден меч. Во тенисот нема нерешени резултати. Односот на бројот на бројот на победите на девојчињата спрема бројот на победите на момчињата е $7:5$. Колку учесници имало на турнирот.

Решение. Со m да го означиме бројот на мочињата, со v бројот на девојчињата и со x бројот на победите на девојчињата против момчињата. Тогаш $m=2v$, бројот на победите на момчињата против девојчињата е $2v^2-x$ и

$$\frac{\binom{v}{2}+x}{\binom{2v}{2}+2v^2-x}=\frac{7}{5}.$$

Оттука добиваме

$$5\left(\frac{v^2-v}{2}+x\right)=7\cdot\frac{4v^2-2v}{2}+14v^2-7x.$$

Со средување на полседниот израз добиваме $8x=17v^2-3v$, т.е.

$$8x=16v^2+v^2-3v.$$

Од $2v^2-x\geq 0$, т.е. $2v^2\geq x$ следува $v\geq 1$, а од $v^2-3v\leq 0$, т.е. $v(v-3)\leq 0$ следува $v\leq 3$, па затоа $1\leq v\leq 3$. Оттука со проверка добиваме $v=3$ и $m=9$.

ЈБМО 2001

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$a^3+b^3+c^3=2001.$$
Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a\le b\le c$. Од $13^3=2197>2001=a^3+b^3+c^3$ следува $c<13$. Понатаму, $3c^3\ge a^3+b^3+c^3=2001$, па затоа $c^3>667$, т.е. $c>8$. Значи, $c\in\{9,10,11,12\}$.
   1) Ако $c=9$, тогаш $a^3+b^3=1272$. Сега, од $11^3=1331>1272=a^3+b^3$ следува $b<11$, а од $2b^3\ge a^3+b^3=1272$ следува $b^3>636$, т.е. $b>8$. Значи, $b\in\{9,10\}$. За $b=9$ добиваме $a^3=543$, а за $b=10$ добиваме $a^3=272$, т.е. добиваме равенки кои немаат решенија во множеството природни броеви.
   2) Ако $c=10$, тогаш $a^3+b^3=1001$. На потполно аналоген начин како во 1) се добива дека $b<11$ и $b>7$. Според тоа, $b\in\{8,9,10\}$. За $b=8$ добиваме $a^3=489$, за $b=9$ добиваме $a^3=272$ и за $b=10$ добиваме $a^3=1$. Јасно, во множеството природни броеви има решение само последната равенка, при што $a=1$, па едно решение на задачата е подредената тројка $(1,10,10)$.
   3) Ако $c=11$, тогаш $a^3+b^3=670$. Аналогно како во 1) заклучуваме дека $b<9$ и $b>6$. Според тоа, $b\in\{7,8\}$. За $b=7$ добиваме $a^3=323$, а за $b=8$ добиваме $a^3=158$, при што и во двата случаја добиените равенки немаат решенија во множеството природни броеви.
   4) Ако $c=12$, тогаш $a^3+b^3=273$. Аналогно како во 1) заклучуваме дека $b<7$ и $b>5$. Според тоа, $b=6$ и $a^3=57$ и последната равенка нема решение во множеството природни броеви.

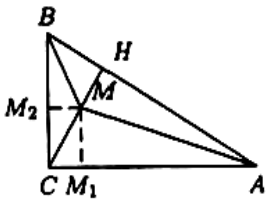
   Конечно, сите решенија на задачата се: $(1,10,10),(10,1,10)$ и $(10,10,1)$.

2. Даден е $\triangle ABC$ таков што $\angle ACB=90^\circ$, $\overline{AC}\ne\overline{BC}$. Точките L и H припаѓаат на страната AB и се такви што $\angle ACL=\angle LCB$, а CH е висина на AB. Докажи:
   а) за секоја точка X на отсечката CL важи $\angle XAC\ne\angle XBC$,

б) за секоја точка X на отсечката CH важи $\measuredangle XAC \neq \measuredangle XBC$.

Решение. а) Нека претпоставиме дека точката $M \in CL$ е таква што $\measuredangle MAC = \measuredangle MBC$. Но, $\measuredangle ACL = \measuredangle LCB$, па затоа $\measuredangle AMC = \measuredangle BMC$, што значи дека $\triangle AMC \sim \triangle BMC$. Бидејќи овие триагоници имаат заедничка страна MC добиваме дека $\triangle AMC \cong \triangle BMC$. Последното значи $\overline{AC} = \overline{BC}$ што противречи на условот на задачата. Конечно од добиената противречност следува точноста на тврдењето.

б) Нека претпоставиме дека постои точка $M \in CH$ таква што важи $\measuredangle MAC = \measuredangle MBC$. Нека M_1 M_2 се подножјата на нормалите соодветно повлечени од M на AC и BC (цртеж десно). Триаголниците AMM_1 и MBM_2 се правоаголни и $\measuredangle M_1AM = \measuredangle MBM_2$, па затоа $\triangle AMM_1 \sim \triangle MBM_2$. Според тоа



$$\overline{M_1M} : \overline{M_2M} = \overline{AM} : \overline{BM} \ . \qquad (1)$$

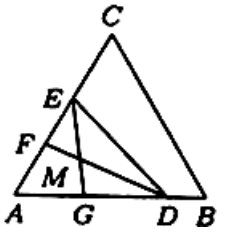
Исто така, триаголниците CMM_2 и ABC се правоаголни и важи $\measuredangle MCM_2 = \measuredangle CAB$ (агли со нормални краци), па затоа $\triangle CMM_2 \sim \triangle ABC$. Според тоа

$$\overline{M_2M} : \overline{M_2C} = \overline{BC} : \overline{AC} \ . \qquad (2)$$

Но, $\overline{M_1M} = \overline{M_2C}$, па затоа од (1) и (2) следува $\overline{AM} : \overline{AC} = \overline{BM} : \overline{BC}$. Но, важи и $\measuredangle MAC = \measuredangle MBC$, па затоа $\triangle AMC \sim \triangle BMC$. Оттука следува $\measuredangle BCM = \measuredangle ACM$, па затоа $\overline{AC} = \overline{BC}$ што противречи на условот на задачата. Конечно од добиената противречност следува точноста на тврдењето.

3. Даден е рамностран $\triangle ABC$. Нека D и E се произволни точки на страните AB и AC, соодветно. Ако DF и EG се симетрали на аглите на $\triangle ADE$, каде $F \in AE$ и $G \in AD$, докажи дека збирот на плоштините на $\triangle DEF$ и $\triangle DEG$ не е поголем од плоштината на $\triangle ABC$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека DF и EG се сечат во точката M (цртеж десно). Од условите на задачата следува $\measuredangle DME = \measuredangle GMF = 120^\circ$, па затоа четириаголникот $AGMF$ е тетивен. Според тоа, $\measuredangle GFM = \measuredangle GAM$ и $\measuredangle FGM = \measuredangle FAM$, како периферискиагли над иста



тетива. Бидејќи DF и EG се симетрали на агли, заклучуваме дека и AM е симетрала на агол, т.е. $\measuredangle FAM = \measuredangle GAM$, па затоа $\measuredangle GFM = \measuredangle FGM$ и $\triangle FGM$ е рамнокрак, т.е. $\overline{FM} = \overline{MG}$.

Понатаму, нека точката $N \in ED$ е таква што $\measuredangle NME = 60^\circ$. Тогаш $\measuredangle DMN = 60^\circ$. Бидејќи $\measuredangle GMF = 120^\circ$, добиваме $\measuredangle FME = \measuredangle DMG = 60^\circ$. Бидејќи триаголниците FME и MNE имаат аедничка страна EM и два еднакви налегнатаи агли, тие се складни. Слично и триаголниците DMG и DNM се складни. Оттука следува дека

$$P_{\triangle MDE} = P_{\triangle NME} + P_{\triangle DNM} = P_{\triangle FME} + P_{\triangle DGM},$$

$$P_{\triangle DEF} = P_{\triangle MDE} + P_{\triangle MEF} \text{ и } P_{\triangle DEG} = P_{\triangle MDE} + P_{\triangle MGD}.$$

Со собирање на овие равенства добиваме

$$P_{\triangle DEF} + P_{\triangle DEG} = 3P_{\triangle MDE}.$$

На крајот, бидејќи еден од аглите $\measuredangle DEA$ или $\measuredangle EDA$ на триаголникот ADE мора да е помал од 60°, нека тоа е $\measuredangle DEA$. Тогаш $\overline{AD} \geq \overline{DE}$ (наспроти поголем агол на триаголникот ADE се наоѓа поголема страна). Но, $\overline{AB} \geq \overline{AD}$, па затоа

$$\overline{AB} \geq \overline{DE}. \quad (1)$$

Понатаму,бидејќи точката M е центар на кружницата впишана во триаголникот ADE со радиус r', добиваме $P_{\triangle MDE} = \frac{1}{2}\overline{DE} \cdot r'$. Нека r е радиусот на кружницата впишана во триаголникот ABC. Тогаш

$$r' \leq r. \quad (2)$$

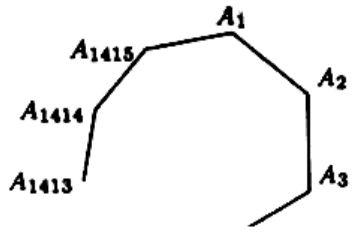
Користејќи ги (1) и (2) добиваме

$$P_{\triangle DEF} + P_{\triangle DEG} = 3P_{\triangle MDE} = \frac{3}{2}\overline{DE} \cdot r' \leq \frac{3}{2}\overline{AB} \cdot r = P_{\triangle ABC},$$

Од (1) и (2) следува дека знак за равенство важи ако и само ако $\overline{DE} = \overline{AB} = \overline{BC}$ и $r = r'$, т.е. во случај кога $D \equiv B$ и $E \equiv C$.

4. Даден е конвексен многуаголник со 1415 страници и периметар $2001cm$. Докажи дека постојат три темиња на овој многуаголник кои формираа триаголник со плоштина помала од $1cm^2$.

Решение. Триаголниците можеме да ги разгледуваме на следниов начин: $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, \ldots A_{1414}A_{1415}A_1, A_{1415}A_2A_1$ (цртеж десно). Нека претпоставиме дека плоштината на секој од нив не е помала



од 1. За било кој триаголник со должини на страни a и b важи $2P = ah_a \le ab$. Ова својство да го примениме на секој од воочените триаголници. Добиваме

$$\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3} \ge 2,\ \overline{A_2A_3} \cdot \overline{A_3A_4} \ge 2, ...,\ \overline{A_{1415}A_1} \cdot \overline{A_1A_1} \ge 2.$$

Ако го примениме неравенството $a+b \ge 2\sqrt{ab}$, добиваме

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} \ge 2\sqrt{2},\ \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} \ge 2\sqrt{2}, ...,\ \overline{A_{1415}A_1} + \overline{A_1A_1} \ge 2\sqrt{2}.$$

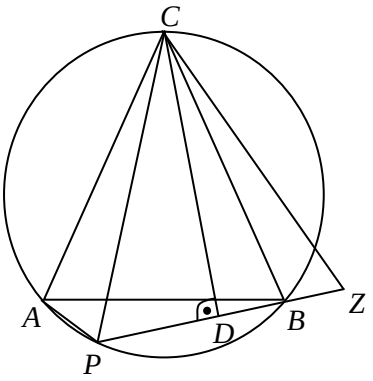
Последните неравенства ги собираме и добиваме

$$2(\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \overline{A_{1415}A_1} \ge 1415 \cdot 2\sqrt{2},$$

па затоа за периметарот O важи $O \ge 1415\sqrt{2} > 2001$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

ЈБМО 2002

1. Нека ABC е рамнокрак триаголник така што $\overline{AC}=\overline{BC}$ и P е точка од лакот AB од опишаната кружница, на кој не ја содржи точката C. Нека D е точка од правата PB така што правата CD е нормална на PB. Докажи дека $\overline{PA}+\overline{PB}=2\overline{PD}$.



Решение. На правата PB избираме точка Z така што $\overline{BZ}=\overline{AP}$ и B е меѓу P и Z. Триаголниците PAC и ZBC се складни, бидејќи

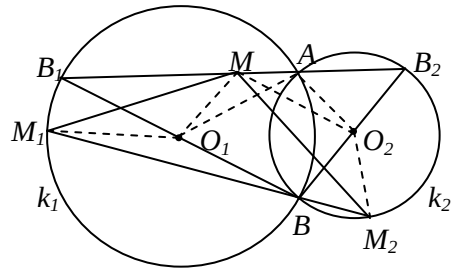
$$\overline{AC}=\overline{BC},\ \measuredangle PAC=180^\circ-\measuredangle PBC=\measuredangle ZBC,\ \overline{AP}=\overline{BZ}.$$

Од оваа складност следува $\overline{CP}=\overline{CZ}$, односно триаголникот PZC е рамнокрак, па висината CD спуштена од врвот, ја полови неговата основа. Конечно, $2\overline{PD}=\overline{PZ}=\overline{PB}+\overline{BZ}=\overline{PB}+\overline{PA}$.

2. Две кружници k_1 и k_2 со различни радиуси имаат две заеднички точки A и B и нивните центри O_1 и O_2 се наоѓаат на различни страни од правата AB. Нека B_1 и B_2 се точки од k_1 и k_2, соодветно, кои се дијаметрално спротивни точки на точката B. Точките M_1 од k_1 и M_2 од k_2 се избрани така што $\measuredangle AO_1M_1=\measuredangle AO_2M_2<180^\circ$, B_1 е внатрешна точка за $\measuredangle AO_1M_1$ и B е внатрешна точка за $\measuredangle AO_2M_2$. Нека M е средина на отсечката B_1B_2. Докажи дека $\measuredangle MM_1B=\measuredangle MM_2B$.

Решение. Точките B_1, A и B_2 се колинеарни, бидејќи

$$\measuredangle B_1AB=90^\circ=\measuredangle BAB_2.$$



Од M средина на B_1B_2 и O_1 средина на B_1B, следува дека MO_1 е средна линија во триаголникот B_2BB_1, од каде

$$\overline{MO_1}=\tfrac{1}{2}\overline{BB_2}=\overline{AO_2}.$$

На сличен начин, $\overline{MO_2}=\frac{1}{2}\overline{BB_1}=\overline{AO_1}$. Од тука следува дека триаголниците MO_1A и AO_2M се складни, од каде следува $\measuredangle MO_1A=\measuredangle AO_2M$. Затоа,

$$\measuredangle MO_1M_1=\measuredangle AO_1M_1-\measuredangle AO_1M=\measuredangle AO_2M_2-\measuredangle AO_2M=\measuredangle MO_2M_2,$$

и земајќи ги во предвид равенствата $\overline{MO_1}=\overline{M_2O_2}$ и $\overline{MO_2}=\overline{M_1O_1}$, се добива дека триаголниците MO_1M_1 и M_2O_2M се складни, од каде $\overline{MM_1}=\overline{MM_2}$. Точките M_1, B и M_2 се колинеарни бидејќи

$$\measuredangle M_1BA+\measuredangle ABM_2=\frac{1}{2}\measuredangle AO_1M_1+\frac{1}{2}(360^\circ-\measuredangle AO_2M_2)=180^\circ,$$

па следува дека триаголникот M_1M_2M е рамнокрак, од каде добиваме $\measuredangle MM_1B=\measuredangle MM_2B$.

3. Определи ги сите природни броеви N кои ги задоволуваат следните услови:
   - N има точно 16 делители $1=d_1<d_2<\cdots<d_{15}<d_{16}=N$;
   - делителот со индекс d_5, т.е. d_{d_5} е еднаков на $(d_2+d_4)d_6$.

   Решение. Да забележиме најнапред дека N нема повеќе од 4 прости различни делители. Навистина, ако има пет или повеќе прости делители, тогаш ќе има облик $N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, каде α_i се природни броеви и $k\geq 5$. Тогаш вкупниот број делители на N е еднаков на

   $$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\ldots(1+\alpha_k)$$

   и овој број е поголем од 16 за $k\geq 5$. Понатаму, да заблежиме дека $d_2=2$. Имено, ако $d_2>2$, тогаш делителите d_2 и d_4 се непарни. Сега, бидејќи d_{d_5} е делител на N, од условот $d_{d_5}=(d_2+d_4)d_6$ следува дека тоа е и d_2+d_4. Но, d_2+d_4 е парен број и како е делител на N добиваме дека $2\mid N$. Значи, $d_2=2$.

   Од условите на задачата следува $d_{d_5}=(2+d_4)d_6$. Бидејќи $(2+d_4)d_6>d_6$ добиваме $d_5>6$, т.е.

   $$d_5\geq 7. \qquad (1)$$

   Понатаму, од $(2+d_4)\mid d_{d_5}$ и $d_{d_5}\mid N$ следува $(2+d_4)\mid N$. Бидејќи $2+d_4>d_4$, заклучуваме $2+d_4\geq d_5$. Затоа ако се земе предвид (1) добиваме

$$d_4 \geq 5. \qquad (2)$$

Сега, бидејќи $2+d_4 \geq d_5$ имаме две можности за d_5 и тоа: $d_5 = 2+d_4$ или $d_5 = 1+d_4$

Нека $d_5 = 1+d_4$. Од вториот услов следува $2+d_4 \mid N$, па затоа $d_6 = 2+d_4$ Така d_4, d_4+1, d_4+2 се делители на N, од каде следува дека $3 \mid N$, односно $d_3 = 3$. Бидејќи $6 \mid N$ и $d_5 \geq 7$ мора да е $d_4 = 6$, од каде $d_5 = 7$ и $d_6 = 8$, од каде следува дека $4 \mid N$ и $d_4 = 4$, што е противречност со тоа дека претходно заклучивме дека $d_4 = 6$.

Така останува случајот $d_5 = 2+d_4$. Ги разгледуваме следните случаи:

i) Ако $4 \mid N$, бидејќи $d_4 \geq 5$, добиваме $d_3 = 4$, од каде следува $8 \mid N$. Бидејќи $d_5 \geq 7$, а како $d_6 > d_5$ добиваме $d_6 \geq 8$. Од кажаното следува $8 \in \{d_4, d_5, d_6\}$. Сите овие случаи водат до контрадикција, имено

- ако $d_4 = 8$, мора да е $d_5 = 10$, од каде $5 \mid N$ и $d_4 = 4$, што не е можно,
- ако $d_5 = 8$, имаме $d_4 = 6$, од каде $3 \mid N$ и следствено $d_3 = 3$, што не е можно,
- ако $d_6 = 8$, тогаш $d_5 = 7$, па е $d_4 = 5$. Од тоа следува $d_2 d_4 = 10 \mid N$. Но, $d_{d_5} = d_7 = (2+5)8 = 56 > 10$, што е невозможно.

Значи 4 не е делител на N, па заклучуваме дека d_3 е прост делител.

ii) Ако $3 \mid N$, тогаш $d_3 = 3$. Бидејќи $d_2 d_3 = 6 \mid N$ и $d_4 \geq 6$, мора $d_4 = 6$, од каде $d_5 = 8$, па следува дека $4 \mid N$, што не е можно.

Значи 3 не е делител на N, па заклучуваме дека $d_3 \geq 5$ и $d_4 \geq 7$.

Бидејќи N и $2+d_4$ не се деливи со 4, заклучуваме дека d_4 е непарен. Бидејќи $2+d_4$ и d_4 не се деливи со 3, добиваме дека $d_4 = 3k+2$, за некој цел број k и бидејќи d_4 е непарен следува дека $d_4 = 6l+5$, за некој цел број l. Бидејќи $d_5 \leq 16$, мора да е $7 \leq d_4 \leq 14$. Единствена можност е $d_4 = 11$ и $d_3 = 13$. Бидејќи $2d_3 \mid N$ и $2d_3 \geq d_4$, заклучуваме дека $d_3 \geq 6$. Бидејќи d_3 е прост и $d_3 < 11$, заклучуваме дека $d_3 = 7$. Конечно $N = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2002$.

4. Нека a, b, c се позитивни броеви. Докажи дека

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина добиваме,

$$\left(\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{c(b+c)}+\frac{1}{a(c+a)}\right)^3 \geq \frac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}. \qquad (1)$$

Но, $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc$ и

$$\left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3 \geq (a+b)(b+c)(c+a),$$

па затоа

$$\frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{3^3\cdot 3^3}{2^3(a+b+c)^6}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) се добива бараното неравенство.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\sqrt{2a(a+b)} \leq \frac{3a+b}{2}$, па затоа $a(a+b) \leq \frac{(3a+b)^2}{8}$. Аналогно се добиваат неравенствата

$$b(b+c) \leq \frac{(3b+c)^2}{8} \text{ и } c(c+a) \leq \frac{(3c+a)^2}{8}.$$

Оттука следува

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)} \geq \frac{16}{(3a+b)^2}+\frac{16}{(3b+c)^2}+\frac{16}{(3c+a)^2}. \qquad (1)$$

Но, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува неравенството

$$\sqrt{\frac{\frac{16}{(3a+b)^2}+\frac{16}{(3b+c)^2}+\frac{16}{(3c+a)^2}}{3}} \geq \frac{\frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a}}{3}$$

од кое после квадрирањето и множењето со 3 и од неравенството (1) добиваме

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)} \geq \frac{\left(\frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a}\right)^2}{3}. \qquad (2)$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\frac{\frac{4}{3a+b}+\frac{4}{3b+c}+\frac{4}{3c+a}}{3} \geq \frac{3}{\frac{3a+b}{4}+\frac{3b+c}{4}+\frac{3c+a}{4}} = \frac{3}{a+b+c}.$$

Конечно, од неравенството (2) и последното неравенство следува

$$\frac{2}{a(a+b)}+\frac{2}{b(b+c)}+\frac{2}{c(c+a)} \geq \frac{\left(\frac{9}{a+b+c}\right)^2}{3} = \frac{27}{(a+b+c)^2},$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

ЈБМО 2003

1. Нека n е природен број, $A=\underbrace{44...44}_{2n}$ и $B=\underbrace{88...88}_{n}$. Докажи, дека бројот $A+2B+4$ е точен квадрат.

   Решение. Имаме

   $$A=\underbrace{44...44}_{2n}=4\cdot\underbrace{11...11}_{2n}=\frac{4}{9}\cdot\underbrace{99...99}_{2n}=\frac{4}{9}(10^{2n}-1).$$

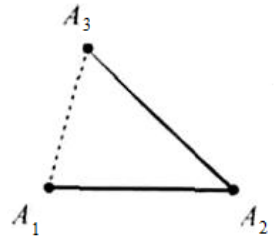
   Аналогно, $B=\frac{8}{9}(10^{n}-1)$. Според тоа,

   $$\begin{aligned}A+2B+4&=\frac{4}{9}(10^{2n}-1)+\frac{16}{9}(10^{n}-1)+4\\&=\frac{4\cdot10^{2n}-4+16\cdot10^{n}-16+36}{9}\\&=\frac{(2\cdot10^{n})^2+2\cdot2\cdot10^{n}\cdot4+4^2}{9}\\&=(\frac{2\cdot10^{n}+4}{3})^2.\end{aligned}$$

   Збирот на цифрите на бројот $2\cdot10^{n}+4$ е 6, па затоа тој се дели со 3, што значи дека $\frac{2\cdot10^{n}+4}{3}$ е орироден број, со што тврдењето на задачата е докажано.

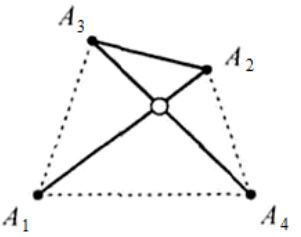
2. Во рамнината се дадени n точки меѓу кои нема три колинеарни и за кои важи: При било кое означување на овие точки со $A_1,A_2,...,A_n$ искршената линија $A_1A_2...A_n$ не се пресекува самата себе. Определи ги сите природни броеви n за кои n такви точки постојат.

   Решение. За $n=3$ имаме три неколинеарни точки. Било како да ги означиме A_1,A_2,A_3, искршената линија $A_1A_2A_3$ не може самата себе да се пресекува (цртеж десно).

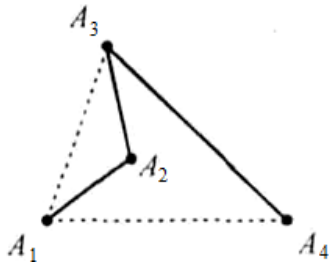
   

   За $n=4$ карактерисични се ледниве два случаја.

   а) Точките формираа конвексен четириаголник. Бидејќи дијагоналите на ваков четириаголник се сечат, заклучуваме дека во овој случај имаме означување при кое искршената линија самата себе ќе се пресекува (цр-

теж десно).



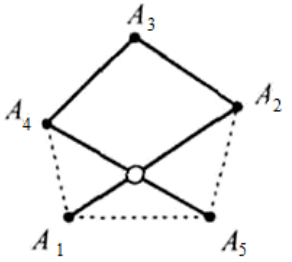
б) Точките формираат неконвексен четириаголник. Тогаш една од точките е во внатрешноста на триаголникот чии темиња се другите три точки (цртеж лево). Јасно, било како да ги означиме точките, добиваме дека искршената линија $A_1A_2A_3A_4$ не се самопресекува.

Според тоа, за $n=4$ постојат точки (случајот б)) кои го задоволуваат условот на задачата.

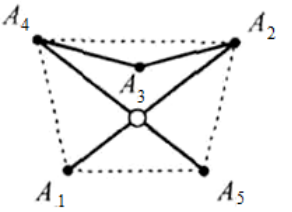
Ќе докажеме дека за $n=5$, за секои n точки во рамнината, такви што никои три не се колинеарни, постои означување при кое искршената линија $A_1A_2...A_n$ се самопресекува.

Според а) доволно е да докажеме дека меѓу секои $n(n\geq 5)$ точки во рамнината меѓу кои нема три колинеарни, постојат четити кои се темиња на конвексен четириаголник.

Да земеме било кои пет од дадените n точки и да ја разгледаме нивната конвексна обвивка. Тоа е минималниот многуаголник кој ги содржи тие точки. Можни се следниве случаи:

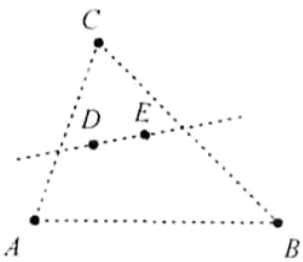


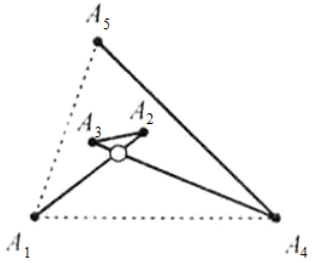
1) *Конвексната обвивка е петаголник*. Тогаш било кои четири точки формираат конвексен четириаголник, па можно е означување како на цртежот десно.



