LI олимпијада

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи

$$f([x]y)=f(x)[f(y)]. \qquad (1)$$

($[z]$ е најголемиот цел број кој не е поголем од z.)

Решение. *Прв начин.* За $x=y=0$ добиваме $f(0)=f(0)[f(0)]$, од каде следува $f(0)=0$ или $[f(0)]=1$.

Ако $[f(0)]=1$, ставаме $y=0$ во (1) и добиваме $f(x)=f(0)=c\in[1,2)$, за секој $x\in\mathbb{R}$. За $c\in[1,2)$ функцијата $f(x)=c$ е решение бидејќи за секои $x,y\in\mathbb{R}$ важи $f([x]y)=c=c\cdot 1=c\cdot[c]=f(x)[f(y)]$.

Нека $f(0)=0$. Тогаш за секој $x\in[0,1)$ од (1) добиваме $f(x)[f(y)]=0$, што значи дека $f(x)=0$ за секој $x\in[0,1)$ или $[f(y)]=0$ за секој $y\in\mathbb{R}$.

1) Ако $[f(y)]=0$ за секој y, тогаш за $x=1$ од (1) следува $f(y)=0$. Навистина функцијата $f(y)=0$ исто така е решение на задачата, бидејќи тогаш $f([x]y)=0=0\cdot[0]=f(x)[f(y)]$.

2) Нека $f(x)=0$ за секој $x\in[0,1)$. За $y\in\mathbb{R}$, нека n е цел број таков што $\frac{y}{n}\in[0,1)$. Тогаш $f(y)=f(n\cdot\frac{y}{n})=f(n)[f(\frac{y}{n})]=0$, т.е. $f\equiv 0$.

Конечно, единствени решенија на задачата се константните функции

$$f(x)=c \text{ каде } c=0 \text{ или } c\in[1,2).$$

Втор начин. Ако во (1) ставиме $x=y=1$ добиваме $f(1)=f(1)[f(1)]$, па затоа $f(1)=0$ или $[f(1)]=1$.

Ако $f(1)=0$, во (1) ставаме $x=1$ и добиваме $f(y)=0$ за секој $y\in\mathbb{R}$. Како погоре се докажува дека функцијата $f(x)=0$ е решение на задачата.

Ако $[f(1)]=1$, во (1) ставаме $y=0$ и добиваме $f(0)=f(x)[f(0)]$. Можни се два случаја.

1) Ако $[f(0)]\neq 0$, тогаш $f(x)=\frac{f(0)}{[f(0)]}$, што значи дека за $c=\frac{f(0)}{[f(0)]}$ важи $f(x)=c$, за закој $x\in\mathbb{R}$. Сега од (1) имаме $c=c[c]$, па затоа $c\in[1,2)$. Од друга страна функцијата $f(x)=x\in[1,2)$ навистина е решение на задачата, бидејќи $f([x]y)=c=c\cdot 1=c\cdot[x]=f(x)[f(y)]$.

2) Ако $[f(0)]=0$, во (1) ставаме $y=1$ и добиваме $f(x)=f([x])$. Сега, ако ставиме $x=2,\ y=\frac{1}{2}$, добиваме

$$f(1)=f([2]\cdot\tfrac{1}{2})=f(2)[f(\tfrac{1}{2})]=f(2)[f([\tfrac{1}{2}])]=f(2)[f(0)]=0,$$

што не е можно.

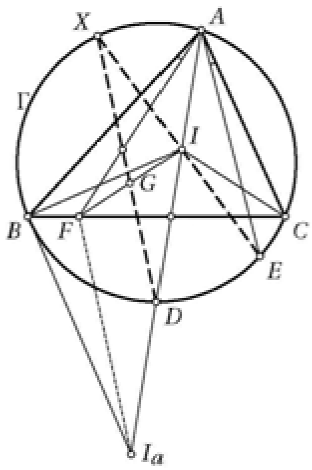
Конечно, единствени решенија на задачата се константните функции

$$f(x)=c \text{ каде } c=0 \text{ или } c\in[1,2).$$

2. Нека I е центар на впишаната кружница, а Γ е опишаната кружница на $\triangle ABC$. Нека правата AI ја сече Γ во точките A и D. Нека E е точка од лакот BDC, а F е точка на отсечката BC така што

$$\measuredangle BAF=\measuredangle CAE<\tfrac{1}{2}\measuredangle BAC.$$

Нека G е средина на отсечката IF. Докажи дека правите DG и EI се сечат на кружницата Γ.



