O linearnom programiranju, IV, 1. dio

Luka Neralić[1], *Zagreb*

Dualitet u linearnom programiranju. Uvod

Dualitet ima važnu ulogu u matematičkom programiranju općenito, a posebno u linearnom programiranju. Na tom pojmu osnivaju se mnogi teorijski rezultati, kao i metode i algoritmi za rješavanje različitih problema linearnog programiranja. Osim toga, značajna je interpretacija rješenja tzv. dualnog problema za polazni ili primarni problem, posebno ekonomska. (Vidi npr. Neralić [10], str. 82–83, 114–123, Martić [5], str. 77–87, 96–98, Hadley [1], str. 221–266, 483–487, Murty [6], str. 182–220, 249–265, Wu, Coppins [11], str. 110–126, 142–147, Nash, Sofer [7], str. 144–163, 464–480, Hillier, Lieberman [2], str. 230–254.)

Primjer 10. Razmotrimo sljedeći primjer problema alokacije resursa. Dva proizvoda izrađuju se na tri grupe strojeva. Utrošeni sati rada po jedinici proizvoda, kapaciteti grupa strojeva (u satima) i profit po jedinici proizvoda (u tisućama kuna), navedeni su u tabeli 1. Problem se sastoji u tome da se s raspoloživim resursima ostvari proizvodnja za koju će ukupan profit biti maksimalan.

grupe strojeva	utrošeni sati P_1	po jedinici proizvoda P_2	kapaciteti strojeva
S_1	5	4	600
S_2	1	2	240
S_3	5	2	500
profit	70	80	

Tabela 1. Podaci za primjer alokacije resursa.

Neka je x_1 odnosno x_2 nepoznata količina proizvoda P_1 odnosno P_2 koju treba proizvesti uz zadane uvjete. Tada se postavljeni problem može formulirati kao linearni program maksimizacije u standardnom obliku:

$$\max z = 70x_1 + 80x_2$$

[1] Autor je redoviti profesor na Ekonomskom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, e-mail: lneralic@efzg.hr

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcl} 5x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 600 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 240 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 500 \end{array}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Svođenjem tog problema na kanonski oblik pomoću dopunskih varijabli x_3, x_4 i x_5 dobivamo sljedeći problem linearnog programiranja

$$\max z = 70x_1 + 80x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcccl} 5x_1 + 4x_2 & + & x_3 & & = 600 \\ x_1 + 2x_2 & + & & + \ x_4 & = 240 \\ 5x_1 + x_2 & & & +x_5 & = 500 \end{array}$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0.$$

Taj se problem dalje može svesti na oblik (vidi Neralić [9], str. 204–205) u kojem je funkcija cilja z stalna bazična varijabla, za koju želimo doseći maksimalnu vrijednost, uz ograničenje

$$z - 70x_1 - 80x_2 - 0x_3 - 0x_4 - 0x_5 = 0,$$

i uz sva preostala gornja ograničenja. Simpleks metodom dobiveno je rješenje promatranog problema, koje se može očitati iz treće simpleks tablice tabele 2. Naime, u toj tablici u retku s indeksom 0 su svi elementi nenegativni, pa je odgovarajuće bazično moguće rješenje optimalno. Pritom su bazične varijable $x_1^* = 40$, $x_2^* = 100$, $x_5^* = 100$, dok su nebazične varijable $x_3^* = 0$ i $x_4^* = 0$. Osim toga, optimalna vrijednost funkcije cilja je $z^* = 10\,800$ tisuća kuna i to je maksimalan profit. Istaknimo, kako zamjenom optimalnih vrijednosti varijabli u ograničenja problema proizlazi da su kapaciteti prve i druge grupe strojeva u potpunosti iskorišteni ($x_3^* = 0$ i $x_4^* = 0$), dok kod treće grupe strojeva imamo neiskorišteni kapacitet od 100 sati ($x_5^* = 100$).

