ЗАНИМЛИВОСТИ СО БРОЕВИ

Бровите и нивните својства отсекогаш го фасцинирале човекот и служеле за забава. Познати се многу интересни загатки и својств а на броевите, некои од кои овде ќе наведеме.

Секогаш ист резултат А). Троцифрениот број запишан со исти цифри, поделен со збирот на своите цифри, секогаш дава количник 37. На пример:

$$333:(3+3+3)=37,\ 555:(5+5+5)=37.$$

Докажи?

Навистина, нека $\overline{xxx}$ е троцифрен број запишна со исти цифри. Тогаш, ако нивниот количник го означиме со y, добиваме:

$$y=\frac{100x+10x+x}{x+x+x}=\frac{111x}{3x}=37.$$

Забележуваме дека во постапката всушност бројот 111 го делиме со 3.

Секогаш ист резултат Б). Кажете им на вашите соученици да напишат по еден троцифрен број (скришно) што ги исполнува следниве услови:

- третата цифра да биде различна од нула,
- разликата меѓу првата и третата цифра да биде поголема од еден.

На пример, нека е запишан бројот 254. Откако ќе го сторат тоа кажете им да ги извршат следниве операции:

- да се напише неговиот обратен број (во примерот 452),
- од поголемиот од двата броеви, да се одземе помалиот (во примерот $452-254=198$),
- на новодобиениот број да се запише неговиот обратен број (во примерот 891);
- да се соберат последните два броја (во примерот $198+891=1089$).

Тогаш вие на таблата запишете го со големи букви бројот 1089. На големо изненадување кај сите ученици ке се добие истиот број 1089. Како?

Ќе докажеме дека при извршување на претходните операции, за броевите што ги исполнуваат дадените услови, секогаш се добива бројот 1089.

Ако $\overline{abc}$ е почетниот запишан број, тогаш $a\neq c, |a-c|>1$ и $a\neq 0, c\neq 0$. Неговиот обратен број е $\overline{cba}$. Нека помалиот од овие два броеви е, на пример, бројот $\overline{cba}$, т.е. $\overline{abc}>\overline{cba}$. Од овде добиваме дека $a>c$. Нивната разлика е $\overline{abc}-\overline{cba}=100a+10b+c-100c-10b-a=99(a-c)$. Бидејки a и c се цифри, при условите $a>c$ и $a-c>1$, добиваме дека разликата

$(a-c)\in\{2,3,4,5,6,7,8\}$. Понатаму, ако бројот 99 го помножиме со секој од броевите 2 3, 4, 5, 6, 7, 8, разликата $\overline{abc}-\overline{cba}$ може да биде само еден од броевите

$$99\cdot 2=198 \qquad 99\cdot 6=594$$
$$99\cdot 3=297 \qquad 99\cdot 7=693$$
$$99\cdot 4=396 \qquad 99\cdot 8=792$$
$$99\cdot 5=495$$

Забележуваме дека во сите броеви средната цифра е 9, и збирот на првата и третата цифра е 9. Значи добиваме троцифрени броеви од облик $\overline{x9(9-x)}$, каде $x\in\{1,2,3,4,5,6,7,\}$. Ако ги собереме ваквите броеви со нивните обрати броеви, секогаш добиваме

$$\begin{aligned}\overline{x9(9-x)}+\overline{(9-x)9x}&=100x+9\cdot 10+(9-x)+(9-x)\cdot 100+9\cdot 10+x\\&=100x+90+9-x+900-100x+90+x=1089.\end{aligned}$$

Збир на трети степени на два броја. Кога индискиот математичар Рамануџам лежел во болница му дошол некој пријател во посета, и по краток разговор, пријателот му спомнал дека дошол со такси со регистарски број 1729. Тогаш математичарот извикал: „Ова е навистина интересен број. Тој може да се претстави како збир на трети степени на два природни броеви, и тоа на два начини". Дали Рамануџам бил во право?

