XXV РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1. По снижувањето на цената за 20%, со 2400 денари може да се купи една книга повеќе, отколку со 2700 денари пред снижувањето. Колкава била цената на една книга пред снижувањето?

Решение: Нека x е цената пред снижувањето. Тогаш за 2700 ден. можат да се купат $\frac{2700}{x}$ книги. По снижувањето од 20%, цената е $\frac{80}{100}x=\frac{4}{5}x$, па со 2400 ден. можат да се купат $2400:\frac{4}{5}x$ книги т.е. $\frac{3000}{x}$ книги. Според условот на задачата добиваме $\frac{3000}{x}-\frac{2700}{x}=1$; $\frac{300}{x}=1$, т.е. $x = 300$. Значи, цената на една книга пред снижувањето е 300 денари.

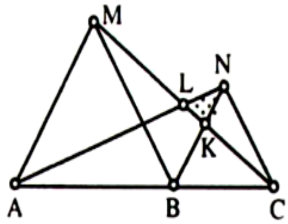
2. На натпреварот по математика учествувале 140 ученици. За секој ученик организаторот на натпреварот обезбедил по еден сок. Соковите биле пакувани по 16, по 17 или по 40 во кутија. По колку сокови имало од секој вид? Образложи!

Решение: Нека имало x кутии со по 16 сокови, y кутии со по 17 и z кутии со по 40 сокови. Тогаш $16x+17y+40z = 140$. Бидејќи 16, 40 и 140 се деливи со 4, следува дека и $17y$ е делив со 4. Но 4 не е делител на 17, па заклучуваме дека 4 е делител на y, т.е. $y = 4k$. Тогаш $16x+17\cdot4k + 40z = 140$ /:4; $4x+17k+10z = 35$. Очигледно дека $k = 1$, бидејќи за $k \geq 2$ би имале $4x+10z \leq 1$, што не е можно, бидејќи $x, z\in \mathbb{N}$, значи, $k = 1$ и $4x+10z =18$, т.е. $2x+5z = 9$. Последната равенка е можна само за $z = 1$ и $x = 2$. Конечно: имало 2 пакета по 16 сокови, 4 пакети по 17 сокови и 1 пакет со 40 сокови.

3. Ако $x^2+y^2+2x-4y+5 = 0$, колку е $x^{2000}+2000y$?

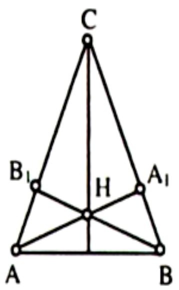
Решение: Ако $x^2+2x+y^2-4y+5 = 0$, тогаш $x^2+2x+1y^2-4y+4 = 0$; $(x+1)^1+(y-2)^2 = 0$. Оттука $x+1 = 0$ и $y-2 = 0$, т.е. $x = -1$, $y = 2$. Тогаш $x^{2000}+2000y = (-1)^{2000}+2000y = 1+4000 = 4001$.

4. Точката B е внатрешна за отсечката AC. Од една страна на правата AC се конструирани рамнострани триаголници ABM и BCN. Правите AN и CM се сечат во точката L. Пресметај го аголот CLN.



Решение: Очигледно $\Delta ABN \cong \Delta MBC$ според признакот САС, (бидејќи $\overline{AB} = \overline{MB}, \overline{BN} = \overline{BC}$ и $\angle ABN = 120^\circ = \angle MBC$). Оттука следува дека $\angle ANB = \angle MCB = \alpha$. Бидејќи $\angle BKC = \angle LKN$ како накрсни, следува дека и третите агли во триаголниците BCK и LNK се меѓусебе еднакви, а тие се $\angle CBK = 60^\circ = \angle NLK$, значи $\angle CLN = 60^\circ$.

5. Нека AA_1, BB_1, CC_1 се висините во триаголникот ABC, а H е ортоцентарот. Ако $\overline{AH}:\overline{HA_1} = 1:1$, $\overline{BH}:\overline{HB_1} = 2:1$, колку е $\overline{CH}:\overline{HC_1}$?



Решение: Нека a, b, c се должини на страните BC, SA и AB на ΔABC, а h_a, h_b и h_c должини на неговите висини, тогаш

$$P_{ABC} = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2};\ P_{BCH} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{h_a}{2} = \frac{1}{2}P.$$

$P_{CAH} = \frac{1}{2}b \cdot \frac{h}{3} = \frac{1}{3}P$. Оттука $P_{ABH} = P - \frac{1}{2}P - \frac{1}{3}P = \frac{1}{6}P$.

Значи $P_{ABH} = \frac{1}{2}c \cdot \overline{HC_1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}c \cdot h_c$, т.е. $\overline{HC_1} = \frac{1}{6}h_c$,

а оттука $\overline{CH}:\overline{HC_1} = 5:1$.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1. Ана има три албуми со марки. Во првиот се наоѓаат една петина од марките, во вториот неколку седмини, а во третиот 303 марки. Колку марки има Ана?