Решение. *Прв начин.* Ако I_a е центарот на припишаната кружница на $\triangle ABC$ наспроти темето A, тогаш важи $\measuredangle IBI_a=90^\circ$ и $\overline{DI}=\overline{DB}$, па затоа D е средина на отсечката II_a. Понатаму, од

$$\measuredangle AI_aB=\measuredangle ACI \text{ и } \measuredangle I_aAB=\measuredangle CAI$$

следува $\triangle ABI_a\sim\triangle AIC$, а од $\measuredangle EAC=\measuredangle BAF$ и $\measuredangle AEC=\measuredangle ABF$ следува $\triangle AEC\sim\triangle ABF$. Од овие сличности добиваме

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{AI_a}}=\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AB}}{\overline{AI_a}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{AI}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AI}}{\overline{AE}},$$

а тоа заедно со $\measuredangle FAI_a=\measuredangle IAE$ дава $\triangle AI_aF\sim\triangle AEI$. Ако сега со X ја означиме втората пресечна точка на правата EI и Γ, добиваме

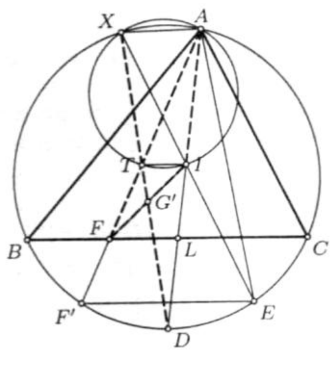
$$\measuredangle ADG=\measuredangle AI_aF=\measuredangle AEI=\measuredangle AEX=\measuredangle ADX,$$

па затоа X припаѓа на правата DG, што и требаше да се докаже.

Втор начин. Нека правата EI по втор пат ја сече Γ во точката X, а XD ги сече AF и IF во T и G', соодветно, L е пресекот на AD и BC, F' е пресекот на AF и Γ. Од

$$\measuredangle IXT=\measuredangle EXD=\measuredangle EAD=\measuredangle DAF'=\measuredangle IAT$$

следува дека точките I,A,X,T се конциклични, па затоа



$$\measuredangle ATI=\measuredangle AXI=\measuredangle AXE=\measuredangle AF'E.$$

Следува, $TI\parallel EF'\parallel BC$ и оттука $\frac{\overline{AT}}{\overline{TF}}=\frac{\overline{AI}}{\overline{IL}}$.

Од друга страна, важи $\frac{\overline{AD}}{\overline{DI}}=\frac{\overline{AI}}{\overline{IL}}$ (навистина , ако L' е симетрична на точката L во однос на CI, тогаш $IL'\parallel CD$, па е $\triangle AL'I\sim\triangle ACD$ и оттука $\frac{\overline{AD}}{\overline{DI}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DC}}=$

$\frac{\overline{AI}}{\overline{IL'}}=\frac{\overline{AI}}{\overline{IL}}$). Сега од теоремата на Менелај (применета на $\triangle AFI$ и правата XD) имаме

$$1=\frac{\overline{FG'}}{\overline{G'I}}\cdot\frac{\overline{ID}}{\overline{DA}}\cdot\frac{\overline{AI}}{\overline{TF}}=\frac{\overline{FG'}}{\overline{G'I}},$$

па затоа $G'\equiv G$.

3. Определи ги сите функции $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што

$$(g(m)+n)(m+g(n))$$

е точен квадрат на природен број за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

Решение. Ќе ја користиме следнава лема.

Лема. Ако p е прост број и $p\,|\,g(m)-g(n)$, тогаш $p\,|\,m-n$.

Доказ. Ако $p^2\,|\,g(m)-g(n)$, нека $k>g(m),g(n)$ е таков што $p\nmid k$ и $l=kp-g(n)$. Тогаш $p\,\|\,l+g(n)$, а ако $l+g(m)=(l+g(n))+(g(m)-g(n))$, следува $p\,\|\,l+g(m)$. Според условот на задачата $m+g(l)$ и $n+g(l)$ се деливи со p, па затоа $p\,|\,m-n$.