ind. ret. i	baz. var.	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	z	1	-70	-80	0	0	0	0
1	x_3	0	5	4	1	0	0	600
2	x_4	0	1	2^*	0	1	0	240
3	x_5	0	5	2	0	0	1	500
0	z	1	-30	0	0	40	0	9 600
1	x_3	0	3^*	0	1	-2	0	120
2	x_2	0	$1/2$	1	0	$1/2$	0	120
3	x_5	0	4	0	0	-1	1	260
0	z	1	0	0	10	20	0	10 800
1	x_1	0	1		$1/3$	$-2/3$	0	40
2	x_2	0	0	1	$-1/6$	$5/6$	0	100
3	x_5	0	0	0	$-4/3$	$5/3$	1	100

Tabela 2. Simpleks tablice u rješavanju primjera 10.

Postavlja se pitanje za koliko bi se tisuća kuna (približno) promijenio optimalni profit $z^* = 10\,800$, ako bi se, recimo, kapacitet prve grupe strojeva povećao za jednu jedinicu, tj. sa 600 sati na 601 sat? Isto pitanje može se postaviti za drugu, odnosno treću grupu strojeva. Odgovore na ta pitanja dat će nam rješenje tzv. dualnog problema, kojeg ćemo formulirati najprije za razmatrani primjer tzv. **standardnog problema maksimizacije**

$$\max z(x_1, x_2) = 70x_1 + 80x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 600 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 240 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 500 \\ \multicolumn{5}{c}{x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,} \end{array}$$

u kojem se maksimizira funkcija cilja, dok su ograničenja u obliku nejednadžbi tipa $\leqslant$, a sve varijable moraju zadovoljavati ograničenje nenegativnosti.

Naime, polazeći od promatranog problema, kojeg nazovimo **primarnim problemom** (ili **primalom**), do **dualnog problema** (ili **duala**) doći ćemo uvođenjem varijabli λ_1, λ_2 i λ_3, koje odgovaraju prvom, drugom i trećem ograničenju primala, respektivno. Koeficijenti u funkciji cilja dualnog problema, koju ćemo označiti s $h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ i minimizirati, bit će koeficijenti desnih strana ograničenja primala 600, 240 i 500. To znači da će dualni problem biti problem

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 600\lambda_1 + 240\lambda_2 + 500\lambda_3$$

uz pripadna ograničenja. Naime, svakoj varijabli primarnog problema odgovarat će jedno ograničenje u dualu, koje će biti nejednadžba tipa $\geqslant$, i u njemu će na lijevoj strani biti zbroj produkata koeficijenata u stupcu uz tu varijablu i odgovarajućih dualnih varijabli, a na desnoj strani koeficijent u funkciji cilja primala uz tu varijablu. Prema tome, varijabli x_1 odgovarat će u dualu ograničenje

$$5\lambda_1 + 1\lambda_2 + 5\lambda_3 \geqslant 70.$$

Na lijevoj strani tog ograničenja su troškovi resursa za proizvodnju jedinice proizvoda P_1, dok je na desnoj strani profit po jedinici tog proizvoda. Prema tome, to ograničenje u dualu izražava činjenicu da profit po jedinici tog proizvoda ne može biti veći od troškova resursa potrebnih za njegovu proizvodnju. Analogno tome vrijedi i za varijablu x_2, kojoj odgovara ograničenje

$$4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \geqslant 80.$$

Pritom funkcija cilja duala predstavlja ukupnu vrijednost raspoloživih resursa. Kako su sva ograničenja u primalu tipa $\leqslant$, tada za dualne varijable koje im odgovaraju, mora vrijediti ograničenje nenegativnosti, tj.

$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0.$$

Dakle, dualni problem (ili dual) polaznog primarnog problema je

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 600\lambda_1 + 240\lambda_2 + 500\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcr} 5\lambda_1 + 1\lambda_2 + 5\lambda_3 & \geqslant & 70 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 & \geqslant & 80 \\ \multicolumn{3}{c}{\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0.} \end{array}$$

Napomenimo da se u ovom slučaju radi o tzv. simetričnom obliku dualiteta, gdje je dualni problem tzv. standardni problem minimizacije.

