Регионален натпревар 2023

I година

1А. Докажи дека бројот $\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n}6$ е точен квадрат на природен број.

Решение. Имаме:

$$\underbrace{11...1}_{n}\underbrace{55...5}_{n-1}6=\underbrace{11...1}_{2n}+4\cdot\underbrace{11...1}_{n}+1=\tfrac{1}{9}(\underbrace{99...9}_{2n}+4\cdot\underbrace{99...9}_{n}+9)$$
$$=\tfrac{1}{9}(\underbrace{99...9}_{2n}+1+4\cdot(\underbrace{99...9}_{n}+1)+4)$$
$$=\tfrac{1}{9}(10^{2n}+4\cdot 10^{n}+4)=\tfrac{1}{9}(10^{n}+2)^{2}$$
$$=(\tfrac{1}{3}(10^{n}+2))^{2}=(\underbrace{33...3}_{n}+1)^{2}=\underbrace{33...3}_{n-1}4^{2},$$

што и требаше да се докаже.

1Б. Докажи дека, ако збирот на броевите $\overline{abc}$ и $\overline{xyz}$ еделив со 37, тогаш и бројот $\overline{abcxyz}$ е делив со 37.

Решение. Имаме:

$$\overline{abcxyz}=1000\overline{abc}+\overline{xyz}=999\overline{abc}+\overline{abc}+\overline{xyz}=37\cdot 27\overline{abc}+(\overline{abc}+\overline{xyz}).$$

Јасно, $37\,|\,37\cdot 27\overline{abc}$ и како по претпоставка $37\,|\,\overline{abc}+\overline{xyz}$, од последното равенство следува $37\,|\,\overline{abcxyz}$.

2АБ. Нека a е цел број и нека равенката $|2ax-x-b|=b$ има две решенија x_1 и x_2, кои се цели броеви. Ако збирот на целите броеви од интервалот (x_1,x_2) е 15, докажи дека b е непарен број.

Решение. *Прв начин*. Јасно, $b\geq 0$. Решенијата на дадената равенка се $x=0$ и $x=\frac{2b}{2a-1}$. Бидејќи едното решение е 0, а збирот на целите броеви од интервалот (x_1,x_2) е 15, заклучуваме дека $x_1=0$ и $x_2=\frac{2b}{2a-1}>0$. Понатаму, од $15=1+2+3+4+5$ и x_2 е цел број, заклучуваме дека $x_2=6$. Според тоа, $\frac{2b}{2a-1}=6$, од каде добиваме $b=3(2a-1)$, т.е. b е непарен број.

Втор начин. Јасно, $b\geq 0$. Очигледно $x=0$ е едно решение на равенката, па како при првиот начин на решавање заклучуваме дека второто решение е $x_2 = 6$. Да претпоставиме дека $b = 2k$, за некој $k \in \mathbb{Z}$. Тогаш со замена во равенката добиваме $|12a - 6 - 2k| = 2k$, т.е. $|6a - 3 - k| = k$. Од последното равенство следува $6a - 3 - k = -k$ или $6a - 3 - k = k$. Во првиот случај добиваме $a = \frac{1}{2}$, што противречи на претпоставката дека a е цел број, а во вториот случај добиваме $3(2a - 1) = 2k$, што не е можно бидејќи левата страна е непарен, а десната страна е парен број. Конечно, од добиената противречност следува дека b е непарен број.

3А. Ако a,b,c се природни броеви, докажи дека

$$7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3).$$

Решение. *Прв начин*. Јасно, ако $7 \mid a$ или $7 \mid b$ или $7 \mid c$, тогаш важи $7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$. Затоа да претпоставиме дека $7 \nmid a$, $7 \nmid b$ и $7 \nmid c$. Тогаш броевите a,b,c се од видовите $7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4,$ $7k+5$ или $7k+6$, за некој $k \in \mathbb{N}_0$. Имаме

$$(7k+1)^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod 7,$$
$$(7k+2)^3 \equiv 2^3 \equiv 1 \pmod 7,$$
$$(7k+3)^3 \equiv 3^3 \equiv 6 \pmod 7,$$
$$(7k+4)^3 \equiv 4^3 \equiv 1 \pmod 7,$$
$$(7k+5)^3 \equiv 5^3 \equiv 6 \pmod 7,$$
$$(7k+6)^3 \equiv 6^3 \equiv 6 \pmod 7,$$

што значи дека трет степен на природен број при делење со 7 дава остаток 1 или 6. Од принципот на Дирихле следува дека два од броевите a^3, b^3, c^3 при делење со 7 даваат ист остаток, па затоа нивната разлика е делива со 7, т.е. $7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$.