2) *Конвексната обвивка е четириаголник*. Слично како во случајот 1) имаме означувањепри кое искршената линија се самопресекува (цртеж десно).

3) *Конвексната обвивка е триаголник*. Нека тоа е триаголникот ABC и нека точките D и E се во неговата внатрешност.





Бидејќи според условот на задачата правата DE не содржи ниту едно теме на $\triangle ABC$, таа сече две негови страни во внатрешни точки. Нека тоа се страните AC и BC (цртеж горе лево). Тогаш четириаголникот $ABDE$ е конвексен и при означување како на десниот горен цртеж искршената линија $A_1A_2A_3A_4A_5$ се самопресекува.

Според тоа, најголемиот природен број n кој ги задоволува условите на задачата е 4.

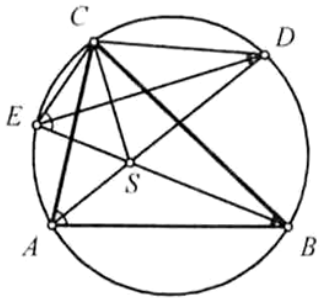
3. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle ABC$ и нека BC, CA, AB се лаците на кружницата кои не содржат темиња на $\triangle ABC$, а точките D, E, F се соодветно нивните средини. Нека G и H се пресечните точки на тетивата DE соодветно со страните CA и CB, а I и J се пресечните точки на тетивата DF соодветно со страните BC и BA. Нека M и N се средините на отсечките GH и IJ, соодветно.

а) Изрази ги аглите на $\triangle DMN$ преку аглите на $\triangle ABC$.

б) Ако O е центарот на кружницата опишана околу $\triangle DMN$ и P е пресечната точка на отсечките AD и EF, докажи дека точките P, N, O и M лежат на иста кружница (се конциклични).

Решение. Ќе ја користиме следнава лема.

Лема. Нека k е кружницата опишана околу $\triangle ABC$ и нека D и E се соодветно средините на лаците BC и AC кои не ги содржат темињата A и B. Ако S е центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, тогаш правата DE е симетрала на отсечката CS.

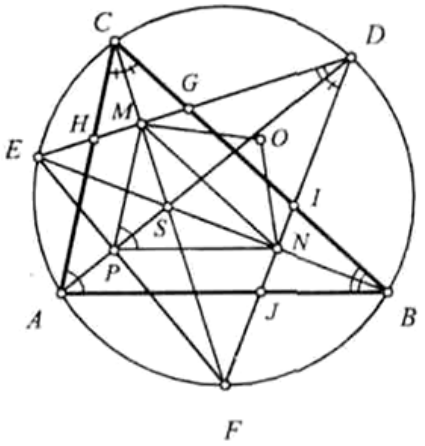


Доказ. Бидејќи D е средина на лакот BC, AD е симетралата на $\measuredangle BAC = \alpha$. Слично, BE е симетралата на $\measuredangle ABC = \beta$. Затоа $AD \cap BE = S$ (цртеж десно).

Да ги разгледаме триаголниците CDE и SDE. Имаме $\measuredangle CDE = \measuredangle SDE = \frac{\alpha}{2}$ (периферни агли над еднакви лаци CE и AE) и слично $\measuredangle CED = \measuredangle SED = \frac{\beta}{2}$. Но, овие триаголници имаат и заедничка страна DE, па затоа $\triangle CDE \cong \triangle SDE$. Последното значи $\overline{CD} = \overline{SD}$ и $\overline{CE} = \overline{SE}$, т.е. четириаголникот $SDCE$ е делтоид, од што следува тврдењето. ■

На потполно идентичен начин се докажува дека DF и FA се симетрали на отсечките BS и AS, соодветно.

а) Според лемата M е средина на отсечката CS. Бидејќи CS е симетрала на $\measuredangle ACB$ и $DE \perp CS$, добиваме дека $\triangle HGC$ е рамнокрак со $\overline{CH} = \overline{CG}$. На сличен начин се докажува дека N е средина на отсечката BS и дека $\overline{BI} = \overline{BJ}$. Од тоа следува дека MN е средна линија на $\triangle SBC$, па затоа $MN \| CB$, односно $MN \| GI$ (цртеж десно). Затоа аглите на $\triangle DMN$ се еднакви на соодветните агли на $\triangle DGI$. Така добиваме



$$\measuredangle MDN = \measuredangle MDA + \measuredangle ADN = \frac{\beta+\gamma}{2},$$

$$\measuredangle DGI = \measuredangle CGH = \frac{180^\circ - \gamma}{2},$$

$$\measuredangle DIG = \measuredangle BIJ = \frac{180^\circ - \beta}{2}.$$

б) Како во решението под а) заклучуваме дека $PN \| AB$ и $PM \| AC$. Затоа

$$\measuredangle MPN = \measuredangle CB = \alpha. \tag{1}$$

Бидејќи O е центар на опишаната кружница околу $\triangle DMN$, од теоремата за централен и периферискиагол и тврдењето под а) следува

$$\measuredangle MON = 2\measuredangle MDN = 2\frac{\beta+\gamma}{2} = \beta+\gamma. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува

$\measuredangle MPN + \measuredangle MON = \alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$.

Според тоа, четириаголникот $PNOM$ е тетивен, што значи дека точките P, N, O и M лежат на иста кружница (се конциклични).

4. Нека $x, y, z > -1$ се реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} + \frac{1+y^2}{1+z+x^2} + \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq 2.$$

Решение. Од неравенството $\frac{1+y^2}{2} \geq y$ следува

$$\frac{1+y^2}{2}+1+z^2 \geq 1+y+z^2.$$

Бидејќи $y>-1$ двете страни на последното неравенство се позитивни, па затоа важи

$$\frac{1}{1+y+z^2} \geq \frac{1}{\frac{1+y^2}{2}+1+z^2}.$$

Последното неравенство го множиме со $1+x^2$ и после средувањето го добиваме неравенството

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2} \geq \frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)}.$$

Аналогно се добиваат неравенствата

$$\frac{1+y^2}{1+z+x^2} \geq \frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)} \text{ и } \frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)}.$$

Ако ги собереме последните три неравенства добиваме

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geq \frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)}+\frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)}+\frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)}.$$

Очигледно, бараното неравенство ќе го докажеме ако докажеме дека

$$\frac{2(1+x^2)}{1+y^2+2(1+z^2)}+\frac{2(1+y^2)}{1+z^2+2(1+x^2)}+\frac{2(1+z^2)}{1+x^2+2(1+y^2)} \geq 1.$$

Воведуваме замена $1+x^2=a, 1+y^2=b, 1+z^2=c$. Јасно, $a,b,c>1$ и сега треба да го докажеме неравенството

$$\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b} \geq 1,$$

за кое претходно видовме дека важи. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=1$.

ЈБМО 2004

1. Нека x и y се ненулти реални броеви такви што $x^2+y^2\neq 0$. Докажи дека

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\leq\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}\leq\frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Бидејќи $x^2-xy+y^2>0$, доволно е да се докаже дека

$$x+y\leq\sqrt{2(x^2+y^2)} \text{ и } x^2-xy+y^2\geq\frac{x^2+y^2}{2}.$$

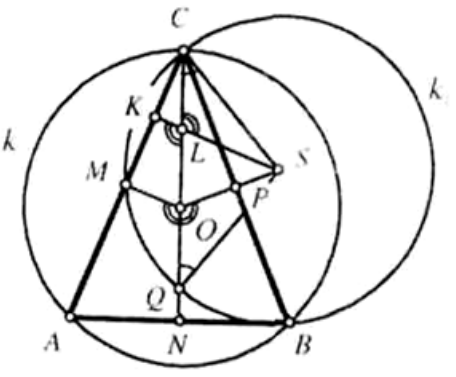
Првото неравенство последователно е еквивалентно со неравенствата

$$(x+y)^2\leq 2(x^2+y^2),$$
$$2xy\leq x^2+y^2,$$
$$0\leq(x-y)^2,$$

а последното неравенство очигледно е точно. Второто неравенство исто така се сведува на неравенството $0\leq(x-y)^2$, со што доказптезавршен.

2. Даден е рамнокрак $\triangle ABC$, $\overline{AC}=\overline{BC}$. Нека M е средина на страната AC и нека l е права која минува низ точката C и е нормална на AB. Кружницата низ B,C и M ја сече l во точките C и Q. Изрази го радиусот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ преку $m=\overline{CQ}$.

Решение. Нека O е центарот на кружницата опишана околу $\triangle ABC$ и нека S е центарот на кружницата k_1 која минува низ точките B,C,M. Понатаму, нека K е средина на отсечката MC, L е пресекот на SK и l, N е пресекот на AB и l, P е пресекот на BC и SO (цртеж десно).



Од $OM\perp AC$ и $SK\perp MC$ следува $LK\|OM$. Затоа LK е средна

линија на триаголникот MOC, што значи

$$\overline{CL}=\overline{LO}. \qquad (1)$$

Ги разгледуваме триаголниците SLC и SOQ. Тогаш $\overline{SC}=\overline{SQ}$ (радиуси на кружницата k_1) и $\measuredangle SCL=\measuredangle SQO$ (триаголникот SCQ е рамнокрак, $\overline{SC}=\overline{SQ}$). Понатаму, $\measuredangle SLC=\measuredangle NLK=180^\circ-\alpha$ (четириаголникот $ANLK$ е тетивен, $\measuredangle N=\measuredangle K=90^\circ$). Слично, од тетивниот четириаголник $NBPO$ ($\measuredangle N=\measuredangle P=90^\circ$) следува $\measuredangle SOQ=180^\circ-\beta$. Но, $\alpha=\beta$, па затоа $\measuredangle SLC=\measuredangle SOQ$, што заедно со претходно покажаното значи $\triangle SLC\cong\triangle SOQ$. Според тоа, $\overline{CL}=\overline{QO}$. Сега, ако го земеме предвид (1) добиваме $R=\overline{OC}=\frac{2}{3}\overline{QC}=\frac{2}{3}m$.

3. Ако x и y се природни броеви такви што броевите $3x+4y$ и $4x+3y$ се точни квадрати, докажи дека x и y се деливи со 7.

Решение. Нека $3x+4y=m^2$ и $4x+3y=n^2$. Тогаш $7(x+y)=m^2+n^2$, па затоа $7\mid m^2+n^2$. Понатаму, при делење на квадрат на природен број со 7 можни остатоци се 0, 1, 2 и 4, па затоа од $7\mid m^2+n^2$ следува $7\mid m^2$ и $7\mid n^2$. Но, 7 е прост број, па од $7\mid m^2$ и $7\mid n^2$ следува $7\mid m$ и $7\mid n$. Последното значи дека $7^2\mid m^2$ и $7^2\mid n^2$, од каде заклучуваме дека $7^2\mid m^2+n^2=7(x+y)$, што значи дека $7\mid x+y$. Од друга страна, добиваме $7\mid n^2-m^2=4x+3y-(3x+4y)=x-y$. Затоа $7\mid x+y+(x-y)=2x$ и $7\mid x+y-(x-y)=2y$, па како $(7,2)=1$ заклучуваме дека $7\mid x$ и $7\mid y$.

4. Даден е коневексен многуаголник со $n, n\geq 4$ темиња. Многуаголникот на произволен начин е поделен на триаголници така што темињата на триаголниците се истовремено и темиња на многуаголникот и никои два делбени триаголници немаат заеднички внатрешни точки. Триаголниците кои имаат две заеднички страни со многуаголникот се обоени со црна боја, триаголниците кои имаат точно една заедничка страна се обоени со црвена боја, а триаголниците кои немаат заедничка странасо многуаголникот се обоени со бела боја. Докажи дека црните триаголници се за два повеќе од белите.

Решение. Со b,r и w даги означиме соодветно броевите на црните,

црвените и белите триаголници. Лесно се гледа дека многуаголникот е разложен на $n-2$ триаголници. Оттука добиваме

$$b+r+w=n-2. \qquad (1)$$

Секоја страна на многуаголникот е страна на точно еден триаголник добиен со разложувањето. Бидејќи секој од црните b триаголници покрива по две страниц, а секој од црвените r триаголници покрива по една страна, важи

$$2b+r=n. \qquad (2)$$

Ако ја одземеме (1) од (2) добиваме $b-w=2$, односно $b=w+2$.

ЈБМО 2005

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$9(x^2+y^2+1)+2(3xy+2)=2005.$$

Решение. *Прв начин*. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$2(x+y)^2+(x-y)^2=664. \qquad (1)$$

Броевите $x+y$ и $x-y$ се со иста парност. Од (1) следува дека и двата се парни. Нека $x+y=2m$ и $x-y=2t$, каде m и t се цели броеви. Тогаш равенката (1) може да се запише во видот

$$2m^2+t^2=166, \qquad (2)$$

од каде заклучуваме дека t и t^2 се парни броеви, а m е непарен број. Имено, ако t и m се парни, тогаш левата страна на (2) е делива со 4, а десната не е делива со 4. Нека $t=2k$ и $m=2n+1$, каде k е цел, а n е ненегативен цел број. Од (2) следува

$$k^2=41-2n(n+1). \qquad (3)$$

Понатаму, $41-2n(n+1)\geq 0$. Последното неравенство е исполнето само за $n\in\{0,1,2,3,4\}$. Но, само за $n=4$ десната страна на (3) е точен квадрат $k^2=1$. Значи, $k=\pm 1$ и единствени решенија на дадената равенка се $(x,y)=(11,7)$ и $(x,y)=(7,11)$.

Втор начин. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$3(x+y)^2=4xy+664.$$

Нека $xy=p$, $x+y=s$, каде p и s се природни броеви. Добиваме $3s^2=4p+664$. Десната страна на последното равенство е парен број, па затоа s^2 е парен број. Ако $p=1$, тогаш s^2 не е природен број. Значи, $p\geq 2$ и $3s^2\geq 8+664=672$, од каде добиваме

$$s^2\geq 224. \qquad (4)$$

Од неравенството $(x+y)^2\geq 4xy$ следува $s^2\geq 4p$, од каде добиваме $3s^2-664\leq s^2$, т.е.

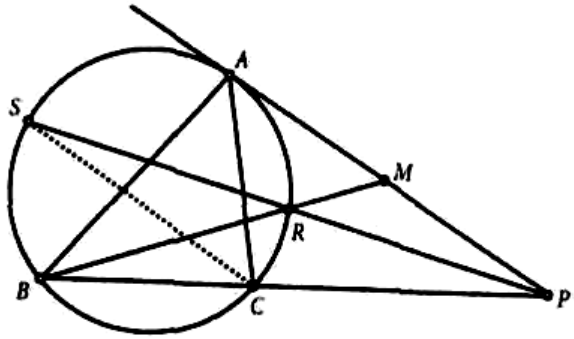
$$s^2\leq 332. \qquad (5)$$

Сега, од (4) и (5) следува дека $s^2\in\{256,324\}$. Ако $s^2=256$, тогаш $s=16$ и $p=26$, но тогаш x не е природен број. АКо $s^2=324$, тогаш

$s=18,\ p=77$. Во овој случај добиваме $(x,y)=(11,7)$ и $(x,y)=(7,11)$.

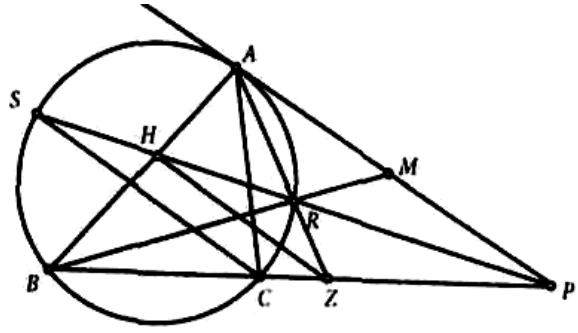
2. Нека ABC е остроаголен триаголник впишан во кружница k. Познато е дека тангентата на кружницата во точката A ја сече правата BC во точката P. Нека M е средината на отсечката AP, а R е другата пресечна точка на кружницата k и правата MB. Правата PR по втор пат ја сече кружницата k во точката S различна од R. Докажи дека правите AP и CS се паралелни.

Решение. *Прв начин*. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека точката C припаѓа на отсечката BP.



Сега, од степенот на точката M во однос на кружницата следува $\overline{MA}^2=\overline{MR}\cdot\overline{MB}$, па затоа и $\overline{MP}^2=\overline{MR}\cdot\overline{MB}$. Од последното равенство следува дека $\triangle MRP\sim\triangle MPB$. Од оваа сличност следува $\measuredangle MPR=\measuredangle MBP$. Бидејќи и $\measuredangle PSC=\measuredangle MBP$ (периферискиагли над ист лак), добиваме $\measuredangle PSC=\measuredangle MPR$, од каде што следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Нека $H=AB\cap PS$ и $Z=AR\cap PB$. Од теоремата на Чева, применета на $\triangle ABP$ следува $\frac{\overline{AM}}{\overline{MP}}\cdot\frac{\overline{PZ}}{\overline{ZB}}\cdot\frac{\overline{BH}}{\overline{HA}}=1$. Бидејќи $\frac{\overline{AM}}{\overline{MP}}=1$, добиваме $\frac{\overline{PZ}}{\overline{ZB}}=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}$, па заклучуваме дека правите ZH и PA се паралелни.



Според тоа, $\measuredangle PAZ = \measuredangle HZA$. Од друга страна, аголот меѓу тетивата AR и тангентата AP е еднаков на периферискиот агол над тетивата AR, па важи $\measuredangle PAZ = \measuredangle ABR$. Значи, $\measuredangle RZH = \measuredangle RBH$, што значи дека четириаголникот $BZRH$ е тетивен и $\measuredangle ZHR = \measuredangle RBZ$. Бидејќи и $\measuredangle RBZ = \measuredangle RSC$ добиваме $\measuredangle RHZ = \measuredangle RSC$, па затоа правите ZH и CS се паралелни, што значи дека и правите PA и CS се паралелни.

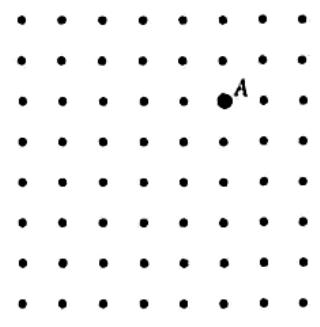
3. Докажи дека:

а) Постојат пет точки во рамнината такви што меѓу сите триаголници со темиња во овие точки постојат 8 правоаголни триаголници.

б) Постојат 64 точки во рамнината такви што меѓу сите триаголници со темиња во овие точки има најмалку 2005 правоаголни триаголници.

Решение. а) Такви точки се темињата на еден квадртат и неговиот центар (пресекот на неговите дијагонали).

б) *Прв начин*. Разгледуваме квадрат 7×7 поделен на единечни квадрати и 64 точки кои се темиња на овие квадрати (цртеж десно). На цртежот имаме $\frac{8\cdot 7}{2}\cdot\frac{8\cdot 7}{2}=784$ правоаголници со страни на линиите на мрежата. Секој од овие правоаголници определува 4 различни правоаголни триаголници (со темиња во темињата на правоаголникот). Различните правоаголници определуваат различни триаголници. На тој начин се добиваат $4\cdot 784=3136>2005$ различни правоаголни триаголници со темиња во дадените точки. (Јасно е дека има и други правоаголни триаголници кои не се пребројани со оваа постапка.)



Втор начин. Ја разгледуваме истата конфигурација како погоре. Да земеме било која од дадените 64 точки. Нека тоа е точката A. Две точки, од кои едната е во ист ред, а другата во иста колона со точката A формираат правоаголен триаголник со прав агол во темето A. Бидејќи точката во ист ред со точката A може да се избере на 7 налчини, а на исто толку начини може да се избере и точката која е во иста колона со точката A, најдовме $7\cdot 7=49$ различни правоаголни триаголници со теме на правиот агол во точката A. Бидејќи овој број е ист за секоја од дадените 64 точки, на овој начин добивме $49\cdot 64=3136$ различни правоаголни триаголници со темиња во дадените точки.

4. Определи ги сите трицифрени природни броеви $\overline{abc}$ такви што $\overline{abc}=abc(a+b+c)$, каде $\overline{abc}$ е декадниот запис на бројот.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$9(11a+b)=(a+b+c)(abc-1),$$

каде a,b,c се едноцифрени позитивни броеви. Ако $a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}9)$ и $abc-1\equiv 0(\mathrm{mod}9)$, тогаш $a\equiv b\equiv c\equiv 1(\mathrm{mod}9)$ и $11a+b\equiv 0(\mathrm{mod}3)$. Според тоа, $a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}9)$, т.е. $11a+b\equiv 0(\mathrm{mod}9)$. Значи,

$$a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}9) \text{ или } abc-1\equiv 0(\mathrm{mod}9).$$

1) Ако $abc-1\equiv 0(\mathrm{mod}9)$, тогаш $11a+b=(a+b+c)k$, каде k е природен број и $1<k<10$. Според тоа, треба да ги испитаме случаите $k\in\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Ако $k\in\{2,4,5,6,8,9\}$, тогаш бројот $9k+1=abc$ има прост делител поголем од 9, што не е можно.

   Ако $k=3$, тогаш $8a=2b+3c$ и $abc=28$. Јасно, c е парен број, $c=2c_1$ и важи $4a+b=3c_1$ и $abc_1=14$. Лесно се гледа дека b и c_1 се непарни, па постојат две можности: $a=2, b=7, c_1=1$ и $a=2, b=1, c_1=7$. Во ниту еден од овие два случаи немаме решение на задачата.

   Ако $k=7$, тогаш $4a=6b+7c$ и $abc=64$. Јасно, Јасно, c е парен број, $c=2c_1$ и важи $2a=3b+7c_1$ и $abc_1=32$. Лесно се гледа дека b и c_1 мора да се парни броеви. Но, тоа не е можно бидејќи во тој случај $a>9$. Значи, и во овој случај задачата нема решение.

2) Нека $a+b+c\equiv 0(\mathrm{mod}9)$, т.е. $a+b+c=9l$, каде l е природен број. Ако $l\geq 2$, тогаш $a+b+c\geq 18$ и $\max\{a,b,c\}\geq 6$ и лесно се гледа дека $abc\geq 72$ и $abc(a+b+c)>1000$, па затоа случајот $l\geq 2$ не е можен. Ако $l=1$, тогаш $11a+b=abc-1$, па затоа

$$11a+b+1=abc\geq\left(\tfrac{a+b+c}{3}\right)^3=27.$$

   Сега постојат две можности: $a=1$ и $a=2$. Ако $a=2$, тогаш добиваме $b(2c-1)=23$, што не е можно. Ако $a=1$, тогаш $b+c=8$ и $11+b=bc-1$. Значи, $b+(c-1)=7$ и $b(c-1)=12$ и решенија се $(a,b,c)=(1,3,5)$ и $(a,b,c)=(1,4,4)$. Конечно, бараните трицифрени броеви се 144 и 135.

ЈБМО 2006

1. Докажи дека за било кој сложен природен број $n>4$ бројот $2n$ е делител на $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (n-1)=(n-1)!$.

   Решение. *Прв начин*. Бидејќи $n>4$ е сложен број, тој може да се запише во облик $n=ab$ каде $2\le a\le b$, $2<b$. Од
   $$n-1-(a+b)=ab-1-(a+b)=(a-1)(b-1)-2\ge 0$$
   следува $n-1\ge a+b$. Разгледуваме два случаја.

   Ако $a=b>2$, тогаш $2b=b+a\le n-1$. Затоа $2n=2b\cdot b$ е делител на $(2b)!$ кој е делител на $(n-1)!$.

   Ако $a<b$, тогаш имаме два подслучаи:

   1) $a>2$ и тогаш $2ab$ е делител на $(a+b)!$ кој е делител на $(n-1)!$.
   2) $a=2$. Сега, ако $b>4$, тогаш $2n=2\cdot 2\cdot b$ е делител на $(b+2)!$ кој е делител на $(n-1)!$.

      Ако $b=4$, тогаш $2n=16$ е делител на $(n-1)!=7!$.

      Ако $b=3$, тогаш $2n=12$ е делител на $(n-1)!=5!$.

   Втор начин. Како во првиот начин добиваме дека $n-1\ge a+b$. Од $b>2$ следува дека 2 е делител на $(b-1)!$, па затоа $2b$ е делител нма $b!$. Понатаму, познато е дека $b!$ е делител на $(a+1)(a+2)...(a+b)=\frac{(a+b)!}{a!}$. Според тоа, бројот $2ab=a(2b)$ е делител на бројот $a!b!$, кој е делител на бројот $a!(a+1)(a+2)...(a+b)=(a+b)!$. Бидејќи $(a+b)!$ е делител на $(n-1)!$ следува дека $2n$ е делител на $(n-1)!$.

   Трет начин. За сложените броеви $n\le 12$ тврдењето лесно се проверува. Затоа нека $n\ge 13$. Нека 2^{α} е највисокиот степен кој е делител на бројот n. Тогаш меѓу броевите од 1 до n сигурно се наоѓаат броевите $2,2^2,2^3,...,2^{\alpha-1},2\cdot 3$ и $4\cdot 3$. Затоа степенот на бројот 2 во производот $(n-1)!$ е најмалку
   $$1+2+3+...+(\alpha-1)+1+2=\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+3.$$
   Лесно се докажува дека $\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}+3\ge\alpha+1$, т.е. степенот на двојката во производот $(n-1)!$ е најмалку $\alpha+1$. Затоа е доволно да се докаже дека $n\mid(n-1)!$.

   Ќе разгледаме два случаја.

1) Ако постојат природни броеви a и b такви што $n=ab$ и $2\le a<b$, тогаш $b\le\frac{n}{2}$, па затоа $a\ne b$ и $a,b\in\{1,2,...,n-1\}$, од каде добиваме дека $n|(n-1)!$.

2) Ако такви броеви не постојат, тогаш $n=p^2$, каде $p>2$ е прост број. Но, во овој случај $p^2-1>2p$, па затоа во производот $(n-1)!$ има барем два броја деливи со p и тоа p и $2p$, па затоа $p^2|(n-1)!$.

Четврт начин. Разгледуваме два случаја.

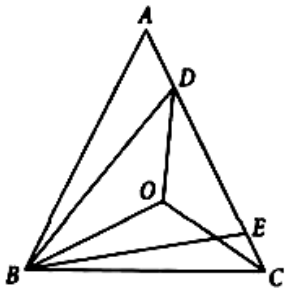
1) Ако $n=2k$, тогаш $2<k=\frac{n}{2}<n-2$, па затоа k е еден од броевите во производот $(n-1)!$. Од друга страна, во овој производ постојат два парни броја различни од k, и тоа се броевите 2 и $n-2$. Според тоа, $4k|(n-1)!$, т.е. $2n|(n-1)!$.

