Д-р Павле Младеновиќ,
Белград, Србија

ПРАВИЛА ЗА ЕДНАКОВ БРОЈ, ЗБИР И ПРОИЗВОД

Во математиката често пати се сретнуваме со задачи во кои треба да се најде бројот на елементите на некое конечно множество, на пример: бројот на шестцифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на зададен број или бројот на поделби на неколку книги на учениците од некое одделение итн. Овие задачи ги нарекуваме задачи на пребројување, а делот од математиката кој се занимава со методите на решавање на задачите на пребројување (и не само со нив) се нарекува комбинаторика.

При определување на бројот на елементите на некое множество A, на неговите елементи се придружуваат природните броеви 1,2,3,4,.... Ако при тоа придружувањето се заврши со бројот n (види цртеж), тогаш велиме дека множеството A има n елементи.

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow & \downarrow \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Фактот дека множеството A има n елементи го означуваме со $|A|=n$.

На почетокот ќе дадеме неколку едноставни примери за наоѓање на бројот на елементите на конечните множества.

Пример 1. На колку различни начини 7 исти моливи може да се поделат на двајца ученици, но така што секој од нив да добие барем по еден молив?

Решение. Можни поделби се $1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2$ и $6+1$, при што првиот собирок го означува бројот на моливите кои ги добива првиот ученик. Според тоа, постојат 6 различни поделби. ♦

Пример 2. На колку начини на тројца ученици можат да им се поделат 8 исти моливи, така што првиот да добие точно еден молив, а секој од останатите двајца да добие барем по еден молив?

Решение. Ако на првиот ученик му дадеме еден молив, тогаш на другите двајца треба да им поделиме 7 моливи, а тоа според претходниот пример може да се направи на 6 начини. ♦

Пример 3. На колку начини на тројца ученици може да им се поделат 8 исти моливи, но така што секој од нив да добие барем по еден молив?

Решение. Прв начин. На следниот цртеж е дадена поделба на 8 исти моливи на тројца ученици, така што првиот ученик да добие два, вториот четири и третиот два молива:

●●|●●●●|●●

Сите можни поделби се дадени во следната табела (бројот x го означува бројот на поделбите):

Првиот добива	**Вториот и третиот добиваат**	x
1 молив	1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2, 6+1	6
2 молива	1+5, 2+4, 3+3, 4+2, 5+1	5
3 моливи	1+4, 2+3, 3+2, 4+1	4
4 моливи	1+3, 2+2, 3+1	3
5 моливи	1+2, 2+1	2
6 моливи	1+1	1
	Вкупно	**21**

Втор начин. Осумте моливи ќе ги наредиме во редица и во празнините меѓу моливите, кои ги има 7, треба да поставиме две “прегради” како на следниот цртеж.

$\bullet^1 \bullet^2 | \bullet^3 \bullet^4 \bullet^5 \bullet^6 | \bullet^7 \bullet$

Овие празнини ги означуваме со броевите 1,2,3,4,5,6 и 7. Поделбата на цртежот е определена со празнините 2 и 6, т.е. бројот 26. Сите поделби се дадени со броевите

12	13	14	15	16	17
23	24	25	26	27	
34	35	36	37		
45	46	47			
56	57				
67					.

Вакви двоцифрени броеви има 21, па оттука следува дека и бројот на поделбите на 8 исти моливи на тројца ученици, така што секој ученик добива барем по еден молив, е еднаков на 21. ♦

Пример 4. Меѓу градовите A и B има три директни пата, меѓу градовите B и C има два директни пата, а меѓу градовите C и D има два директни пата.

a) На колку начини може да се стигне од градот A до градот C?

b) На колку начини може да се стигне од градот A до градот D?

Решение. Нека патиштата меѓу градовите A и B ги означиме со 1,2 и 3, патиштата меѓу градовите B и C со 4 и 5, а патиштата меѓу градовите C и D со 6 и 7.

а) Сега едноставно можеме да ги запишеме сите патишта меѓу A и C:

$$14, 15, 24, 25, 34, 35.$$

Такви патишта има $6=3\cdot 2$, т.е. бројот на патиштата меѓу A и C е еднаков на производот на бројот на патиштата меѓу A и B и бројот на патиштата меѓу B и C.