Втор начин. Како и при првиот начин имаме дека од $7 \mid a$ или $7 \mid b$ или $7 \mid c$, следува $7 \mid abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3)$. Затоа да претпоставиме дека $7 \nmid a$, $7 \nmid b$ и $7 \nmid c$. Тогаш броевите a,b,c се од видовите $7k+1, 7k+2,$ $7k+3,$ $7k+4,$ $7k+5$ или $7k+6$, за некој $k \in \mathbb{N}_0$. Имаме

$$(7k+1)^3 = 7(7^2k^3 + 3 \cdot 7k^2 \cdot 1 + 3 \cdot k \cdot 1^2) + 1,$$
$$(7k+2)^3 = 7(7^2k^3 + 3 \cdot 7k^2 \cdot 2 + 3 \cdot k \cdot 2^2 + 1) + 1,$$

$$(7k+3)^3 = 7(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2 \cdot 3 + 3\cdot k\cdot 3^2 + 3) + 6,$$
$$(7k+4)^3 = 7(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2 \cdot 4 + 3\cdot k\cdot 4^2 + 9) + 1,$$
$$(7k+5)^3 = 7(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2 \cdot 5 + 3\cdot k\cdot 5^2 + 17) + 6,$$
$$(7k+6)^3 = 7(7^2k^3 + 3\cdot 7k^2 \cdot 6 + 3\cdot k\cdot 6^2 + 30) + 6,$$

што значи дека трет степен на природен број при делење со 7 дава остаток 1 или 6. Од принципот на Дирихле следува дека два од броевите a^3, b^3, c^3 при делење со 7 даваат ист остаток, па затоа нивната разлика е делива со 7, т.е. $7 \mid abc(a^3-b^3)(b^3-c^3)(c^3-a^3)$.

3Б. Нека a и b се реални броеви такви што $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{5}{2}$ и $a-b=\frac{3}{2}$. Определи ги сите можни вредности на изразот

$$A = a^2 + 2ab + b^2 + 2a^2b + 2ab^2 + a^2b^2 .$$

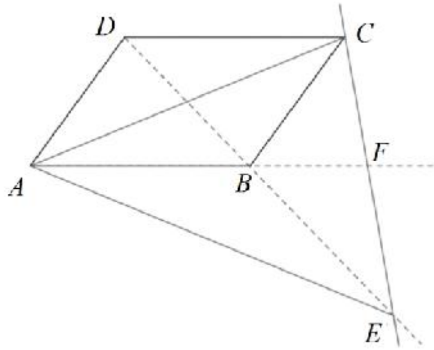
Решение. Од $a-b=\frac{3}{2}$ следува $a^2-2ab+b^2=\frac{9}{4}$, т.е. $a^2+b^2=\frac{9}{4}+2ab$. Заменуваме во $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{5}{2}$ и добиваме $ab=\frac{9}{2}$. Понатаму, ако на двете страни на равенството $a^2-2ab+b^2=\frac{9}{4}$ додадеме $4ab$, го добиваме еквивалентното равенство $(a+b)^2=\frac{9}{4}+4ab$. Заменуваме $ab=\frac{9}{2}$ и добиваме $(a+b)^2=\frac{81}{4}$, од каде наоѓаме $a+b=\frac{9}{2}$ или $a+b=-\frac{9}{2}$.

Имаме

$$\begin{aligned} A &= a^2 + 2ab + b^2 + 2a^2b + 2ab^2 + a^2b^2 \\ &= (a+b)^2 + 2ab(a+b) + (ab)^2 \\ &= (a+b+ab)^2, \end{aligned}$$

па затоа $ab=\frac{9}{2}$ и $a+b=\frac{9}{2}$, добиваме $A=(\frac{9}{2}+\frac{9}{2})^2=81$, а за $ab=\frac{9}{2}$ и $a+b=-\frac{9}{2}$, добиваме $A=(\frac{9}{2}-\frac{9}{2})^2=0$. Конечно, при дадените услови изразот A прима само две вредности и тоа 0 и 81.