2) Ако $n=2k+1$, тогаш n е производ на два различни непарни броја поголеми од 1, $n=ab$ или $n=p^2$, каде p е непарен прост број. Во првиот случај тврдењето следува од тоа што во множеството $\{1,2,...,n-1\}$ се броевите a и b, а во вториот случај од фактот дека во ова множество се броевите p и $2p$.

2. Нека ABC е рамнокрак триаголник таков што $\overline{AB}=\overline{AC}$ и $\measuredangle BAC<60^\circ$. Нека D и E се внатрешни точки на страната AC такви што $\overline{EB}=\overline{ED}$ и $\measuredangle ABD=\measuredangle CBE$. Симетралите на $\measuredangle ACB$ и $\measuredangle BDC$ се сечат во точката O. Определи го $\measuredangle COD$.

Решение. Нека претпоставиме дека точката E припаѓа на отсечката AD. Тогаш $\measuredangle ACB+\measuredangle CBD=\measuredangle BDE=\measuredangle EDB<\measuredangle ABC$, што е противречност. Значи, точката D припаѓа на отсечката AE. Тогаш

$$\begin{aligned}\measuredangle DBC&=\measuredangle DBE+\measuredangle EBC\\&=\measuredangle EDB+\measuredangle EBC\\&=\measuredangle BCA+\measuredangle ABD+\measuredangle EBC\\&=\measuredangle BAC+2\measuredangle EBC\\&=180^\circ-2\measuredangle ABC+2\measuredangle EBC\\&=180^\circ-2(\measuredangle DBC+\measuredangle ABD)+2\measuredangle EBC\\&=180^\circ-2(\measuredangle DBC+\measuredangle EBC)+2\measuredangle EBC\\&=180^\circ-2\measuredangle DBC,\end{aligned}$$



т.е. $\measuredangle DBC = 60^\circ$. Овде гледаме зошто беше потребен условот $\measuredangle BAC < 60^\circ$. Тој е и доволен за постоење на саканата конфигурација, бидејќи агол од 60° секогаш може да се впише во агол поголем од 60°.

Точката O е центар на кружницата впишана во триаголник DBC, па затоа

$$\measuredangle COD = 180^\circ - (\measuredangle OCD + \measuredangle ODC) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\measuredangle BDC + \measuredangle DCB)$$
$$= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle DBC) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\measuredangle DBC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.$$

3. За природниот број $n > 1$ ќе велиме дека е совршен ако збирот на сите негови позитивни делител (вклучувајќи ги 1 и n) е еднаков на $2n$. Определи ги сите совршени броеви n такви што и двата броја $n-1$ и $n+1$ се прости.

Решение. Очигледно најмалиот совршен број е 6 и тој се наоѓа меѓу два прости броја: 5 и 7. Ќе докажеме дека нема други совршени броеви со ова својство.

Нека $n-1$ и $n+1$ се прости броеви за некој природен број $n > 6$. Тогаш за некој природен број $k > 1$ важи

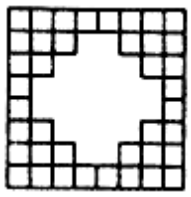
$$n-1 = 6k-1 \text{ и } n+1 = 6k+1.$$

Тогаш $n = 6k$, па затоа броевите $n, \frac{n}{2}, \frac{n}{3}, \frac{n}{6}$ се различни делители на бројот n поголеми од 1. Сега од

$$n + \tfrac{n}{2} + \tfrac{n}{3} + \tfrac{n}{6} + 1 = 2n + 1 > 2n$$

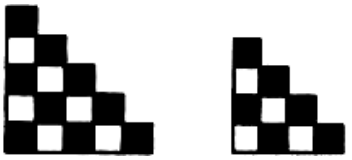
следува дека бројот n не е совршен.

4. Нека $n \geq 2$ е природен број. Од квадратна табла $2n \times 2n$ (составена од единечни 1×1 квадрати) некои од единечните квадрати се отстранети: средните 2од втората редица, средните 4 од третата редица, ..., средните $2n-2$ од $n-$тата редица, средните $2n-2$ од $(n+1)-$та редица,..., средните 4 од $(2n-2)-$та редица и средните е од $(2n-1)-$ та редица, така што е добиена нова фигура (која е прикажана на цртежот десно за $n = 4$. Кој е најголемиот број правоаголници 2×1 (домина), кои може да се постават на фигурата без тие да се преклопуваат и така што секој правоаголник покрива два единечни квадрати.



Решение. За $n=2$ фигурата може да се покрие на начинот како што тоа е прикажано на цртежот десно. Според тоа, во овој случај најголемиот баран број е еднаков на 6.

За $n>2$, да ја исечеме фигурата на четири складни делови долж линиите меѓу $n-$тата и $(n+1)-$вата редица и меѓу $n-$тата и $(n+1)-$ватаколона. Овие делови да ги обоиме на шаховски начин, како што е прикажано за долниот лев цртеж за $n=5$ и на долниот десен цртеж за $n=4$.



Секое домино покрива едно бело и едно црно поле. Затоа најголемиот број домина кој може да се смести на еден дел на фигурата не е поголем од бројот на белите полиња (бројот на белите полиња е помал од бројот на црните полиња). На секој од четирите делови (без крајното горно и крајното десно поле), домината може дасе постават на следниов начин така што ги покриваат сите бели полиња: поставуваме вертикални домина на двете најдолни редици, тргнувајќи од левиот раб на фигурата, се додека тоа е можно, и хоризонтални домина на преостанатите редици, тргнувајќи од левиот раб се додека тоа е можно.

За $n=2k-1$, каде $k\geq 2$ е природен број, на секој дел има

$$2((k-1)+(k-2)+...+2+1)=k(k-1)$$

бели полиња, па тоа е и најголемиот број домина кои може дасе постават. Притоа, според начинот на пшоставување кој го опишавме, граничните полиња во кои фигурите се допираат останаа непокриени. Затоа, со овие 4 домина на граничните полиња во кои фигурите се допираат, најголемиот број домина кој може да се постави е еднаков на

$$4k(k-1)+4=(2k-1)^2+3=n^2+3.$$

За $n=2k$, каде $k\geq 2$ е природен број, имаме

$$(2k-1)+(2k-3)+...+3+1=k^2$$

бели полиња. Слично, како во претходниот случај добиваме дека во овој случај најголемиот број е еднаков на

$$4k^2+4=n^2+4.$$

ЈБМО 2007

1. Нека a е позитивен реален број таков што $a^3 = 6(a+1)$. Докажи, дека равенката $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ нема решенија во множеството реални броеви.

   Решение. Нека претпоставиме дека дадената равенка има решенија во множеството реални броеви. Равенката е еквивалентна со равенката

   $$(x + \tfrac{a}{2})^2 = 6 - \tfrac{3a^2}{4}.$$

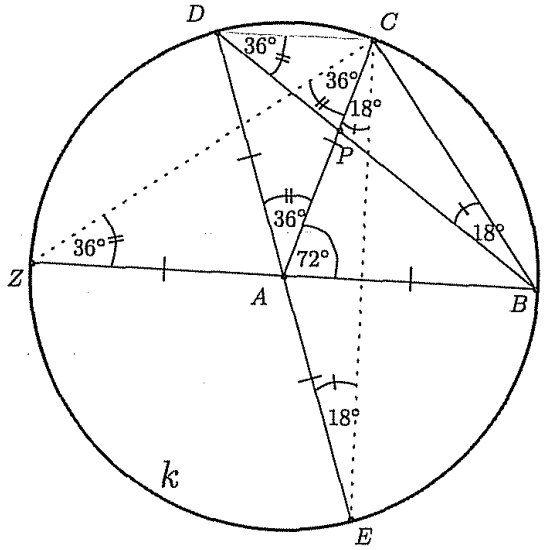
   Оттука следува $6 - \frac{3a^2}{4} \geq 0$, односно $a^2 \leq 8$. Но, a е позитивен реален број, па затоа $a^3 \leq 8a$, т.е $6(a+1) \leq 8a$, од каде добиваме $a \geq 3$. Според тоа, $a^2 \geq 9 > 8 \geq a^2$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека дадената равенка нема решенија во множеството реални броеви.

2. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник таков што

   $$\measuredangle DAC = \measuredangle BDC = 36^\circ,\ \measuredangle CBD = 18^\circ \text{ и } \measuredangle BAC = 72^\circ.$$

   Ако P е пресечната точка на дијагоналите AC и BD, определи го $\measuredangle APD$.

   Решение. *Прв начин*. На правите AD и BA, преку точката A, да земеме точки E и Z соодветно, такви што $\overline{AC} = \overline{AE} = \overline{AZ}$.



Од

$$\measuredangle DEC = \frac{\measuredangle DAC}{2} = 18^\circ = \measuredangle CBD$$

следува дека четириаголникот $DEBC$ е тетивен. Аналогно,

$$\measuredangle AZC = \frac{\measuredangle BAC}{2} = 36^\circ = \measuredangle BDC,$$

па затоа четириаголникот $CBZD$ е тетивен. Значи, петаголникот $BCDZE$ е впишан во кружницата $k(A, \overline{AC})$. Оттука следува

$$\overline{AC} = \overline{AD} \text{ и } \measuredangle ACD = \measuredangle ADC = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ.$$

Сега, од $\triangle CPD$ имаме

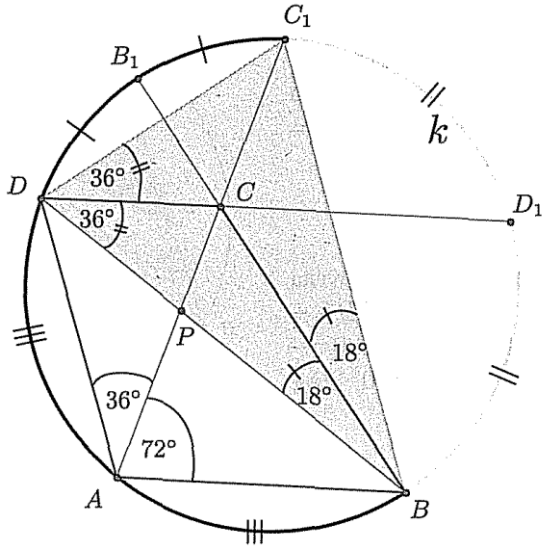
$$\measuredangle CPD = 180^\circ - \measuredangle PCD - \measuredangle PDC = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

Оттука $\measuredangle APD = 108^\circ$.

Втор начин. Нека k е опишаната кружница околу $\triangle ADB$ и B_1, C_1, D_1 се пресечните точки на k со правите BC, AC, CD, соодветно. Од

$$\measuredangle DBB_1 = 18^\circ \text{ и } \measuredangle DBC_1 = 36^\circ$$

следува дека $\measuredangle B_1BC_1 = 18^\circ$, од каде следува дека B_1 е средина на лакот DC_1. Аналогно D_1 е средина на лакот BC_1.



Значи, BB_1 и DD_1 се симетрали на $\measuredangle DBC_1$ и $\measuredangle BDC_1$ соодветно. Според тоа, точката C е центар на впишаната кружница во $\triangle BDC_1$ и

$$\measuredangle DC_1A = \measuredangle AC_1B = 36^\circ,$$

бидејќи AC_1 е симетрала на

$$\measuredangle BC_1D = 180^\circ - \measuredangle BAD.$$

Сега

$$\measuredangle APD = \measuredangle C_1DB + \measuredangle AC_1D = 2\cdot 36^\circ + 36^\circ = 108^\circ.$$

3. Дадени се 50 точки во рамнината такви што меѓу нив нема три колинеарни. Секоја од овие точки е обоена во една од четири бои. Докажи дека постојат најмалку 130 разностранитриаголници чии темиња се обоени со иста боја.

Решение. Бидејќи $50 = 4\cdot 12 + 2$ од принципот на Дирихле следува дека постојат најмалку 13 истобојни точки. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека се дадени $n > 8$ точки во рамнината такви што меѓу нив нема три колинеарни. Тогаш постојат најмалку $\frac{n(n-1)(n-8)}{6}$ разностранитриаголници чии темиња се дадените точки.

Доказ. Имаме $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ отсечки и $C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ триаголници со темиња во дадените точки. Над секоја отсечка постојат најмногу два рамнокраки триаголници за кои таа отсечка е основа. Навистина, ако над некоја отсечка AB постојат 3 рамнокраки $\triangle ABC, \triangle ABD$ и $\triangle ABE$, тогаш точките C, D и E се наоѓаат на симетралата на отсечката AB, па затоа ќе бидат колинеарни, што е противречност. Според тоа, имаме најмногу $2\cdot\frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$ рамнокраки триаголници. Конечно, од принципот на исклучување следува дека имаме најмалку

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}$$

разностранитриаголници. ■

Сега, ако во претходната лема земеме дека имаме $n = 13$ истобројни точки, добиваме дека бројот на разностраните триаголници е поголем или еднаков на $\frac{13\cdot 12\cdot 5}{6} = 130$.

4. Нека p е прост број. Докажи, дека $7p + 3^p - 4$ не е точен квадрат.

Решение. За $p = 2$ имаме $7\cdot 2 + 3^2 - 4 = 19$ и тоа не е точен квадрат. За $p = 3$ имаме $7\cdot 3 + 3^3 - 4 = 44$ и тоа не е точен квадрат.

Нека претпоставиме дека за некој прост број $p>3$ бројот $7p+3^p-4$ е точен квадрат, т.е. $7p+3^p-4=n^2$.

Ако p е прост број од видот $4k+1$, тогаш

$$n^2=7p+3^p-4=7(4k+1)+3^{4k+1}-4\equiv 3\cdot 1+3-4\equiv 2(\mathrm{mod}\,4),$$

што не е можно, бидејќи за секој природен број x важи $x^2\equiv 0$ или $1(\mathrm{mod}\,4)$.

Ако p е прост број од видот $4k+3$ и $p>3$, тогаш $(p,3)=1$ и од малата теорема на Ферма следува $3^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$. Затоа

$$n^2=7p+3^p-4\equiv 0+3\cdot 3^{p-1}-4\equiv 3-4\equiv -1(\mathrm{mod}\,p).$$

Ако ја степенуваме оваа конгруенција на $2k+1$ добиваме

$$(n^2)^{2k+1}=n^{4k+2}\equiv -1(\mathrm{mod}\,p).$$

Јасно, $p\nmid n$, бидејќи во спротивно ќе важи $p\mid 3^p-4$, т.е. $p\mid(3-4)=-1$, што не е можно. Значи, $(p,n)=1$, па од малата теорема на Ферма следува дека

$$n^{p-1}=n^{4k+2}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p).$$

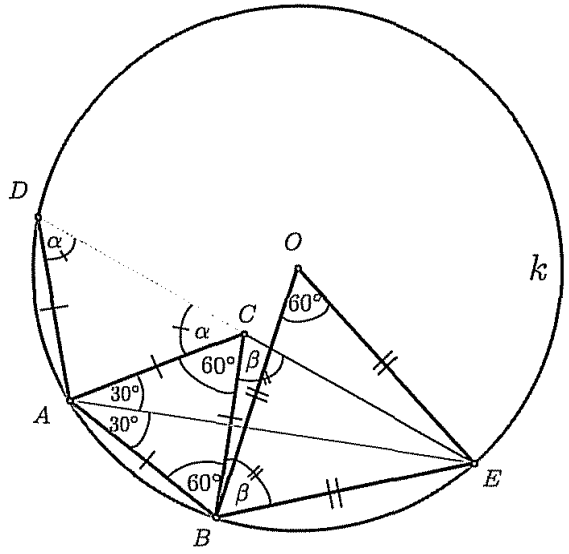
Сега од последните две конгруенции следува $2\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$, што е противречност.

Конечно, бидејќи сите прости броеви поголеми од 3 се или од видот $4k+1$ или од видот $4k+3$, од претходните разгледувања следува тврдењето на задачата.

ЈБМО 2008

1. Определи ги сите реални броеви a,b,c,d такви што
$$a+b+c+d=20 \text{ и } ab+ac+ad+bc+bd+cd=150.$$
Решение. *Прв начин*. Имаме
$$\begin{aligned}400=20^2&=(a+b+c+d)^2\\&=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)\\&=a^2+b^2+c^2+d^2+300,\end{aligned}$$
па затоа $a^2+b^2+c^2+d^2=100$. Според тоа,
$$\begin{aligned}(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2&=\\=3(a^2+b^2+c^2+d^2)-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)&\\=3\cdot100-2\cdot150=0.&\end{aligned}$$
Оттука следува дека $a=b=c=d$ и како $a+b+c+d=20$, добиваме $a=b=c=d=5$.
Втор начин. Како и во првиот начин добиваме дека
$$a^2+b^2+c^2+d^2=100.$$
Ако искористиме дека $xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$, за секои $x,y\in\mathbb{R}$, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y$, добиваме
$$150=ab+ac+ad+bc+bd+cd\le\tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)=150,$$
па затоа $a=b=c=d=5$.

2. Темињата A и B на рамностран $\triangle ABC$ лежат на кружница k со радиус 1, а темето C се наоѓа во внатрешноста на кружницата k. Точката $D\neq B$ лежи на кружницата k и важи $\overline{AD}=\overline{AB}$. Правата DC ја сече кружницата k уште во точката E. Определи ја должината на отсечката CE.
Решение. Од $\overline{AD}=\overline{AB}=\overline{AC}$ следува дека $\triangle ACD$ е рамнокрак. Да означиме
$$\alpha=\sphericalangle ADC=\sphericalangle ACD \text{ и } \beta=\sphericalangle BCE.$$
Тогаш $\alpha+\beta=120^\circ$. Од тетивниот четириаголник $ABED$ следува
$$\sphericalangle ABE=180^\circ-\alpha.$$



Тогаш

$$\measuredangle CBE = 120^\circ - \alpha = \beta,$$

што значи дека $\triangle CBE$ е рамнокрак и четириаголникот $ABEC$ е делтоид. Оттука следува дека AE е симетрала на $\measuredangle BAC$, бидејќи е дијагонала која го дели делтоидот на два еднакви дела. Затоа $\measuredangle EAB = 30^\circ$, од што следува дека централниот агол над тетивата BE е еднаков на 60°. Според тоа, триаголникот чии темиња се B, E и центарот O на кружницата е рамностран, т.е. $\overline{BE} = 1$.

Конечно, од $\triangle CBE$ следува дека $\overline{CE} = \overline{BE} = 1$.

3. Во множеството прости броеви реши ја равенката

$$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$r(p-q) = 5q - p.$$

Од последната равенка следува $p \neq q$ и

$$r = \frac{4q}{p-q} - 1. \qquad (1)$$

Бидејќи r е природен број, заклучуваме дека $p-q \mid 4q$. Но, q е прост број, па затоа $p-q = q, 2q$ или $4q$, тогаш $p = 2q, 3q$ или $5q$, што про-

тивречи на фактот дека p и q се прости броеви. Одделно ќе ги разгледаме останатите случаи.

Ако $p-q=1$, тогаш $p=3, q=2$ и (1) следува $r=7$.

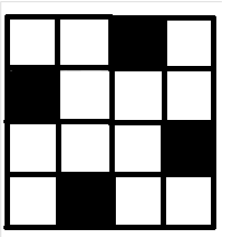
Ако $p-q=2$, тогаш $p=q+2$ и $r=2q-1$. Ако $q\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, тогаш $p=q+2\equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$, па затоа бидејќи p е прост број добиваме $p=3$. Но, тогаш $q=1$, па затоа овој случај отпаѓа. Ако $q\equiv 2(\mathrm{mod}\, 3)$, тогаш $r=2q-1\equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$, па затоа $r=3$. Но, тогаш $q=2$ и $p=4$, па затоа и овој случај отпаѓа. Ако $q=3$, тогаш $p=r=5$ и ова е уште едно решение на задачата.

Ако $p-q=4$, тогаш $p=q+4$ и $r=q-1$. Од $r=q-1$ следува $r=2$ и $q=3$, па затоа $p=7$.

Конечно, решени на дадената равенка е

$$(p,q,r)\in\{(3,2,7),(5,3,5),(7,3,2)\}.$$

4. Секое поле на табла 4×4 е обоено со бела боја. Во еден потез е дозволено да се промени бојата на произволно поле заедно со неговите соседни полиња (белата боја во црна, црната во бела). Две полиња се соседни ако имаат заедничка стран. Определи ги сите n такви што по n потези може да се добие табла со сите полиња обоени во црно.



Решение. Прво да забележиме дека во еден потез најмногу 5 полиња може да ја сменат бојата. Бидејќи таблата има 16 полиња, потребни се најмалку 4 потези. Да забележиме 4 штрафирани полиња како на цртежот десно. Очигледно со примена на операцијата од задачата на овие полиња добиваме дека со $n=4$ потези може да се смени бојата на сите полиња во црна.

Да забележиме дека со последователна примена на операцијата на исто поле, ефектот е како ништо да не сме направиле. Оттука следува дека за секој парен број n кој е поголем или еднаков на 4 сите полиња на таблата ќе бидат црни.

Ќе докажеме дека за непарно n не може да се постигне во n потези сите полиња на таблата да се црни. Навистина, повторно ги разгледуваме четирите штрафирани полиња од горниот цртеж. Во било кој потез без разлика кое поле го бираме ќе се смени бојата на еднао од штрафираните полиња. Последното значи дека во секој потез се менува пар-

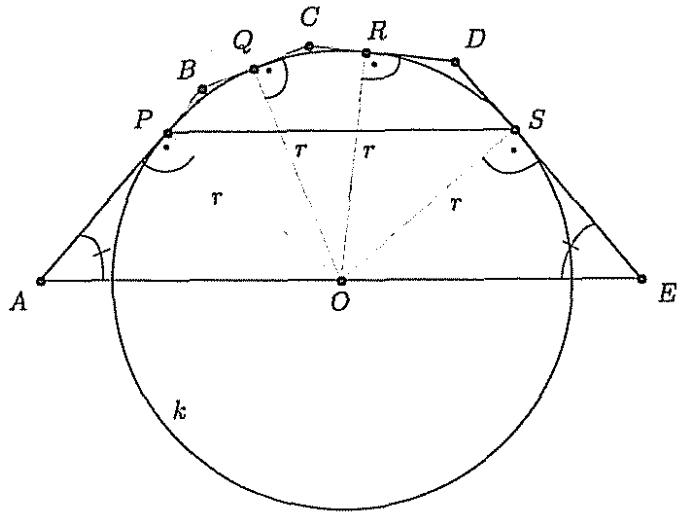
носта на на црните и белите полиња на штрафираните полиња. На почетокот бројот на белите полиња бил 4, па затоа во секој непарен потез бројот на белите полиња меѓу штрафираните е непарен, т.е. 1 или 3. Значи, при непарен потез имаме барем едно бело поле на таблата. Значи, за непарен n не може да се постигне сите полиња на таблата да се црни.

ЈБМО 2009

1. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник таков што $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DE}$ и k е кружница со центар на страната AE која ги допира страните AB, BC, CD и DE во точките P, Q, R и S, соодветно (различни од темињата на петаголникот). Докажи, дека правите PS и AE се паралелни.

Решение. Нека O е центарот на кружницата k. Имаме $\overline{BP}=\overline{BQ}$, $\overline{CQ}=\overline{CR}$, $\overline{DR}=\overline{DS}$ како тангентни отсечки на кружницата k. Од условот $\overline{AB}+\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{DE}$ следува

$$\overline{AP}+\overline{BP}+\overline{CR}+\overline{DR}=\overline{BQ}+\overline{CQ}+\overline{DS}+\overline{ES}$$



Оттука добиваме $\overline{AP}=\overline{ES}$. Понатаму, од $\overline{AP}=\overline{ES}$, $\sphericalangle APO=\sphericalangle ESO=90^\circ$ и $\overline{PO}=\overline{SO}$ (радиуси на k) следува дека $\triangle APO\cong\triangle ESO$, па затоа $\sphericalangle PAO=\sphericalangle SEO$.

Од рамнокракиот $\triangle POS$ следува $\sphericalangle OPS=\sphericalangle OSP$, па затоа

$$\sphericalangle APS=\sphericalangle APO+\sphericalangle OPS=90^\circ+\sphericalangle OPS=90^\circ+\sphericalangle OSP=\sphericalangle PSE.$$

Сега, од четириаголникот $APSE$ заклучуваме

$$2\sphericalangle EAP+2\sphericalangle APS=\sphericalangle EAP+\sphericalangle APS+\sphericalangle PSE+\sphericalangle SEA=360^\circ,$$

па затоа $\sphericalangle EAP+\sphericalangle APS=180^\circ$, што значи дека четириаголникот $APSE$ е рамнокрак трапез, т.е. $AE\parallel PS$.

2. Во множеството ненегативни цели броеви реши ја равенката

$$2^a \cdot 3^b + 9 = c^2.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$2^a \cdot 3^b = (c-3)(c+3). \qquad (1)$$

Ако $b=0$, тогаш лесно следува дека $a=4$ и $c=5$.

Ако $b>0$, добиваме $3 \mid c^2$, т.е. $9 \mid c^2$. Значи, $9 \mid 2^a \cdot 3^b$, па затоа $b>1$. Нека $c=3y$. Заменуваме во (1) и добиваме $(y-1)(y+1)=2^a \cdot 3^{b-2}$. Ако $a=0$, тогаш лесно се добива дека $b=3$ и $c=6$. Ако $a \geq 1$, тогаш $y-1$ и $y+1$ се парни броеви, па затоа $4 \mid 2^a \cdot 3^{b-2}$, т.е. $a \geq 2$. Сега равенката го добива видот

$$\frac{y-1}{2} \cdot \frac{y+1}{2} = 2^{a-2} \cdot 3^{b-2}.$$

Бидејќи $\frac{y-1}{2}$ и $\frac{y+1}{2}$ се последователни броеви, тие се заемно прости, па затоа се степени на 2 и 3. Нека $m=a-2$ и $n=b-2$. Можни се два случаја.

Прв случај. Ако $\frac{y-1}{2}=2^m$ и $\frac{y+1}{2}=3^n$, тогаш $2^m-3^n=1$, па затоа $m>n$. Ако $n=0$, тогаш $m=1$ и $a=3, b=2$ и $c=9$. Ако $n>0$, тогаш разгледувајќи по модул 3 заклучуваме дека m е парен број. Нека $m=2t$. Тогаш $(2^t-1)(2^t+1)=3^n$, па како $(2^t+1)-(2^t-1)=2$ заклучуваме дека $2^t-1=1$ и $2^t+1=3^n$. Значи, $t=1, m=2, n=1$ и $a=4, b=3, c=21$.

Втор случај. Ако $\frac{y-1}{2}=3^n$ и $\frac{y+1}{2}=2^m$, тогаш $3^n-2^m=1$. Јасно, $m>0$. Ако $m=1$ добиваме $n=1$ и $a=3, b=3, c=15$. Ако $m>1$, тогаш разгледувајќи ја претходната равенка по модул 4 заклучуваме дека n е парен број. Нека $n=2t$, од каде наоѓаме $(3^t-1)(3^t+1)=2^m$. Бидејќи $(3^t+1)-(3^t-1)=2$, мора да важи $3^t-1=2$ и $3^t+1=2^{b-1}$, од каде следува $t=1, n=2, m=3$ и $a=5, b=4, c=51$.