Istaknimo da je uz optimalno rješenje primarnog problema simpleks metodom, u posljednjoj simpleks tablici tabele 2 također dobiveno i optimalno rješenje dualnog problema, u retku s indeksom 0 ispod dopunskih varijabli. To rješenje je $\lambda_1^* = 10$, $\lambda_2^* = 20$ i $\lambda_3^* = 0$. Lako je provjeriti da je optimalna vrijednost funkcije cilja duala $h^* = 10\,800$, što znači da su optimalne vrijednosti funkcija cilja primala i duala jednake. Za optimalne vrijednosti dualnih varijabli kažemo da su "**cijene u sjeni**" ili "**dualne cijene**" ili "**oportunitetni troškovi**". Naime, dualne cijene predstavljaju određenu "vrijednost" jednog sata odgovarajuće grupe strojeva, što konkretno znači da je za proizvođača, čiji se proizvodni program razmatra, vrijednost jednog sata prve, druge i treće grupe strojeva jednaka $\lambda_1^* = 10$, $\lambda_2^* = 20$ i $\lambda_3^* = 0$, respektivno. Osim toga, optimalna vrijednost dualne varijable predstavlja približnu promjenu optimalne vrijednosti funkcije cilja primarnog problema, koja je rezultat povećanja koeficijenta desne strane ograničenja, kojemu odgovara ta varijabla, za jednu jedinicu. To u razmatranom primjeru znači da bi povećanje kapaciteta prve grupe strojeva sa 600 sati na 601 sat, rezultiralo povećanjem maksimalnog profita $z^* = 10\,800$ za približno $\lambda_1^* = 10$, tj. na $10\,810$. Slična je interpretacija za drugu grupu strojeva i $\lambda_2^* = 20$. Kako kapacitet treće grupe strojeva nije u potpunosti iskorišten (postoji višak od $x_5^* = 100$ sati), njegova dualna cijena jednaka je nuli, tj. $\lambda_3^* = 0$. Naime, uz povećanje kapaciteta te grupe strojeva s 500 na 501, optimalna vrijednost profita ostala bi nepromijenjena, jer je $\lambda_3^* = 0$. Optimalna vrijednost dualne varijable također predstavlja i "oportunitetni trošak", jer se može usporediti povećanje profita i vrijednost ulaganja u proširenje kapaciteta za jednu jedinicu, te vidjeti isplati li se proširenje kapaciteta. Ukoliko je vrijednost ulaganja veća od povećanja profita, proširenje kapaciteta se ne isplati.

Pokažimo još na promatranom primjeru da je dual od duala jednak primalu. Naime, dualni problem može se pisati u ekvivalentnom obliku

$$\max \overline{h}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -600\lambda_1 - 240\lambda_2 - 500\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcr} -5\lambda_1 - 1\lambda_2 - 5\lambda_3 & \leqslant & -70 \\ -4\lambda_1 - 2\lambda_2 - 2\lambda_3 & \leqslant & -80 \end{array}$$

$$\lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0,$$

pri čemu je $\min h = -\max \overline{h}$. Uvođenjem dualnih varijabli x_1 i x_2, koje odgovaraju prvom i drugom ograničenju duala, istim postupkom kao i ranije u formuliranju dualnog problema, dobivamo dual tog problema u obliku

$$\min \overline{z}(x_1, x_2) = -70x_1 - 80x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} -5x_1 & - & 4x_2 & \geqslant & -600 \\ -x_1 & - & 2x_2 & \geqslant & -240 \\ -5x_1 & - & 2x_2 & \geqslant & -500 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Dobiveni se problem može napisati u ekvivalentnom obliku kao

$$\max z(x_1, x_2) = 70x_1 + 80x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 600 \\ x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 240 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & \leqslant & 500 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,$$

gdje je $\min \overline{z} = -\max z$, a to je upravo primarni problem (ili primal). (Vidi npr. Hadley [1], str. 222–224.) Napomenimo da ta tvrdnja vrijedi i u općem slučaju.

