ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Алексеј А. Јегоров, Москва

Тема овог чланка су једначине код којих се непозната појављује у експоненту степена. Такве једначине често се дају на пријемним испитима и зато је корисно упознавање са неким методама њиховог решавања.

Најпростија експоненцијална једначина је једначина облика

$$a^x = b,$$

где је $a > 0,\ a \neq 1$. За $b > 0$, једначина има јединствено решење $x = \log_a b$; за $b \leq 0$ једначина нема решења.

При трансформацијама експоненцијалних једначина често се користе следеће особине експоненцијалне функције:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y},\ (a^x)^y = a^{xy},\ (ab)^x = a^x \cdot b^x,$$

где је $a > 0,\ b > 0$.

Ако полазна једначина има облик

$$f(a^x) = b, \tag{1}$$

где је f нека функција, при решавању се може увести смена $y = a^x$, решити једначина $f(y) = b$, изабрати њени позитивни корени а затим решити добијена простија једначина.

Задатак 1 Решити једначину

$$3^{2-x} = 3^x - 8.$$

Решење. Стављајући $y = 3^x$, добијамо једначину $\frac{9}{y} = y - 8$, тј. $y^2 - 8y - 9 = 0$. Добијена квадратна једначина има решења $y_1 = -1,\ y_2 = 9$. Прво не задовољава ($y < 0$). Зато је $3^x = 9$, одакле је $x = 2$.

Одговор. $\{2\}$.

У неким случајевима, једначина која нема облик (1) може се свести на тај облик коришћењем особина експоненцијалне функције.

Задатак 2 Решити једначину

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

Решење. После очигледних трансформација добијамо:

$$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 4^x \cdot 9^x.$$

Како је $9^x \neq 0$, дељењем са 9^{2x}, добијамо еквивалентну једначину

$$3 \cdot (\frac{4}{9})^{2x} + 2 = 5 \cdot (\frac{4}{9})^x.$$

Стављајући $y = (\frac{4}{9})^x$, добијамо квадратну једначину $3y^2 - 5y + 2 = 0$. Њени корени су $y_1 = 1$, $y_2 = \frac{2}{3}$.

Решавајући једначине $(\frac{4}{9})^x = 1$ и $(\frac{4}{9})^x = \frac{2}{3}$, добијамо у првом случају $x = 0$, а у другом $(\frac{2}{3})^{2x} = \frac{2}{3}$, тј. $2x = 1$ или $x = \frac{1}{2}$.

Одговор. $\{0,\ \frac{1}{2}\}$.

Размотримо сада неколико примера, код којих се у експоненту степена појављује нека функција од x.

Задатак 3 Решити једначину

$$3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}.$$

Решење. Ставимо $y = x^2 + 3x - 5$, после чега добијамо једначину

$$3^{2y+1} + 4 \cdot 3^y \cdot 5^y = 3 \cdot 5^{2y+1}.$$

Делећи леву и десну страну са 5^{2y}, долазимо до једначине

$$3 \cdot (\frac{3}{5})^{2y} + 4 \cdot (\frac{3}{5})^y - 15 = 0.$$

Решавајући ту једначину, као у претходном задатку, добијамо $(\frac{3}{5})^y = \frac{5}{3}$, одакле је $y = -1$. Преостаје да се реши квадратна једначина $x^2 + 3x - 5 = -1$.

Одговор. $\{1,\ -4\}$.

Некада се, после извршених трансформација, полазна једначина своди на облик

$$a^{f(x)} = b^{g(x)}$$

$$(a > 0,\ b > 0,\ a \neq 1).$$

За решавање те једначине, корисно је уочити да је она еквивалентна једначини

$$a^{f(x)} = a^{g(x) \log_a b}. \tag{2}$$

(Користили смо *основни логаритамски идентитет* $a^{\log_a b} = b$.) Из особине експоненцијалне функције следи, да је једначина (2) еквивалентна једначини

$$f(x) = g(x)\log_a b.$$

Задатак 4 Решити једначину

$$3^{x-3} = 5^{x^2-7x+12}.$$

Решење. Прелазимо на еквивалентну једначину

$$x - 3 = (x^2 - 7x + 12)\log_3 5.$$

Добијена једначина, наравно, може се решити на уобичајени начин (јер је то квадратна једначина), што је донекле непријатно, због "незгодних" коефицијената.

Међутим, ако уочимо да је $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$, решење се знатно упрошћава.

Добијамо

$$x - 3 = (x-3)(x-4)\log_3 5,$$

одакле је или $x = 3$, или $(x-4)\log_3 5 = 1$, тј. $x = 4 + \frac{1}{\log_3 5} = 4 + \log_5 3$.

Одговор. $\{3,\ 4+\log_5 3\}$.

Размотримо још један пример.

Задатак 5 Решити једначину

$$32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}.$$

Решење. Како је $32 = 2^5,\ 0,25 = 2^{-2},\ 128 = 2^7$, дата једначина своди се на

$$2^{5\cdot\frac{x+5}{x-7}} = 2^{7\cdot\frac{x+17}{x-3}-2}$$

и, према томе, еквивалентна је једначини

$$\frac{5x+25}{x-7} = \frac{7x+119}{x-3} - 2,$$

која се своди на једначину

$$\frac{x+5}{x-7} = \frac{x+25}{x-3},$$

чије је једино решење $x = 10$.