Непосредно се проверува најдените тројки (a,b,c) навистина се решенија на дадената равенка.

3. Нека $x,y,z \in (0,1)$ се такви што $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$. Докажи дека најмалку еден од броевите $(1-x)y, (1-y)z, (1-z)x$ е поголем или

еднаков на $\frac{1}{4}$.

Решение. *Прв начин.* Од неравенството $(2a-1)^2 \geq 0$ следува неравенството $a(1-a) \leq \frac{1}{4}$. Затоа

$$(xyz)^2 = (x(1-x))(y(1-y))(z(1-z)) \leq \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{64}, \text{ т.е. } xyz \leq \frac{1}{8}.$$

Од неравенството $xyz \leq \frac{1}{8}$ следува дека најмалку еден од броевите x, y, z е помал од $\frac{1}{2}$. Без ограничување на општоста нека $x \leq \frac{1}{2}$. Тогаш $1-x \geq \frac{1}{2}$.

Нека претпоставиме дека

$$(1-x)y < \frac{1}{4}, (1-y)z < \frac{1}{4}, (1-z)x < \frac{1}{4}.$$

Тогаш

$$y < \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x} \leq \frac{1}{4}\cdot 2 = \frac{1}{2},$$

па затоа $1-y > \frac{1}{2}$. Аналогно заклучуваме дека $z < \frac{1}{2}$ и $1-z > \frac{1}{2}$. Сега,

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \geq xyz = (1-x)(1-y)(1-z) > \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8},$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

Втор начин. Нека претпоставиме дека

$$(1-x)y < \frac{1}{4}, (1-y)z < \frac{1}{4}, (1-z)x < \frac{1}{4}.$$

Ги собираме овие три неравенства и добиваме

$$(1-x)y + (1-y)z + (1-z)x < \frac{3}{4}. \qquad (1)$$

Ги множиме овие три неравенства (сите страни се позитивни) и добиваме

$$xyz(1-x)(1-y)(1-z) < \frac{1}{64}.$$

Ако го искористиме условот на задачата, слично како во првиот начин на решавање се добива $xyz \leq \frac{1}{8}$. Исто така и $(1-x)(1-y)(1-z) < \frac{1}{8}$. Ако го развиеме изразот на левата страна на последното неравенство добиваме

$$1-(x+y+z)+xy+yz+zx < xyz+\frac{1}{8} < \frac{1}{8}+\frac{1}{8} < \frac{1}{4}.$$

Ова бе еквивалентно со

$$-(x+y+z)+xy+yz+zx < -\frac{3}{4},$$

т.е. со

$$(1-x)y+(1-y)z+(1-z)x>\frac{3}{4}.$$

Последното неравенство противречи на (1), и од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

4. Во рамнината се дадени 2009 плави и црвени точки такви што на секоја единечна кружница со центар во плава точка се наоѓаат точно две црвени точки. Определи го најголемиот можен број на плави точки.

Решение. Секој пар црвени точки се наоѓа најмногу на две единечни кружници со центри во плави точки. Бидејќи n црвени точки формираат $\frac{n(n-1)}{2}$ парови црвени точки, заклучуваме дека бројот на плавите точки е помал или еднаков на $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$. Затоа вкупниот број плави и црвени точки е помал или еднаков од $n+n(n-1)=n^2$. Но, вкупниот број точки е 2009, па затоа $n^2\geq 2009$, од каде добиваме $n\geq[\sqrt{2009}]+1=45$.

Останува да најдеме пример кој покажува дека постои конфигурација со 45 црвени точки која ги исполнува условите на задачата. Да распоредиме 45 црвени точки на отсечка со должина 1. Околу секоја од овие црвени точки опишуваме кружница со радиус 1. Бидејќи центрите на овие кружници се на растојанија помали од 1, добиваме дека секои две од опишаните кружници се сечат. Понатаму, не постојат три од опишаните кружници кои се сечат во иста точка, бидејќи тогаш единичната кружница со центар во таа точка треба отсечката со должина 1 да ја сече во три различни точки, што не е можно. Според тоа, вкупниот број пресечни точки е $45\cdot 44=1980$. Да обоиме 1964 од овие токи во плаво. Сега добивме конфигурација од $1964+45=2009$ плави и црвени точки кои ги задоволува условите на задачата. Бидејќи оваа конфигурација мора да има најмалку 45 црвени точки, таа има најмногу 1964 плави точки.

ЈБМО 2010

1. Реалните броеви a,b,c,d се такви што важи

$$abc-d=1,\quad bcd-a=2,\quad cda-b=3,\quad dab-c=-6.$$

Докажи дека

$$a+b+c+d\neq 0.$$

Решение. Јасно, a,b,c,d се различни од 0, бидејќи ако било кој од нив е еднаков на 0, тогаш не е можно да се исполнети сите четири равенства. Нека претпоставиме дека $a+b+c+d=0$. Ако ги собереме дадените равенства од условот на задачата и искористиме дека

$$a+b+c+d=0$$

добиваме

$$abc+bcd+cda+dab=0.$$

Значи,

$$0=ab(c+d)+cd(a+b)=ab(c+d)-cd(c+d)=(c+d)(ab-cd).$$

Ако $c+d=0$, тогаш $a+b=0$, па ако ги собереме првото и четвртото равенство од сулвот на задачата добиваме

$$-5=ab(c+d)-(c+d)=0,$$

што е противречност.

Нека $ab=cd$ и $a+b\neq 0$. Аналогно добиваме

$$0=bc(a+b)+ad(b+c)=-bc(b+c)+ad(b+c)=(b+c)(ad-bc).$$

Ако $b+c=0$, тогаш собирајќи ги третото и четвртото равенство од условот на задачата повторно добиваме противречност. Затоа останува $ad=bc$. Аналогно ја отфрламе можноста $b+d=0$ и заклучуваме дека $ac=bd$. Множејќи ги $ab=cd$ и $ad=bc$ добиваме $a^2bd=c^2bd$, односно $a^2=c^2$, па затоа $(a-c)(a+c)=0$. Но, $a+c\neq 0$, па затоа $a=c$. Сега од $a\neq 0$ и $ab=cd$ следува $b=d$, Според тоа,

$$0=a+b+c+d=2a+2b=2(a+b),\text{ т.е. } a+b=0,$$

што противречи на $a+b\neq 0$. Конечно, од последната противречност следува тврдењето на задачата.

2. Определи ги сите природни броеви n такци што $n2^{n+1}+1$ е точен квадрат.

Решение. Нека $n2^{n+1}+1=x^2$. Тогаш $x=2k+1$, за некој $k\in\mathbb{N}$, па затоа $n2^{n-1}=k(k+1)$. Броевите k и $k+1$ се заемно прости, па затоа еден од

нив сигурно е делив со 2^{n-1} и еден од нив сигурно е помал или еднаков на n. Значи, $k \le n$ и $k+1 \ge 2^{n-1}$. Според тоа, $n+1 \ge k+1 \ge 2^{n-1}$.

Ќе докажеме дека за $n \ge 4$ важи $2^{n-1} \ge n+1$.

За $n=4$ имаме $8 = 2^{4-1} \ge 5 = 4+1$, т.е. неравенството е точно.

Нека претпоставиме дека неравенството е точно за некој $n \ge 4$. Тогаш,

$$2^{(n+1)-1} = 2 \cdot 2^{n-1} \ge 2(n+1) \ge n+2 = (n+1)+1,$$

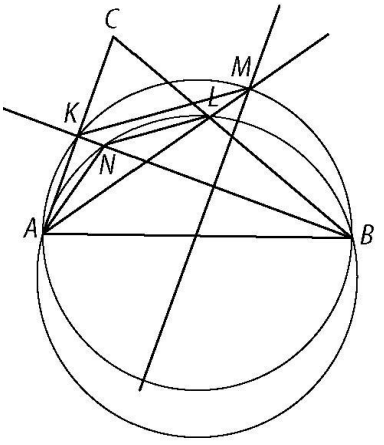
што значи дека неравенството е точно за $n+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека е точно за секој природен број $n \ge 4$.

Од претходно изнесеното следува дека за $n \ge 4$ задачата нема решение.

Останува да ги провериме случаите $n = 1,2,3$, при што важи $n2^{n+1}+1 = 3,17,49$. Според тоа, единствено решение е $n=3$.

3. Нека AL и BK се симетралите на аглите на разностраниот триаголник ABC ($L \in BC, K \in AC$). Симетралата на отсечката BK ја сече правата AL во точката M. Нека N е точка на правата BK таква што $LN \parallel MK$. Докажи, дека $\overline{LN} = \overline{NA}$.

Решение. Во произволен триаголник симетралата на страна и симетралата на спротивниот агол на таа страна се сечат на опишаната кружница околу тој триаголник, па затоа точката M припаѓа на опишаната кружница околу $\triangle ABK$. Оттука користејќи ја еднаквоста на периферни агли и на агли со паралелни краци добиваме



$$\measuredangle CBK = \measuredangle ABK = \measuredangle AMK = \measuredangle NLA.$$

Значи

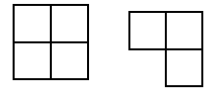
$$\measuredangle ABN = \measuredangle ABK = \measuredangle ALN,$$

па затоа четириаголникот $ABLN$ е тетивен. Ако искористиме дека AK е симетрала на $\measuredangle ABC$, тогаш од својството на периферните агли следува

$$\measuredangle NAL = \measuredangle NABL = \measuredangle CBK = \measuredangle ABK = \measuredangle NLA.$$

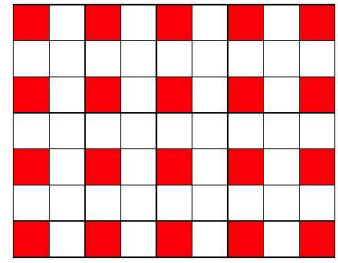
Според тоа, $\triangle ALN$ е рамнокрак, па затоа $\overline{LN} = \overline{NA}$.

4. Табла со димензии 9×7 е покриена со тетрамина и тримина прикажани на цртежите десно. Нека n е бројот тетраминатa кои учествуваат во покривањето. Определи ги сите можни вредности на n.

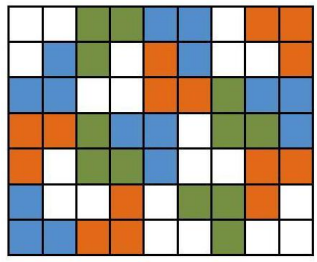


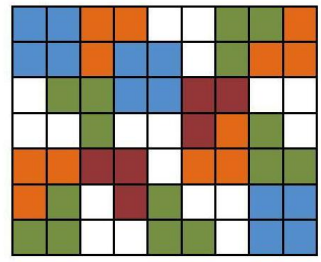
Решение. Со m да го означиме бројот на триминатa кои учествуваат во покривањето. Тогаш за вкупниот број важи

$$4n+3m=63,$$



па затоа $3|n$. Таблата да ја обоиме како на цртежот десно. Тогаш секое тетрамино покрива точно едно црно поле, додека секое тримино покрива едно ли ниту едно црно поле. Затоа бројот на триминатa и тетраминатa е поголем од бројот на црните полиња, т.е. $m+n\geq 20$. Оттука следува дека $3m+3n\geq 60$, па ако искористиме дека $3m=63-4n$ добиваме дека $n\leq 3$. Но, $3|n$, па затоа $n=0$ или $n=3$. Следните примери покажуваа покривања за $n=0$ и $n=3$, што значи дека тоа се и решенија на задачата.





ЈБМО 2011

1. Нека a, b и c се позитивни реални броеви такви што $abc=1$. Докажи го неравенството

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)\geq$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Кога е исполнето равенство?

Решение. Ќе го искористиме равенството

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x^3+1)(x^2+x+x),$$

за $x\in\{a, b, c\}$.

Со примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за два позитивни реални броја имаме

$$a^3+1\geq 2\sqrt{a^3\cdot 1}=2\sqrt{a^3}$$
$$b^3+1\geq 2\sqrt{b^3\cdot 1}=2\sqrt{b^3}$$
$$c^3+1\geq 2\sqrt{c^3\cdot 1}=2\sqrt{c^3}$$

Ако последните три неравенства ги помножиме добиваме

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)\geq 8\sqrt{a^3b^3c^3}$$
$$=8\sqrt{(abc)^3}=8.$$

Сега е јасно дека

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)(c^5+c^4+c^3+c^2+c+1)=$$
$$=(a^3+1)(a^2+a+1)(b^3+1)(b^2+b+1)(c^3+1)(c^2+c+1)$$
$$=(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$
$$\geq 8(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)$$

Равенство важи ако и само ако $a^3=b^3=c^3=1$, односно $a=b=c=1$.

2. Определи ги сите прости броеви p, за кои равенката

$$x(y^2-p)+y(x^2-p)=5p.$$

има решение во множеството природни броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x+y)(xy-p)=5p.$$

Можни се повеќе случаи.

Случај 1. Нека $x+y=1$ и $xy=6p$. За прости броеви $p\geq 2$, равенката $x^2-x+6p=0$ нема целобројни решенија.

Случај 2. Нека $x+y=5$ и $xy=2p$. За прости броеви $p\geq 2$ равенката $x^2-5x+2p=0$ има дискриминанта $\Delta=25-8p$. Од неравенството $25-8p\geq 0$ добиваме $p\in\{2,3\}$. За $p=2$ ги добиваме решенијата $(1,4)$ и $(4,1)$. За $p=3$ ги добиваме решенијата $(2,3)$ и $(3,2)$.

Случај 3. Нека $x+y=p$ и $xy=p+5$. За прости броеви $p\geq 2$, равенката $x^2-px+p+5=0$ има дискриминанта $\Delta=p^2-4p-20$. Од неравенството $p^2-4p-20\geq 0$ добиваме $p\geq 7$.

Нека $p^2-4p-20=q^2$, каде $1\leq q<p$. Ја добиваме равенката

$$(p-2)^2-q^2=24$$

која е еквивалентна со

$$(p+q-2)(p-q-2)=24.$$

Јасно е дека броевите $p+q-2$ и $p-q-2$ се парни. Притоа имаме два подслучаи:

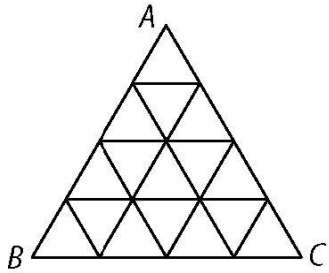
а) $p+q-2=12$ и $p-q-2=2$. Непосредно се добива $p=9$ кој не е прост број.

б) $p+q-2=6$ и $p-q-2=4$. Непосредно се добива $p=7$ и $q=1$. Равенката има решенија $(3,4)$ и $(4,3)$.

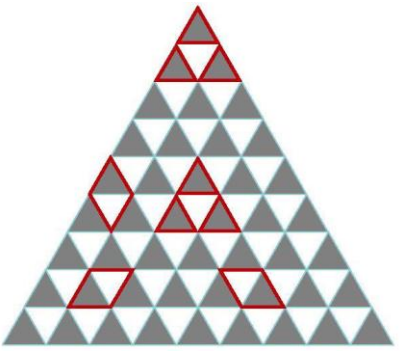
Случај 4. Нека $x+y=5p$ и $xy=p+1$. Во овој случај не постои $p\in\mathbb{N}$ такво што за x,y се добиваат решенија што се природни броеви.

Конечно, равенката има решенија во множеството природни броеви само за $p\in\{2,3,7\}$.

3. Нека $n>3$ е природен број. Рамностраниот триаголник ABC е поделен на n^2 идентични рамнострани триаголници со прави паралелни на неговите страни. Таква поделба е илустрирана на цртежот за $n=4$. Нека m е бројот на ромбови составени од 2 мали триаголници, а d е бројот на ромбови составени од 8 мали триаголници. Изрази ја разликата $m-d$ преку n.

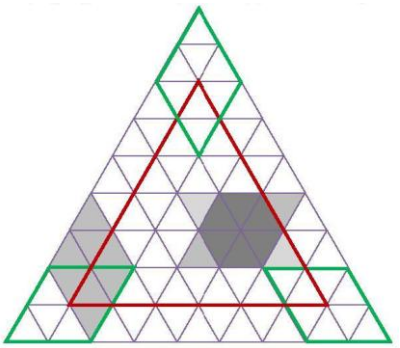


Решение. Да ги обоиме триаголниците црно-бело како на цртежот. Секој ромб кој се состои од два мали триаголника се состои од еден бел и еден црн триаголник. Секој бел триаголник може да формира точно три ромба кои се состојат од 2 мали триаголника, па затоа m е еднаков на тројната вредност на бројот на белите полиња, т.а.



$$m=3(1+2+3+\ldots+(n-2)+(n-1))=\frac{3n(n-1)}{2}.$$

Да забележиме дека пресеците на дијагоналите на ромбовите составени од 8 мали триаголници може да бидат само темињата на малите триаголници кои припаѓаат на централниот рамностран триаголник (на цртежот означен со црвена боја).



Темињата на црвениот триаголник се центри на еден ромб, преостанатите точки на неговите страни на по два, а точките кои се вои внатрешноста на триаголникот на по три. Затоа важи

$$d=3\cdot 1+2\cdot 3(n-4)+3(1+2+\ldots+(n-5))=\frac{3(n-3)(n-2)}{2}$$

Сега не е тешко да се пресмета дека $m-d=3(2n-3)$.

4. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник. Точките E и F припаѓаат на страните AB и CD соодветно, така што

$$\overline{AB}:\overline{AE}=\overline{CD}:\overline{DF}=n.$$

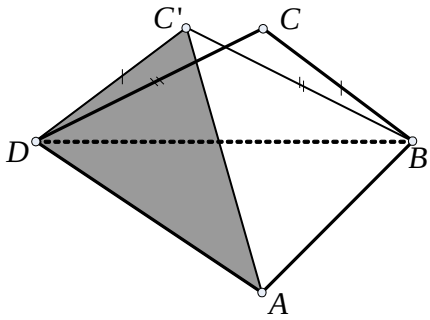
Ако S е плоштина на четириаголникот $AEFD$, докажи дека

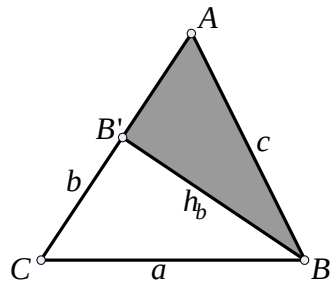
$$S\le\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+n(n-1)\overline{DA}^2+n\overline{DA}\cdot\overline{BC}}{2n^2}.$$

Решение. На почеток ќе докажеме една лема.

Лема. Нека $ABCD$ е конвексен четириаголник и S е неговата плоштина. Тогаш

$$S\le\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}}{2}.$$





Доказ. Ќе конструираме точка C' така што $\overline{BC'}=\overline{CD}$ и $\overline{DC'}=\overline{BC}$. Јасно е дека триаголниците ΔBCD и $\Delta BC'D$ се складни, и плоштините на четираголниците $ABCD$ и $ABC'D$ се еднакви. Плоштината на даден триаголник е помала или еднаква од половината од производот на негови две страни. Според тоа

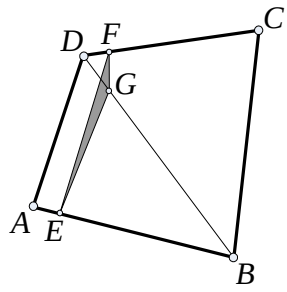
$$S=S_{\triangle ADC'}+S_{\triangle ABC'}\le\frac{\overline{AD}\cdot\overline{DC'}}{2}+\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC'}}{2}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}}{2}.\ \blacksquare$$

Применувајќи ја лемата на четириаголникот $AEFD$ имаме:

$$S\le\frac{\overline{AE}\cdot\overline{DF}+\overline{DA}\cdot\overline{EF}}{2}=\frac{\overline{AE}\cdot\overline{CD}+n^2\overline{DA}\cdot\overline{EF}}{2n^2}.$$

Нека G е точка од дијагоналата BD така што $\overline{DB}:\overline{DG}=n$. Од Талесовата теорема имаме

$$\overline{GE}=\frac{n-1}{n}\overline{AD}\ \text{ и }\ \overline{GF}=\frac{1}{n}\overline{BC}.$$



Применувајќи го неравенството за триаголникот $\triangle EGF$, добиваме

$$\overline{EF}\le\overline{EG}+\overline{GF}=\frac{(n-1)\overline{AD}+\overline{BC}}{n}.$$

Конечно, имаме

$$S\le\frac{\overline{AE}\cdot\overline{CD}+n^2\overline{DA}\cdot\overline{EF}}{2n^2}\le\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}+n(n-1)\overline{DA}+n\overline{DA}\cdot\overline{BC}}{2n^2}.$$

ЈБМО 2012

1. Нека a,b и c се позитивни реални броеви такви што $a+b+c=1$. Докажи дека

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+6\geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right) \qquad (1)$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Во неравенството (1) за $1-a,1-b,1-c$ заменуваме $b+c$, $c+a$, $a+b$ и го добиваме еквивалентното неравенство

$$\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+b}{c}+6\geq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}+\sqrt{\frac{a+b}{c}}\right),$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$\left(\frac{a+c}{b}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{c+a}{b}}+2\right)+\left(\frac{b+c}{a}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{b+c}{a}}+2\right)+\left(\frac{a+b}{c}-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a+b}{c}}+2\right)\geq 0,$$

т.е. со неравенството

$$\left(\sqrt{\frac{c+a}{b}}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{b+c}{a}}-\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}-\sqrt{2}\right)^2\geq 0,$$

кое е точно.

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$\frac{c+a}{b}=\frac{b+c}{a}=\frac{a+b}{c}=2,$$

и ако го искористиме условот $a+b+c=1$ добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=\frac{1}{3}$.

2. Нека кружниците k_1 и k_2 се сечат во две различни точки A и B и нека t е заедничка тангента на k_1 и k_2, која k_1 и k_2 ги допира во точките M и N, соодветно. Ако $t\perp AM$ и $\overline{MN}=2\overline{AM}$, најди го $\measuredangle NMB$.

Решение. *Прв начин.* Нека точката P е симетрична на точката A во однос на M. Тогаш $\overline{AM}=\overline{MP}$ и $t\perp AP$. Затоа $\triangle APN$ е рамнокрак и AP е негова основа. Според тоа, $\measuredangle NAP=\measuredangle NPA$. Понатаму,

$$\measuredangle BAP=\measuredangle BAM=\measuredangle BMN \text{ и } \measuredangle BAN=\measuredangle BNM.$$

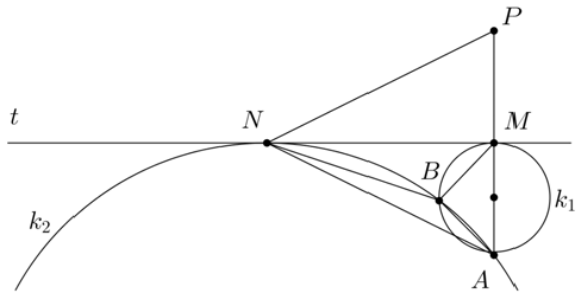
Од досега изнесеното следува

$$180^\circ-\measuredangle NBM=\measuredangle BNM+\measuredangle BMN=\measuredangle BAN+\measuredangle BAP=\measuredangle NAP=\measuredangle NPA,$$

што значи дека четириаголникот $MBNP$ е тетивен (точките B и P лежат на различни страни од MN). Затоа $\measuredangle APB=\measuredangle MPB=\measuredangle MNB$ и триаголниците APB и MNB се складни ($\overline{MN}=2\overline{AM}=\overline{AM}+\overline{MP}=\overline{AP}$). Според тоа, $\overline{AB}=\overline{MB}$, т.е. триаголникот AMB е рамнокрак. Но, t е

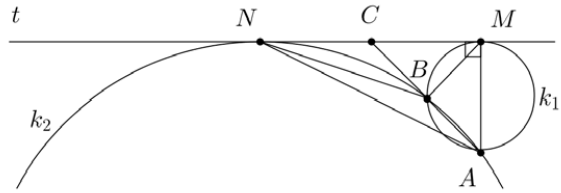
тангента на k_1, па затоа е нормална на AM, што значи дека центарот на k_1 лежи на AM, т.е. триаголникот AMB е правоаголен. Според тоа, $\measuredangle AMB = 45^\circ$, од што следува дека

$$\measuredangle NMB = 90^\circ - \measuredangle AMB = 45^\circ .$$



Втор начин. Нека C е пресекот на правите MN и AB (види цртеж). Тогаш $\overline{CN}^2 = \overline{CB}\cdot\overline{CA}$ и $\overline{CM}^2 = \overline{CB}\cdot\overline{CA}$, па затоа $\overline{CN} = \overline{CM}$. Но, $\overline{MN} = 2\overline{AM}$, па затоа $\overline{CN} = \overline{CM} = \overline{AM}$, што значи дека триаголникот ACM е рамнокрак. Затоа

$$\measuredangle NMB = \measuredangle CMB = \measuredangle BCM = 45^0 .$$



3. На табла се заковани n шајки и секои две се поврзани со конец. Секој конец е обоен со една од n дадени различни бои. За секои три различни бои, постојат три шајки поврзани меѓу себе со конци во овие три различни бои. Може ли n да биде

а) 6? б) 7?

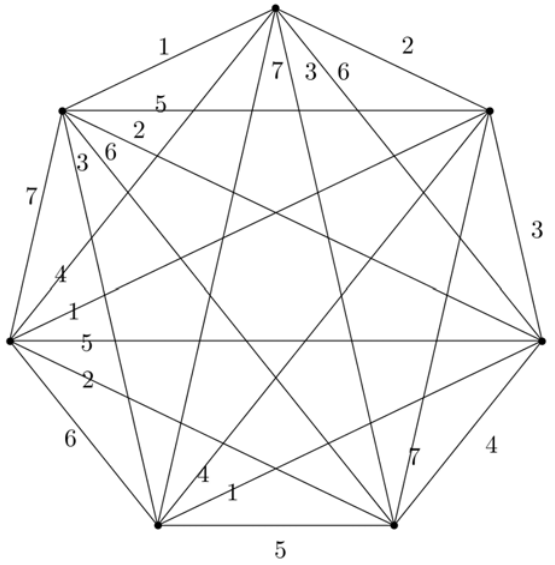
Решение. а) Одговорот е не.

