ММО 1994

ЗАДАЧА 1. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_{1994}$ се цели броеви такви што

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{1994} = 1994^{1994},$$

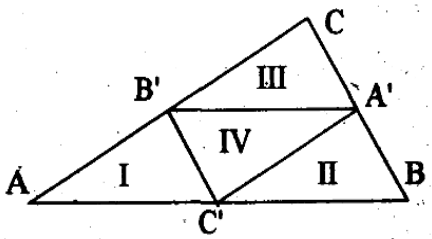
Да се определи остатокот при делење на $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{1994}^3$ со 6.

РЕШЕНИЕ. Бидејќи $a^3 - a = (a-1)a(a+1)$, јасно е дека за секој цел број a важи: $a^3 \equiv a (\text{мод } 6)$. Значи :

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{1994}^3 \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_{1994} \equiv 1994^{1994} (\text{мод } 6).$$

Бидејќи $1994 \equiv 2 (\text{мод } 6)$, доволно е да се определи остатокот при делење на 2^{1994} со 6. Но, $2^{2k+1} \equiv 2 (\text{мод } 6)$ и $2^{2k} \equiv 4 (\text{мод } 6)$, па бараниот остаток е 4.

ЗАДАЧА 2. Нека ABC е триаголник чии темиња имаат целобројни координати и во чија внатрешност постои точно една точка O со целобројни координати. Нека точката D е пресекот на правите BC и AO. Да се определи најголемата можна вредност на $\frac{\overline{AO}}{\overline{OD}}$.



РЕШЕНИЕ. Нека A', B', C' се средини на BC, AC и AB, соодветно. Внатрешната точка O со целобројни координати не може да се наоѓа во внатрешноста на триаголниците I,II или III. Нека, на пример, точката O се наоѓа во триаголникот I. При хомотетија со центар во A и коефициент 2, триаголникот I се пресликува во ABC, а точката O во точка O' со целобројна координата. Според тоа, ABC содржи две точки со целобројни координати, противречност.

Внатрешната точка O со целобројни координати не може да се наоѓа ниту во внатрешноста на триаголниците IV,V или VI. Нека, на пример, точката O се наоѓа во триаголникот IV. При хомотетија со центар во A' и коефициент 3, триаголникот IV се пресликува во $A'B'C'$, а точката O во точка O' со целобројна координата. Но, тоа значи дека ABC содржи две точки со целобројни координати што по претпоставка не е точно.

Од сето досега, јасно е дека бараниот однос е најмногу 5 (висините на триаголниците IV,V и VI се 1/6 од висините на ABC), и тој сооднос се достигнува на пример за триаголник: $A(0,0)$; $B(6,2)$; $C(6,3)$.

ЗАДАЧА 3.а) Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n>2)$ се ненегативни реални броеви и $x_1+x_2+\ldots+x_n=m$. Да се определи максималната вредност на сумата

$$S=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+x_2x_4+\ldots+x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n.$$

б) Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n>2)$ се ненегативни природни броеви и $x_1+x_2+\ldots+x_n=m$. Да се определи максималната вредност на сумата

$$S=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+x_2x_4+\ldots+x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n.$$

РЕШЕНИЕ. а) Означуваме $K=x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2$. Имаме:

$$m^2=(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2=K+2S.$$

Согласно врската меѓу геометриска, аритметичка и квадратна средина, за $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,n$, $i\neq j$, добиваме:

$$x_ix_j\leq\left(\frac{x_i+x_j}{2}\right)^2\leq\frac{x_i^2+x_j^2}{2},$$

од каде што по сумирање на сите вакви неравенства добиваме $S\leq\frac{n-1}{2}K$.

Со замената $K=m^2-2S$, од последното добиваме $S\leq\frac{(n-1)^2m}{2n}$, при што равенство се достига за $x_1=x_2=\ldots=x_n=\frac{m}{n}$.

б) Воведуваме ознака

$$S(x_1,x_2,\ldots,x_n)=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+x_2x_4+\ldots+x_2x_n+\ldots+x_{n-1}x_n.$$

Нека максималната вредност на S се достига за $x_1=a_1, x_2=a_2, \ldots, x_n=a_n$.

Да претпоставиме дека постојат два броја a_i и a_j $(i<j)$ за кои $a_i-a_j>2$. Тогаш:

$$S(a_1,a_2,\ldots,a_i+1,\ldots,a_j-1,\ldots,a_n)-S(a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_n)=a_j-a_i-1>2-1=1$$

што не е можно бидејќи максималната вредност за S се добива за $x_1=a_1$, $x_2=a_2, \ldots, x_n=a_n$. Ист заклучок се изведува и ако $i>j$. Значи, било кои два броја a_i се разликуваат најмногу за 1. Нека r од броевите се еднакви на $k+1$, а $n-r$ се еднакви на k, при што $0<r<n$. Имаме

$$m=a_1+a_2+\ldots+a_n$$

$$m=r(k+1)+(n-r)k$$

$$m=nk+r$$

Одтука е јасно (бидејќи $0\leq r<n$) дека r е остатокот при делење на m со n, а k е соодветниот количник.

Значи, максималната вредност на S се добива кога r од броевите x_i се $k+1$, а $n-r$ се k, каде што k е количникот, а r е остатокот при делење на m со n. Притоа, максималната вредност на S е

$$\frac{n(n-1)}{2}k^2+r(n-1)k+\frac{r(r-1)}{2}.$$

ЗАДАЧА 4. Дадени се 1994 точки од рамнината така што од кои било 100 од нив можат да се изберат 98 што можат да се покријат со круг (некои од точките може да се на границата на кругот) со дијаметар 1. Определете го најмалиот број на кругови со радиус 1, доволен за покривање на сите 1994 точки.