Решение: Нека Ана има вкупно x марки, $x \in N$; тогаш во првиот албум има $\frac{1}{5}x$, во вториот $\frac{k}{7}x$, $k \in N$, а во третиот 303 марки. Значи имаме $\frac{x}{5}+\frac{kx}{7}+303=x$. Оттука $x=\frac{35 \cdot 303}{28-5k}$. За x да биде природен број, k треба да е непарен. Од 28-5k>0, следува дека $k \in \{1,3,5\}$. Со проверка се убедуваме дека само за k = 5, x е природен број и притоа x = 3535. Значи, Ана имала вкупно 3535 марки.

2. Збирот на цифрите на еден четирицифрен број е 27. Докажи дека збирот на тој број и бројот запишан со исти цифри но во обратен редослед е делив со 27.

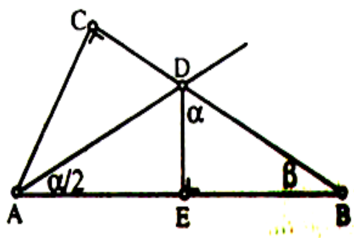
Решение: Нека бараниот број е $\overline{abcd}$, тогаш a+b+c+d = 27.
Понатаму: $S = \overline{abcd}+\overline{dcba} = 1001(a+d)+110(b+c) =$
$110(a+d)+891(a+d)+1110(b+c) = 110(a+b+c+d)+891(a+d) =$
$110 \cdot 27+27 \cdot 33(a+d) = 27(110+33a+33d) = 27(110+33a+33d)$.
Следи дека $27 \mid S$.

3. Збирот на три цели броја a, b, c е нула. Докажи дека $2(a^4+b^4+c^4)$ е квадрат на цел број.

Решение: Од условот a+b+c = 0 следува $a^2 = (b+c)^2$, $b^2 = (c+a)^2$; $c^2 = (a+b)^2$, па имаме: $a^4+b^4+c^4 = a^2(b+c)^2+b^2(c+a)^2+c^2(a+b)^2 = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2(a^2bc+ab^2c+abc^2) = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c) = 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) = (a^2+b^2+c^2)^2-a^4-b^4-c^4$. Следи: $2(a^4+b^4+c^4) = (a^2+b^2+c^2)^2$.

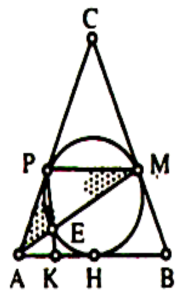
4. Во правоаголниот триаголник ABC ($\angle ACB=90^0$) бисектрисата на аголот кај темето A ја дели страната BC на два дела со должина 5 cm и 13 cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на триаголникот ABC.

Решение: Нека AD е симетрала аголот кај темето D и нека $DE \perp AB$, тогаш е очигледно дека $\Delta ACD \cong \Delta AED$ (според ACA), па оттука следува дека $\overline{DE}$ = 5 cm. Понатаму, триаголниците ABC и DBE се слични, па имаме: $\overline{AB}:\overline{BC}=\overline{DB}:\overline{DE}$ т.е. $\overline{AC}:18$ = 13:12; $\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{DE}:\overline{BE}$, т.е. $\overline{AC}:18$ = 5:13, од каде што добиваме $\overline{AB}$ = 19,5 cm, $\overline{AC}$ = 7,5 cm. Тогаш периметарот на **ΔABC е 45** cm, а плоштината $\frac{7{,}5\cdot 18}{2}$ cm^2, т.е. 67,5 cm^2.



5. Вписаната кружница *k* во рамнокракиот триаголник ABC ги допира краците AC и BC во точките P и M, соодветно. Правата AM ја сече кружницата к во точка E, а правата PE ја сече основата AB во точката K. Докажи дека $\overline{AB}=4\cdot\overline{AK}$.

Решение: Бидејќи PM || AB, следува дека $\angle PMA = \angle MAB$ (наизменични) $\angle APK = \angle PMA$. (над ист лак). Оттука следува дека $\angle APK = \angle MAB$, па поради $\angle PAK = \angle ABM$ заклучуваме дека $\Delta PAK \sim \Delta ABM$.



Тогаш имаме:

(1) ... $\overline{PA}:\overline{AB}=\overline{AK}:\overline{BM}$. Но, $\overline{PA}=\overline{AH}$ и $\overline{BH}=\overline{BM}$ (тангентни отсечки) па од (1) следи

$$\overline{AB}=\frac{\overline{PA}\cdot\overline{BM}}{\overline{AK}}=\frac{\overline{AH}\cdot\overline{BH}}{\overline{AK}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\frac{1}{2}\overline{AB}}{\overline{AK}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AK}}$$,т.е. $\overline{AB}=4\cdot\overline{AK}$.