4АБ. Даден е паралелограм $ABCD$. Нека E е точка на полуправата DB таква што AB е симетрала на $\measuredangle CAE$ и нека $F = CE \cap AB$. Докажи дека $\frac{\overline{AB}}{BF} - \frac{\overline{AC}}{AE} = 1$.



Решение. Отсечките BF и DC се паралелни, па од Талесовата теорема за пропорционални отсечки следува $\frac{\overline{EC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BF}}$ и бидејќи $\overline{AB} = \overline{DC}$, добиваме дека

$$\frac{\overline{EC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}. \qquad (1)$$

Полуправата AF е симетрала на $\measuredangle CAE$, па од својството на симетралата следува $\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$, односно $1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1 + \frac{\overline{CF}}{\overline{EF}}$. Од последното равенство следува $1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EF}+\overline{CF}}{\overline{EF}}$, односно $1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EF}}$, па ако се земем предвид равенството (1), добиваме $1 + \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BF}}$, т.е. $\frac{\overline{AB}}{\overline{BF}} - \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = 1$, што и требаше да се докаже.

II година

1А. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(\sqrt{5}-x)^2} = 7.$$

Решение. Јасно, $x \notin \{0, \sqrt{5}\}$. Воведуваме смена $y = \sqrt{5} - x$ и го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{5} \\ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 7. \end{cases}$$

Имаме,

$$7 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2y^2} = \frac{(x+y)^2-2xy}{(xy)^2} = \frac{5-2xy}{(xy)^2},$$

односно $7(xy)^2 + 2xy - 5 = 0$, од каде добиваме $xy = \frac{5}{7}$ или $xy = -1$. Од $x + y = \sqrt{5}$ и $xy = \frac{5}{7}$ следува дека x и y се решенија на квадратната равенка $z^2 - z\sqrt{5} + \frac{5}{7} = 0$, односно $x, y = \frac{7\sqrt{5}\pm\sqrt{105}}{14}$. Од $x + y = \sqrt{5}$, добиваме $x = \sqrt{5} - y = \sqrt{5} - \frac{7\sqrt{5}\pm\sqrt{105}}{14} = \frac{7\sqrt{5}\mp\sqrt{105}}{14}$, па равенката по x ги има решенијата $x_{1,2}=\frac{7\sqrt{5}\pm\sqrt{105}}{14}$. Од $x+y=\sqrt{5}$ и $xy=-1$ следува дека x и y се решенија на квадратната равенка $z^2-z\sqrt{5}+-1=0$, односно $x,y=\frac{\sqrt{5}\pm3}{2}$. Од $x+y=\sqrt{5}$, добиваме $x=\sqrt{5}-y=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}\pm3}{2}=\frac{\sqrt{5}\mp3}{2}$, па равенката по x ги има решенијата $x_{3,4}=\frac{\sqrt{5}\pm3}{2}$.

1Б. Лена купува пакет со сини и црвени хартиени листови, во кој односот на бројот на сините и бројот на црвените листови е 2:7. Секој ден, Лена користи 1 син и 3 црвени листови. Еден ден, откако зела 3 црвени листови и го потрошила последниот син лист во пакетот останале 15 црвени листови. Колку вкупно листови имало во пакетот на почетокот?

Решение. Нека на почетокот во пакетот имало x сини и y црвени листови. Тогаш $\frac{x}{y}=\frac{2}{7}$. Бидејќи Лена секој ден користи по еден син и по 3 црвени листови, таа по x денови ги потрошила сите сини листови и потрошила $3x$ црвени листови, по што во пакетот останале 15 црвени листови. Затоа $y=3x+15$. Според тоа, $\frac{x}{3x+15}=\frac{2}{7}$, од каде добиваме $x=30$. Значи, во пакетот имало 30 сини и $3\cdot30+15=105$ црвени листови, што значи вкупно $30+105=135$ листови.

2АБ. Ако a и b се природни броеви такви што $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}=\frac{1}{b^2-2b}$, определи ја најмалата можна вредност на збирот $a+b$.