Ако $p\,\|\,g(m)-g(n)$, нека $k>g(m),g(n)$ е таков што $p\nmid k$ и $l=kp^3-g(n)$. Тогаш $p^3\,\|\,l+g(m)$, а како $l+g(m)=(l+g(n))+(g(m)-g(n))$, следува $p\,\|\,l+g(m)$. Според условот на задачата $m+g(l)$ и $n+g(l)$ се дели со p, па затоа $p\,|\,m-n$. ■

Фунјцијата f е инјекција. Навистина, ако $g(m)=g(n)$, тогаш според лемата $p\,|\,m-n$ за секој прост број p, т.е. $m=n$. Понатаму, ако $p\,|\,g(n+1)-g(n)$, тогаш $p\,|\,1$, што не е можно, па затоа $g(n+1)-g(n)=\pm1$. Притоа не важи $g(n+1)-g(n)=-(g(n)-g(n-1))$, бидејќи тогаш $g(n+1)=g(n-1)$, што не е можно. Оттука со индукција добиваме $g(n+1)-g(n)=g(2)-g(1)=\varepsilon=\pm1$ за секој n, па затоа $g(n)=k+\varepsilon n$, за некоја константа $k\in\mathbb{N}_0$. Бидејќи $g(n)>0$ за секој n, можноста $\varepsilon=-1$ отпаѓа, па затоа $g(n)=n+k$, за некоја константа $k\in\mathbb{N}_0$.

Функцијата $g(n)=n+k$, $k\in\mathbb{N}_0$ ги задоволува условите на задачата бидејќи

$$(g(m)+n)(m+g(n))=(m+n+k)^2.$$

Втор начин. Ќе докажеме дека за секој природен број n важи

$$|\,g(n+1)-g(n)\,|=1.$$

Навистина, ако $g(n+1)-g(n)\neq\pm1$, тогаш постои прост број p таков што $p\,|\,g(n+1)-g(n)$.

1) Ако $p\neq2$, постои m таков што $p\,\|\,m+g(n)$ и $p\,\|\,m+g(n+1)$ (ако m е

таков што $p^2 \mid m-p+g(n)$, тогаш $p \parallel m+g(n), m+p+g(n)$; како $m+p+g(n+1)-(m+g(n+1))=p$, најмногу еден од броевите $m+g(n+1)$ и $m+p+g(n+1)$ е делив со p^2). Од условот на задачата следува дека $p \mid n+g(m), n+1+g(m)$, па затоа $p \mid (n+1+g(m))-(n+g(m))=1$, што не е можно.

2) Ако $p=2$ и $4 \mid g(n+1)-g(n)$, постои m таков што $2 \parallel m+g(n)$ и $2 \parallel m+g(n+1)$ (ако m е таков што $4 \mid m-2+g(n)$, тогаш $2 \parallel m+g(n)$, $m+g(n+1)$). Од условот на задачата следува $2 \mid n+g(m), n+1+g(m)$, па затоа $2 \mid (n+1+g(m))-(n+g(m))=1$, што не е можно.

3) Ако $p=2$ и $2 \parallel g(n+1)-g(n)$, постои m таков што $8 \parallel m+g(n)$. Тогаш $m+g(n+1)=m+g(n)+(g(n+1)-g(n))$, па како важи $2 \parallel g(n+1)-g(n)$ и $4 \mid m+g(n)$, добиваме $2 \parallel m+g(n+1)$. Од условот на задачата следува $2 \mid n+g(m), n+1+g(m)$, па затоа $2 \mid (n+1+g(m))-(n+g(m))=1$, што не е можно

