Статијата прв пат е објавена во списанието НУМЕРУС

Никола Петрески - Скопје

ТЕТИВЕН И ТАНГЕНТЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

Во учебникот по геометрија за VII одделение се докажани следните две теореми:

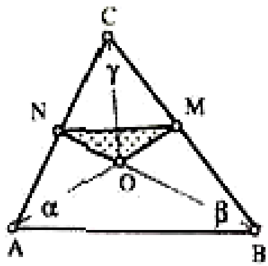
- Еден *конвексен четириаголник е тетивен (впишан во кружница)* ако неговите спротивни агли се сумплементни.
- Ако збирот на две спротивни страни на еден конвексен четириаголник е еднаков со збирот на другите две страни, тогаш тој четириаголник е *тангентен* (опишан околу кружница).

Овде ќе дадеме неколку решени задачи со кои, суштината на овие две теореми, се надеваме, ќе ви стане поблиска.

① Докажи дека може да се опише кружница околу квадрат, правоаголник, рамнокрак трапез, а не може да се опише околу ромб, околу ромбоид и околу делтоид.

Решение: Бидејќи аглите во квадратот и правоаголникот се по 90°, следува дека е исполнет условот за тетивен четириаголник.

Познато е дека аглите на основите на рамнокракиот трапез се еднакви, т.е. $\alpha = \beta$ и $\gamma = \delta$, следува $\alpha+\gamma = 180^\circ$ и $\beta+\delta = 180^\circ$, што значи рамнокракиот трапез е тетивен четириаголник. Бидејќи спротивните агли кај ромбот, ромбоидот и делтоидот се остри или тапи, следува дека нивниот збир е помал или поголем од 180°, што значи тие не можат да бидат тетивни четириаголници.



② Во $\triangle ABC$ повлечени се симетралите AM и BN на аглите α и β кои се сечат во точката O. Ако четириаголникот $OMCN$ е тетивен, тогаш одреди ги аглите на $\triangle OMN$.

Решение: Точката O е центар на впишаната кружница, значи таа лежи на симетралата на аголот γ. Ако четириаголникот $OMCN$ е тетивен тогаш отсечките OM и ON се еднакви како тетиви над еднакви периферни агли. Оттука следува дека $\triangle OMN$ е рамнокрак, па $\measuredangle OMN = \measuredangle ONM$.

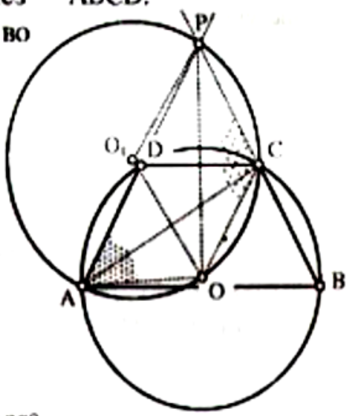
Бидејќи четириаголникот OMCN е тетивен следува дека:

$\angle NOM = 180^\circ - \gamma$, а $\angle AOB = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Од еднаквоста на аглите NOM и AOB, следува дека $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

Од збирот на внатрешните агли на ΔABC имаме: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, $\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$ следува $\gamma + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, а $\angle NOM = \angle ONM = 30^\circ$.

③ Даден е рамнокрак трапез ABCD. Продолженијата на краците AD и BC се сечат во точката P. Докажи дека кружниците што се опишани околу триаголниците ACP и BDP минуваат низ центарот O на кружницата опишана околу дадениот рамнокрак трапез.



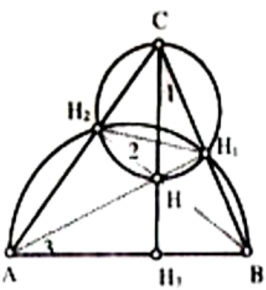
Решение: Нека O_1 е центар на кружницата што е опишана околу ΔACP. Според својството на периферниот агол следува:

$\angle OAP = \frac{1}{2} \angle OO_1P$ и $\angle OCP = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle OO_1P)$

$\angle OAP + \angle OCP = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle OO_1P) + \frac{1}{2} \angle OO_1P = 180^\circ$.

Оттука следува дека четириаголникот AOCP е тетивен, т.е. кружницата опишана околу ΔACP минува низ точката O. На ист начин се докажува и дека кружницата опишана околу ΔBDP минува низ точката O.

④ Докажи дека висините на ΔABC се сечат во една точка.



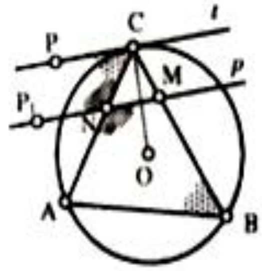
Решение: Нека AH_1 и BH_2 се висини на ΔABC кои се сечат во точката H. Треба да докажеме дека $CH \perp AB$.

1° Нека триаголникот ABC, како на цртежот, е остроаголен, тогаш четириаголникот HH_1CH_2 е тетивен, бидејќи $\angle HH_1C + \angle HH_2C = 180^\circ$. Оттука следува дека $\angle 1 = \angle 2$ како периферни агли над ист кружен лак на кружницата опишана околу четириаголникот HH_1CH_2. $\measuredangle 2 = \measuredangle 3$ како периферни агли во кружницата опишана над страната AB како дијаметар. Според тоа $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$. Од $AH_1 \perp BC$ и $\measuredangle 1 = \measuredangle 3$ следи $CH_3 \perp AB$, а тоа значи дека CH_3 е третата висина и таа минува низ точката H.

2° Ако ΔABC е правоаголен, тогаш тврдењето е очигледно, затоа што трите висини минуваат низ темето на правиот агол.

3° Ако ΔABC е тапоаголен, во тој случај точките H и C се заменети.

⑤ Во една кружница вписан е ΔABC. Правата *p* што е паралелна со тангентата на кружницата низ точката C, ги сече страните AC и BC во точките M и N соодветно. Докажи дека четириаголникот ABMN е тетивен.



Решение: Треба да докажеме дека спротивните агли се суплементни. Според својството на аголот меѓу тангентата и тетивата следува дека $\measuredangle PCN = \measuredangle ABC$. Аглите PCN и P_1NC се суплементни како спротивни агли на трансверзала, а $\measuredangle P_1NC = \measuredangle ANM$ како накрсни агли. Според тоа $\measuredangle P_1NC + \measuredangle PCN = 180^\circ$ следува $\measuredangle ABC + \measuredangle ANM = 180^\circ$, т.е. четириаголникот ABMN е тетивен.

Задачи за вежбање

1. Во четириаголникот ABCD повлечени се симетрали на внатрешните агли. Ако симетралите се сечат во четири точки, тогаш тие точки се темиња тетивен четириаголник. Докажи!

2. Кружницата вписана во триаголникот ABC ги допира страните AC и BC во точките D и F. Симетралите на аглите α и β ја сечат отсечката DF во точките N и M соодветно. Докажи дека точките A, B, M и N лежат на една кружница.

3. Четириаголникот ABCD е вписан во кружница. Докажи дека секоја од неговите страни се гледа од другите две темиња под ист агол.

4. Четириаголникот ABCD е тетивен. Правите AB и CD се сечат во точката P, а правите AD и BC во точката Q. Симетралите на аглите APD и AQB ги сечат страните BC, AD, AB и CD соодветно во точките E, F, M и N соодветно. Докажи дека четириаголникот MENF е ромб, т.е. тангентен четириаголник.