Решение. Равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}=\frac{1}{b^2-2b}$ е еквивалентно со равенството $11(b^2-2b)=6a$. Бидејќи $\text{NZD}(11,6)=1$, од последното равенство следува $11\,|\,a$, т.е. $a=11A$, за некој $A\in\mathbb{N}$. Сега, од $11(b^2-2b)=66A$, добиваме $b^2-2b=6A$, па затоа $6\,|\,b^2-2b$, односно $6\,|\,b(b-2)$. Но, $b(b-2)$ е производ или на два последователни парни или на два последователни непарни броја, па како нивниот производ е делив со 2, заклучуваме дека b и $b-2$ се парни. Понатаму, едниот од броевите треба да е делив со 3, па затоа најмалата можна вредност на $a+b$ се достигнува за $b=6$. Според тоа, $6A=b^2-2b=6^2-2\cdot6=24$, од каде добиваме $A=4$, што значи $a=11A=44$. Конечно, најмалата можна вредност на $a+b$ е $44+6=50$.

3АБ. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y-z=2, \\ x^2+y^2-z^2=8-2xy, \\ x^3+y^3-z^3=86-3xyz. \end{cases}$$

Решение. Имаме:

$$\begin{cases} x+y-z=2, \\ x^2+y^2-z^2=8-2xy, \\ x^3+y^3-z^3=86-3xyz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z, \\ (x+y)^2=8+z^2, \\ (x+y)^3-3xy(x+y-z)=86+z^3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=2+z, \\ (2+z)^2=8+z^2, \\ (2+z)^3-6xy=86+z^3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=2+z, \\ z=1, \\ (2+z)^3-6xy=86+z^3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=3, \\ z=1, \\ 3^3-6xy=87, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x, \\ z=1, \\ xy=-10, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-x, \\ z=1, \\ x(3-x)=-10, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=3-x, \\ z=1, \\ x=-2, \end{cases} \vee \begin{cases} y=3-x, \\ z=1, \\ x=5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5, \\ z=1, \\ x=-2, \end{cases} \vee \begin{cases} y=-2, \\ z=1, \\ x=5. \end{cases}$$

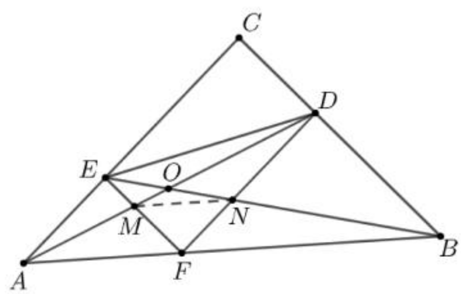
4А. На страните BC, CA, AB на триаголникот ABC се избрани точки D, E, F, соодветно, така што четириаголникот $CEFD$ е паралелограм. Нека $O = AD \cap BE$, $M = AD \cap EF$, $N = DF \cap BE$. Докажи дека триаголникот DEO и четириаголникот $FNOM$ имаат еднакви плоштини.

Решение. Од $EF \| CB$ следува $P_{BED} = P_{BMD}$, па затоа

$$P_{DEO} = P_{BED} - P_{BOD}$$
$$= P_{BMN} - P_{BOD} = P_{BMO}.$$

Слично, од $CA \| DF$ следува $P_{ADE} = P_{ANE}$, па затоа

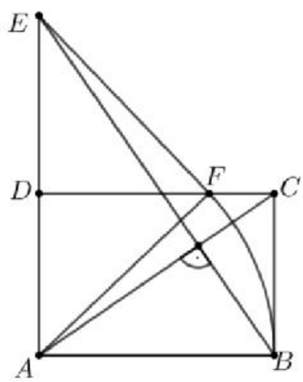
$$P_{DEO} = P_{ADE} - P_{AOE}$$
$$= P_{ANE} - P_{AOE} = P_{ANO}.$$



Според тоа, $P_{BMO} = P_{ANO}$, од што следува $P_{BMN} = P_{AMN}$. Но триаголниците AMN и BMN имаат заедничка страна и еднакви плоштини, па затоа нивните висини повлечени соодветно од темињата A и B се еднакви, што значи дека $MN \parallel AB$. Но, тоа значи дека $P_{FNM} = P_{AMN}$, па затоа

$$P_{FNOM} = P_{FNM} + P_{MNO} = P_{ANM} + P_{MNO} = P_{ANO} = P_{DEO}.$$

4Б. Даден е правоаголник $ABCD, \overline{AB} > \overline{BC}$. Нормалата повлечена од B на дијагоналата AC ја сече правата AD во точката E, а кружницата со центар $k(A, \overline{AB})$ ја сече страната CD во точката F. Докажи дека $AF \perp EF$.



