Методи Главче, Скопје

ПЕРИМЕТАР И НЕРАВЕНСТВО НА ТРИАГОЛНИК

Од редовната настава знаеш дека периметарот на триаголникот чии должини на страни се еднакви на a,b и c се пресметува според формулата $L=a+b+c$. Понатаму, во секој триаголник за должините на страните a,b и c се исполнети неравенствата

$$|b-c|<a<b+c \tag{1}$$

кои се познати како неравенства на триаголник. Во продолжение ќе разгледаме неколку задачи врска со периметарот и неравенствата на триаголник.

Задача 1. Должините на страните на еден триаголник се изразени со природни броеви. Ако едната страна има мерен број 5, а другата мерен број 1, колку изнесува мерниот број на третата страна?

Решение. Нека должината на третата страна е x. Од неравенствата (1) следува дека $|5-1|<x<5+1$, т.е. $4<x<6$ и како x е природен број добиваме $x=5$. ■

Задача 2. Периметарот на триаголник чии должини на страни се изразени со природни броеви е еднаков на $10cm$. Определи ги сите триаголници со ова својство.

Решение. Нека a,b,c се должините на страните на триаголникот. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $c\le b\le a$. Имаме, $a+b+c=10$, т.е. $b+c=10-a$. Од неравенството на триаголник $a<b+c$, следува $a<10-a$, од каде наоѓаме $a<5$. За $a=4$ важи $b+c=6$, од каде следува $b=4, c=2$ или $b=3, c=3$. Ако $a\le 3$, тогаш $b+c\ge 7$, што не е можно, бидејќи $b+c\le 2a=6$.

Според тоа, постојат два триаголници кои ги задоволуваат условите на задачата и должините на нивните страни се 4, 4, 2 или 4, 3, 3. ■

Задача 3. Определи ги должините на страните a,b и c на триаголникот ако $a+b=12cm, b+c=26cm$ и $a+c=32cm$.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$\begin{aligned} 2L &= 2(a+b+c)=2a+2b+2c \\ &=(a+b)+(b+c)+(c+a) \\ &=12+26+32=70cm \end{aligned}$$

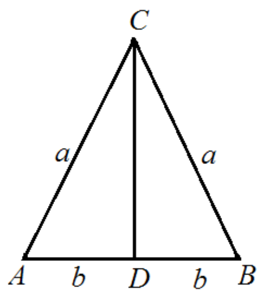
па затоа $L=35cm$. Според тоа,

$$a=L-(b+c)=35-26=9cm$$
$$b=L-(a+c)=35-32=3cm$$
$$c=L-(a+b)=35-12=23cm.$$

На прв поглед изгледа дека задачата е решена, меѓутоа од најдените вредности за страните a,b и c добиваме $a+b=12<23=c$, што противречи на неравенствата (1). Конечно, од добиената противречност следува дека не постои триаголник за кој се исполнети условите на задачата. ■

Во претходните задачи га искористивме неравенствата (1). Следните неколку задачи се однесуваат на рамнокракиот триаголник.

Задача 4. Во рамнокракиот триаголник ABC важи $\overline{CA}=\overline{CB}$ и точката D е средина на страната AB. Периметарот на триаголникот ABC е еднаков на $50cm$, а периметарот на триаголникот ACD е еднаков на ACD е еднаков на $40cm$. Определи ја должината на отсечката CD.

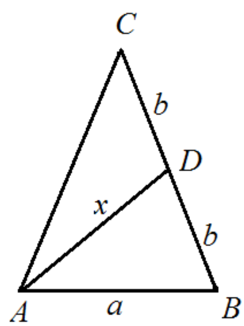


Решение. Да ги воведеме ознаките

$$\overline{CA}=\overline{CB}=a,\ \overline{AB}=2b \text{ и } \overline{CD}=c.$$

Тогаш од $\triangle ABC$ имаме $2a+2b=50$, т.е. $a+b=25$, а од $\triangle ADC$ добиваме $a+b+c=40$, па затоа $\overline{CD}=c=15cm$. ■

Задача 5. Периметарот на рамнокракиот триаголник ABC, ($\overline{CA}=\overline{CB}$) е еднаков на $50cm$. На кракот BC е повлечена тежишната линија AD. Определи ги должините на страните на $\triangle ABC$ ако периметарот на $\triangle ACD$ е за $4cm$ поголем од периметарот на $\triangle ABD$.



Решение. Да ги воведеме ознаките $\overline{CA}=\overline{CB}=2b$, $\overline{AB}=a$ и $\overline{AD}=x$. Бидејќи периметарот на $\triangle ACD$ е за $4cm$ поголем од периметарот на $\triangle ABD$ добиваме

$$2b+x+b=\ a+b+x+4,\text{ т.е. } 2b=a+4.$$

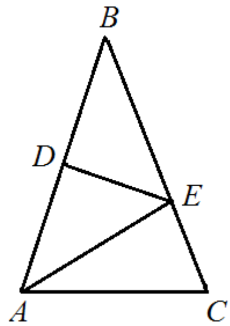
Сега од $\triangle ABC$ следува $2\cdot 2b+a=50$, па затоа $2(a+4)+a=50$, т.е. $a=14cm$. Значи, $2b=a+4=18cm$.

Според тоа, кај $\triangle ABC$ должината на кракот е $18cm$, а должината на основата е $14cm$. ■

Задача 6. Во $\triangle ABC$ важи $\overline{AB}=\overline{BC}$ и $\overline{AC}=10cm$. Од средината D на страната AB е повлечена нормалата DE на страната AB, која ја сече страната BC во точката E. Точката E е поврзана со темето A. Периметарот на $\triangle ABC$ е еднаков на $40cm$. Пресметај го периметарот на $\triangle AEC$.

