Самоил Малчески, Скопје
Марија Попоска, Охрид

МЕТОД НА ИНВАРИЈАНТИ

Во статиите [2] - [5] е разработен метод за решавање на задачи од следниов вид:

Даден е некој математички објект A и дозволени трансформации на истиот. Се поставува прашањето дали со повеќекратна примена на дозволените трансформации дадениот објект A може да се претвори (трансформира) во некој друг однапред зададен објект B.

Суштината на овој метод се состои во следново:

- наоѓаме својство кое го има објектот A и кое не се менува кога на A ќе се примени која било од допустливите трансформации,
- докажуваме дека објектот B го нема наведеното својство, и
- заклучуваме дека при произволно реализирање на допустливите трансформации од објектот A никогаш нема да се добие објектот B.

Својството кое го има објектот A и кое не се менува кога на A ќе се примени допустлива трансформација го нарекуваме *инваријанта* на допустливата трансформација, а претходно опишаниот метод го нарекуваме *метод на инваријанти*.

Во следните разгледувања ќе се осврнеме на примена на наведениот метод при решавање на повеќе типови задачи.

Задача 1. Лист хартија е расечен на 7 делови. Потоа се земаат неколку од тие делови и секој од нив се расекува на 7 делови. Дали може со повторување на оваа операција да се добијат точно 2021 делови?

Решение. Ако во некој чекор земеме k листови, тогаш добиваме $7k$ листови. Тоа значи дека бројот на листовите се зголемил за $7k-k=6k$. На почетокот имаме 1 лист хартија, па затоа по секој чекор бројот на добиените листови е број од облик $6m+1,\ m\in\mathbb{N}$. Но, $2021=336\cdot 6+5$, што значи дека 2021 е од облик $6m+5$, па затоа од дадениот лист со опишаната постапка не може да се добијат 2021 листови. ■

Задача 2. На масата се ставени 6 чаши. Од нив 5 се поставени правилно, а една е поставена со дното нагоре. Дозволено е истовремено да превртиме било кои 4 чаши. Дали со повторување на оваа операција може да се постигне сите чаши да се правилно поставени.

Решение. Да видиме како се менува бројот на правилно поставените чаши по секој чекор. Имаме:

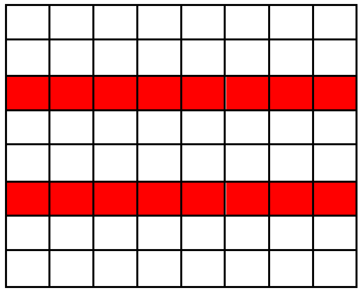
- ако сите 4 чаши стоеле правилно, тогаш бројот на правилно поставените чаши се намалува за 4,
- ако 3 чаши стоеле правилно и 1 неправилно, тогаш бројот на правилно поставените чаши се намалува за 2,
- ако 2 чаши стоеле правилно и 2 неправилно,тогаш бројот на правилно поставените чаши не се менува,
- ако 1 чаша стоела правилно и 3 неправилно, тогаш бројот на правилно поставените чаши се зголемува за 2,
- ако сите четири чаши стоеле неправилно, тогаш бројот на правилно поставените чаши се зголемува за 4.

Според тоа, во секој случај бројот на правилно поставените чаши се менува за парен број, т.е парноста на бројот на правилно поставените чаши е инваријанта. Но, на почетокот имаме 5 такви чаши, а треба да добиеме 6 правилно поставени чаши, па затоа со повоторување на оваа операција не може да се постигне сите чаши да се правилно поставени. ■

Задача 3. Во еден ред се поставени 100 различни жетони. Во еден потег два жетона може да ги заменат местата ако меѓу нив има точно еден жетон. Дали по конечен број такви потези жетоните може да се наредат во обратен редослед?

Решение. Да ги нумерираме местата на кои стојат жетоните со броевите од 1 до 100 од лево кон десно. Според условот на задачата, два жетони кои ги менуваат местата се наоѓаат на места со иста парност. Затоа, по било кој чекор ниту еден жетон не може да ја смени парноста на местото на кое се наоѓа. Според тоа, парноста на местото на кое се наоѓа еден означен жетон е инваријанта. Да го разгледаме првиот жетон. Имаме, првиот жетон кој се наоѓа на првото (непарно) место никогаш не може да дојде на стотото (парно) место. Последното значи дека жетоните не може да се наредат во обратен редослед. ■

Задача 4. Во секое поле од 8×8 табела е запишан по еден цел број. Дозволено е да се избере било кој 3×3 (составен од 9 полиња) или 4×4 квадрат (сотавен од 16 полиња) и секој број запишан во полињата на избраниот квадрат да се зголеми за 1. Дали секоја почетна табела со примена на вакви операции може да се трансформира во табела во која сите запишани броеви се парни.