Решение. Нека $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$. Триаголниците ABE и BCA се правоаголни и важи $\measuredangle BAC = \measuredangle AEB$ (агли со нормални краци), па затоа тие се слични. Според тоа, $\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}}$, т.е. $\overline{AE} = \frac{a^2}{b}$. За правоаголниот триаголник AFD имаме $\overline{AF} = a, \overline{AD} = b$, па затоа $\overline{DF} = \sqrt{a^2 - b^2}$. Сега, од триаголникот DFE, во кој

$$\overline{ED} = \overline{AE} - \overline{AD} = \frac{a^2}{b} - b = \frac{a^2 - b^2}{b},$$

добиваме

$$\overline{EF}^2 = (\frac{a^2 - b^2}{b})^2 + \sqrt{a^2 - b^2}^2 = (a^2 - b^2)\frac{a^2 - b^2 + b^2}{b^2} = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{b^2}.$$

Затоа,

$$\overline{EF}^2 + \overline{AF}^2 = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{b^2} + a^2 = \frac{a^4 - a^2b^2 + a^2b^2}{b^2} = (\frac{a^2}{b})^2 = \overline{AE}^2,$$

па од обратната Питагорова теорема следува дека триаголникт AFE е правоаголен, т.е. $AF \perp EF$.

III година

1А. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$x^{\log_3(x-1)} + 2(x-1)^{\log_3 x} = 3x^2.$$

Решение. Јасно, $x \in (1, +\infty)$. Нека $\log_3(x-1) = u$ и $\log_3 x = v$. Имаме

$$x^{\log_3(x-1)} = 3^{\log_3 x^{\log_3(x-1)}} = 3^{\log_3(x-1)\cdot\log_3 x} = 3^{uv} \text{ и}$$

$$(x-1)^{\log_3 x} = 3^{\log_3(x-1)^{\log_3 x}} = 3^{\log_3(x-1)\cdot\log_3 x} = 3^{uv}.$$

Понатаму, $x^2 = 3^{\log_3 x^2} = 3^{2\log_3 x} = 3^{2v}$, па затоа дадената равенка го добива видот $3\cdot 3^{uv} = 3\cdot 3^{2v}$, од каде следува $uv = 2v$, т.е. $v = 0$ или $u = 2$. Ако $v = 0$, тогаш од $\log_3 x = v$ следува $x = 1$, што не е можно бидејќи $x \in (1, +\infty)$. Ако $u = 2$, тогаш од $\log_3(x-1) = u$ следува $x = 10$ и тоа е единственото решение на дадената равенка.

1Б. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} yx^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}}, \\ \log_4 y \cdot \log_y(3x-y) = 1. \end{cases}$$

Решение. Од дефиницијата на логаритамската функција следува $x > 0$, $y > 0$, $3x - y > 0$ и $y \neq 1$. Ако првата равенка ја логаритмираме со основа y и искористиме дека $\frac{1}{\log_4 y} = \log_y 4$, добиваме

$$\begin{cases} yx^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}}, \\ \log_4 y \cdot \log_y(3x-y) = 1,. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \log_y x \cdot \log_y x = \frac{5}{2}\log_y x, \\ \log_y(3x-y) = \log_y 4, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(\log_y x)^2 - 5\log_y x + 2 = 0, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$$

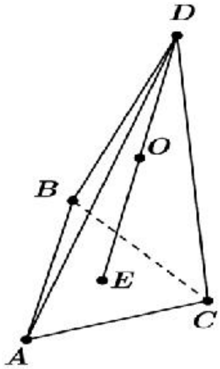
Од првата равенка равенка на последниот систем добиваме $\log_y x = 2$ или $\log_y x = \frac{1}{2}$.

Ако $\log_y x = 2$, тогаш $x = y^2$ и со замена во $3x - y = 4$, ја добиваме равенката $3y^2 - y - 4 = 0$, чии решенија се $y_1 = \frac{4}{3}$ и $y_2 = -1$. Но, $y > 0$, па затоа во овој случај решение на дадениот систем е само $x = \frac{16}{9}$, $y = \frac{4}{3}$.

Ако $\log_y x = \frac{1}{2}$, тогаш $x = \sqrt{y}$, т.е. $y = x^2$ и со замена во $3x - y = 4$, ја добиваме равенката $x^2 - 3x + 4 = 0$, која нема реални решенија.

Конечно, единствено реално решение на дадениот систем е $x = \frac{16}{9}$, $y = \frac{4}{3}$.