Првиот пар броеви е 1 и 12, а вториот е 9 и 10. Навистина

$$1^3+12^3=1729;\ 9^3+10^3=1729$$

Најлесно ке ги добиеме на следниов начин: Нека бараните броеви се x и y, и нека $x>y$. Тогаш важи равенството $x^3+y^3=1729$. Од овде следи $x=\sqrt[3]{1729-y^3}$. Бидејќи $y^3=1728$ за $y=12$, ги проверуваме само броевите $y\le 12$. Така за $y=9$ добиваме $x=10$, а за $y=1$ добиваме $x=12$.

Еден ист број. Напиши еден троцифрен број (на пример 235). Нему допиши му го истиот број (во примерот 235235). Добиениот број подели го со 11, резултатот со 13, а последниот добиен број со 7. Како резултат ке го добиеш почетниот број (во примерот 235). Зошто?

Нека запишаниот број е $\overline{abc}$. Му го допишуваме истиот број и добиваме број $\overline{abcabc}$. Бидејќи

$$\overline{abcabc}=1000\cdot\overline{abc}+\overline{abc}=1001\overline{abc}=11\cdot 13\cdot 7\overline{abc},$$

гледаме дека допишувањето на иститот број е всушност негово множење со бројот 1001. Така, делејки со 11, 13, 7 пак се добива почетниот број, т.е. $\frac{\overline{abcabc}}{1001}=\overline{abc}$.

Множиме со 2, 3, 4, 5 и 6, а всушност читаме во круг.

Напиши ги цифрите на бројот 142857 во кружен редослед како на цртежот десно. Движејки се во правец на стрелките на часовникот од цртежот го читаме бројот 142857. Ако го помножиме бројот 142857 со броевите 2, 3, 4, 5 и 6, добиените резултати ќе можеме да ги прочитаме од истиот бројчаник, и тоа пак движејки се во правец на стрелките на часовникот.

1

7 4

5 2

8

Навистина,

$$142857\cdot 2=285714,\ 142857\cdot 3=428571,\ 142857\cdot 4=571428,$$
$$142857\cdot 5=714285,\ 142857\cdot 6=857142$$

На прв поглед чудно, но сепак точно. Што ќе кажеш на прв поглед за равенствата

$$\sqrt{7+\frac{7}{48}}=7\sqrt{\frac{7}{48}} \text{ и } \sqrt[3]{6+\frac{6}{215}}=6\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{215}}.$$

Веројатно, без многу размислување ќе одговориш дека равенствата не се точни. Но, не брзај! Овие равенства сепак се точни и се специјален случај од поопштото равенство

$$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=a\cdot\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}},$$

кое точно бидејќи

$$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}-a+a}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^{n+1}}{a^n-1}}=\sqrt[n]{\frac{a^n a}{a^n-1}}=a\cdot\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}.$$

„Тврдоглаво“ равенство. Не е едноставно да се најдат шест различни природни броеви A, B, C, D, E и F кои го задоволуваат равенството:

$$A^2+B^2+C^2=D^2+E^2+F^2. \tag{1}$$

На пример, такви се броевите 123789, 561945, 642864, 242868, 761943 и 323787, т.е.

$$123789^2+561945^2+642864^2=242868^2+761943^2+323787^2. \tag{2}$$

Постојат и други броеви кои го задоволуваат равенството (1), но овие имаат неколку интересни својства. Еве, увери се сам.

Равенството (2) останува точно ако постепено отфрламе по една цифра од секој број од лево:

$$123789^2+561945^2+642864^2=242868^2+761943^2+323787^2$$

$$23789^2+61945^2+42864^2=42868^2+61943^2+23787^2$$

$$3789^2+1945^2+2864^2=2868^2+1943^2+3787^2$$

$$789^2+945^2+864^2=868^2+943^2+787^2$$

$$89^2+45^2+64^2=68^2+43^2+87^2$$

$$9^2+5^2+4^2=8^2+3^2+7^2$$

Навистина, но исто се случува ако во (2) постепено отфрламе по една цифра од десно:

$$123789^2+561945^2+642864^2=242868^2+761943^2+323787^2$$

$$12378^2+56194^2+64286^2=24286^2+76194^2+32378^2$$

$$1237^2+5619^2+6428^2=2428^2+7619^2+3237^2$$

$$123^2+561^2+642^2=242^2+761^2+323^2$$

$$12^2+56^2+64^2=24^2+76^2+32^2$$

$$1^2+5^2+6^2=2^2+7^2+3^2$$

Ако истовремено отфрлиме од секој број по една цифра и од лево и од десно. Чудно, па пак добиваме точни равенства:

$$123789^2+561945^2+642864^2=242868^2+761943^2+323787^2$$

$$2378^2+6194^2+4286^2=4286^2+6194^2+2378^2$$

$$37^2+19^2+28^2=28^2+19^2+37^2$$

Што да се прави! Навистина некое „тврдоглаво равенство“!