РЕШЕНИЕ. Ќе докажеме дека од условите на задачата следува дека од кои било четири точки барем две се на растојание помало или еднакво на 1. Нека A,B,C и D се кои било четири точки. Избираме произволно уште 96 точки. Заедно со првите четири, имаме 100 точки, од кои 98 можат да се покријат со круг со дијаметар 1. Но, како и да се изберат 98-те точки, барем две од точките A,B,C и D ќе бидат вклучени во нив. Бидејќи тие две точки можат да се покријат со круг со дијаметар 1, јасно е дека се на растојание помало или едакво на 1 (најголемото можно растојание меѓу две точки од круг е еднакво на дијаметарот на кругот). Значи од кои било четири точки барем две се на растојание помало или еднакво на 1.

Нека X е произволна дадена точка. Конструираме круг KX со центар во X и радиус 1. Ако кругот KX ги покрива сите точки, добиваме покривање со еден круг.

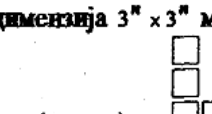
Да претпоставиме дека овој круг не ги покрива сите дадени точки. Нека Y е точка надвор од кругот KX. Конструираме круг KY со центар во Y и радиус 1. Ако круговите KX и KY ги покриваат сите точки, добиваме покривање со 2 круга.

Да претпоставиме дека не се сите точки покриени со двата круга KX и KY. Нека Z е точка надвор од круговите KX и KY. Конструираме круг KZ со центар во Z и радиус 1. Да претпоставиме дека постои точка W надвор од круговите KX,KY и KZ. Тогаш, точките X,Y,Z и W се четири точки така што растојанието меѓу кои било две од нив е строго поголемо од 1. Но, последното не е можно. Значи круговите KX,KY и KZ ги покриваат сите дадени точки. Добиваме дека, без оглед на распоредот на точките, доволни се најмногу три круга за покривање на точките.

Да докажеме дека постои случај во кој се потребни најмалку три круга. Нека три од точките (ги означуваме со R,S и T) се теминьа на рамностран триаголник со страна 3, а преостанатите точки се во кругот со дијаметар 1 и центар во R. Вака поставените точки ги задоволуваат условите на задачата. Притоа, кој било круг со радиус 1, може да покрие најмногу една од точките R, S и T, затоа што дијаметарот на круг со радиус 1 е 2, а растојанието меѓу R,S и T е 3. Значи, за покривање на R,S и T се потребни најмалку три круга со радиус 1, па, значи, за сите точки ќе бидат, исто така, потребни најмалку три круга.

Значи, бројот на круговите доволни за покривање е 1, 2 или 3.

ЗАДАЧА 5. Од дефектна табла со димензија $3^n \times 3^n$ $(n \in N, n > 1)$ е отстранет еден квадрат со димензија 1×1.

а) Докажи дека секоја дефектна табла со димензија $3^n \times 3^n$ може да се покрие со фигури од облик  (го нарекуваме облик 1) и  (го

нарекуваме облик 2). Фигурите што ја покриваат таблата не смеат да се прекриваат меѓусебно и не смеат да го минуваат работ на таблата. Исто така отстранетиот квадрат од таблата не смее да биде покриен.

б) Колку најмалку фигури од облик 2 мора да се искористат за покривање на таблата?

РЕШЕНИЕ. б) Бидејќи фигурата од облик 1 покрива три квадрати, ако се користат само такви фигури, тогаш се покрива број на квадрати делив со три. Но, бројот на квадрати на дефектна табла што треба да се покријат е $3^n \cdot 3^n - 1$, па, значи, само со фигури од облик 1 не е можно покривање.

Ќе докажеме дека една фигура од облик 2 е доволна.

Отстранетиот квадрат го означуваме со P.

Прво, ќе докажеме дека постои квадрат S со димензија 3×3 кој го содржи P така што над и под тој квадрат има по парен број редици, а, исто така, лево и десно од тој квадрат има по парен број на колони. Да го разгледаме квадратот C со димензија 3×3 во чиј центар се наоѓа P (ваквиот квадрат може да преоѓа преку рабовите на дефектната табла ако отстранетиот квадрат е блиску до работ). Бидејќи $3\cdot3-3$ е парен број, јасно е дека над и под квадратот C има вкупно парен број на редици. Ако од двете страни има по непарен број на редици со поместување на C за еден ред погоре или подолу (поради можната близина на работ, понекогаш само една од овие две насоки е можна) добиваме квадрат кој го содржи P така што над и под тој квадрат има по парен број на редици. Аналогна дискусија може да се спроведе и за колоните, па значи од квадратот C со најмногу едно поместување во правец горе-долу и едно поместување во правец лево-десно го добиваме бараниот квадрат S.

Јасно, со две фигури од облик 1 може да се покрие дел од таблата од облик  (дел од облик –), а исто така, и дел од таблата од облик  (дел од облик |). Значи, било кои две редици на таблата во кои не се содржи отстранетиот квадрат можат да се покријат со делови од облик – . На ваков начин ги покриваме сите редици над и под квадратот S. Ни остануваат три редици во кои се содржи S така што лево и десно од S има по парен број на колони. Колоните лево и десно од S ги покриваме со делови од облик |. Досега се искористени само фигури од облик 1, а за покри-вање останува само квадратот S. Постојат 9 можности за отстранетиот квадрат од C, но само следните три се битно различни:  ,  ,

Во секој од трите случаи е очигледно дека покривање на S може да се изврши со една фигура од облик 1 и една фигура од облик 2.

Значи, можно е покривање на таблата со користење на само една фигура од облик 2.