2АБ. Правилна триаголна пирамида има раб на основата b и агол меѓу бочните рабови $\sim$. Докажи дека радиусот на опишаната сфера околу оваа пирамида е $R=\dfrac{b}{4\sin\frac{\sim}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\sim}{2}}}$



Решение. Нека $\triangle ABC$ е основа на пирамидата, а D е нејзиниот врв (цртеж десно). Нека O е центарот на сферата опишана околу пирамидата и нека точката E е проекцијата на O врз рамнината ABC. Од $\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=R$ следува дека $\overline{AE}=\overline{BE}=\overline{CE}$, што значи дека точката E е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Пирамидата е правилна, па затоа ортогналната проекција на точката D врз рамнината ABC е точката E. Бидејќи $\triangle ABC$ е рамностран, добиваме $\overline{CE}=\frac{b\sqrt{3}}{3}$, а од рамнокракиот триаголник ADC следува $\overline{CD}=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\sin\frac{\sim}{2}}=\dfrac{b}{2\sin\frac{\sim}{2}}$. Понатаму, $\triangle DEC$ е правоаголен, па затоа $\sin\measuredangle CDE=\dfrac{\overline{CE}}{\overline{CD}}=\dfrac{2\sin\frac{\sim}{2}}{\sqrt{3}}$. Од рамнокракиот $\triangle DOC$ имаме $\overline{DO}=\overline{CO}=R$, па затоа $R=\overline{DO}=\dfrac{\overline{CD}}{2\cos\measuredangle CDE}=\dfrac{b}{4\sin\frac{\sim}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\sim}{2}}}$.

3АБ. Определи ги вредностите на реалниот параметар m за кои функцијата $f(x)=|x^2-6x|-m$ има точно три реални нули.

Решение. Имаме
$$f(x)=\begin{cases}x^2-6x-m, & x\in(-\infty,0]\cup[6,+\infty)\\ -x^2+6x-m, & x\in(0,6).\end{cases}$$

Јасно, почетната равенка има точно три реални нули ако:

1) $x^2-6x-m=0$ има две реални и различни нули, а $-x^2+6x-m=0$ има двоен корен,
2) $x^2-6x-m=0$ има двоен корен, а $-x^2+6x-m=0$ има две реални и различни нули.

Случај 1). $x^2-6x-m=0$ има две реални и различни нули ако и само ако $D_1=36+4m>0$, а $-x^2+6x-m=0$ има двоен корен ако и само ако

$D_2 = 36 - 4m = 0$. Според тоа, треба да е $m > -9$ и $m = 9$, од каде следува дека $m = 9$. За $m = 9$ првата равенка го добива видот $x^2 - 6x - 9 = 0$ и оттука наоѓаме $x_{1,2} = 3 \pm 3\sqrt{2} \in (-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$, а втората равенка го добива видот $x^2 - 6x + 9 = 0$ и оттука наоѓаме $x_3 = 3 \in (0, 6)$.

Случај 2). $x^2 - 6x - m = 0$ има двоен корен акко $D_1 = 36 + 4m = 0$, а $-x^2 + 6x - m = 0$ има две реални и разични нули акко $D_2 = 36 - 4m > 0$. Според тоа, треба да е $m = -9$ и $m < 9$, од каде следува $m = -9$. За $m = -9$ првата равенка го добива видот $x^2 - 6x + 9 = 0$ и таа има двоен корен $x_{1,2} = 3 \notin (-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$.

Конечно, единствена вредност на параметарот m за која равенката $f(x) = |x^2 - 6x| - m$ има точно три реални нули е $m = 9$ и нулите на равенката се $x_{1,2} = 3 \pm 3\sqrt{2}$ и $x_3 = 3$.