Четири тројки и броевите од 1 до 9. Дали може со употреба на четири тројки, загради и знаци за собирање, одземање, множење и делење да се добијат сите броеви од 1 до 9. Притоа задолжително е да се искористат сите четири тројки.

Може, на пример:

$3:3+3-3=1$, $3:3+3:3=2$, $(3+3+3):3=3$,

$(3\cdot3+3):3=4$, $3+3-3:3=5$, $3+3+3-3=6$,

$3+3+3:3=7$, $3\cdot3-3:3=8$, $3\cdot3+3-3=9$.

Нумерички палиндром со 1. Во следните равенства лево имаме една, а десно друга симетрија.

$$1\cdot 1=1$$
$$11\cdot 11=121$$
$$111\cdot 111=12321$$
$$1111\cdot 1111=1234321$$
$$11111\cdot 11111=123454321$$
$$111111\cdot 111111=12345654321$$
$$1111111\cdot 1111111=1234567654321$$
$$11111111\cdot 11111111=123456787654321$$
$$111111111\cdot 111111111=12345678987654321$$

Низа од осумки. Во следните равенства десно имаме низи од осумки, кои се добиваат на едноставен и интересен начин.

$$9\cdot 9+7=88$$
$$98\cdot 9+6=888$$
$$987\cdot 9+5=8888$$
$$9876\cdot 9+4=88888$$
$$98765\cdot 9+3=888888$$
$$987654\cdot 9+2=8888888$$
$$9876543\cdot 9+1=88888888$$
$$98765432\cdot 9+0=888888888$$

Низа од единици. Во следните равенства десно имаме низи од единици, кои се добиваат на едноставен и интересен начин.

$$1\cdot 9+2=11$$
$$12\cdot 9+3=111$$
$$123\cdot 9+4=1111$$
$$1234\cdot 9+5=11111$$
$$12345\cdot 9+6=111111$$
$$123456\cdot 9+7=1111111$$
$$1234567\cdot 9+8=11111111$$
$$12345678\cdot 9+9=111111111$$
$$123456789\cdot 9+10=1111111111$$

Пирамида од броеви. Принципот според кој е конструирана оваа пирамида од броеви не треба посебно да се објаснува:

$$1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$$

Дали и понатаму ќе се запазува воочената законормерност, ако продолжиме да запишуваме нови броеви во пирамидата? Што мислите вие?

Еден број на повеќе начини на запишување. Бројот 100 може да се запише на четири различни начини, така што секој пат се користат по пет исти цифри.

За да го запишеме бројот 100 со помош на пет еднакви цифри, ќе ги користиме и знаците за основните сметковни операции. Така, ги добиваме, на пример, овие четири различни записи на бројот 100:

$111 - 11 = 100;$

$33 \cdot 3 + 3 : 3 = 100;$

$(5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5 = 100;$

$5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100.$

Секогаш единица. Пред тебе се наоѓаат седум реда цифри.

1	2	3						
1	2	3	4					
1	2	3	4	5				
1	2	3	4	5	6			
1	2	3	4	5	6	7		
1	2	3	4	5	6	7	8	
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Без да го менуваш редоследот на цифрите, стави меѓу нив знаци на аритметичките операции така, што секогаш добиениот резултат во секој ред биде 1. Можеш да користиш и загради. Доколку е потребно, две последователни цифри можеш да ги сметаш за еден број. Најди две решенија: едно, со користење на знаците на сите четири основни операции, а друго без да се користи одземањето.

Подготвил
Ристо Малчески