Да претпоставиме дека тоа е можно. Да земеме една боја, да речеме плава. Секој плав конец е страна на 4 триаголници кои може да сењ формираат од 6 точки (шајки). Бидејќи постојат $\binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ парови на бои, во кои немаме плава, и за секој пар на бои заедно со плавата боја постои триаголник со конци во овие бои, заклучуваме дека постојат најмалку три плави конци (во спротивно бројот на триаголници со

плави конци како една страна ќе биде најмалку $2\cdot 4=8$, што е противречност). Истото е точно за секоја друга боја, па сите заедно имаат $6\cdot 3=18$ конци, но ние имаме само $\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$ конци.

б) Одговорот е да.

Да ги распоредиме шајките така да секоја од нив е теме на правилен седумаголник и да ја обоиме секоја негова страна со различна боја. Сега да ја обоиме секоја секоја дијагонала на овој седумаголник со боја која е иста со неговата страна која е паралелна на дијагоналата. Може директно да се провери дека тројка од бои се појавува кај секој триаголник (заради симетријата, доволно е да се провери само тројката која ја содржи првата боја).



Забелешка. Аргументот во а) може да се примени на секој парен број n. Аргументот во б) може да се примени за секој непарен број $n=2k+1$ како што следи: прво означи ги шајките со $0,1,2,...,2k$ и исто така означи ги боите со $0,1,2,...,2k$. Потоа поврзи ја шајката x со шајката y со конец со боја $x+y(\mathrm{mod}\, n)$. За секоја тројка бои (p,q,r) постојат темиња x,y,z кои се поврзани со овие три бои. Навистина, ние мораме да го решиме $(\mathrm{mod}\, n)$ системот

$$x+y\equiv p, x+z\equiv q, y+z\equiv r \qquad (*)$$

Ако ги собереме сите три ќе добиеме $2(x+y+z)\equiv p+q+r$ и доколку ги помножиме со $k+1$ ќе добиеме

$$x+y+z\equiv (k+1)(p+q+r).$$

Сега можеме да ги најдеме x, y, z од (*).

4. Определи ги сите природни броеви x, y, z и t такви што

$$2^x 3^y + 5^z = 7^t . \tag{1}$$

Решение. Од дадената равенка разгледувајќи по модул 3 добиваме $5^z \equiv 1 \pmod 3$, што значи дека $z = 2c, c \in \mathbb{N}$. Понатаму, јасно е дека $t \geq 2$. Ако $t = 2d+1,\ d \in \mathbb{N}$, тогаш равенката (1) го добива обликот

$$2^x 3^y + 25^c = 7 \cdot 49^d .$$

Ако $x \geq 2$, тогаш разгледувајќи по модул 4 добиваме $1 \equiv 3 \pmod 4$, што е противречност. Ако $x = 1$, добиваме

$$2 \cdot 3^y + 25^c = 7 \cdot 49^d$$

и разгледувајќи по модул 24 добиваме

$$2 \cdot 3^y + 1 \equiv 7 \pmod{24},$$

од што следува дека $24 \mid 6(3^{y-1} - 1)$, т.е. $4 \mid (3^{y-1} - 1)$, што значи дека $y-1$ е парен број. Тогаш $y = 2b+1, b \in \mathbb{N}$ и добиваме дека

$$6 \cdot 9^b + 25^c = 7 \cdot 49^d .$$

Ако во последното равенство разгледуваме по модул 5 добиваме $(-1)^b \equiv 2(-1)^d \pmod 5$, што не е можно за кои било $b, d \in \mathbf{N}$. Од досега изнесеното следува дека t е парен број, т.е. $t = 2d, d \in \mathbb{N}$.

Според тоа, равенката (1) можеме да ја запишеме во обликот

$$2^x 3^y + 25^c = 49^d ,$$

односно

$$(7^d - 5^c)(7^d + 5^c) = 2^x 3^y .$$

Но, $(7^d - 5^c, 7^d + 5^c) = 2$ и $7^d + 5^c > 2$ можни се следниве три случаи:

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2^{x-1} \\ 7^d + 5^c = 2 \cdot 3^y \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2 \cdot 3^y \\ 7^d + 5^c = 2^{x-1} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} 7^d - 5^c = 2 \\ 7^d + 5^c = 2^{x-1} 3^y \end{cases} \tag{4}$$

Од системот (2) добиваме $7^d = 2^{x-2} + 3^y$ и ако разгледаме по модул 3, добиваме $2^{x-2} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$, од што следува дека $x-2$ е парен број, т.е. $x = 2a+2$, $a \in \mathbb{N}_0$, каде $a > 0$, бидејќи за $a = 0$ од претходната равенка следува $7^d = 1 + 3^y$, што не е можно (непарен број еднаков на парен број). Според тоа, $7^d - 5^c = 2 \cdot 4^a$ и ако разгледаме по модул 4 добиваме $7^d \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$, па затоа $d = 2e, e \in \mathbb{N}$. Тоа значи дека

$$49^e - 5^c = 2 \cdot 4^a,$$

па ако разгледаме по модул 8 добиваме $5^c \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8)$, од што следува дека $c = 2f$, $f \in \mathbb{N}$. Според тоа, $49^e - 25^f = 2 \cdot 4^a$ и ако разгледаме по модул 3 добиваме $0 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 3)$, што е противречност. Конечно, од досега изнесеното следува дека системот (2) нема решенија во множеството природни броеви.

Да го разгледаме системот (3). Од $2^{x-1} = 7^d + 5^c \geq 12$ следува $x \geq 5$. Тогаш

$$7^d + 5^c \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4), \text{ т.е. } 3^d + 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4),$$

па затоа d е непарен број. Но, $7^d = 5^c + 2 \cdot 3^y \geq 11$, па затоа $d \geq 2$ и затоа $d = 2e+1$, $e \in \mathbb{N}$. Како и во претходниот случај од $7^d = 2^{x-2} + 3^y$ разгледувајќи по модул е добиваме $x = 2a+2$ и како $x \geq 5$ добиваме $a \geq 2$. Според тоа, $7^d = 4^a + 3^y$, т.е. $7 \cdot 49^e = 4^a + 3^y$ и ако разгледаме по модул 8 добиваме $7 \equiv 3^y \pmod 8$, бидејќи 3^y е конгруенстен со 1 по модул 8 ако y е парен, односно со 3 ако y е непарен. Конечно, од досега изнесеното следува дека системот (2) нема решенија во множеството природни броеви.

Од системот (4) следува $7^d = 5^c + 2$, што значи дека цифрата на единиците на бројот 7^d, што е можно само ако $d = 4k+1, k \in \mathbb{N}$. Ако $c \geq 2$, тогаш разгледувајќи го $7^{4k+1} = 5^c + 2$ по модул 25 добиваме $7 \equiv 2 \pmod{25}$, што не е можно. За $c = 1$ добиваме $d = 1$ и решение на задачата е $x = 3, y = 1, z = t = 2$.

ЈБМО 2013

1. Определи ги сите подредени парови природни броеви (a,b) такви што броевите $\frac{a^3b-1}{a+1}$ и $\frac{b^3a+1}{b-1}$ се природни броеви.

   Решение. За дадени природни броеви a и b бројот a^3b-1 можеме да го запишеме во облик

   $$a^3b-1=b(a^3+1)-(b+1)\ .$$

   Ако a и b се броеви кои го исполнуваат условот од задачата, тогаш $a+1\,|\,a^3b-1$ и $a+1\,|\,b(a^3+1)$, па затоа $a+1\,|\,b+1$.

   Аналогно, b^3a+1 можеме да го запишеме во облик

   $$b^3a+1=a(b^3-1)+(a+1)\ .$$

   Ако a и b се броеви кои го исполнуваат условот од задачата, тогаш $b-1\,|\,b^3a+1$ и $b-1\,|\,a(b^3-1)$, па затоа $b-1\,|\,a+1.$

   Сега, на потполно аналоген начин се добива дека $b-1\,|\,b+1$. Од равенството

   $$b+1-(b-1)=2,$$

   следува $b-1\,|\,2$, па имаме две можности.

   Случај 1. $b=2$. Тогаш $a+1\,|\,b+1=3$ и единствена можност е $a=2$. Во овој случај единствено решение е $(a,b)=(2,2)$.

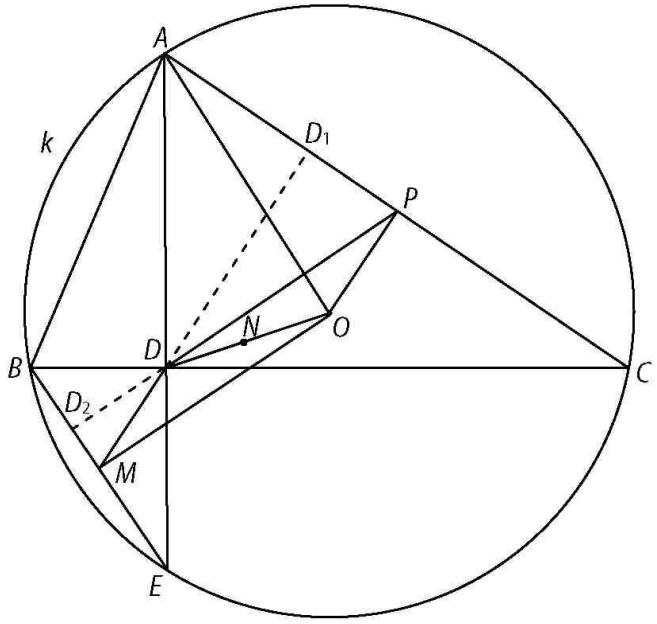
   Случај 2. $b=3$. Тогаш $a+1\,|\,b+1=4$, па имаме две можности $a=1$ или $a=3$. Решенија во овој случај се $(a,b)=(1,3)$ и $(a,b)=(3,3)$.

   Конечно бараните подредени парови се $(a,b)\in\{(1,3),(2,2),(3,3)\}$.

2. Нека ABC е остроаголен триаголник со $\overline{AB}<\overline{AC}$ и O е центар на неговата опишана кружница k. Нека D е точка од отсечката BC таква што $\sphericalangle BAD=\sphericalangle CAO$. Точката E е втора пресечна точка на ω и правата AD, а точките M,N и P се средини на отсечките BE,OD и AC, соодветно. Докажи дека M,N и P се колинеарни.

   Решение. Ќе докажеме дека $MOPD$ е паралелограм. Од тоа ќе следува дека M,N и P се колинеарни.

   Бидејќи $\sphericalangle BAD=\sphericalangle CAO=90°-\sphericalangle ABC$, точката D е подножјето на нормалата повлечена од точката A до страната BC. Бидејќи M е средина на отсечката BE, имаме



$$\overline{BM}=\overline{ME}=\overline{MD},$$

па затоа

$$\measuredangle MDE=\measuredangle MED=\measuredangle ACB.$$

Нека MD ја сече страната AC во точка D_1. Од

$$\measuredangle ADD_1=\measuredangle MDE=\measuredangle ACD,$$

следува дека MD е нормална на AC. Од друга страна, бидејќи O е центар на кружницата опишана околу триаголникот ABC и P е средина на страната AC, добиваме дека OP е нормална на AC. Затоа MD и OP се паралелни.

Слично, бидејќи P е средина на страната AC, имаме $\overline{AP}=\overline{PC}=\overline{DP}$, па оттука $\measuredangle PDC=\measuredangle ACB$. Да земеме дека PD ја сече BE во точка D_2. Бидејќи $\measuredangle BDD_2=\measuredangle PDC=\measuredangle ACB=\measuredangle BED$, заклучуваме дека PD е нормална на BE. Бидејќи M е средна точка на отсечката BE, OM е нормална на BE и оттука OM и PD се паралелени.

Од досега изнесеното следува дека четириаголникот $MOPD$ е паралелограм, па затоа точките M,N и P се колинеарни.

3. Докажи дека

$$(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1})\geq 16,$$

за било кои позитивни броеви a и b такви што $ab\geq 1$.

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за два позитивни реални броја имаме

$$\tfrac{a+1}{2}+\tfrac{2}{a+1}\geq 2\sqrt{\tfrac{a+1}{2}\tfrac{2}{a+1}}\geq 2,$$

од каде што непосредно се добива

$$a+2b+\tfrac{2}{a+1}\geq \tfrac{a+3}{2}+2b=\tfrac{a+4b+3}{2}.$$

На потполно аналоген начин, од истите причини како и претходно имаме

$$b+2a+\tfrac{2}{b+1}\geq 2a+\tfrac{b+3}{2}=\tfrac{b+4a+3}{2}.$$

Понатаму, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и условот $ab\geq 1$ имаме

$$\tfrac{a+4b+3}{2}.\tfrac{b+4a+3}{2}\geq \tfrac{1}{4}(\sqrt{ab}+4\sqrt{ab}+3)^2=\tfrac{64}{4}=16,$$

што требаше да се докаже.

Втор начин. Бидејќи $ab\geq 1$, и од тоа што a и b се позитивни реални броеви, имаме

$$a+b\geq a+\tfrac{1}{a}\geq 2\sqrt{a\tfrac{1}{a}}=2.$$

Сега од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина меѓу четири позитивни реални броја имаме

$$a+2b+\tfrac{2}{a+1}=b+(a+b)+\tfrac{2}{a+1}\geq b+2+\tfrac{2}{a+1}=(b+1)+\tfrac{2}{a+1}+1$$

$$=\tfrac{b+1}{2}+\tfrac{b+1}{2}+\tfrac{2}{a+1}+1\geq 4\sqrt[4]{\tfrac{(b+1)^2}{2(a+1)}}.$$

Потполно аналогно, ако a и b си ги сменат местата во претходното неравенство добиваме

$$b+2a+\tfrac{2}{b+1}\geq 4\sqrt[4]{\tfrac{(a+1)^2}{2(b+1)}}.$$

Од добиените неравенства и со уште една примена на неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина меѓу два реални броја, заедно со неравенството $ab\geq 1$, добиваме

$$(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1})\geq 16\sqrt[4]{\tfrac{(b+1)^2}{2(a+1)}\tfrac{(a+1)^2}{2(b+1)}}=16\sqrt[4]{\tfrac{b+1}{2}\tfrac{a+1}{2}}$$

$$\geq 16\sqrt[4]{\tfrac{2\sqrt{a}}{2}\tfrac{2\sqrt{b}}{2}}=16\sqrt[8]{ab}\geq 16.$$

Трет начин. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$(a+2b+\tfrac{2}{a+1})(b+2a+\tfrac{2}{b+1}) = ((a+b)+b+\tfrac{2}{a+1})((a+b)+a+\tfrac{2}{b+1})$$
$$\geq (a+b+\sqrt{ab}+\tfrac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}})^2.$$

Од друга страна, од неравенството межу аритметичката и геометриската средина следува

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \geq 2$$

и

$$\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \geq \frac{4}{a+b+2},$$

па затоа

$$a+b+\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}} \geq a+b+1+\frac{4}{a+b+2} = \frac{(a+b+1)(a+b-2)}{a+b+2}+4 \geq 4$$

со што е завршен доказот.

4. Нека n е позитивен број. Двајца играчи, Ана и Бојан, ја играат следната игра:
   - Ана избира n реални броеви (меѓу нив може да има и еднакви),
   - Ана на лист хартија ги запишува сите збирови на паровите од избраните броеви и листот му го дава на Бојан (постојат $\frac{n(n-1)}{2}$ вакви збирови и мешу нив може да има еднакви ,
   - Бојан победува ако ги погоди првичните n избрани броеви од Ана со само едно погодување.

   Дали може Бојан да биде сигурен дека ќе победи во следните случаи:
   а) $n=5$ б) $n=6$ в) $n=8$
   Објасни го твојот одговор.
   (На пример, за $n=4$, Ана може да ги избере броевите 1, 5, 7, 9, кои имаат исти по парови суми како и броевите 2, 4, 6, 10, па затоа Бојан не може да биде сигурен дека ќе победи.)
   Решение. а) Да. Нека $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ се броевите избрани од Ана. Бидејќи сите броеви се појавуваат во добиените по парови збирови точно 4 пати, со собирање на сите 10 по парови добиени збирови и делење на резултатот со 4, Бојан го добива збирот $a+b+c+d+e$. Со одземање на најмалиот и најголемиот по парови збир $a+b$ и $d+e$ тој го добива c. Со одземање на c од вториот најголем по парови збир $c+e$ тој го добива e. Одземајќи го e од најголемиот по парови збир $d+e$ тој го добива d. На ист начин може да ги добие и a и b.

б) Да. Нека $a \le b \le c \le d \le e \le f$ се броевите избрани од Ана. Бидејќи сите броеви се појавуваат во добиените по парови збирови точно 5 пати, со собирање на добиените 15 по парови збирови и делење на резултатот со 5, Бојан го добива збирот $a+b+c+d+e+f$. Со одземање на најмалиот и најголемиот добиен по парови збир $a+b$ и $e+f$ тој го добива збирот $c+d$.

Со одземање на најмалиот и вториот најголем по парови збир $a+d$ и $d+f$ од $a+b+c+d+e+f$ тој го добива збирот $c+e$. На сличен начин може да ја добие $b+d$. Тој ги користи нив за да ги добие $a+f$ и $b+e$.

Сега $a+d$, $a+e$, $b+c$ се трите најмали меѓу останатите шест добиени по парови збирови. Ако Бојан ги собере овие три пара и притоа од нив ги одземе $c+d$ и $b+e$ и добиениот резултат го подели со 2, тој го добива a. Потоа тој може да ги одреди останатите броеви.

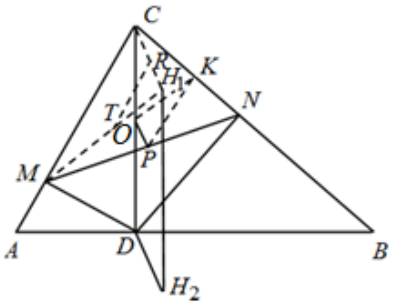
в) Не. Ако Ана ги избере осумте броеви 1, 5, 7, 9, 12, 14, 16, 20, тогаш Бојан не може да биде сигурен дека точно ќе ги погоди осумте броеви, бидејќи броевите 2, 4, 6, 10, 11, 15, 17, 19 ги даваат точно истите 28 по парови збирови како и претходните броеви.

ЈБМО 2014

1. Определи ги сите различни прости броеви p, q и r такви што
$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$
Решение. Прво да забележиме дека ако простите броеви q и r се различни од 3, тогаш $q^2 \equiv r^2 \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$, па левата страна на равенката е конгруентна со 0 по модул 3, што не е можно бидејќи 26 не е делив со 3. Значи, $q = 3$ или $r = 3$.
Прв случај. Нека $q = 3$. Тогаш дадената равенка го добива обликот
$$3p^4 - 4r^2 = 431. \quad (1)$$
Ако $p \neq 5$, од малата теорема на Ферма следува $p^4 \equiv 1 (\mathrm{mod} 5)$, што значи $3 - 4r^2 \equiv 1 (\mathrm{mod} 5)$, односно $r^2 + 2 \equiv 0 (\mathrm{mod} 5)$. Последнта конгруенција не е можна, бидејќи остатоците при делење со 5 на квадратите на природните броеви припаѓаат на множеството $\{0,1,4\}$. Затоа, $p = 5$ и $r = 19$.
Втор случај. Нека $r = 3$. Тогаш дадената равенка го добива обликот
$$3p^4 - 5q^4 = 62. \quad (2)$$
Ако $p \neq 5$, повторно $p^4 \equiv 1 (\mathrm{mod} 5)$ и тогаш $5q^4 \equiv 1 (\mathrm{mod} 5)$, што не е можно.
Конечно, единствено решение на дадената равенка е $p = 5$, $q = 3$, $r = 19$.

2. Даден е произволен триаголник ABC со плоштина S. Нека $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$) и $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Со H_1 и H_2 да ги означиме ортоцентрите на триаголниците MNC и MND, соодветно. Изрази ја плоштината на четириаголникот AH_1BH_2 преку S.
Решение. *Прв начин.* Нека O, P, K, R и T се средините на отсечките CD, MN, CN, CH_1 и MH_1, соодветно. Од $\triangle MNC$ имаме $\overline{PK} = \frac{1}{2}\overline{MC}$ и $PK \| MC$. По аналогија, од $\triangle MH_1C$ имаме дека $\overline{TR} = \frac{1}{2}\overline{MC}$ и $TR \| MC$. Како резултат на тоа, $\overline{PK} = \overline{TR}$ и $PK \| Tl$. Исто така $OK \| DN$ (од $\triangle CDN$) и бидејќи $DN \perp BC$ и $MH_1 \perp BC$, следува дека $TH_1 \| OK$. Бидејќи O е центар на опишаната кружница на $\triangle CMN$, важи $OP \perp MN$.

Затоа, од $CH_1 \perp MN$ следува $OP \| CH_1$. Според тоа, $\triangle TRH_1 \cong \triangle KPO$ (имаат две паралелни страни и $\overline{TR} = \overline{PK}$), па оттука $\overline{RH_1} = \overline{PO}$, т.е. $\overline{CH_1} = 2\overline{PO}$ и $CH_1 \| PO$.



Аналогно, $\overline{DH_2} = 2\overline{PO}$ и $DH_2 \| PO$. Понатаму, од $\overline{CH_1} = 2\overline{PO} = \overline{DH_2}$ и $CH_1 \| PO \| DH_2$, заклучувамне дека четириаголникот CH_1H_2D е паралелограм, па затоа $\overline{H_1H_2} = \overline{CD}$ и $H_1H_2 \| CD$. Оттука плошćтината на четириаголникот AH_1BH_2 е еднаква на $\frac{\overline{AB} \cdot \overline{H_1H_2}}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{2} = S$.

Втор начин. Бидејќи $MH_1 \| DN$ и $NH_1 \| DM$, $MDNH_1$ е паралелограм. Слично, $NH_2 \| CM$ и $MH_2 \| CN$ имплицираат дека $MCNH_2$ е паралелограм. Нека P е средна точка на отсечката $\overline{MN}$. Тогаш $\sigma_P(D) = H_1$ и $\sigma_P(C) = H_2$, па затоа $CD \| H_1H_2$ и $\overline{CD} = \overline{H_1H_2}$. Од $CD \perp AB$ можеме да заклучиме дека $P_{AH_1BH_2} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} = S$.

3. Нека a,b,c се позитивни реалнио броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека

$$(a+\tfrac{1}{b})^2 + (b+\tfrac{1}{c})^2 + (c+\tfrac{1}{a})^2 \geq 3(a+b+c+1).$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин.* Од неравенството меѓу аритметичката (АС) и геометриската средина (ГС), односно неравенството

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

добиваме

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2 + (b+\tfrac{1}{c})^2 + (c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq (a+\tfrac{1}{b})(b+\tfrac{1}{c}) + (b+\tfrac{1}{c})(c+\tfrac{1}{a}) + (c+\tfrac{1}{a})(a+\tfrac{1}{b}) \\ &= (ab+1+\tfrac{a}{c}+a) + (bc+1+\tfrac{b}{a}+b) + (ca+1+\tfrac{c}{b}+c) \\ &= ab+bc+ca+\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{b}+\tfrac{b}{a}+3+a+b+c.\end{aligned}$$

Повторно од неравенството меѓу АС и ГС добиваме

$$ab+\frac{b}{a}\geq 2b,\ bc+\frac{c}{b}\geq 2c \text{ и } ca+\frac{a}{c}\geq 2a.$$

Така,

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq (ab+\tfrac{b}{a})+(bc+\tfrac{c}{b})+(ca+\tfrac{a}{c})+3+a+b+c\\ &\geq 3(a+b+c+1).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

Втор начин. Од неравенството меѓу АС и ГС следува

$$\sqrt{\frac{(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{c})^2+(c+\frac{1}{a})^2}{3}}\geq\frac{a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}}{3}\Leftrightarrow$$

$$(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2\geq\frac{(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a})^2}{3}, \qquad (1)$$

и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=3$, па ако замениме во (1) наоѓаме

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq \frac{(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a})^2}{3}\geq\frac{(a+b+c+3)^2}{3}\\ &=\frac{(a+b+c)(a+b+c)+6(a+b+c)+9}{3}\\ &\geq\frac{(a+b+c)3\sqrt[3]{abc}+6(a+b+c)+9}{3}\\ &=\frac{9(a+b+c)+9}{3}=3(a+b+c+1).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

Трет начин. Користејќи го неравенството $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$ добиваме

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &= a^2+b^2+c^2+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}\\ &\geq ab+ac+bc+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}+\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}.\end{aligned}$$

Јасно,

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{abc}{bc}+\frac{abc}{ca}+\frac{abc}{ab}=a+b+c$$

$$ab+\frac{a}{b}+bc+\frac{b}{c}+ca+\frac{c}{a}\geq 2a+2b+2c$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}\frac{b}{c}\frac{c}{a}}=3$$

Затоа

$$\begin{aligned}(a+\tfrac{1}{b})^2+(b+\tfrac{1}{c})^2+(c+\tfrac{1}{a})^2 &\geq\\ &\geq (ab+\tfrac{a}{b})+(bc+\tfrac{b}{c})+(ca+\tfrac{c}{a})+a+b+c+\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{a}\\ &\geq 2a+2b+2c+a+b+c+3=3(a+b+c+1).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$

Четврт начин. Нека $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$. Имаме

$$(\frac{x}{y}+\frac{z}{y})^2+(\frac{y}{z}+\frac{x}{z})^2+(\frac{z}{x}+\frac{y}{x})^2\geq 3(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+1)$$

$$(x+z)^2x^2z^2+(y+x)^2y^2x^2+(z+y)^2z^2y^2\geq 3xyz(x^2z+y^2x+z^2y+xyz)$$

$$x^4z^2+2x^3z^3+x^2z^4+x^2y^4+2x^3y^3+x^4y^2+y^2z^4+2y^3z^3+y^4z^2\geq$$

$$\geq 3x^3yz^2+3x^2y^3z+3xy^2z^3+3x^2y^2z^2$$

Последното неравенство следува од очигледните неравенства:

1) $x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3\geq 3x^2y^2z^2$.

2) $x^4z^2+z^4x^2+x^3y^3\geq 3x^3z^2y$

3) $x^4y^2+y^4x^2+y^3z^3\geq 3y^3x^2z$

4) $z^4y^2+y^4z^2+x^3z^3\geq 3z^3y^2x$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$,т.е. $a=b=c=1$.