Одговор. $\{10\}$.

Некада се срећемо са једначинама код којих се непозната појављује и у основи и у експоненту степена. Пре него што пређемо на решавање конкретних задатака, уочимо неке чињенице о области дефинисаности функција облика $f(x)^{g(x)}$.

Обично, када се постави задатак у коме фигурише функција облика $f(x)^{g(x)}$, претпоставља се да ће је ученик разматрати за такве вредности од x, за које је испуњен један од услова: или $f(x) > 0$, или $f(x) = 0$ и $g(x) > 0$.

Тако, на пример, $x = 3$ је решење једначине $(x-3)^x = 3 - x$. За $x > 3$, та једначина, очигледно, нема решења (лева страна јој је позитивна а десна негативна). За $x < 3$, основа степена је негативна и зато такве x не треба разматрати, мада се може видети, да се непосредним уврштавањем $x = 2$ у једначину добија тачна једнакост $(2-3)^2 = 3 - 2$ и зато је број 2, такође, решење једначине.

Ученици, који то не уоче и уопште не испитују случај $x < 3$, неће добити нетачно решење и одговор $x = 3$ у овом задатку треба сматрати правилним.

Опште прихваћено гледиште у вези с тим је да је питање о смислу израза a^b за $a < 0$ и реалан број b који није цео број, врло сложено и не треба да се решава у оквиру средњошколског курса математике.

Задатак 6 Решити једначину

$$x^{x^2-5x+8} = x^2.$$

Решење. Размотримо само случај $x \geq 0$. Како је за $x = 0$, функција на левој страни дефинисана и једнака нули, и десна страна једнака нули, 0 је решење једначине. Лако се види да је за $x > 0$ дата једначина еквивалентна једначини

$$(x^2 - 5x + 8)\lg x = 2\lg x,$$

одакле је или $\lg x = 0$, тј. $x = 1$, или $x^2 - 5x + 6 = 0$, тј. $x = 2$ и $x = 3$.

Одговор. $\{0, 1, 2, 3\}$.

На крају размотримо два задатка, у чијем решавању нам помаже особина монотоности експоненцијалне функције.

Задатак 7 Решити једначину

$$3 \cdot 4^x + (3x - 10) \cdot 2^x + 3 - x = 0.$$

Решење. Овај задатак не припада ниједном од раније разматраних типова. Покушајмо ипак са сменом $y = 2^x$. Добијамо

$$y = \frac{-3x + 10 \pm \sqrt{(3x-10)^2 - 12(3-x)}}{6} =$$

$$= \frac{-3x + 10 \pm \sqrt{9x^2 - 48x + 64}}{6} = \frac{-3x + 10 \pm (3x - 8)}{6},$$

одакле је или $y = 3 - x$, или $y = \frac{1}{3}$.

Једначина $2^x = \frac{1}{3}$ има решење $x = -\log_2 3$.

Решимо сада једначину

$$2^x = 3 - x.$$

Лако погађамо решење $x = 1$. Докажимо да ова једначина нема других решења. Заиста, за $x = 1$, лева страна је једнака десној. Функција на левој страни је растућа а она на десној страни – опадајућа. Зато је за $x < 1$, лева страна мања од десне, а за $x > 1$, обрнуто, десна страна већа од леве.

Одговор. $\{1, -\log_2 3\}$.

Задатак 8 Решити једначину

$$6^x - 2^x = 32.$$

Решење. Покушаји да се нађе решење ове једначине уобичајеним методама овде ништа не дају. Међутим, лако се види да је једначина задовољена за $x = 2$. Доказаћемо да нема других решења. У том циљу, напишимо једначину у облику

$$3^x - 1 = \frac{32}{2^x}.$$

Десна страна је опадајућа функција, лева – растућа. Према томе, $x = 2$ је једино решење једначине.

ЗАДАЦИ ЗА ВЕЖБУ

Решити једначине:

1. $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

2. $\frac{1}{2^x} + \frac{1}{1+2^x} = 4$.

3. $5^{2x+1} + 6^{x+1} = 5^{2x} \cdot 6^x + 30$.

4. $2^{x-3} = 5^{x^2-5x+6}$.

5. $36^{x+\sqrt{x^2-2}} - 30 \cdot 6^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$.

6. $x^{x^2-6x+5} = x^{12}$.

7. $4^{3x^2+x} - 8 = 2 \cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$.

8. $\frac{x}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}$.

Доказати да су сви корени ове једначине – рационални бројеви.

9. $3^{6x-3} = 2 \cdot 27^{x-\frac{2}{3}} + 1$.

10. $6^{\log_5(1-\frac{1}{2x})} = 6^{\log_{\sqrt{5}} \frac{2x-1}{\sqrt{9-x^2}}} \cdot 36^{\log_{25}(3+x)}$.

11. $9 \cdot 7^x + 1 = 2^{\frac{6}{x}}$.

12. $6^x + 5^x = 61^{\frac{x}{2}}$.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 1996/97 година