Ако за некој $n \in \mathbb{N}$ важи $g(n+1)-g(n)=-1$, тогаш од условот на задачата

$$(g(n+1)+n)(n+1+g(n))=(g(n)+n-1)(g(n)+n+1)=(g(n)+n)^2-1$$

е точен квадрат на природен број, што не е можно. Според тоа, за секој $n \in \mathbb{N}$ важи $g(n+1)-g(n)=1$, па затоа

$$g(n)=g(1)+\sum_{i=1}^{n-1}(g(i+1)-g(i))=g(1)-1+n=n+c,\ c \in \mathbb{N}_0 .$$

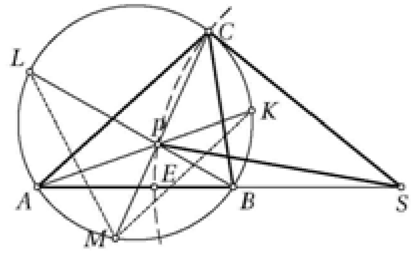
Од друга страна, оваа функција е решение на задачата бидејќи

$$(g(m)+n)(m+g(n))=(m+n+c)^2 .$$

4. Нека P е точка во внатрешноста на $\triangle ABC$. Правите AP, BP и CP ја сечат опишаната кружница Γ на $\triangle ABC$ во точките K, L и M, соодветно. Тангентата на кружницата Γ во точката C ја сече правата AB во S. Ако $\overline{SC}=\overline{SP}$, докажи дека $\overline{MK}=\overline{ML}$.

Решение. *Прв начин.* Нека B е меѓу A и S. Ако E е пресекот на симетралата на $\measuredangle ACB$ со страната AB, тогаш

$$\measuredangle CES=\measuredangle CAB+\measuredangle ACE =\measuredangle BCS+\measuredangle ECB=\measuredangle ECS,$$



што значи дека кружницата $k(S,\overline{SC})$

минува низ E. Бидејќи $\frac{\overline{EA}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$, k е Аполониева кружница, т.е. геометриско место на точки X за кои $\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$. Значи, условот $\overline{SC}=\overline{SP}$ е еквивалентен со условот $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

Од друга страна, од сличностите $\triangle PKM \sim \triangle PCA$ и $\triangle PLM \sim \triangle PCB$ следува $\frac{\overline{PM}}{\overline{KM}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{CA}}$ и $\frac{\overline{LM}}{\overline{PM}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{PB}}$, од каде со множење добиваме $\frac{\overline{LM}}{\overline{KM}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$. Значи, и условот $\overline{LM}=\overline{KM}$ е еквивалентен со условот $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

Втор начин. Нека $\overline{SC}=\overline{SP}$. Од $\overline{SA}\cdot\overline{SB}=\overline{SC}^2=\overline{SP}^2$ следува дека правата SP ја допира кружницата APB, па затоа

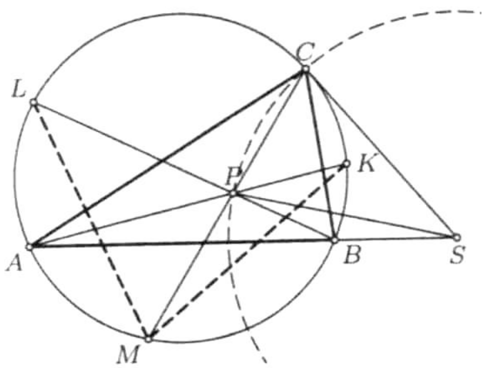
$$\begin{aligned}\measuredangle PAB &= \measuredangle SPB = \measuredangle CPB - \measuredangle CPS = \measuredangle CPB - \measuredangle SCM\\ &= \measuredangle CLB + \measuredangle MCL - \measuredangle CLM = \measuredangle MCL - \measuredangle BLM.\end{aligned}$$

Бидејќи $\measuredangle PBA = \measuredangle KAB = \measuredangle KLB$, добиваме

$$\measuredangle MKL = \measuredangle MCL = \measuredangle BLM + \measuredangle KLB = \measuredangle KLM,$$

и оттука $\overline{MK}=\overline{ML}$.