Петти начин. Имаме

$$\sum_{cyc}(a+\tfrac{1}{b})^2\geq 3\sum_{cyc}a+3 \Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\tfrac{a}{b}+\sum_{cyc}(a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a-1)\geq 0$$

$$2\sum_{cyc}\tfrac{a}{b}\geq 6\sqrt[3]{\tfrac{a}{b}\tfrac{b}{c}\tfrac{c}{a}}=6. \qquad (1)$$

Понатаму, за секој $a>0$ важи

$$a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a\geq\tfrac{3}{a}-4 \quad\Leftrightarrow\quad a^4-3a^3+4a^2-3a+1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\quad (a-1)^2(a^2-a+1)\geq 0$$

па затоа

$$\sum_{cyc}(a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a-1)\geq 3\sum_{cyc}\tfrac{1}{a}-15\geq 9\sqrt[3]{\tfrac{1}{abc}}-15=-6 \qquad (2)$$

Сега од неравенствата (1) и (2) следува

$$2\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}(a^2+\tfrac{1}{a^2}-3a-1)\geq 6-6=0.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

4. За природен број n, двајца играчи *A* и *B* ја играат следнава игра: Даден е куп од *s* камчиња, играчите играат наизменично, но *A* игра прв. При секое играње играчот има право да земе или едно камче, или прост број

на камчиња, или $nm, m \in \mathbb{N}$ камчиња. Победник е оној кој ќе го земе последното камче. Под претпоставка дека играчите *A* и *B* играат перфектно, за колку вредности на *s* играчот *A* не може да победи?

Решение. Со k ќе го означиме бараниот број и нека $\{s_1, s_2, ..., s_k\}$ се соодветните вредности на s. Секој s_i ќе го нарекуваме губитници број, а секој друг природен број е победнички број.

Јасно, секој број од видот $nm, m \in \mathbb{N}$ е победнички број

Да претпоставиме дека постојат два различни губитнички броја $s_i > s_j$, кои се конгурентни по модул n. Тогаш во својот прв потег играчот A може да острани $s_i - s_j$ камчиња (бидејќи $n|(s_i - s_j)$), оставајќи куп со s_j камчиња за *B*. Последното противречи на фактот дека броевите s_i и s_j се губитнички. Сега од принципот на Дирихле следува дека постојат најмногу $n-1$ губитнички броеви, т.е. $k \le n-1$.

Да претпоставиме дека постои цел број $r \in \{1, 2, ..., n-1\}$, таков што $mn+r$ е победнички број за секој $m \in \mathbb{N}_0$. Со u да го означиме најголемиот губитнички број (ако $k>0$) или 0 (ако $k=0$), и нека $s = [2, 3, ..., u+n+1]$. Да забележиме дека сите броеви $s+2$, $s+3$, …, $s+u+n+1$ се сложени. Нека земеме $m' \in \mathbb{N}_0$ таков што

$$s+u+2 \le m'n+r \le s+u+n+1.$$

За да $m'n+r$ биде победнички број, мора да постои природен број p, кој е или еден, или прост број или број од видот $nm, m \in \mathbb{N}$, таков што $m'n+r-p$ е губитнички број или 0, и притоа помал или еднаков на u. Бидејќи

$$s+2 \le m'n+r-u \le p \le m'n+r \le s+u+n+1,$$

добиваме p мора да биде сложен, оттука p е делив со n, на пример $p = qn$. Но тогаш

$$m'n+r-p = (m'-q)n+r,$$

по претпоставка мора да биде победнички број. Меѓутоа, ова е спротивно на претпоставката дека сите броеви $mn+r$, $m \in \mathbb{N}_0$ се победнички. Од досега изнесеното следува дека сите ненулти класи по модул n содржат губитнички број.

Од претходно изнесеното следува дека постојат точно $n-1$ губитнички броеви.

ЈБМО 2015

1. Определи ги сите прости броеви *a*, *b*, *c* и природни броеви *k* кои што ја задоволуваат равенката

$$a^2+b^2+16c^2=9k^2+1.$$

Решение. Од $9k^2+1\equiv 1(\mathrm{mod}3)$ следува

$$a^2+b^2+16c^2\equiv 1(\mathrm{mod}3),\ \text{т.е. } a^2+b^2+c^2\equiv 1(\mathrm{mod}3).$$

Бидејќи $a^2\equiv 0,\ 1(\mathrm{mod}3)$, $b^2\equiv 0,\ 1(\mathrm{mod}3)$ и $c^2\equiv 0,\ 1(\mathrm{mod}3)$, добиваме

a^2	0	0	0	0	1	1	1	1
b^2	0	0	1	1	0	0	1	1
c^2	0	1	0	1	0	1	0	1
$a^2+b^2+c^2$	0	1	1	2	1	2	2	0

Од претходната табела следува дека два од трите прости броеви треба да се еднакви на 3.

Прв случај. $a=b=3$. Добиваме

$$a^2+b^2+16c^2=9k^2+1 \quad\Leftrightarrow\quad 9k^2-16c^2=17 \quad\Leftrightarrow$$

$$(3k-4c)(3k+4c)=17 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}3k-4c=1\\3k+4c=17\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}c=2,\\k=3,\end{cases}$$

па едно решение на задачата е $(a,b,c,k)=(3,3,2,3)$.

Втор случај. $c=3$. Јасно, ако $(3,b,3,k)$ е решение на задачата, тогаш и $(b,3,3,k)$ е решение на задачата. Нека $a=3$. Имаме

$$a^2+b^2+16c^2=9k^2+1 \quad\Leftrightarrow$$

$$9k^2-b^2=153 \quad\Leftrightarrow$$

$$(3k-b)(3k+b)=152.$$

Бидејќи броевите $3k-b$ и $3k+b$ се со иста парност, од последната равенка добиваме

$$\begin{cases}3k-b=2\\3k+b=76\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}b=37,\\k=13,\end{cases}$$

и решение е $(a,b,c,k)=(3,37,3,13)$, односно

$$\begin{cases} 3k-b=4 \\ 3k+b=38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=17, \\ k=7, \end{cases}$$

и решение е $(a,b,c,k)=(3,17,3,7)$.

Конечно, дадената равенка има пет решенија и тоа:

$$(3,3,2,3),\ (3,37,3,13),\ (37,3,3,13),\ (3,17,3,7),\ (17,3,3,7).$$

2. Нека *a*, *b*, *c* се позитивни реални броеви, такви што $a+b+c=3$. Определи ја најмалата (минимална) вредност што може да ја има изразот

$$A=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}.$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} A&=\frac{2-a^3}{a}+\frac{2-b^3}{b}+\frac{2-c^3}{c}=2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-(a^2+b^2+c^2) \\ &=\frac{2(ab+bc+ca)}{abc}-(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca) \\ &=2(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{abc}+1\right)-9. \end{aligned}$$

Понатаму, ако во добро познатото равенство

$$(x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$$

ставиме $x=ab, y=bc, z=ca$ и искористиме дека $a+b+c=3$, добиваме:

$$(ab+bc+ca)^2\geq 3abc(a+b+c)=9abc,$$

т.е.

$$ab+bc+ca\geq 3\sqrt{abc}. \qquad (1)$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{1}{abc}+1\geq 2\frac{1}{\sqrt{abc}}. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) добиваме

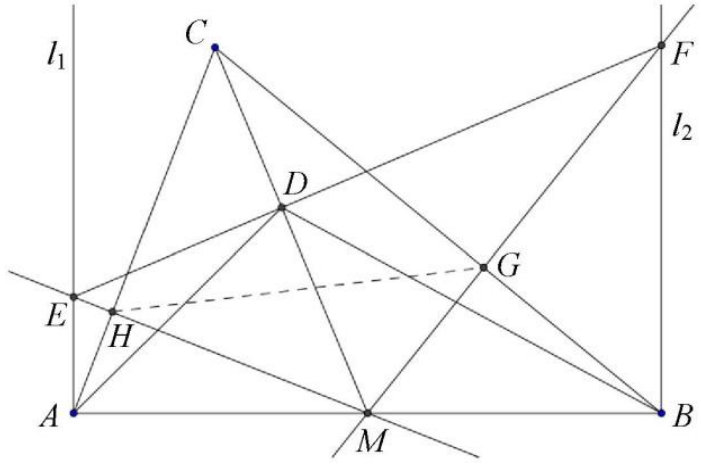
$$A=2(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{abc}+1\right)-9\geq 2\cdot 3\sqrt{abc}\cdot 2\frac{1}{\sqrt{abc}}-9=3$$

т.е. најмалата можна вредност на A е 3 која се достигнува за

$$a=b=c=1.$$

3. Нека *ABC* е остроаголен триаголник. Правите l_1 и l_2 се нормали на *AB* во точките *A* и *B*, соодветно. Нека точката *M* е средина на отсечката *AB*. Нормалите повлечени од точката *M* на правите *AC* и *BC* ги сечат l_1 и l_2 во точките *E* и *F*, соодветно. Ако *D* е пресек на правите *EF* и *MC*, докажи дека $\measuredangle ADB=\measuredangle EMF$.

Решение. Нека F,G се пресечните точки на ME,MF со AC,BC соодветно. Од сличноста на $\triangle MHA$ и $\triangle MAE$ следува $\frac{\overline{MH}}{\overline{MA}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{ME}}$, односно



$$\overline{MA}^2=\overline{MH}\cdot\overline{ME}. \tag{1}$$

Од сличноста на $\triangle MBG$ и $\triangle MFB$ следува $\frac{\overline{MB}}{\overline{MF}}=\frac{\overline{MG}}{\overline{MB}}$, односно

$$\overline{MB}^2=\overline{MF}\cdot\overline{MG}. \tag{2}$$

Но, $\overline{MA}=\overline{MB}$, па затоа од (1) и (2) добиваме $\overline{MH}\cdot\overline{ME}=\overline{MF}\cdot\overline{MG}$, што значи дека точките E,H,G,F лежат на една кружница. Затоа важи

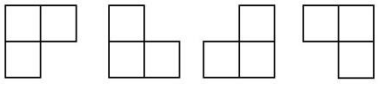
$$\measuredangle FEH=\measuredangle FEM=\measuredangle HGM.$$

Исто така четириаголникот $CHMG$ е тетивен, па важи $\measuredangle CMH=\measuredangle HGC$. Според тоа,

$$\measuredangle FEH+\measuredangle CMH=\measuredangle HGM+\measuredangle HGC=90^\circ,$$

па затоа $CM\perp EF$. Сега, од тетивноста на четириаголниците $FDMB$ и $EAMD$ следува $\measuredangle DFM=\measuredangle DBM$ и $\measuredangle DEM=\measuredangle DAM$. Затоа $\triangle EMF$ е сличен со $\triangle ADB$, од што следува $\measuredangle ADB=\measuredangle EMF$.

4. L-тримино е фигура која може да има еден од четирите облици прикажани на цртежот (секој од нив се состои од 3 единечни квадрати):



Дадена е табла 5×5, која се состои од 25 единични квадрати и неогра-

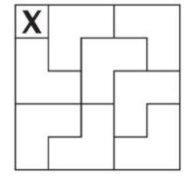
ничен број на L-тримина. Нека k е даден природен број, таков што $k \leq 25$.

Двајца играчи, A и B, ја играат следата игра: играта ја почнува играчот A и наизменично бојат (со иста боја) по еден единичен квадрат, кој што претходно не е обоен. Велиме дека играта е завршена, кога на таблата се обоени вкупно k единечни квадрати.

Велиме дека L-триминатa *добро* ги покриваат необоените единични квадрати на таблата ако тие не се преклопуваат и секое од нив покрива точно три необоени единични квадрати на таблата.

Играчот B победува ако секое *добро* прекривање со L-тримина остава непокриени најмалку три необоени единични квадрати. Најди ја најмалата можна вредност за k за која играчот B има победничка стратегија.

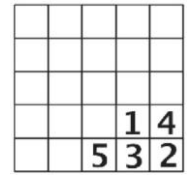
Решение. Ќе докажеме дека играчот A победува ако $k = 1,2,3$, а играчот B победува за $k = 4$. Според тоа, најмалиот k за кој играчот B победува постои и е еднаков на 4.



Ако $k = 1$, тогаш играчот A го бои горниот лев агол на таблата и потоа таблата ја покрива како што е прикажано на цртежот десно.

Ако $k = 2$, тогаш играчот A го бои горниот лев агол на таблата. Потоа без разлика кое поле ќе го обои играчот B, играчот A може да ја покрие таблата на истиот начин како во претходниот случај, со тоа што не поставува L-тримино кое го покрива полето кое го обоил играчот B. Јасно, играчот A победува бидејќи има две непокриени необоени полиња.

За $k = 3$ играчот A ја следи истата стратегија. Кога играчот A треба да го обои второто поле, тој го бои едно од двете необоени полиња кои ги покрива L-триминото кое го покрива полето кое веќе го обоил играчот B.



Ќе докажеме дека за $k = 4$ играчот B има победничка стратегија. Бидејќи има 21 необоено поле, играчот A мора сите да ги покрие со седум L-тримина. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека во првиот чекор играчот A не обоил ниту едно поле во долните два реда на таблата (во спротивно едноставно ќе ја ротираме таблата). Во првиот чекор играчот B го бои квадратот кој на цртежот десно е означен со 1. Ако играчот A во следниот чекот не обои ниту еден од квадратите означени со 2, 3 и 4, тогаш играчот B го бои квадратот 3. Јасно, играчот B победува бидеј-

ќи квадратот 2 останува необоен, но истиот не може да се покрие со L-тримино. Ако играчот A во следниот чекор го обои квадратот 2, тогаш играчот B го бои квадратот 5. Јасно, играчот B победува бидејќи квадратот 3 останува необоен, но истиот не може да се покрие со L-тримино. Конечно, ако во следниот чекор играчот A обои еден од квадратите 3 или 4, тогаш играчот B го бои другиот од овие два квадрати. Јасно, играчот B победува бидејќи квадратот 2 останува необоен, но истиот не може да се покрие со L-тримино.

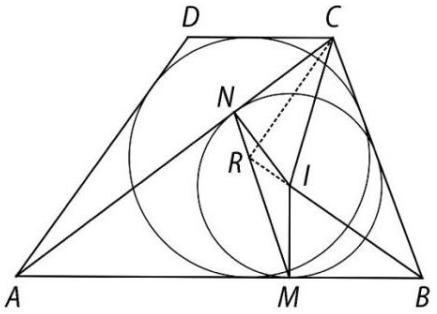
ЈБМО 2016

1. Во трапез $ABCD$ ($AB \| CD, \overline{AB} > \overline{CD}$) може да се впише кружница. Впишаната кружница во триаголникот ABC ја допира страната AB во точката M, а страната AC во точката N. Докажи дека центарот на впишаната кружница во трапезот $ABCD$ лежи на отсечката MN.

Решение. Нека I е центsарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и R е спресекот на отсечките BI и MN. Бидејќи

$$\measuredangle ANM = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle MAN \text{ и}$$

$$\measuredangle BIC = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\measuredangle MAN,$$



четириаголникот $IRNC$ е тетивен. Следува дека $\frac{1}{2}\measuredangle BRC = 90^\circ$, а оттука

$$\measuredangle BCR = 90^\circ - \measuredangle CBR = \measuredangle ANM = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle BCD) = \tfrac{1}{2}\measuredangle BCD.$$

Значи, CR е симетрала на $\measuredangle DCB$, па затоа R е центар на впишаната кружница во четириаголникот.

2. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc} + \frac{8}{(b+c)^2+4abc} + \frac{8}{(c+a)^2+4abc} + a^2+b^2+c^2 \geq \frac{8}{a+3} + \frac{8}{b+3} + \frac{8}{c+3}.$$

Решение. Од $2ab \leq a^2+b^2$ следува дека

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \text{ и } 4abc \leq 2c(a^2+b^2),$$

за секои позитивни реални броеви a,b,c. Ако гиу собереме овие неравенства, добиваме

$$(a+b)^2 + 4abc \leq 2(a^2+b^2)(c+1),$$

па затоа

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc} \geq \frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)^2}.$$

Сега од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)^2} + \frac{a^2+b^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{2}{c+1}} = \frac{4}{\sqrt{2c+1}}$$

и

$$\frac{c+3}{8}=\frac{(c+1)+2}{8}\geq\frac{\sqrt{2(c+1)}}{4},$$

па затоа

$$\frac{8}{(a+b)^2+4abc}+\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{4}{(a^2+b^2)(c+1)^2}+\frac{a^2+b^2}{2}\geq\frac{8}{c+3}.$$

Конечно, бараното неравенство го добиваме ако го собереме последното неравенство со другите две аналогни неравенства.

3. Определи ги сите тројки цели броеви (a,b,c) такви што бројот

$$N=\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{2}+2$$

е степен на бројот 2016.

Решение. Нека a,b,c се цели броеви и n е природен број такви што

$$(a-b)(b-c)(c-a)+4=2\cdot 2016^n.$$

Воведуваме смени $a-b=-x$, $b-c=-y$ и горната равенка го добива видот

$$xy(x+y)+4=2\cdot 2016^n.$$

Ако $n>0$, тогаш десната страна е делива со 7, па затоа последователно добиваме

$$\begin{aligned}&xy(x+y)+4\equiv 0(\mathrm{mod}\,7)\\&3xy(x+y)\equiv 2(\mathrm{mod}\,7(\\&(x+y)^3-x^3-y^3\equiv 2(\mathrm{mod}\,7).\end{aligned}$$

Според малата теорема на Ферма за секој цел број k важи $k^3\equiv -1,0,1\ (\mathrm{mod}\,7)$. Оттука заклучуваме дека во последната конгруенција некој од членовите $x,y,x+y$ мора да е делив со 7. Меѓутоа, оттука следува дека $xy(x+y)$ е делив со 7, што не е можно.

Ако $n=0$, тогаш $xy(x+y)+4=2$, односно $xy(x+y)=-2$. Во овој случај решенија се $(x,y)\in\{(-1,-1),(2,-1),(-1,2)\}$, па затоа бараните тгројки се $(a,b,c)\in\{(k+2,k+1,k),k\in\mathbb{Z}\}$.

4. За табелата 5×5 ќе велиме дека е регуларн ако секое нејзино поле содржи еден од четири различни реални броеви, така што секој од тие броеви се јавува точно еднаш во секој подтабела 2×2. Збирот на сите броеви во регуларна табела се нарекува вкупен збир на табелата. Со

било кои четири броја се направени сите можни регуларни табели и за секоја од нив е пресметан нејзиниот вкупен збир. Определи го максималниот број разлини вредности кои можат да ги имаат вкупните збирови на вака направените табели.

Решение. Ќе докажеме дека максималниот број вкупни збирови е еднаков на 60. Доказот се заснова на следнава лема.

Лема. Во регуларна табела или секоја редица содржи точно два од дадените броеви или секоја колона содржи точно два од дадените броеви.

Доказ. Да претпоставиме дека табелата ја пополнуваме со броевите x,y,z,t. Нека R е редица која содржи најмалку три од дадените броеви. Тогаш во таа редица можеме да најдеме три броја x,y,z на последователни положби во редицата. Според претпоставката дека во секоја подтабела 2×2 секој број се јавува точно еднаш, во редицата на R (ако таква редица постои) точно над броевите x,y,z мора се наоѓаат броевите z,t,x, во овој редослед. Над броевите z,t,x пак мора да се броевите x,y,z, во овој редослед. Ист случај е и ако разгледуваме редици по R (види ја табелата долу).

$$\begin{bmatrix} * & x & y & z & * \\ * & z & t & x & * \\ * & x & y & z & * \\ * & z & t & x & * \\ * & x & y & z & * \end{bmatrix}$$

Пополнувајќи ја целата табела, лесно се гледа дека секоја колона содржи точно два од дадените броеви. ■

Ротирајќи ја табелата, ако тоа е потребно, можеме да претпоставиме дека секоја редица содржи два броја. Ако ги изоставиме првата редица и колона во табрлата, добиваме табела 4×4, која можеме да ја поделиме на 4 подтабели 2×2, во кои секој број се јавува точно еднаш, па вкупниот збир во нив е еднаков на $4(x+y+z+t)$.

Останува да определиме на колку различни начини можеме да ги ставиме броевите во првата редица R_1 и правата колона C_1.

Ако со x_1,y_1,z_1,t_1 го означиме бројот на појавувањата на броевите x,y,z,t, редоследно во R_1 и C_1, тогаш вкупниот збир на броевите во табелата 5×5 е днаков на

$$S=4(x+y+z+t)+xx_1+yy_1+zz_1+tt_1.$$

Ако првата, третата и петтата редица ги содржат броевите x и y, каде x е бројот на положбата $(1,1)$, тогаш втората и четвртата редица ги содржат само броевите z и t, каде со z е означен бројот на позицијата $(2,1)$. Тогаш

$$x_1 + y_1 = 7,\ x_1 \geq 3,\ y_1 \geq 2,\ z_1 + t_1 = 2 \text{ и } z_1 \geq t_1.$$

Тогаш е $\{x_1, y_1\} = \{5,2\}$ или $\{x_1, y_1\} = \{4,3\}$, а соодветните $\{z_1, t_1\} = \{2,0\}$ или $\{z_1, t_1\} = \{1,1\}$.

Според тоа, четворката (x_1, y_1, z_1, t_1) е определена со пермутацијата на една од следниве четворки: $(5,2,2,0), (5,2,1,1), (4,3,2,0), (4,3,1,1)$. Постојат 12 пермутации на четворката $(5,2,2,0)$, 12 пермутации на четворката $(5,2,1,1)$, 24 пермуатации на четворката $(4,3,2,0)$ и 12 пермутации на четворката $(4,3,1,1)$. Според тоа, постојат 60 различни вкупни збирови.

Секоја од овие 60 комбинации навистина може и да се добие: земаме 3 редици *xyxyx* наизменично со *ztztz* за да го добиеме случајот $(5,2,2,0)$, земеме три редици *xyxyx* наизменично со една редица *ztztz* и една редица *tztzt* за да го добиеме случајот $(5,2,1,1)$, земаме 3 редици *xyxyz* наизменично со *ztztx* за да го добиеме случајот $(4,3,2,0)$, земаме 3 редици *xyztx* наизменично со *ztxyz* за да го добиеме случајот $(4,3,1,1)$.

Земајќи, на пример $x = 10^3, y = 10^2, z = 10, t = 1$ можеме сите вкупни збирови да ги направиме различни.

Според тоа, 60 е максималниот моижен број различни вкупни збирови.

ЈБМО 2017

1. Определи ги сите множества кои содржат точно шест последователни природни броеви и чии елементи го задоволуваат условот: производот на некои два броја од множеството собран со производот на некои други два броја од множеството е еднаков на производот на преостанатите два броја од множеството.

   Решение. Точно два од шест броја се деливи со 3 и тие мора да се во ист производ. Во спротивно, два од трите производи кои ги правиме ќе бидат деливи со 3, а третиот нема да биде делив со 3, што не е можно.

   Со n и $n+3$ да ги означиме броевите од множеството кои се деливи со 3. Два од четирите преостанати броја даваат остаток 1 при делење со 3, додека другите два даваат остаток 2. Како и да ги групираме броевите во производи, двата производи ќе бидат конгруентни или со 1 или со 2 по модул 3. Според тоа, производот $n(n+3)$ мора да биде во збирот со уште еден производ.

   Три од шест последователни броја се парни, а три се непарни. Еден од броевите n и $n+3$ е парен, а другиот е непарен, па затоа точно два од преостанатите четири броја се непарни. Бидејќи производот $n(n+3)$ е парен број, двата преостанати непарни броја мора да се во различни производи.

   Можни се следниве три случаи.

   1) Броевите се $n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$. Бидејќи збирот на производите мора да е поголем од $n(n+3)$ единствена можност е
   $$(n-2)(n-1)+n(n+3)=(n+1)(n+2),$$
   од каде добиваме $n=3$. Броевите се $1,2,3,4,5,6$ и притоа важи $1\cdot 2+3\cdot 6=4\cdot 5$.

   2) Броевите се $n-1, n, n+1, n+2, n+3, n+4$. Бидејќи за
   $$(n+4)(n-1)+n(n+3)=(n+1)(n+2)$$
   немаме решение, мора да е $n+4$ на десната страна во производ со број со различна парност. Значи, со $n-1$ или $n+1$. Во случајот
   $$(n+2)(n-1)+n(n+3)=(n+1)(n+4)$$
   имаме решение $n=3$. Броевите се $2,3,4,5,6,7$ и $2\cdot 5+3\cdot 6=4\cdot 7$. Во случајот
   $$(n+2)(n+1)+n(n+3)=(n-1)(n+4)$$
   немаме решение.

3) Броевите се $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$. Имаме три случаи. Прво:

$$(n+1)(n+2)+n(n+3)=(n+4)(n+5)$$

и во овој случај решение е $n=6$. Броевите се $6,7,8,9,10,11$ и $7\cdot 8+6\cdot 9=10\cdot 11$. Потоа

$$(n+2)(n+5)+n(n+3)=(n+1)(n+4)$$

и во овој слчај немаме решение и на крајот

$$(n+1)(n+4)+n(n+3)=(n+2)(n+5)$$

и во овој слчај немаме решение.

2. Нека x, y, z се по парови различни природни броеви. Докажи дека

$$(x+y+z)(xy+yz+zx-2)\geq 9xyz.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Бидејќи x, y, z се различни природни броеви, даденото неравенство е симетрично, па без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x\geq y+1\geq z+2$. Ќе разгледаме два можни случаи.

1) $y\geq z+2$. Од $x\geq y+1\geq z+3$ следува

$$(x-y)^2\geq 1, (y-z)^2\geq 4, (x-z)^2\geq 9,$$

што е еквивалентно со

$$x^2+y^2\geq 2xy+1,\ y^2+z^2\geq 2yz+4,\ x^2+z^2\geq 2xz+9,$$

односно со

$$zx^2+zy^2\geq 2xyz+z,\ zy^2+zz^2\geq 2zyz+4z,\ yx^2+yz^2\geq 2xyz+9y.$$

Со собирање на последните три неравенства добиваме

$$xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\geq 6xyz+4x+9y+z,$$

од каде следува

$$(x+y+z)(xy+yz+zx-2)\geq 9xyz+2x+7y-z.$$

Бидејќи $x\geq z+3$, следува дека $2x+7y-z\geq 0$, па следува и тврдењето на задачата.

2) $y=z+1$. Бидејќи $x\geq y+1=z+2$, добиваме $x\geq z+2$. Со замена на $y=z+1$ во бараното неравенство, добиваме дека треба да докажеме дека

$$(x+2z+1)(x(z+1)+(z+1)z+zx-2)\geq 9x(z+1)z.$$

Последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(x-z-2)(x-z+1)(2z+1)\geq 0,$$

кое бидејќи $x\geq z+2$ е секогаш точно.

Знак за равенство важи само во случајот 2) за $x=z+2$. Според тоа, знак за равенство важи ако и само ако $(x,y,z)=(k+2,k+1,k),\ k\in\mathbb{N}$ и сите пермутации на овие тројки.

3. Нека ABC е остроаголен тгриаголник и нека $\overline{AB}\neq\overline{AC}$. Точката O е центар на опишаната кружница Γ околу $\triangle ABC$. Нека M е средина на страната BC, а D е точка на кружницата Γ таква што $AD\perp BC$. Нека точката T е таква што $BDTC$ е паралелограм и нека Q е точка од иста страна на правата BC како точката A и таква што

$$\measuredangle BQM=\measuredangle BCA \text{ и } \measuredangle CQM=\measuredangle CBA.$$

Нека правата AO по втор пат ја сече кружницата Γ во точката E и нека опишаната кружница околу $\triangle ETQ$ по втор пат ја сече кружницата Γ во точката X. Докажи дека точките A,M и X се колинеарни.