б) Сите патишта меѓу A и D се:

$$\begin{array}{cccc} 146 & 147 & 156 & 157 \\ 246 & 247 & 256 & 257 \\ 346 & 347 & 356 & 357 \end{array}$$

Такви патишта има $12=3\cdot 2\cdot 2$, т.е. бројот на патиштата меѓу A и D е еднаков на производот на бројот на патиштата меѓу A и B, B и C, C и D. ♦

Пример 5. На колку начини 8 исти моливи, 9 исти тетратки и 10 исти блокови можат да се поделат на тројца ученици, така што секој од нив да добие барем по еден предмет од секој вид?

Решение. Во примерот 3 видовме дека 8 исти моливи можат да се поделат на тројца ученици на

$$1+2+3+4+5+6=21 \text{ начин.}$$

Аналогно се докажува дека 9 исти тетратки на тројца ученици можат да се поделат на

$$1+2+3+4+5+6+7=28 \text{ начини,}$$

а 10 исти блокови можат да се поделат на

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36 \text{ начини.}$$

Сега, слично како при определувањето на бројот на патиштата меѓу градовите A и D во пример 4, добиваме дека бројот на поделбите на 8 моливи, 9 тетратки и 10 блокови на трјца ученици е $21\cdot 28\cdot 36=21168$. ♦

Врз основа на разгледаните примери можеме да ги формулираме трите основни принципи (правила) на комбинаториката кои се користат при определувањето на бројот на елементите на конечно множество.

Правило на еднаков број. Ако меѓу елементите на множествата A и B може да се воспостави биекција, тогаш множествата A и B имаат еднаков број елементи, т.е. важи $|A|=|B|$, каде со $|A|$ е означен бројот на елементите на множеството A, т.е. δA.

Илустрацијата на ова правило е дадена на следниот цртеж:

$$A: \bullet a_1 \quad \bullet a_2 \quad \bullet a_3 \quad \dots \quad \bullet a_n$$

$$B: \bullet b_1 \quad \bullet b_2 \quad \bullet b_3 \quad \dots \quad \bullet b_n$$

Правилото на еднаков број го користиме кога сакаме да го определиме бројот на елементите на некое множество B, при што воспоставуваме обратно еднозначно пресликување на неговите елементи со елементите на некое множество A, чиј број на елементи ни е познат.

Иако формулацијата на ова правило е едноставна, а тврдењето е интуитивно јасно, сепак неговата примена не е едноставна. Причината е во тоа што за успешно применување на ова правило треба да се препознаат елементите кои ги пребројуваме. Со други зборови, при решавањето на конкретен комбинаторен проблем на пребројување на елементите треба да се занемарат неважните својства и факти од формулацијата на задачата и на елементите да им се придружат апстрактни елементи кои лесно ги пребројуваме.

Правило на збир. Ако елементите на некое множество A можеме да ги распоредиме на неколку множества $A_1, A_2, \dots, A_n$ кои по парови се дисјунктни, тогаш бројот на елементите на множеството A е еднаков на збирот на броевите на елементите на множествата $A_1, A_2, \dots, A_n$, т.е. важи равенството

$$|A|=|A_1|+|A_2|+\dots+|A_n|.$$

Така, во првиот начин при решавањето на задачата 3, сите поделби на 8 моливи на три ученика го формираат множеството A. Тоа множество го разбивме на подмножества $A_1, A_2, \dots, A_6$ при што подмножеството A_1 ги содржи оние поделби при кои првиот ученик добива еден молив, подмножеството A_2 ги содржи оние поделби при кои првиот ученик добива два молива итн.

Правило на производ. Ако првата постапка можеме да ја направиме на m различни начини, а втората постапка на n различни начини, тогаш првата и втората постапка заедно можеме да ги направиме на mn различни начини.

Правилото на производ го применивме во задачите 4 и 5. Аналогно може да се формулира правилото на производ за повеќе од две постапки, секоја од кои може да се направи на повеќе од еден начин.

На крајот од нашите разгледувања ви предлагаме неколку задачи со чие самостојно решавање ќе ги утврдите претходно стекнатите знаења.

Задачи

1. Колку четирицифрени броеви се деливи со 5, кај кои цифрите во декадниот запис не се повторуваат?

2. Во рамнината се дадени 7 точки такви, што никои три не лежат на иста права. Колку прави определуваат овие точки?

3. Во рамнината се дадени 7 прави такви, што никои две од нив не се паралелни и никои три од нив не се сечат во иста точка. Колку пресечни точки имаат овие прави?

4. Во едно одделение има 20 ученици. На колку различни начини може да се изберат претседател, секретар и благајник на одделенската заедница?

5. Колку петцифрени броеви можат да се запишат со 5 различни цифри, при што цифрите во записот не смеат да се повторуваат?

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