Трет начин. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{BC}<\overline{AC}$. Од степенот на точката S во однос на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ следува



$$\overline{SA}\cdot\overline{SB}=\overline{SC}^2=\overline{SP}^2,$$

т.е. $\frac{\overline{SA}}{\overline{SP}}=\frac{\overline{SP}}{\overline{SB}}$ и како $\measuredangle BSP = \measuredangle ASP$ заклучуваме дека $\triangle ASP \sim \triangle PSB$. Понатаму, од $\frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SB}}$ и $\measuredangle BSC = \measuredangle ASC$ следува $\triangle ASC \sim \triangle CBS$. Затоа

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{SP}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}. \qquad (1)$$

Од друга страна $\triangle PCA \sim \triangle PMK$ ($\measuredangle APC = \measuredangle KPM$ и $\measuredangle CPA = \measuredangle CAK = \measuredangle CMK = \measuredangle PMK$) и $\triangle PBC \sim \triangle PLM$ ($\measuredangle CPB = \measuredangle MPL$ и $\measuredangle BCP = \measuredangle BCM = \measuredangle BLM = \measuredangle PLM$) па затоа $\frac{\overline{PA}}{\overline{PN}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{MK}}$ и $\frac{\overline{PB}}{\overline{PM}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{ML}}$ и ако го искористиме (1) добиваме $\frac{\overline{MK}}{\overline{ML}}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}\cdot\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$, од каде што следува $\overline{MK}=\overline{ML}$.

Четврт начин. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{BC}<\overline{AC}$. Од степенот на точката S во однос на опишаната кружница околу

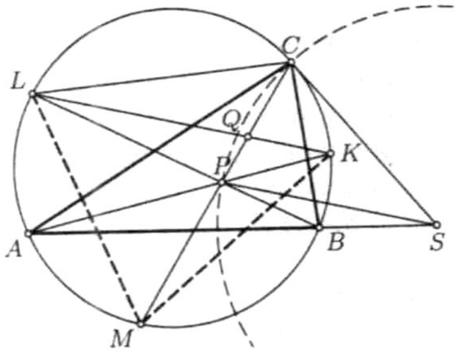
$\triangle ABC$ следува

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB}=\overline{SC}^2=\overline{SP}^2,$$

т.е. $\frac{\overline{SA}}{\overline{SP}}=\frac{\overline{SP}}{\overline{SB}}$ и како $\measuredangle BSP=\measuredangle ASP$ заклучуваме дека $\triangle ASP \sim \triangle PSB$. Затоа,

$\measuredangle SPB=\measuredangle PSA=\measuredangle KAB=\measuredangle KLB$,

од каде што следува $KL \parallel SP$. Нека Q е пресечната точка на KL и CM. Тогаш



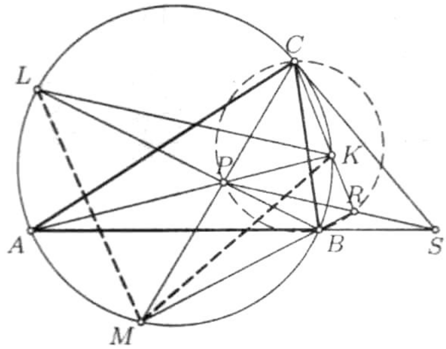
$$\measuredangle MKL=\measuredangle MCL=\measuredangle CQK-\measuredangle CLQ=\measuredangle CPS-\measuredangle CLK=\measuredangle SPC-\measuredangle CLK$$
$$=\measuredangle SCM-\measuredangle CLK=\measuredangle CLM-\measuredangle CLK=\measuredangle KLM,$$

од каде следува $\overline{MK}=\overline{ML}$ (тетиви над еднакви агли).

Петти начин. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $\overline{BC}<\overline{AC}$. Од степенот на точката S во однос на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ следува

$$\overline{SA}\cdot\overline{SB}=\overline{SC}^2=\overline{SP}^2,$$

т.е. $\frac{\overline{SA}}{\overline{SP}}=\frac{\overline{SP}}{\overline{SB}}$ и како $\measuredangle BSP=\measuredangle ASP$ заклучуваме дека $\triangle ASP \sim \triangle PSB$. Затоа $\measuredangle PAS=\measuredangle SPB$ и



$\measuredangle RCB=\measuredangle KBC=\measuredangle KAB=\measuredangle PAB=\measuredangle SPB=\measuredangle RPB$, од каде што следува дека четириаголникот $BRCP$ е тетивен. Бидејќи $\measuredangle SCB=\measuredangle CAB$ (тангентен и периферен агол), следува

$$\measuredangle SBR=\measuredangle SBC-\measuredangle RBC=\measuredangle SBC-\measuredangle RPC=\measuredangle SBC-\measuredangle SPC=\measuredangle SBC-\measuredangle PCS$$
$$=\measuredangle CAB+\measuredangle BCA-\measuredangle SBC-\measuredangle BCP=\measuredangle BCA-\measuredangle BCM=\measuredangle MCA=\measuredangle MBA,$$

па како $A-B-S$, следува $M-B-R$. Според тоа,

$$\measuredangle MKL=\measuredangle MBL=180^\circ-\measuredangle RBL=180^\circ-\measuredangle RBP=\measuredangle RCP=\measuredangle KCM=\measuredangle KLM,$$

од каде следува $\overline{MK}=\overline{ML}$ (тетиви над еднакви агли).