Na temelju dosadašnjih razmatranja možemo navesti ova pravila za formuliranje dualnog problema za zadani standardni problem maksimizacije (ili minimizacije): (a) Svakom ograničenju primala treba pridružiti jednu varijablu u dualu; (b) Koeficijenti desnih strana ograničenja u primalu postaju koeficijenti funkcije cilja u dualu; (c) Koeficijenti funkcije cilja u primalu postaju koeficijenti desnih strana ograničenja u dualu; (d) Svakoj varijabli primala treba pridružiti jedno ograničenje u dualu; (e) Ograničenja tipa $\leqslant$ (odnosno $\geqslant$) u primalu prelaze u ograničenja tipa $\geqslant$ (odnosno $\leqslant$); (f) Koeficijenti u stupcu uz varijablu primala postaju koeficijenti uz varijable u retku koji je ograničenje duala; (g) Ako je primal problem maksimizacije (odnosno minimizacije), dual je problem minimizacije (odnosno maksimizacije); (Vidi npr. Wu, Coppins [11], str. 115–116. Napomenimo da autori nazivaju kanonskim oblikom problem koji se kod nas naziva standardnim oblikom problema linearnog programiranja.)

Postavlja se pitanje kako izgleda dualni problem ako je u primalu neko ograničenje u obliku jednadžbe? Zatim, kako formulirati dual problema u kojem na neku varijablu nema ograničenja nenegativnosti? Odgovore na ta pitanja dat ćemo u sljedećim primjerima.

Primjer 11. Razmotrimo ovaj problem linearnog programiranja

$$\max z(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 32 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leqslant & 24 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Istaknimo da je prvo ograničenje u obliku jednadžbe, što znači da problem nije u standardnom obliku. Zbog toga je potrebno najprije prevesti ga u standardni oblik, a to je moguće zamjenom jednadžbe $x_1 + x_2 = 10$ dvjema nejednadžbama

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leqslant & 10 \\ x_1 & + & x_2 & \geqslant & 10. \end{array}$$

Kako sva ograničenja moraju biti tipa $\leqslant$, potrebno je još drugu nejednadžbu pomnožiti s -1 i pisati je u obliku $-x_1 - x_2 \leqslant -10$. Na taj način dobivamo promatrani problem u ekvivalentnom standardnom obliku

$$\max z(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leqslant & 10 \\ -x_1 & - & x_2 & \leqslant & -10 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 32 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leqslant & 24 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Primjenom navedenih pravila, uz uvođenje dualnih varijabli λ_1', λ_1'', λ_2 i λ_3, dobivamo dualni problem u obliku

$$\min h(\lambda_1', \lambda_1'', \lambda_2, \lambda_3) = 10\lambda_1' - 10\lambda_1'' + 32\lambda_2 + 24\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1' - \lambda_1'' + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & \geqslant & 12 \\ \lambda_1' - \lambda_1'' + 4\lambda_2 + \lambda_3 & \geqslant & 8 \end{array}$$

$$\lambda_1' \geqslant 0,\ \lambda_1'' \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0.$$

Ako uvedemo varijablu $\lambda_1 = \lambda_1' - \lambda_1''$, pri čemu vrijedi $\lambda_1' \geqslant 0$, $\lambda_1'' \geqslant 0$, tada je očigledno da varijabla λ_1 može poprimiti negativne vrijednosti (za $\lambda_1' < \lambda_1''$), vrijednost jednaku nuli (za $\lambda_1' = \lambda_1''$), te pozitivne vrijednosti (za $\lambda_1' > \lambda_1''$). Tada se uz pomoć varijable λ_1, na koju nema ograničenja nenegativnosti, dual može pisati u obliku

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 10\lambda_1 + 32\lambda_2 + 24\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) & \geqslant & 12 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3) & \geqslant & 8 \end{array}$$

$$\lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0.$$

Prema tome, pokazali smo da za neko ograničenje u obliku jednadžbe u primalu, na odgovarajuću dualnu varijablu u dualu nema ograničenja nenegativnosti. To znači da navedenim pravilima za formuliranje duala možemo dodati i pravilo: (h) Ako je ograničenje u primalu u obliku jednadžbe, na pridruženu dualnu varijablu u dualu nema ograničenja nenegativnosti.