Решение. Од $\triangle ABC$ следува

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=40$$



и како $\overline{AB}=\overline{BC}$ и $\overline{AC}=10cm$ добиваме $2\overline{AB}=30$, т.е. $\overline{AB}=15cm$. Понатаму, точката E припаѓа на симетралата на отсечката AB, па затоа $\overline{AE}=\overline{BE}$, од каде добиваме

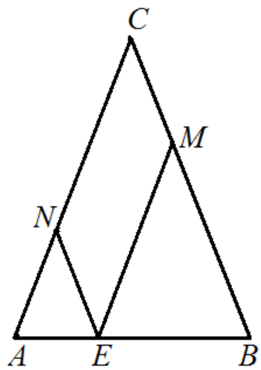
$$\overline{AE}+\overline{EC}=\overline{BE}+\overline{EC}=\overline{BC}=\overline{AB}=15cm.$$

Конечно, за периметарот на $\triangle AEC$ добиваме

$$L=\overline{AC}+\overline{AE}+\overline{EC}=10+15=25cm. \blacksquare$$

Задача 7. Даден е рамнокракиот триаголник ABC ($\overline{CA}=\overline{CB}$). Низ произволна точка E на страната се повлечени две прави кои се паралелни на краците на триаголникот. Едната права ја сече страната BC во точката M, а другата права ја сече страната AC во точката N. За колку се разликуваат периметрите на триаголникот ABC и четириаголникот $EMCN$.

Решение. Имаме $\measuredangle MEB=\measuredangle CAB$, како агли со паралелни краци, па затоа $\measuredangle MEB=\measuredangle MBE$. Според тоа, триаголникот EBM е рамнокрак и важи $\overline{ME}=\overline{MB}$. Аналогно се докажува дека $\overline{AN}=\overline{NE}$. Понатаму, според условот на задачата четириаголникот $EMCN$ е паралелограм и важи



$$\overline{EM}+\overline{MC}=\overline{CB} \text{ и } \overline{EN}+\overline{NC}=\overline{CA}.$$

Според тоа,

$$\overline{EM}+\overline{MC}+\overline{EN}+\overline{NC}=\overline{CA}+\overline{CB},$$

од каде заклучуваме дека периметарот на триаголникот ABC е поголем од периметарот на четириаголникот $EMCN$ и тоа за должината на страната AB. $\blacksquare$

На крајот од ова наше дружење ќе разгледаме две задачи за рамностран триаголник.

Задача 8. Страната AC на рамностраниот триаголник ABC е продолжена преку темето C до точката D. Точката D е поврзана со темето B.

Периметарот на триаголникот ABD е еднаков на $67cm$, а периметарот на триаголникот BCD е еднаков на $52cm$. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC.

Решение. Да ги воведеме ознаките $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}=a$, $\overline{CD}=x$ и $\overline{BD}$. Тогаш, од триаголникот ABD имаме

$$(a+x)+a+y=67, \text{ т.е. } 2a+(x+y)=67,$$

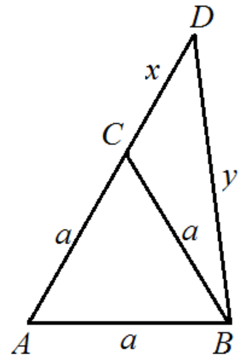
а од триаголникот BCD имаме

$$a+x+y=52, \text{ т.е. } x+y=52-a.$$

Според тоа,

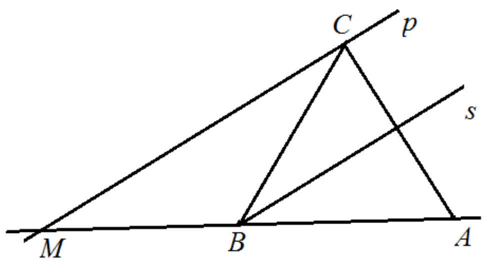
$$2a+52-a=67, \text{ т.е. } a=15cm.$$

Конечно, за периметарот на триаголникот ABC добиваме $L=3a=3\cdot 15=45cm$. ■



Задача 9. Низ темето C на рамностран триаголник ABC повлечена е права p паралелна на симетралата на $\measuredangle ABC$. Нека M е пресечната точка на правите p и AB. Ако $\overline{CM}=17cm$ и периметарот на триаголникот BMC е еднаков на $37cm$, пресметај го периметарот на триаголникот ABC.

Решение. Од $\measuredangle CMB=\measuredangle sBA$ како агли со паралелни краци. Понатаму, s е симетрала на $\measuredangle ABC$, па затоа $\measuredangle ABs=\measuredangle sBC$. Од друга страна $\measuredangle sBA=\measuredangle BCM$ како агли на трансферзала, $\measuredangle BCM=\measuredangle sBC=\measuredangle sBA=\measuredangle CMB$ што значи дека триаголникот BMC е рамнокрак. Според тоа, $2\overline{BC}+\overline{MC}=37$, па затоа $\overline{BC}=(37-17):2=10cm$, што значи дека периметарот на триаголникот ABC е еднаков на $3\cdot 10=30cm$. ■



На крајот од ова наше дружење ви предлагам самостојно да ја решите следнава задача.

Задача 10. Периметарот на паралелограмот е еднаков на $50cm$. Дијагоналите го делат паралелограмот на два пара складни триаголници, чии периметри се разликуваат за $5cm$. Определи ги должините на страните на паралелограмот.