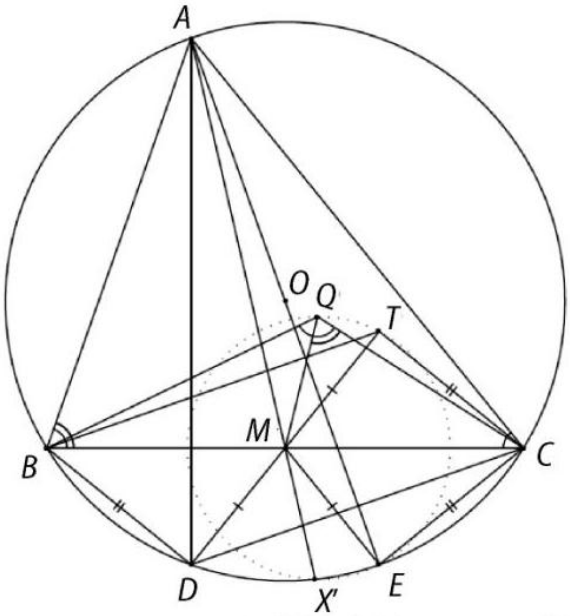
Решение. Нека X' е симетрилната точка на точката Q во однос на правата BC. Бидејќи

$$\measuredangle CBA=\measuredangle CQM=\measuredangle CX'M \text{ и } \measuredangle BCA=\measuredangle BQM=\measuredangle BX'M,$$

добиваме

$$\measuredangle BX'C=\measuredangle BX'M+\measuredangle CX'M=\measuredangle CBA+\measuredangle BCA=180^\circ-\measuredangle BAC$$

од заклучуваме дека $X'\in\Gamma$. Бидејќи $\measuredangle AX'B=\measuredangle ACB=\measuredangle MX'B$ добиваме дека точките A,M,X' се колинеарни.



Понатаму, четириаголникот $DBCE$ е рамнокрак трапез бидејќи

$$\measuredangle DCB = \measuredangle DAB = 90^\circ - \measuredangle ABC = \measuredangle OAC = \measuredangle EAC.$$

Бидејќи $BDTC$ е паралелограм важи $\overline{MT} = \overline{MD}$ и точките M, D, T се колинеарни, $\overline{BD} = \overline{CT}$ и бидејќи $BDEC$ е рамнокрак трапез важи $\overline{BD} = \overline{CE}$ и $\overline{ME} = \overline{MD}$. Исто така, бидејќи

$$\measuredangle BTC = \measuredangle BDC = \measuredangle BED,\ \overline{ME} = \overline{MT} \text{ и } \overline{CE} = \overline{BD} = \overline{CT},$$

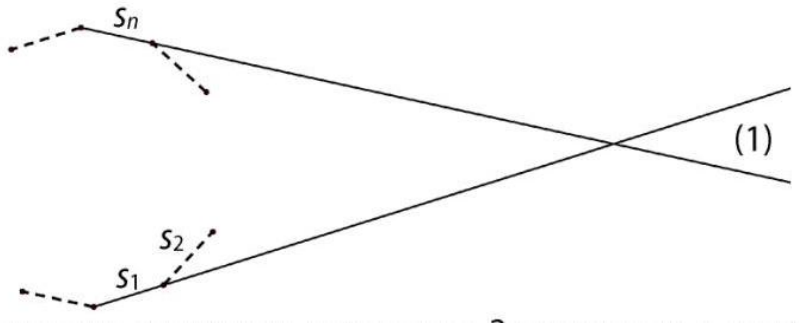
точките E и T се симетрични во однос на правата BC. Бидејќи и точките Q и X' се симетрични во однос на правата BC, четириаголникот $QX'ET$ е рамнокрак трапез, па затоа точките Q, X', E, T се конециклични. Бидејќи $X' \in \Gamma$, тоа значи дека $X \equiv X'$, па затоа точките A, M, X се колинеарни.

4. Нека P е правилен многуаголник во рамнината со $2n$ страни (да го означиме со $A_1A_2...A_{2n}$) каде n е природен број. Ќе велиме дека точката S која лежи на страна на многуаголникот P се гледа од точката E, која е надвор од многуаголникот P, ако отсечката SE не содржи други точки од многуаголникот освен точката S. Страните на многуаголникот P треба да се обојат во три различни бои така што секоја страна е обоена точно со една боја и секоја боја е употребена најмалку еднаш (темињата на многуаголникот ги занемаруваме, нив не ги боиме). Исто така од секоја точка во рамнината која е надвор од многуаголникот P треба да се гледаат точки на страните на тој многуаголник кои се обоени во најмногу две различни бои. На колку различни начини може да се изврши вакво боење (две боења се различни ако најмалку една иста страна на многуаголникот е обоена со друга боја во тие боења)?

Решение. За $n = 2$ одговор е 36, за $n = 3$ одговор е 30, а за $n \geq 4$ одговор е $6n$.

Лема 1. Во рамнината е даден правилен многуаголник со $2n$ страни и да означиме n негови последователни страни редоследно со $s_1, s_2, ..., s_n$. Во рамнината постои точка Q, надвор од дадениот многуаголник, таква што од неа може да се види бојата на секоја од страните $s_1, s_2, ..., s_n$.

Доказ. Страните s_1 и s_n на многуаголникот не се паралелни, па затоа правите определени со ови страници се сечат. Бараната точка Q може да биде било која точка во областа (1) на долниот цртеж. ■



Лема 2. Во рамнината е даден правилен многуаголник со $2n$ страни и да означиме $n+1$ негови последователни страни редоследно со $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$. Во рамнината не постои точка Q, надвор од дадениот многуаголник, таква што од неа може да се види бојата на секоја од страните $s_1, s_2, \ldots, s_{n+1}$.

Доказ. Бидејќи страните s_1 и s_{n+1} се паралелни, во рамнината надвор од многуаголникот не постои точка од која и двете може да се видат. Од ова следува тврдењето на лемата. ■

Ќе ги разгледаме случаите $n=2$, $n=3$ и $n\geq 4$.

За $n=2$, P е квадрат. Две страни ќе бидат со иста боја. Треба да ги избереме овие две страни (тоа може да се направи на $\frac{4\cdot 3}{2}=6$ начини) и потоа согласно изборот да направи боење. Вкупниот број можности е $6\cdot 3\cdot 2=36$.

За $n=3$, P е шестаголник. Страните да ги означиме последователно со $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Мора да има две последователно страни кои се обоени со различни бои. Нека, на пример, страната a_1 е обоена со црвена, а страната a_2 е обоена со сина боја. Мора да постои и страна обоена, на пример, со зелена боја, а тоа може да бидат само страните a_4 или a_5. Имаме три можности:

1) a_4 е зелена, а a_5 не е. Тогаш со елеминација заклучуваме дека a_3, a_5 и a_6 мора да се сини.
2) a_4 и a_5 се зелени. Тогаш a_6 е црвена, а a_3 е сина.
3) a_5 е зелена, а a_4 не е. Тогаш со елеминација заклучуваме дека a_3, a_5 и a_6 мора да се црвени.

Според тоа, имаме два вида боења.

i) Две спротивни страни се обоени содве различни бои, а сите преоста-

нати сотрета боја. Ова може да се направи на $3\cdot(3\cdot 2\cdot 1)=18$ начини (прво бираме пар спротивни страни, а потоа доделуваме бои).

ii) Три пара последователни страни се обоени секоја со по една, различна, боја. Ова може да се направи на 12 начини.

Значи, за $n=3$, одговорот е $18+12=30$.

Сега ќе го определиме бројот на начините за $n\geq 4$. Според лемата 1, секои 4 последователни страни може да се видат од некоја точка надвор од многуаголникот P. Страните на многуаголникот да ги означиме со $a_1,a_2,...,a_{2n}$. Повторно мора да постојат две соседни странисо различни бои. Нека претпоставиме дека a_1 е обоена сино, а a_2 е обоена црвено. Според лемата 1, со зелена боја може да биде обоена само страната a_{n+1} или a_{n+2}. Имаме две можности:

1) a_{n+1} е зелена. Според лемата 1, a_n мора да биде црвена (во спротивно страните $a_2,a_3,...,a_{n+1}$ ќе бидат обоени со три бои.

   Ако страната a_{n+2} е црвена, такви се и страните $a_{n+3},...,a_{2n}$, па затоа бараното боење е a_1 е сина, a_{n+1} е зелена и сите преостанати се црвени.

   Ако страната a_{n+2} е зелена:

   - a_{n+3} не може да е зелена, бидејќи страните $a_{n+3},...,a_{2n},a_1,a_2$ ќе бидат обоени во три бои,
   - a_{n+3} не може да е сина, бидејќи страните $a_n,...,a_{n+3}$ ќе бидат обоени во три бои,
   - a_{n+3} не може да е црвена, бидејќи страните $a_{n+2},...,a_{2n}$ ќе бидат обоени во три бои.

   Според тоа, страната a_{n+2} не може да биде зелена.

2) Случајот кога a_{n+2} е зелена се разгледава на ист начин како случајот 1)

Од претходно изнесеното следува дека единствен начин на боење за $n\geq 4$ е таков што две спротивни страни се обоени со две различни бои, а исте преостанати страни се обоени со третата боја. Изборот на страните може да се направи на n начини, а боите на $3\cdot 2\cdot 1=6$ начини, па затоа во овој случај вкупниот број на боења е $6n$.

ЈБМО 2018

1. Определи ги сите парови од цели броеви (m,n) кои ја задоволуваат равенката

$$m^5 - n^5 = 16mn.$$

Решение. Ако еден од m или n е 0, тогаш и другиот мора да е 0 и $(m,n)=(0,0)$ е едно решение. Ако $mn \neq 0$, нека $d=(m,n)$ и $m=da$, $n=db$, $a,b \in \mathbb{Z}$ така што $(a,b)=1$. Тогаш дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$d^3a^5 - d^3b^5 = 16ab \qquad (1).$$

Од горната равенка заклучуваме дека $a \mid d^3b^5$, од каде $a \mid d^3$. Слично се покажува дека $b \mid d^3$. Бидејќи $(a,b)=1$, добиваме $ab \mid d^3$, па можеме да запишеме $d^3 = abr$ за $r \in \mathbb{Z}$. Тогаш, од равенката (1) добиваме

$$abra^5 - abrb^5 = 16ab$$
$$r(a^5 - b^5) = 16.$$

Според тоа, разликата $a^5 - b^5$ мора да е делител на 16, што значи дека

$$a^5 - b^5 = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16.$$

Ако $|a^5 - b^5| = 1$, тогаш $a = \pm 1$ и $b = 0$ или $a = 0$ и $b = \pm 1$, што е контрадикција. Ако $|a^5 - b^5| = 2$, тогаш $a = 1$ и $b = -1$ или $a = -1$ и $b = 1$. Тогаш $r = -8$, и $d^3 = -8$, т.е. $d = -2$. Според тоа, $(m,n) = (-2,2)$. Ако $|a^5 - b^5| > 2$, тогаш без губење на општоста можеме да земеме дека $a > b$ и $a \geq 2$. Ставаме $a = x+1$ за $x \geq 1$ и добиваме

$$\begin{aligned} |a^5 - b^5| &= |(x+1)^5 - b^5| \\ &\geq |(x+1)^5 - x^5| \\ &= |5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1| \geq 31 \end{aligned},$$

што не е можно. Според тоа, единствените решенија се $(m,n)=(0,0)$ или $(-2,2)$.

2. Нека n трицифрени броеви ги задоволуваат следните својства:
(1) Ниту еден број не ја содржи цифрата 0.
(2) Збирот на цифрите на секој број е 9.

(3) Цифрите на единиците на било кои два броја се различни.
(4) Цифрите на десетките на било кои два броја се различни.
(5) Цифрите на стотките на било кои два броја се различни.
Определи ја најголемата можна вредност за n.

Решение. Нека *S* го означува множеството од трицифрените броеви кои имаат збир на цифрите 9 и ниту една од нив не е 0. Најпрво ќе го определиме бројот на елементите на множеството *S*. Секој елемент на S може да се добие од 111 со низа од 6 букви *A* (што значи дека додаваме 1 на соодветната цифра) и 2 букви G (што значи одиме на наредната цифра). На пример бројот 324 може да се добие од 111 со низата AAGAGAAA. Постојат вкупно $\frac{8!}{6!\cdot 2!}=28$ такви зборови, односно *S* содржи 28 броеви. Сега, од условите (3), (4), (5), ако $\overline{abc}$ е во бараното множество *T*, тогаш секој од броевите од облик $\overline{**c}$, $\overline{*b*}$ и $\overline{a**}$ не може да биде во T. Бидејќи има $a+b-2$ броја од првиот тип, $a+c-2$ од вториот и $b+c-2$ од третиот, вкупно од сите три типа има

$$(a+b-2)+(b+c-2)+(c+a-2)=2(a+b+c)-6=2\cdot 9-6=12$$

различни броја кои не може да се во *T* ако $\overline{abc}$ е во T. Според тоа, ако *T* има *n* броеви, тогаш 12*n* броеви од *S* не се дозволени. Но, секој број од *S* може да биде забранет не повеќе од три пати, по еднаш за секоја негова цифра, од каде следува $n+\frac{12n}{3}\le 28$, т.е. $n\le\frac{28}{5}$. Бидејќи n е цел број, добиваме $n\le 5$. За $n=5$ можеме да го земеме множеството

$$T=\{144,252,315,423,531\}.$$

Забелешка. Бројот на елементите на множеството *S* може да се пресмета на повеќе начини. За бројот на решенијата на равенката

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=n$$

во множеството на природни броеви, каде редоследот на x_i е важен, е познато дека е еднаков на $\binom{n-1}{k-1}$. Во нашиот случај сакаме да го изброиме бројот на решенија на равенката $a+b+c=9$ во множеството природни броеви. Според горната дискусија, $\binom{9-1}{3-1}=28$. Користејќи го општиот резултат од погоре, можеме исто така да покажеме дека постојат $a+b-2$ броја од облик $\overline{**c}$.

3. Нека $k>1$ е природен број и $n>2018$ е непарен природен број. Ненултите рационални броеви $x_1,x_2,\ldots,x_n$ се такви што не се сите еднакви

меѓу себе и ги задоволуваат равенствата

$$x_1+\frac{k}{x_2}=x_2+\frac{k}{x_3}=x_3+\frac{k}{x_4}=\ldots=x_{n-1}+\frac{k}{x_n}=x_n+\frac{k}{x_1}.$$

Определи:

а) го производот $x_1x_2\ldots x_n$ како функција од k и n,

б) ја најмалата вредност на k за која постојат $n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ кои ги исполнуваат дадените услови.

Решение. а) Ако $x_i=x_{i+1}$ за некој i (по претпоставка дека $x_{n+1}=x_1$), тогаш од дадените равенства следува дека сите x_i се еднакви, што претставува контрадикција. Според тоа, $x_1\neq x_2$ и $x_1-x_2=k\frac{x_2-x_3}{x_2x_3}$.

Аналогно добиваме

$$x_1-x_2=k\frac{x_2-x_3}{x_2x_3}=k^2\frac{x_3-x_4}{(x_2x_3)(x_3x_4)}=\ldots=k^n\frac{x_1-x_2}{(x_2x_3)(x_3x_4)\ldots(x_1x_2)}.$$

Бидејќи $x_1\neq x_2$ добиваме $x_1x_2\ldots x_n=\pm\sqrt{k^n}=\pm k^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{k}$. Ако една од овие две вредности, позитивна или негативна, е достигната, тогаш другата ќе биде исто така достигната со промена на знаците на сите x_i бидејќи n е непарен број.

б) Од претходниот резултат, бидејќи n е непарен број, заклучуваме дека k е точен квадрат, од каде $k\geq 4$. За $k=4$ нека $n=2019$ и

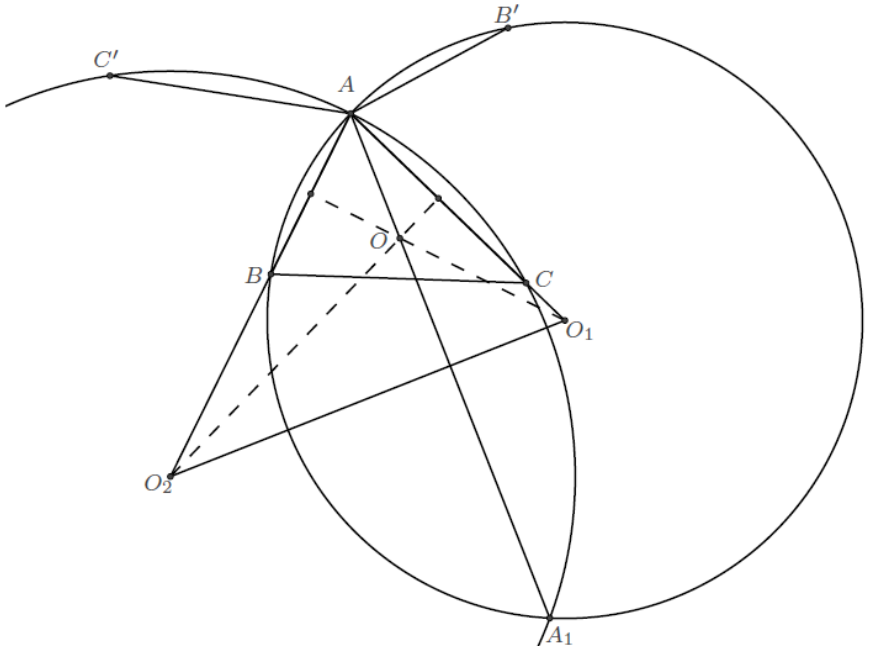
$$x_{3j}=4, x_{3j-1}=1, x_{3j-2}=-2 \text{ за } j=1,2,\ldots,673.$$

Според тоа, бараната најмала вредност е $k=4$.

Забелешка. Постојат повеќе начини на кои може да се конструира пример кога $k=4$ и $n=2019$. Бидејќи $3\mid 2019$, идејата е да најдеме три броеви x_1, x_2, x_3, не сите еднакви меѓу себе кои ги задоволуваат дадените равенства и да ги повториме како вредности за останатите x_i. Според тоа, сакаме да најдеме x_1, x_2, x_3 такви што $x_1+\frac{k}{x_2}=x_2+\frac{k}{x_3}=x_3+\frac{k}{x_4}$. Од претходната дискусија $x_1x_2x_3=\pm 8$. Нека претпоставиме, без губење на општоста, дека $x_1x_2x_3=-8$. Тогаш со решавање на горниот систем гледаме дека ако $x_1\neq 2$, тогаш $x_2=-\frac{4}{x_1-2}$ и $x_3=2-\frac{4}{x_1}$, што води до бесконечно многу решенија. Примерот во официјалното решение е добиен за $x_1=-2$.

4. Нека ABC е остроаголен триаголник, A', B' и C' се симетричните точки на темињата A, B и C во однос на правите BC, CA и AB, соодветно и нека кружниците опишани околу триаголниците ABB' и ACC' по втор пат се сечат во точката A_1. Точките B_1 и C_1 се аналогно дефинирани. Докажи дека правите AA_1, BB_1 и CC_1 имаат една заедничка точка.

Решение. Нека O_1, O_2 и O се центрите на опишаните кружници околу ABB', ACC' и ABC, соодветно. Бидејќи AB е симетрала на отсечката CC', O_2 е пресекот на симетралата на отсечката AC со AB. Слично, O_1 е пресекот на симетралата на отсечката AB со AC. Следува дека O е ортоцентар на триаголникот AO_1O_2. Според тоа, AO е нормална на O_1O_2. Од друга страна, AA_1 е заедничка тетива за двете кружници, од каде следува дека е нормална на O_1O_2. Добиваме дека AA_1 минува низ O. Слично се покажува дека BB_1 и CC_1 минуваат низ O, од каде следува дека трите прави минуваат низ точката O.



Забелешка. Ќе дадеме и друг пристап. Најпрво покажуваме дека A_1, B и C' се колинеарни. Навистина, бидејќи

$$\measuredangle BAB' = \measuredangle CAC' = 2\measuredangle BAC,$$

тогаш од кружниците (ABB') и (ACC') добиваме

$$\sphericalangle AA_1B = \frac{\sphericalangle BA_1B'}{2} = \frac{180^\circ - \sphericalangle BAB'}{2} = 90^\circ - \sphericalangle BAC = \sphericalangle AA_1C'.$$

Следува дека

$$\sphericalangle A_1AC = \sphericalangle A_1C'C = \sphericalangle BC'C = 90^\circ - \sphericalangle ABC \quad (1).$$

Од друга страна, ако O е центар на опишаната кружница околу ABC, тогаш

$$\sphericalangle OAC = 90^\circ - \sphericalangle ABC \quad (2).$$

Од (1) и (2) заклучуваме дека A_1, A и O се колинеарни. Слично се покажува дека BB_1 и CC_1 минуваат низ O, од каде следува дека трите прави минуваат низ точкат O.

ЈБМО 2019

1. Определи ги сите прости броеви p такви што постојат природни броеви x, y, z такви што бројот

$$x^p + y^p + z^p - x - y - z$$

е производ на точно три различни прости броја.

Решение. Да забележиме дека простите броеви 2, 3 5 се решенија на задачата бидејќи за (x, y, z) можеме соодветно да ги земеме тројките $(1,1,6)$, $(1,2,3)$, $(1,1,2)$ при што во сите три случаи вредноста на дадениот израз е еднаква на $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Ќе докажеме дека тоа се единствените решенија. Нека $p > 5$. Според малата теорема на Ферма имаме

$x^p - x \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, $x^p - x \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$, $x^p - x \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$

(слично за y и z), па затоа

$$x^p + y^p + z^p - x - y - z \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 6p).$$

Сега, од условот на задачата следува дека мора да биде

$$x^p + y^p + z^p - x - y - z = 6p.$$

Бидејќи барем еден од броевите x, y, z е поголем од 1, да кажеме $x \geq 2$, добиваме

$$x^p + y^p + z^p - x - y - z \geq x^p - x = x(x^{p-1} - 1) \geq 2(2^{p-1} - 1) = 2^p - 2.$$

Но, зсо математичка индукција може да се докаже дека за $p \geq 7$ важи

$$2^p - 2 > 6p.$$

Според тоа, за $p > 5$ бројот $6p = 2 \cdot 3p$ е вистински делител на бројот $x^p + y^p + z^p - x - y - z$, па затоа овој број во случајов не може да биде производ на точно три прости броја.

2. Нека a, b се два различни цели броја и c е позитивен реален број таков што важи

$$a^4 - 2019a = b^4 - 2019b = c.$$

Докажи дека

$$-\sqrt{c} < ab < 0.$$

Решение. Со одземање на дадените равенства добиваме

$$2019(a-b)=a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2),$$

па како $a\neq b$, добиваме дека важи

$$2019=(a+b)(a^2+b^2).$$

Јасно, $a+b>0$.

Со собирање на дадените равенства добиваме

$$\begin{aligned}2c&=a^4+b^4-2019(a+b)=a^4+b^4-(a+b)^2(a^2+b^2)\\&=-2ab(a^2+ab+b^2)>0.\end{aligned}\tag{1}$$

Од последното неравенство следува $a\neq 0, b\neq 0$, па како

$$a^2+ab+b^2=(a+\tfrac{1}{2}b)^2+\tfrac{3}{4}b^2>0,$$

од (1) добиваме $ab<0$.

Понатаму,

$$a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab>-ab,$$

па затоа од (1) следува

$$-c=ab(a^2+ab+b^2)<-(ab)^2,$$

односно $c>(ab)^2$, па затоа

$-\sqrt{c}<ab<\sqrt{c}$.

Со тоа и второто неравенство е докажано.

3. Во триаголникот $ABC, \overline{AB}<\overline{AC}$ симетралата на страната BC ги сече правите AB и AC во точките P и Q, соодветно. Нека H е ортоцентарот на $\triangle ABC$, а M и N се средините на отсечките BC и PQ, соодветно. Докажи дека правите HM и AN се сечат на кружницата опишана околу $\triangle ABC$.

Решение. Јасно,

$$\sphericalangle APQ=\sphericalangle BPM=90^\circ-\sphericalangle MBP=90^\circ-\sphericalangle CBA=\sphericalangle HCB,$$

$$\sphericalangle AQP=\sphericalangle MQC=90^\circ-\sphericalangle QCM=90^\circ-\sphericalangle ACB=\sphericalangle CBH,$$

од каде следува слечноста на триаголниците APQ и HCB. Бидејќи M и N се соодветно средини на страните BC и PQ триаголниците AQN и HBM се исто така слични. Според тоа, важи

$$\sphericalangle ANQ=\sphericalangle HMB.$$

Со L да ја означиме пресечната точка на правите AN и HM. Тогаш

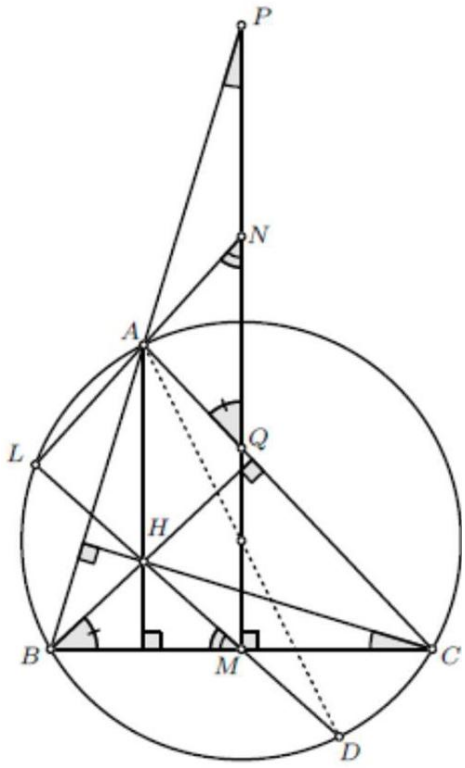
важи

$$\begin{aligned}\measuredangle MNL &= 180^\circ - \measuredangle LNM - \measuredangle NML \\ &= 180^\circ - \measuredangle LMB - \measuredangle NML \\ &= 180^\circ - \measuredangle NMB = 90^\circ.\end{aligned}$$

Нека D е точката на опишаната кружница околу триаголникот ABC дијаметрално спротивна на темето A. Познато е дека M е средина на отсечката HD, па затоа точките L, H, M, D се колинеарни и важи

$$\measuredangle DLA = \measuredangle MLA = \measuredangle MLN = 90^\circ.$$

Според тоа, AD е дијаметар на кружницата опишана околу триаголникот ABC и $\measuredangle DLA = 90^\circ$, па заклучуваме дека точката L припаѓа на кружницата опишана околу триаголникот ABC, што и требаше да се докаже.