Primjer 12. Sada ćemo razmotriti nešto izmijenjen primjer 11, u sljedećem obliku

$$\max z(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leqslant & 10 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & \leqslant & 32 \\ 3x_1 & + & x_2 & \leqslant & 24 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0.$$

Istaknimo da na varijablu x_2 nema ograničenja nenegativnosti. Za svođenje problema u standardni oblik uvest ćemo varijable $x_2' \geqslant 0$ i $x_2'' \geqslant 0$ i izvršiti zamjenu $x_2 = x_2' - x_2''$. Na taj način dobivamo ekvivalentni oblik promatranog problema

$$\max z(x_1, x_2', x_2'') = 12x_1 + 8x_2' - 8x_2''$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2' - x_2'' & \leqslant & 10 \\ 2x_1 & + & 4x_2' - 4x_2'' & \leqslant & 32 \\ 3x_1 & + & x_2' - x_2'' & \leqslant & 24 \end{array}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2' \geqslant 0,\ x_2'' \geqslant 0.$$

Dual tako dobivenog problema je

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 10\lambda_1 + 32\lambda_2 + 24\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & \geqslant & 12 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 & \geqslant & 8 \\ -\lambda_1 - 4\lambda_2 - \lambda_3 & \geqslant & -8 \\ \lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0. \end{array}$$

Posljednja dva ograničenja $\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 \geqslant 8$ i $-\lambda_1 - 4\lambda_2\lambda_3 \geqslant -8$ ekvivalentna su jednom ograničenju u obliku jednadžbe $\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 = 8$, pa se dual može pisati u obliku

$$\min h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 10\lambda_1 + 32\lambda_2 + 24\lambda_3$$

uz ograničenja

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 & \geqslant & 12 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 & = & 8 \\ \lambda_1 \geqslant 0,\ \lambda_2 \geqslant 0,\ \lambda_3 \geqslant 0. \end{array}$$

Primijetimo da je ograničenje što odgovara varijabli x_2, na koju u primalu nema ograničenja nenegativnosti, u dualu u obliku jednadžbe. Dakle, imamo još jedno pravilo za konstrukciju duala: (i) Varijabli u primalu bez ograničenja nenegativnosti, u dualu odgovara ograničenje u obliku jednadžbe.

Literatura

[1] G. Hadley, *Linear Programming*, Addison Wesley, Reading, MA, 1962.

[2] F. S. Hillier and G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, Seventh Edition, McGraw-Hill, New York, 2001.

[3] M. Intriligator, *Mathematical Optimization and Economic Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971. (Ruski prijevod: Progress, Moskva, 1975.)

[4] S. Kurepa, L. Neralić, *Matematika 3*, Udžbenik i zbirka zadataka, Školska knjiga, Zagreb, 2000.

[5] Lj. Martić, *Matematičke metode za ekonomske analize*, II svezak, Treće izdanje, Narodne Novine, Zagreb, 1979.

[6] K. G. Murty, *Linear Programming*, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[7] S. G. Nash and A. Sofer, *Linear and Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, International Edition, New York, 1996.

[8] L. Neralić, *O linearnom programiranju, I*, Matematičko-fizički list, **LI** 3 (2000.–2001.), 134–140.

[9] L. Neralić, *O linearnom programiranju, II*, Matematičko-fizički list, **LI** 4 (2000.–2001.), 202–211.

[10] L. Neralić, *Uvod u matematičko programiranje 1*, Element, Zagreb, 2003.

[11] N. Wu and R. Coppins, *Linear Programming and Extensions*, McGraw-Hill, New York, 1981.