Решение. Да ги обоиме полињата од третиот и шестиот ред како на цртежот десно. Забележуваме дека секој 3×3 квадрат содржи 6 бели полиња, а секој 4×4 содржи 8 или 12 бели полиња. Во секој случај бројот на белите полиња во секој избран квадрат е парен број. Оттука следува дека со секој дозволен потез збирот на броевите запишани во белите полиња се зголемува за парен број, т.е. парноста на овој збир е инваријанта. Тоа значи, ако во почетната табела збирот на броевите запишани во белите полиња е непарен, тогаш тој и по секој дозволен чекор ќе биде непарен број. Ова значи дека меѓу броевите запишани на белите полиња ќе има барем еден непарен број, што значи дека одговорот на поставеното прашање е НЕ. ■

Задача 5. На масата во круг се наредени 10 жетони. Жетоните од горната страна се црвени, а од долната се сини. Дозволено е да се реализираат следниве операции:

(а) да се превртат четири последователни жетони;

(б) да се превртат четири вака $\oplus\oplus\odot\oplus\oplus$ распоредени жетони

($\oplus$- жетон кој влегува во четворката, $\odot$ - жетон кој не влегува во четворката). Дали по определен број примени на наведените операции може да се постигне сите жетони да бидат свртени нагоре со сината боја.

Решение. Ги нумерираме жетоните редоследно со броевите од 1 до 10. На тој начин добиваме 5 парни жетони (означени со парни броеви) и 5 непарни жетони. На почетокот имаме 5 непарни црвени жетони (свртени со црвената страна нагоре). Лесно се гледа дека и во случајот (а) и во случајот (б), парноста на бројот на непарните црвени жетони е инваријантна за операцијата. Бидејќи во почетокот бројот на непарните црвени жетони е непарен (еднаков е на 5), тој по секој потез ќе биде непарен, т.е. никогаш нема да биде еднаков на 0. Според тоа, никогаш не може да се постигне сите жетони да бидат завртени со сината страна нагоре. ■

Задача 6. На таблата знакот плус е запишан 20 пати, а знакот минус е запишан 25 пати. Дозволено е да се избришат два знака и наместо нив да се запише знак плус, ако избришаните знаци се еднакви, а знак минус, ако избришаните знаци се различни. Оваа операција се повторува се додека на таблата не остане еден знак. Кој е тој знак?

Решение. *Прв начин*. Да забележиме дека по секоја операција (бришење на два знака и запишување на еден) бројот на знаците минус се намалува за два (ако се избришани два знака минус и е запишан еден знак плус) или останува ист (ако се избришани два знака плус и е запишан еден знак плус, или е избришан еден знак плус и еден знак минус и е запишан знак минус). Бидејќи на почетокот на таблата има 25 знаци минус (непарен број), заклучуваме дека и на крајот ќе има непарен број знаци минус. Значи, кога на таблата ќе остане еден знак, тоа ќе биде знакот минус, без разлика како се бришени и запишувани знаците.

Втор начин. Секој знак плус да го замениме со бројот 1, а секој знак минус со бројот -1 и да претпоставиме дека операцијата бришење и запишување на знаците се врши според условот на задачата. Значи, ако се избришат два еднакви броја, тогаш запишуваме 1, а ако се избришат различни броеви, тогаш запишуваме -1. Притоа, по секој чекор производот на запишаните броеви на таблата не се менува. На почетокот тој производ е еднаков на $1^{20}\cdot(-1)^{25}=-1$, па затоа тој ќе биде еднаков на -1 и на крајот. Според тоа, кога на таблата ќе остане само еден број, тоа ќе биде бројот -1, што значи дека останува знакот минус.