4. Табла 5×100 е поделена на 500 единечни квадрати (полиња), од кои n се обоени со црбна боја, додека останатите квадрати се бели. Два единечни квадрати се соседни ако имаат заедничка страна. Ако секое поле на таблата има најмногу две соседни црни полиња, определи ја најголемата можна вредност на n.

Решение. За секое поле на дадената табла го разгледуваме бројот на црните полиња кои се соседни на тоа поле. Со S да го означиме бројот на таквите соседи за сите 500 полиња. Од условот на задачата следува

$$S \le 2 \cdot 500 = 1000.$$

Секое црно поле кое се наоѓа во агол на таблата е соседно на точно две полиња и со тоа истото во збирот S допринесува за 2. Црните полиња кои се на границата на дадената табла, а не се во аглите, имаат точно три соседни полиња, па во S секое од нив допринесува за 3. Црните полиња кои се наоѓаат во внатрешноста на дадената табла имаат точно 4 соседни полиња, па во S секое од нив допринесува за 4. Броевите на овие црни полиња да ги означиме со a, b, c. Од претходните разгледу-

вања следува

$$S = 2a + 3b + 4c, \quad a \le 4, b \le 202, c \le 294.$$

При овие услови треба да се определи најголемата можна вредност на изразот

$$n = a + b + c.$$

Забележуваме дека ако a го зголемиме за 1, а c го намалиме за 1, тогаш збирот $a+b+c$ не се менува, додека збирот S се намалува за 2. Слично, ако го зголемиме b за 1, а го намалиме c за 1, тогаш збирот $a+b+c$ не се менува, додека збирот S се намалува за 1. Според тоа, најголемата можна вредност на збирот $a+b+c$ се достигнува кога a и b примаат најголема можни вредности. А тоа е $a = 4, b = 202$. Тогаш

$4c \le 1000 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 202 = 386$, т.е. $c \le 96$.

Притоа имаме

$$n \le 4 + 202 + 96 = 302.$$

Останува да покажеме дека постои боење на таблата за кое $n = 302$. Ако сите рабни полиња на таблата ги обоиме во црно, добиваме $a = 4, b = 202$. Преостанува уште да обоиме $c = 96$ полиња во средниот ред на таблата во црно, без полињата во првата и полсената колона (кои веќе се обоени во црно) и полињата во втората и претпоследната колона кои остануваат бели. Со ова доказот е завршен.

Забелешка. а) Може да се докаже дека боењето при кое $n = 302$ е единствено.

б) Горното боење, во случај кога имаме табла со димензии 5×8 е прикажано на цртежот десно. Притоа $n = 4 + 18 + 4 = 26$.

ЈБМО 2020

1. Определи ги сите тројки реални броеви (a,b,c) такви што:

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, \\ a^2+b^2+c^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}. \end{cases} \tag{1}$$

Решение. Јасно, ако (a,b,c) е решение на системот (1), тогаш и тројката $(-a,-b,-c)$ е решение на (1). Затоа можеме да претпоставиме дека $abc>0$. Од првата равенка на (1) добиваме

$$a+b+c=\frac{ab+bc+ca}{abc}. \tag{2}$$

Понатаму,

$$(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2-(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}),$$

од каде добиваме

$$ab+bc+ca=\frac{a+b+c}{abc}. \tag{3}$$

Прво ќе докажеме дека $a+b+c$ и $ab+bc+ca$ се различни од 0. Нека го претпоставиме спротивното дека од (2) и (3) следува

$$a+b+c=ab+bc+ca=0.$$

Тогаш имаме

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=0,$$

па затоа $a=b=c=0$, што е противречност. Сега, ако ги помножиме (2) и (3), добиваме

$$(a+b+c)(ab+bc+ca)=\frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{(abc)^2},$$

од каде следува $(abc)^2=1$ и како претпоставивме дека $abc>0$, добиваме $abc=1$. Според тоа, релациите (2) и (3) последователно го добиваат видот

$$\begin{aligned} &a+b+c=ab+bc+ca \\ &abc-ab-bc-ca+a+b+c-1=0 \\ &(a-1)(b-1)(c-1)=0. \end{aligned}$$

Од последното равенство следува дека најмалку еден од броевите a,b,c е еднаков на 1. Нека $c=1$. Ако замениме во $a+b+c=ab+bc+ca$, добиваме $a+b+1=ab+b+a$, односно $ab=1$. Сега, ако земиме $a=t$, тогаш $b=\frac{1}{t}$ и добиваме дека решенија на задачата се подредените

тројки $(t,\frac{1}{t},1), t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Понатаму, од почетните разгледувања следува дека решенија се и подредените тројки $(t,\frac{1}{t},-1), t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Според тоа, решенија на системот (1) се подредените тројки

$$(t,\tfrac{1}{t},1),(t,\tfrac{1}{t},-1), t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

и сите нивни пермутации.

2. Даден е правоаголен $\triangle ABC$, $\measuredangle BAC=90^\circ$. Нека E е подножјето на нормалата повлечена од темето A на страната BC. Нека $Z\neq A$ е точка од правата AB таква што $\overline{AB}=\overline{BZ}$. Нека (c) е кружницата опишана околу $\triangle AEZ$. Нека D е втората пресечна точка на (c) и ZC и нека F е дијаметрално спротивната точка на D во кружницата (c). Точката P е пресекот на правите FE и CZ. Ако тангентата на (c) во Z ја сече PA во T, докажи дека точките T,E,B,Z се конциклични.

Решение. Прво ќе докажеме дека PA е тангента на (c) во A.

Бидејќи E,D,Z,A се конциклични, добиваме

$$\measuredangle EDC=\measuredangle EAZ=\measuredangle EAB.$$

Затоа $\triangle ABC$ и $\triangle EBA$ се слични. Според тоа, $\measuredangle EAB=\measuredangle BCA$, па затоа $\measuredangle EDC=\measuredangle BCA$. Бидејќи $\measuredangle FED=90^\circ$, важи $\measuredangle PED=90^\circ$ и затоа

$$\measuredangle EPD=90^\circ-\measuredangle EDC=90^\circ-\measuredangle BCA=\measuredangle EAC.$$

Затоа точките E,A,C,P се конциклични. Тоа значи дека $\measuredangle CPA=90^\circ$ и затоа триаголникот PAZ е правоаголен. Но, B е средина на AZ, па затоа $\overline{PB}=\overline{AB}=\overline{BZ}$ и така $\measuredangle ZPB=\measuredangle PZB$.

Освен тоа $\measuredangle EPD=\measuredangle EAC=\measuredangle CBA=\measuredangle EBA$, од каде следува дека точките P,B,E,Z се исто така конциклични.

Сега, забележуваме дека

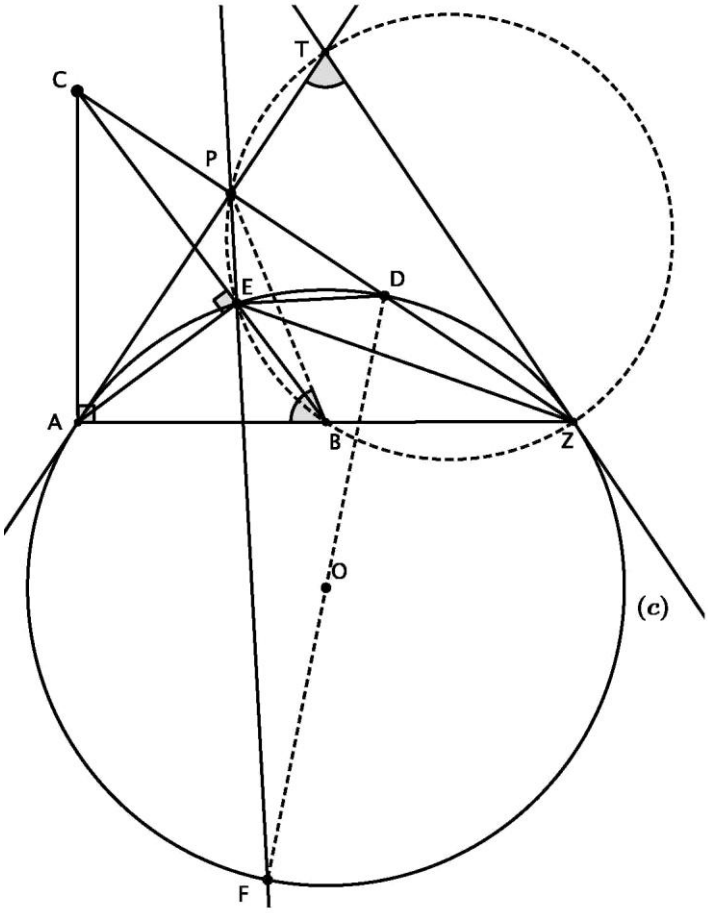
$$\measuredangle PAE=\measuredangle PCE=\measuredangle ZPB-\measuredangle PBE=\measuredangle PZB-\measuredangle PZE=\measuredangle EZB,$$

па затоа PA е тангента на (c) во A.

Понатаму, добиваме дека $\overline{TA}=\overline{TZ}$. Затоа

$$\begin{aligned}\measuredangle PTZ&=180^\circ-2\measuredangle TAB=180^\circ-2(\measuredangle PAE+\measuredangle EAB)\\&=180^\circ-2(\measuredangle ECP+\measuredangle ACB)\\&=180^\circ-2(90^\circ-\measuredangle PZB)=2\measuredangle PZB\\&=\measuredangle PZB+\measuredangle BPZ=\measuredangle PBA\end{aligned}$$

од каде следува дека точките T,P,B,Z се конциклични и бидејќи точките P,B,E,Z заклучуваме дека точките T,E,B,Z се конциклични.



3. Ана и Бојан ја играт следнава игра.
Ана избира множество $A=\{1,2,...,n\}$ за некој природен број $n\geq 2$. Потоа, почнувајќи од Бојан, тие наизменично избираат по еден број од множеството A при што се исполнети следниве услови: на почеток Бојан избира произволен број, потоа бројот кој се избира во секој следен чекор мора да е различен од сите претходно избрани броеви и да се разликува за 1 од некој веќе избран број. Играта завршува кога сите броеви од множеството A ќе бидат избрани. Ана победува ако збирот на сите броевиу кои таа ги избрала е сложен број, а во спротивно победува Бојан. Кој има победничка стратегија?
Решение. Да се каже дека Ана има победничка стратегија, тоа значи

дека таа може да најде број n со кој ќе го формира множеството A така што ќе може соодветно да одговори на сите избори на Бојан и секогаш на крајот збирот на броевите кои ги избрала да биде сложен број. Ако таков број n не постои, тоа ќе значи дека Бојан има победничка стратегија.

Ана може прво да се обиде да ги провери малите вредности на n. Навистина, ова ја дава следната победничка стратегија за неа: таа првично избира $n=8$ и одговара на сите можни избори направени од Бојан како што е прикажано во листата подолу (во секој ред алтернативно се дадени изборите на Бојан и Ана, почнувајќи од Бојан):

1 2 3 4 5 6 7 8
2 3 1 4 5 6 7 8
2 3 4 1 5 6 7 8
3 2 1 4 5 6 7 8
3 2 4 5 1 6 7 8
3 2 4 5 6 1 7 8
4 5 3 6 2 1 7 8
4 5 3 6 7 8 2 1
4 5 6 7 3 2 1 8
4 5 6 7 3 2 8 1
4 5 6 7 8 3 2 1
5 4 3 2 1 6 7 8
5 4 3 2 6 7 1 8
5 4 3 2 6 7 8 1
5 4 6 3 2 1 7 8
5 4 6 3 7 8 2 1
6 7 5 4 3 8 2 1
6 7 5 4 8 3 2 1
6 7 8 5 4 3 2 1
7 6 8 5 4 3 2 1
7 6 5 8 4 3 2 1
8 7 6 5 4 3 2 1

Лесно се проверува дека во секој ред збирот на броевите избрани од Ана е парен број поглем од 2, или е 15 или 21, што значи дека е сложен број, па таа победува.

4. Определи ги сите парови прости броеви (p,q) такви што

$$1+\frac{p^q-q^p}{p+q}$$

е прост број.

Решение. Јасно е дека $p\neq q$. Ако

$$1+\frac{p^q-q^p}{p+q}=r,$$

тогаш имаме

$$p^q-q^p=(r-1)(p+q). \tag{1}$$

Од малата теорема на Ферма следува

$$p^q-q^p\equiv -q(\mathrm{mod}\,p).$$

Понатаму,

$$(r-1)(p+q)\equiv rq-q(\mathrm{mod}\,p)$$

па затоа од (1) следува

$$rq\equiv 0(\mathrm{mod}\,p),$$

т.е. $p\,|\,rq$, што значи $p\,|\,r$, па затоа $p=r$. Сега, повторно од (1) имаме

$$p^q-q^p=(p-1)(p+q). \tag{2}$$

Ќе докажеме дека $p=2$. Навистина, ако p е непарен, тогаш од малата теорема на Ферма следува

$$p^q-q^p\equiv p(\mathrm{mod}\,q)$$

и бидејќи

$$(p-1)(p+q)\equiv p(p-1)(\mathrm{mod}\,q)$$

добиваме

$$p(p-2)\equiv 0(\mathrm{mod}\,q)$$

од каде следува $q\,|\,p(p-2)$, т.е. $q\,|\,p-2$, од каде следува $q\leq p-2<p$. Сега од (2) последователно добиваме

$$p^q-q^p\equiv 0(\mathrm{mod}\,p-1),$$

$$1-q^p\equiv 0(\mathrm{mod}\,p-1),$$

$$q^p\equiv 1(\mathrm{mod}\,p-1).$$

Јасно, $(q,p-1)=1$ и ако $k=\mathrm{ord}_{p-1}(q)$, тогаш како што е познато $k\,|\,p$ и $k<p$. Според тоа, $k=1$. Затоа

$$q\equiv 1(\mathrm{mod}\,p-1),$$

односно $p-1\,|\,q-1$, од каде следува $p-1\leq q-1$, т.е. $p\leq q$, што противречи на $q\leq p-2<p$. Затоа $p=2$ и (2) добиваме

$$2^q = q^2 + q + 2.$$

Сега, со математичка индукција лесно се докажува дека за секој природен број $n \geq 6$ важи $2^n > n^2 + n + 2$. Според тоа, $q \leq 5$ и со непосредна проверка добиваме дека единстено решение е $q = 5$. Конечно, единствено решение е парот $(p,q) = (2,5)$.

Забелешка. Во решението на задачата клучен момент е таканаречениот ред на цел број и неговите својства. Овие содржини 2019 година не беа вклучени во програмата за ЈБМО. Не може да се каже дали станува збор за превид на Жирито или има проширување на програмата. На читателот му препорачуваме да ги прошири своите знаења, што може да го направи консултирајќи ја наведената литература.

ЈБМО 2021

1. Нека n е оприроден број. Ја разгледуваме равенката

$$2[\tfrac{1}{2x}]-n+1=(n+1)(1-nx)$$

по непозната реална променлива x.

а) Реши ја равенката за $n=8$.

б) Докажи дека постои природен број n за кој равенката има најмалку 2021 решение.

Решение. Нека $k=[\tfrac{1}{2x}], k\in\mathbb{Z}$.

а) За $n=8$ равенката го добиваме видот

$$k=[\tfrac{1}{2x}]=8-36x,$$

од каде добиваме $x\neq 0$ и $x=\tfrac{8-k}{36}$. Бидејќи $x\neq 0$, важи $k\neq 8$ и од $k=[\tfrac{1}{2x}]$ добиваме $k=[\tfrac{18}{8-k}]$. Проверувајќи ги знаците на k и $\tfrac{18}{8-k}$ лесно заклучуваме дека $0<k<8$. Сега, со директна проверка наоѓаме $k=3$ или $k=4$, шри што соодветните вредности за x се $x=\tfrac{5}{36}$ и $x=\tfrac{1}{9}$.

б) Од дадената равенка имаме $x\neq 0$ и $x=\tfrac{2(n-k)}{n(n+1)}$. Затоа $k\neq n$ и

$$k=[\tfrac{1}{2x}]=[\tfrac{n(n+1)}{4(n-k)}].$$

Понатаму, повторно проверувајќи ги знаците на k и $\tfrac{n(n+1)}{4(n-k)}$ добиваме $0<k<n$. Последното значи дека

$$k\le\tfrac{n(n+1)}{4(n-k)}<k+1,$$

од каде добиваме

$$\begin{cases}(2k-n)^2+n\ge 0\\(2k+1-n)^2<n+1\end{cases}$$

односно

$$\tfrac{n-1-\sqrt{n+1}}{2}<k<\tfrac{n-1+\sqrt{n+1}}{2}. \qquad (1)$$

Обратно, ако $k\in\mathbb{Z}$ ги исполнува условите (1) и $0<k<n$, тогаш $x=\tfrac{2(n-k)}{n(n+1)}$ е решение на дадената равенка. Останува да забележиме дека изборот на n таков што $\sqrt{n+1}<2021$ гаранитира дека постојат нај-

малку 2021 целобројни вредности на k за кои важи (1).

Забелешка. Задачатасе однесува на функцијата цел дел од реален број. Овие содржини 2019 година не беа вклучени во програмата за ЈБМО. Не може да се каже дали станува збор за превид на Жирито или има проширување на програмата. На читателот му препорачуваме да ги прошири своите знаења, што може да го направи консултирајќи ја наведената литература.

2. За секое множество $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ од пет различни природни броеви со S_A го означуваме збирот на неговите елементи, а со T_A го означуваме бројот на тројките (i,j,k) такви што $1\le i<j<k\le 5$ за кои $x_i+x_j+x_k$ е делител на S_A. Определи ја најголемата можна вредност на T_A.

Решение. Ќе докажеме дека најголемата можна вредност на T_A е 4. Нека $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ е множество од пет природни броеви такви што $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$. За тројката (i,j,k) ќе велиме дека е добра ако $x_i+x_j+x_k$ е делител на S_A. Не е можно тројките

$$(3,4,5),\ (2,4,5),\ (1,4,5),\ (2,3,5),\ (1,3,5)$$

да се добри, бидејќи од $x_5+x_3+x_1\mid S_A$ следува дека $x_5+x_3+x_1\mid x_4+x_2$ што не е моѓно бидејќи $x_4<x_5$ и $x_2<x_3$. Аналогно се покажува дека тројките од видот $(i,j,5)$ каде $j>2$ не може да се добри. Од досега изнесенот следува дека бројот на добрите тројки може да биде најмногу 5 и само тројките

$$(1,2,5),\ (2,3,4),\ (1,3,4),\ (1,2,4),\ (1,2,3)$$

може да се добри. Но, ако тројките $(1,2,5)$ и $(2,3,4)$ се истовремено добри, тогаш $x_1+x_2+x_5\mid x_3+x_4$, па затоа

$$x_5<x_3+x_4 \qquad (1)$$

и $x_2+x_3+x_4\mid x_1+x_5$, па од (1) следува

$$x_2+x_3+x_4<x_1+x_5<x_1+x_3+x_4<x_2+x_3+x_4,$$

што е противречност. Затоа $T_A\le 4$.

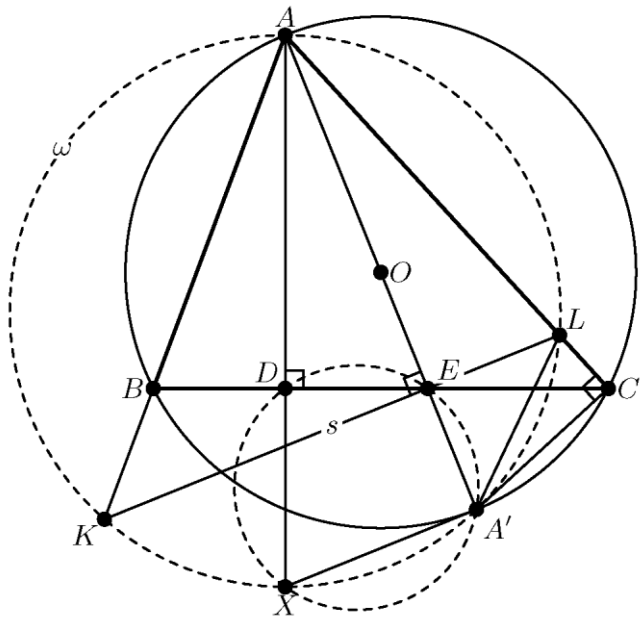
Дека равенството $T_A=4$ е можно, доволно е да ги разгледаме броевите 1, 2, 3, 4, 494. Лесно се гледа дека $6\mid 498, 7\mid 497, 8\mid 496$ и $9\mid 495$.

3. Нека ABC е остраоголен разностран триаголник со центар на опишаната кружница O. Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A на страната BC. Правите BC и AO се сечат во точката E. Нека s е правата која минува низ точката E и е нормална на AO. Правата s ги сече AB и AC во точките K и L, соодветно. Нека ω е опишаната круѓница околу триаголникот AKL. Правата AD по втор пат ја сече ω во точката X.

Докажи дека ω и опишпаните кружници околу триаголниците ABC и DEX се сечат во една точка.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки α,β,γ за аглите на триаголникот ABC. Имаме $\measuredangle BAD = 90^\circ - \beta = \measuredangle OAC$ и AX е дијаметар на ω. Исто така, да забележиме дека

$$\measuredangle ALK = \beta \text{ и } \measuredangle KLC = 180^\circ - \beta = \measuredangle KBC,$$



па така четириаголникот $BKLC$ е цикличен. Нека AO по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката A'. Ќе докажеме дека A' е бараната заедничка точка. Јасно, AA' е дијаметар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, па затоа $\measuredangle A'CA = 90^\circ$, од што следува дека четириаголникот $A'CLE$ е цикличен. Од степенот на точката E во однос на кружниците $(BKLC)$ и (ABC) следува

$$\overline{EK}\cdot\overline{EL} = \overline{EB}\cdot\overline{EC} = \overline{EA}\cdot\overline{EA'},$$

од што следува дека $A' \in \omega$. Сега, користејќи дека AX е дијаметсар на ω добиваме дека $\measuredangle AXA' = 90^\circ$, па оттука следува дека четириаголникот $DXA'E$ е цикличен, со што доказот е завршен.

4. Нека M е подмножество од множеството $\{1,2,3,...,2021\}$ такво што за секои три елементи (не задолжително различни) a,b,c од M имаме $|a+b-c|>10$. Определи го најголемиот можен број елементи на M.

Решение. Множеството $M=\{1016,1017,...,2021\}$ има 1006 елементи и ги задоволува бараните услови, бидејќи ако $a,b,c \in M$, тогаш

$$a+b-c \geq 1016+1016-2021=11.$$

Ќе докажеме дека 1006 е најголемиот можен број елементи на M.

Нека M ги задоволува условите на задачата. Нека k е најмалиот елемент на M. Тогаш од $k=|k+k-k|>10$ следува $k \geq 11$. Исто така, да забележиме дека за секој m броевите $m, m+k-10$ не може да припаѓаат на M, бидејќи $k+m-(k+m-10)=10$.

Лема 1. M содржи најмногу $k-10$ од било кои $2k-20$ последователни природни броеви.

Доказ. Множеството $\{m,m+1,...,m+2k-21\}$ го разбиваме на $k-10$ парови на следниот начин:

$$\{m,m+k-10\},\{m+1,m+k-11\},...,\{m+k-11,m+2k-21\}.$$

Сега е јасно дека M може да содржи најмногу по еден елемент од секој пар. ■

Лема 2. M содржи најмногу $[\frac{t+k-10}{2}]$ од било кои t последователни природни броеви

Доказ. Нека $t=(2k-20)q+r$ каде $r \in \{0,1,2,...,2k-21\}$. Според Лемата 1 од множеството од првите $(2k-20)q$ броеви најмногу $(k-10)q$ може да припаѓаат на множеството M. Исто така, од Лемата 1 следува дека од последните r броеви најмногу $\min\{r,k-10\}$ може да припаѓаат на M. Така

1) Ако $r \leq k-10$, тогаш најмногу

$$q(k-10)+r=\frac{t+r}{2} \leq \frac{t+k-10}{2}$$

броја припаѓаат на M.

2) Ако $r > k-10$, тогаш најмногу

$$q(k-10)+k-10=\frac{t-r+2(k-10)}{2}\le\frac{t+k-10}{2}$$

броја припаѓаат на M.

Сега тврдењето на лемата следува од 1) и 2). ■

Според Лемата 2 бројот на елементите од M меѓу броевите

$$k+1,k+2,...,2021$$

е најумногу

$$[\frac{(2021-k)+k-10}{2}]=1005.$$

Бидејќи од множеството $\{1,2,...,k\}$ само k припаѓа на M, заклучуваме дека M може да има најмногу 1006 елементи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Malčeski, A., Manova - Erakovic, V., Malčeski, R. et all: Mathematical Olympiads 2015, SMM, Skopje, 2015
2. Malčeski, A., Velinov, D., Malčeski, R. et all: Mathematical Olympiads 2017, SMM, Skopje, 2017
3. Malčeski, A., Velinov, D., Malčeski, R. et all: Mathematical Olympiads 2018, SMM, Skopje, 2018
4. Malčeski, A., Velinov, D., Malčeski, R., et all: Mathematical Olympiads 2016, SMM, Skopje, 2016
5. Velinov, D., Atanasova, S., Malcheski, A., Malcheski, R., Malcheski, S. et all: Mathematical Olympiads 2019, SMM, Skopje, 2019
6. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
7. Малчески, А., Малчески, Р. (2018). Теорема на Чева, Сигма, Скопје
8. Малчески, Р. (1999). Теорема на Менелај, Сигма, Скопје
9. Малчески, Р. (2011). Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје
10. Малчески, Р. (2011). Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје
11. Малчески, Р. (2015). Функциите $[x]$ и $\{x\}$, Сигма
12. Малчески, Р., Аневска, К. (2016). Мала теорема на Ферма, Нумерус, Скопје
13. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви (второ издание), Армаганка, Скопје, 2020
14. Малчески, Р., Малчески, А., Малчески, С.: Математички талент 11 (олимписки теми – трет дел), Армаганка, Скопје, 2019
15. Малчески, Р., Малчески, С.: Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
16. Малчески, Р., Цветковски, З. (2005). Математичка индукција 1, Сигма, Скопје

17. Малчески, Р., Цветковски, З. (2005). Математичка индукција 2, Сигма, Скопје
18. Малчески, Р.: Математички талент 7 (олимписки теми – прв дел, алгебра и теорија на броеви), Армаганка, Скопје, 2019
19. Малчески, Р.: Математички талент 8 (олимписки теми – втор дел, геометрија и комбинаторика), Армаганка, Скопје, 2019