4А. Докажи дека

$$2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + 6\sin 6^\circ + \ldots + 180\sin 180^\circ = 90\operatorname{ctg} 1^\circ .$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}
A &= 2\sin 2^\circ \sin 1^\circ + 4\sin 4^\circ \sin 1^\circ + 6\sin 6^\circ \sin 1^\circ + \ldots + 178\sin 178^\circ \sin 1^\circ \\
&= 1\cdot 2\sin 2^\circ \sin 1^\circ + 2\cdot 2\sin 4^\circ \sin 1^\circ + \ldots + 89\cdot 2\sin 178^\circ \sin 1^\circ \\
&= (\cos 1^\circ - \cos 3^\circ) + 2(\cos 3^\circ - \cos 5^\circ) + \ldots + 89(\cos 177^\circ - \cos 179^\circ) \\
&= \cos 1^\circ + \cos 3^\circ + \cos 5^\circ + \cos 7^\circ + \ldots + \cos 177^\circ - 89\cos 179^\circ \\
&= \cos 1^\circ + (\cos 3^\circ + \cos 177^\circ) + \ldots + (\cos 89^\circ + \cos 91^\circ) - 89\cos(180^\circ - 1^\circ) \\
&= \cos 1^\circ + (\cos 3^\circ + \cos(180^\circ - 3^\circ)) + \ldots + (\cos 89^\circ + \cos(180^\circ - 91^\circ)) + 89\cos 1^\circ \\
&= \cos 1^\circ + (\cos 3^\circ - \cos 3^\circ) + \ldots + (\cos 89^\circ - \cos 89^\circ) + 89\cos 1^\circ \\
&= 90\cos 1^\circ .
\end{aligned}$$

Конечно, ако во добиеното равенство поделиме со $\sin 1^\circ$, го добиваме бараното равенство. Во претходните разгледувања ги користевме идентитетите $2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$ и $\cos x = -\cos(180^\circ - x)$.

4Б. Ако $\cos x + \cos^2 x + \cos^3 x = 1$, пресметај ја вредноста на изразот

$$\sin^6 x - 4\sin^4 x + 8\sin^2 x .$$

Решение. Од $\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x=1$ последователно добиваме:

$$(\cos x+\cos^3 x)^2=(1-\cos^2 x)^2,$$
$$\cos^2 x+2\cos^4 x+\cos^6 x=\sin^4 x,$$
$$1-\sin^2 x+2(1-\sin^2 x)^2+(1-\sin^2 x)^3=\sin^4 x,$$
$$1-\sin^2 x+2-4\sin^2 x+2\sin^4 x+1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x=\sin^4 x$$
$$4-8\sin^2 x+4\sin^4 x-\sin^6 x=0,$$
$$\sin^6 x-4\sin^4 x+8\sin^2 x=4.$$

IV година

1А.2Б. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$1+2026x+2028y=xy\,.$$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$xy-2026x-2028y=1,$$
$$x(y-2026)-2028(y-2026)-2028\cdot 2026=1$$
$$(x-2028)(y-2026)=2028\cdot 2026+1$$
$$(x-2028)(y-2026)=(2027+1)(2027-1)+1$$
$$(x-2028)(y-2026)=2027^2.$$

Бројот 2027 е прост, па затоа $x-2028\in\{\pm1,\pm2027,\pm2027^2\}$, од каде добиваме

$$(x,y)\in\{(2029,2027^2+2026),(2027,-2027^2+2026),(4055,4053),$$
$$(1,-1),(2027^2+2028,2027),(-2027^2+2028,2025)\}$$

1Б. Определи ја раликата на аритметичката прогресија со прв член 4, кај која a_{10}, a_{31} и a_{34} се страни на правоаголен триаголник со хипотенуза a_{34}.

Решение. Членовите на прогресијата се $a_{10}=a_1+9d, a_{31}=a_1+30d$ и $a_{34}=a_1+33d$, па ако замениме во $a_{34}^2=a_{10}^2+a_{31}^2$ и земеме предвид дека $a_1=4$, по средувањето ја добиваме квадратната равенка $27d^2-12d-4=0$ чии решенија се $d_1=\frac{2}{3}$ и $d_2=-\frac{2}{9}<0$. Второто решение не е можно, бидејќи за $d_2 = -\frac{2}{9}$ добиваме $a_{34} = 4 - \frac{66}{9} = -\frac{10}{3} < 0$, а должините на страните на правоаголниот триаголник се позитивни броеви.

Конечно, бараната вред-ност на разликата на прогресијата е $d = \frac{2}{3}$.

2А. Определи ја равенката на заедничката тангента на параболите $y = x^2 + 2x + 2$ и $y = x^2 + x + 2$.

Решение. Нека заедничката тангета има равенка $y = kx + n$. Тогаш секоја од равенките $x^2 + 2x + 2 = kn + n$ и $x^2 + x + 2 = kn + n$ има единствено решение, што значи дека дискриминантите на овие квадратни равенки се еднакви на 0. Според тоа, $k^2 - 4k + 4n - 4 = 0$ и $k^2 - 2k + 4n - 7 = 0$. Ако од втората равенка ја одземеме првата добиваме $2k - 3 = 0$, од каде наоѓаме $k = \frac{3}{2}$. Според тоа, $n = \frac{4+4k-k^2}{4} = \frac{31}{16}$, што значи дека равенката на заедничката тангента на параболите е $y = \frac{3}{2}x + \frac{31}{16}$.