Трет начин. Секој знак плус да го замениме со бројот 0, а секој знак минус со бројот 1. При вакви ознаки збирот на избришаните броеви има иста парност како и запишаниот број. Според тоа, збирот на сите запишани броеви не ја менува парноста по промената на опишаната операција. На почетокот овој збир е 25, т.е. е непарен број, па затоа и на крајот ќе биде непарен број. Значи, кога на таблата ќе остане еден број, тој мора да е непарен, т.е. бројот 1, што при воведените ознаки значи дека на таблата ќе остане знакот минус. ■

Задача 7. На таблата се запишани 2021 нули, 2022 единици и 2023 двојки. Дозволено е во еден чекор да се избришат две различни цифри и да се запише онаа цифра 0, 1 или 2 која не е избришана во тој чекор.

а) Ако на таблата останала само една цифра, определи која е таа цифра.

б) Дали може по определен број чекори на таблата да останат запишани само нули:

Решение. Да забележиме дека по секој чекор се менува парноста на бројот на нулите, бројот на единиците и бројот на двојките. Според тоа, по секој чекор бројот на нулите и бројот на двојките кои се запишани на таблата се со иста парност, а бројот на единиците има различна парност од претходните два броја (на почетокот имавме непарен број нули, непарен број двојки и парен број единици). Оттука следува дека одговорите на поставените прашања се:

а) Последната цифра може да биде само единица.

б) Не е можно, бидејќи тоа би значело дека на таблата останале нула единици и нула двојки, односно бројот на единиците и двојките би бил со иста парност, што е противречност. ■

Задача 8. Во полињата на 4×4 квадрат се запишани знаците $+$ и $-$ како на цртежот десно. Дозволено е во еден потез да се промената занаците во сите полиња на еден ред, една колона или една дијагонала (Дијагонала може да содржи 4, 3, 2 или 1 поле, т.е. и аголните полиња се сметаат за дијагонали.) Дали со повторување на оваа операција може да се добие квадрат во чии полиња е запишан само знакот $+$?

+	+	−	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

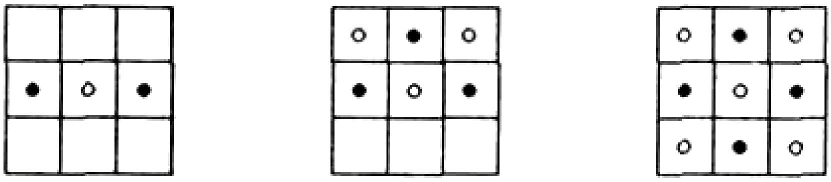
Решение. Да го замениме секој знак плус со бројот $+1$, а секој знак мину со бројот -1. Да ги воочиме полињата кои се означени на цртежот десно.

	•	•	
•			•
•			•
	•	•	

Понатаму, да забележиме дека во секој чекор се менува знакот точно во две од означените полиња или во ниту едно од овие полиња. Според тоа, производот на броевите во овие осум полиња не се менува при примена на дозволената операција. На почетокот овој производ е еднаков на -1, па затоа тој мора да е еднаков на -1 и по секој чекор. Значи, не е можно да се добие табела во која во секое поле е запишан само знакот плус, бидејќи во тој случај разгледуваниот производ би бил еднаков на 1. ■

Задача 9. Градина во форма на квадрат 10×10 е поделена на 100 единечни квадрати (полиња). На почетокот 9 од тие 100 полиња се зараснати со коров. По секоја единица време со коров зараснува и секое поле кое пред тоа има барем две соседни полиња кои биле зараснати со коров. (Соседни се полињата кои имаат заедничка страна.) Дали целата градина, т.е. целиот 10×10 квадрат може да зарасне во коров?

Решение. Да забележиме дека кога некое ново поле зарасне во коров, тогаш периметарот на фигурата која зараснала во коров не се зголемува.



а) б) в)

Навистина, кога ново поле ќе зарасне во коров, тогаш барем две страни на тоа поле кои биле граница на областа која е под коров престануваат да бида граница на таа областа. Истовремено, најмногу две страни на тоа поле, кои не биле граница на областа зарасната под коров, стануваат дел од границата на таа област. Овие тврдења едноставно може да се проверат со помош на цртежите а), б) и в). На овие цртежи со симболот $\bullet$ се означени полињата во некој 3×3 квадрат, кои до некој момент биле зараснати со коров, а со симболот $\circ$ полињата кои ќе зараснат под коров. Притоа, на цртежот а) е прикажано едно поле кое во некој момент има точно две соседни полиња зараснати со коров, на цртежот б) е прикажано едно поле кое во некој момент има точно три полиња зараснати со коров, а на цртежот в) е прикажано едно поле кое во некој момент има четири соседни полиња зараснати со коров.