5. Во секоја од шесте кутии B_1,B_2,B_3,B_4,B_5,B_6 на почетокот се наоѓа точно по една монета. Дозволено е да се вршат следниве операции:

1° Да се избере непразна кутија B_j за некој $j\in\{1,2,3,4,5\}$, да се извади една монета од B_j и да се додадат две монети во B_{j+1}.

2° Да се избере непразна кутија B_k за некој $k\in\{1,2,3,4\}$, да се извади една монета од B_k и да се заменат содржините (може да се и празни) на кутиите B_{k+1} и B_{k+2}.

Испитај дали со конечна низа вакви операции може да се постигне кутиите B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 да се празни, а кутијата B_6 да содржи точно $2010^{2010^{2010}}$ монети. (Важи $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

Решение. Си низа операции, од почетната состојба (1,1,1,1,1,1) последователно се добива:

$$(1,1,1,0,3,1) \to (1,1,1,0,0,7) \to (1,1,0,2,0,7) \to (1,0,2,2,0,7) \to (0,2,2,2,0,7)$$
$$\to (0,2,2,1,7,0) \to (0,2,2,1,0,14) \to (0,2,2,0,14,0) \to (0,2,1,14,0,0).$$

Лема 1. За $a \in \mathbb{N}$, со низа операции на три кутии од состојба $(a,0,0)$ може да се дојде до состојба $(0,2^a,0)$.

Доказ. Индукција по a. Тврдењето е точно за $a=1$. Нека претпоставиме дека тоа е точно за $a-1$. Тогаш од состојбата $(a,0,0)$, занемарувајќи една монета во првата кутија може да се дојде до состојбата $(1,2^{a-1},0)$. Ја применуваме операцијата 1° точно 2^{a-1} пати и ја добиваме состојбата $(1,0,2^a)$, од каде со примена на операцијата 2° ја добиваме состојбата $(0,2^a,0)$. ■

Лема 2. Дефинираме $T_1 = 2$ и $T_{a+1} = 2^{T_a}$. За $a \in \mathbb{N}$, со низа операции на четири кутии, од состојбата $(a,0,0,0)$ може да се дојде до состојбата $(0,T_{a+1},0,0)$.

Доказ. Индукција по a. Тврдењето е точно за $a=1$. Нека претпоставиме дека тоа е точно за $a-1$. Тогаш од состојбата $(a,0,0,0)$ може да се дојде до состојбата $(1,T_a,0,0)$, па според лема 1 до состојбата $(1,0,T_{a+1},0)$, па ако уште еднаш го примениме чекорот 2° до состојбата $(0,T_{a+1},0,0)$. ■

Користејќи ги низите чекори опишани во лемите 1 и 2 добиваме

$$(0,2,1,14,0,0) \to (0,2,1,0,2^{14},0) \to (0,2,0,2^{14},0,0) \to (0,1,2^{14},0,0,0)$$
$$\to (0,1,0,T_{2^{14}},0,0) \to (0,0,T_{2^{14}},0,0,0) \to (0,0,0,T_{T_{2^{14}}},0,0).$$

Очигледно $T_{T_{2^{14}}}$ е многу поголем од $N = 2010^{2010^{2010}}$. Со примена на операцијата 2° точно $T_{T_{2^{14}}} - \frac{1}{4}N$ пати ја добиваме состојбата $(0,0,0,\frac{1}{4}N,0,0)$, од каде со примена на операцијата 1° добиваме $(0,0,0,0,\frac{1}{2}N,0)$, па добиваме $(0,0,0,0,0,N)$.

6. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е низа позитивни реални броеви. За некој природен број s важи

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\},$$

за секој $n > s$. Докажи дека постојат природни броеви l и N такви што $l \le s$ и $a_n = a_l + a_{n-l}$ за секој $n \ge N$.

Решение. *Прв начин.* Нека $n > r$. По дефиниција важи $a_n = a_{n_1} + a_{n_2}$ за некои индекси n_1, n_2 со $n_1 + n_2 = n$. Ако е, на пример $n_1 > r$, можеме да ја продолжиме постапката за a_{n_1} итн. се додека не добиеме

$$a_n = a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k}, \tag{1}$$

за некои $1 \le i_1, \ldots, i_k \le r$. Притоа ако i_1 и i_2 се индексите добиени во последниот чекор, тогаш $i_1 + i_2 > r$. Од друга страна, ако $1 \le i_1, \ldots, i_k \le r$ и $i_1 + i_2 > r$, тогаш

$$a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} \le a_{i_1+i_2} + a_{i_3} + \ldots + a_{i_k} \le \ldots \le a_{i_1+i_2+\ldots+i_k}.$$

Од досега изнесеното следува дека

$$a_n = \max\{a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_k} \mid 1 \le i_1, \ldots, i_k \le r, i_1 + i_2 > r\}, \text{ за сите } n > r. \tag{2}$$

Разгледуваме $l \in \{1, \ldots, r\}$ таков што $\frac{a_l}{l} = \max\limits_{1 \le i \le r} \frac{a_i}{i}$. Нека $n > r(rl+2)$. Бидејќи во (1) е $k \ge \frac{n}{r} > rl + 2$, меѓу индексите $i_3, \ldots, i_k$ постои некој кој се појавува најмалку l пати: нека $i_{k-l+1} = \ldots = i_k = j$. Бидејќи од дефиницијата на l имаме $la_j \le ja_l$, од (2) следува

$$a_n \ge a_{i_1} + \ldots + a_{i_{k-l}} + ja_l \ge a_{i_1} + \ldots + a_{i_{k-l}} + la_j = a_n,$$

па затоа двете неравенства мора да се равенства. Според тоа, можеме да претпоставиме дека во (1) барем еден собирок е еднаков на a_l.

Ако сега во (1) важи $i_k = l$, тогаш од условот на задачата и релацијата (2) следува

$$a_{n-l} \le a_n - a_l = a_{i_1} + \ldots + a_{i_{k-1}} \le a_{n-l},$$

што значи $a_n = a_l + a_{n-l}$.

Втор начин. Повторно го разгледуваме $l \in \{1, \ldots, r\}$ за кој $s = \frac{a_l}{l} = \max\limits_{1 \le i \le r} \frac{a_i}{i}$.

Воведуваме низа $\{b_n\}$ со $b_n = a_n - ns$. Низата $\{b_n\}$ ја задоволува истата рекурентна релација како и низата $\{a_n\}$ и лесно со индукција се докажува дека $b_n \le 0 = l$ за секој n.

Ако $b_n = 0$ за $n = 1, 2, \ldots, r$, важи $b_n = 0$ и $a_n = ns$ за секој n, па тврдењето на задачата е тривијално. Во спротивно, нека M и m се соодветно најголемиот и најмалиот меѓу ненултите членови на низата $|b_i|, i = 1, 2, \ldots, r$. За $n > r$ важи $b_n \ge b_{n-l} + b_l = b_{n-l}$, па затоа $b_n \ge b_{n-l} \ge b_{n-2l} \ge \ldots \ge -M$.

Од друга страна, како во (1) при првиот начин на решавање, b_n припаѓа на множеството

$$T=\{b_{i_1}+b_{i_2}+...+b_{i_k} \mid i_1,...,i_k \le r\} \cap [-M,0].$$

Меѓутоа, ако $b_n=b_{i_1}+b_{i_2}+...+b_{i_k}$, бројот на ненултите собирци во ова претставување не е поголем од $\frac{M}{m}$. Според тоа, T е конечно множество. Конечно, низата $b_n,b_{n+l},b_{n+2l},...$ не опаѓа, па мора да биде константна почнувајќи од некоја точка. Според тоа, низата $\{b_n\}$ е периодична од некоја точка, од каде што следува тврдењето на задачата.