3А. Нека $a_0 = 2023$ и $a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-1}+1}$, за $n \in \mathbb{N}$. Докажи дека $a_n \geq 2023 - n$, за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Решение. *Прв начин*. Имаме, $a_0 = 2023 \geq 2023 - 0$. Нека претпоставиме дека за некој $k \geq 0$ важи $a_k \geq 2023 - k$. Тогаш

$$a_k = \frac{a_k^2}{a_k+1} > \frac{a_k^2-1}{a_k+1} = a_k - 1 \geq (2023 - k) - 1 = 2023 - (k+1),$$

па од принципот на математичка индукција следува дека $a_n \geq 2023 - n$, за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Втор начин. Од $a_n > 0$ за секој $n \in \mathbb{N}_0$ и од дефиницијата на низата следува дека $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_n+1} < 1$, што значи дека низата строго монотоно опаѓа.

Понатаму, $a_{k+1} - a_k = \frac{a_k^2}{a_k+1} - a_k = \frac{-a_k}{a_k+1} = \frac{1}{a_k+1} - 1$, за секој $k \in \mathbb{N}_0$. Според тоа,

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + ... + (a_n - a_{n-1}) \\ &= 2023 + (\tfrac{1}{a_0+1} - 1) + (\tfrac{1}{a_1+1} - 1) + ... + (\tfrac{1}{a_{n-1}+1} - 1) \\ &= 2023 - n + (\tfrac{1}{a_0+1} + \tfrac{1}{a_1+1} + ... + \tfrac{1}{a_{n-1}+1}) > 2023 - n. \end{aligned}$$

3Б. Нека k е парен број. Дали е можно бројот 1 да се запише како збир на реципрочните вредности на k непарни природни броеви.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат непарни природни броеви $n_1, n_2, ..., n_k$, каде k е парен број, такви што важи

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + ... + \frac{1}{n_k} = 1. \quad (1)$$

Равенството (1) може да се запише во видот $\frac{m_1+m_2+...+m_k}{n_1 n_2 ... n_k} = 1$, каде $m_i = \frac{n_1 n_2 ... n_k}{n_i} = n_1 ... n_{i-1} n_{i+1} ... n_k$, за $i \in \{1, 2, .., k\}$. Оттука следува дека

$$m_1 + m_2 + ... + m_k = n_1 n_2 ... n_k.$$

Левата страна на последното равенство е збир на парен број непарни броеви, што значи е парен број, а десната страна е производ на непарни броеви, што значи е непарен број, што е противречност

4АБ. Колку најмалку броеви треба да се отстранат од множеството $M = \{1, 2, 3, ..., 2023\}$ за да меѓу преостанатите броеви не постои број кој е производ на два различни преостанати броја?

Решение. Прво, да забележиме дека од множеството M мора да биде отстранет бројот 1, бидејќи во спротивно за секој преостанат број a ќе важи $a = 1 \cdot a$. Понатаму, $44 \cdot 45 = 1980 < 2023$ и $45 \cdot 46 = 2070 > 2023$, што значи дека ако ги отстраниме броевите од 1 до 44, тогаш производите на секои два од преостанатите броеви ќе бидат поголеми или еднакви на $45 \cdot 46 = 2070 > 2023$, па затоа меѓу преостанатите броеви нема да постои број кој е производ на два различни преостанати броја.

Дека не е можно целта да се постигне со помалку од 44 броја доволно е да ги разгледаме тројките $\{k, 89-k, k(89-k)\}$, за $k = 2, 3, 4, ..., 44$, за кои лесно се покажува дека се по парови дисјунктни. Нека претпоставиме дека целта може да се постигне со отстранување на помалку од 44 броја. Тогаш бидејќи меѓу отстранетите броеви мора да е бројот 1, имаме најмногу 42 остранети броја поголеми од 1. Меѓутоа, имаме 43 дисјунктни тројки, што значи дека најмалку од една тројка не сме отстраниле ниту еден број и за неа производот на помалите два броја е еднаков на најголемиот број, противречност.