Бидејќи областа која на почетокот е зарасната со коров има периметар помал или еднаков на $9\cdot 4=36$, а периметарот на 10×10 квадрат е 40, заклучуваме дека целата градина, т.е. целиот 10×10 не може да зарасне во коров. ■

Задача 10. Низа броеви се формира на следниов начин: првиот број е 3^{2000}, а секој следен број е еднаков на збирот на цифрите на претходниот број. Определи го бројот кој во таа низа се наоѓа на местото број 2000.

Решение. Ако еден број е делив со 9, тогаш и збирот на неговите цифри е делив со 9. Бидејќи $3^{2000}=9\cdot 3^{1998}$, заклучуваме дека секој број во разгледуваната низа е делив со 9.

За броевите во низата точна е следнава оценка. Бидејќи $3^2<10$, добиваме дека $3^{2000}<10^{1000}$, што значи дека бројот 3^{2000} нема повеќе од 1000 цифри. Според тоа, вториот број во низата не е поголем од $9\cdot 1000<10^4$, т.е. тој нема повеќе од четири цифри. Значи, третиот број во низата не е поголем од $4\cdot 9=36$, т.е. тој е некој од броевите 4, 18, 27 или 36. Сега е јасно дека четвртиот и секој следен број во низата е 9. ■

Задача 11. Круг е поделен на 10 сектори и во секој сектор е ставен по еден жетон. Дозволено е во еден чекор да се пресметат два жетони, но така што секој жетон се премести во соседно поле и тие два жетони при преместувањето се движат во спротивни насоки. Дали со повторување на оваа операција може сите жетони да се преместат во во едно поле?

Решение. Секторите редоследно во избрана насока да ги нумерираме со броевите 0, 1, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8 и 9. На секој жетон му го придружуваме бројот на полето во кое се наоѓа тој жетон и да видиме како со примена на наведената операција се менува остатокот кој при делење со 10 го дава збирот на броевите придружени на тие жетони.

а) Реализираме операција при која не се преместува жетон од полето 9 на полето 0 или од полето 0 на полето 9. Тогаш жетон од полето k се преместува на полето $k+1$ и жетон од полето m се преместува на полето $m-1$, каде $0 \leq k \leq 8$ и $1 \leq m \leq 9$. Во овој случај збирот на придружените броеви пред и по операцијата е еднаков, па затоа и остатокот е еднаков.

б) Едниот жетон се преместува од полето 9 на полето 0, а другиот од полето m се преместува на полето $m-1$, каде $1 \leq m \leq 9$. Притоа збирот на придружените броеви се намалува за 10, па затоа остатокот не се менува.

в) Едниот жетон се преместува од полето 0 на полето 9, а другиот од полето k се преместува на полето $k+1$, каде $o \leq k \leq 8$. Притоа збирот на придружените броеви се зголемува за 10, па затоа остатокот не се менува.

г) Едниот жетон се преместува од полето 0 на полето 9, а другиот жетон се преместува од полето 9 на полето 0. Збирот на броевите несе менува, па затоа и остатокот не се менува.

Во почетната полжба збирот на броевите придружени на жетоните е еднаков на $\sum_{i=0}^{9} i = 45$, а остатокот при делење со 10 е еднаков на 5. Во положба при која сите жетони ќе бидат во полето k збирот на придружените броеви ќе биде $10k$, и тој збир е делив со 10. Според тоа, со дозволената операција не е можно сите броеви да се преместат на едно поле.

Литература

1. Tošić, R.: Invarijante – varijacije na temu, ALEF, Novi Sad, 1996
2. Малчески, Р.: Метод на инваријанти I, Нумерус/Математички талент
3. Малчески, Р.: Метод на инваријанти II, Нумерус/Математички талент
4. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма/Математички талент
5. Цветковски, З. Малчески, Р.: Метод на инваријанти II, Математички талент
6. Младеновиќ, П.: Инавријанта, Београд